О собственных функциях структур, описываемых моделью «мелкой воды» на плоскости

К. А. ВОЛОСОВ
Московский государственный университет путей сообщений

УДК 517.9

Ключевые слова: система уравнений «мелкой воды», собственные функции, уравнение Гельмгольца.

Аннотация

Предложен новый способ решения системы уравнений «мелкой воды». Показано, что из уравнений модели «мелкой воды» следуют нелинейные уравнения типа Лиувилля, уравнения Гельмгольца и другие. Это даёт возможность строить собственные функции различных структур, образующихся в течениях в двухмерной ситуации. Построены точные и асимптотические решения в эллиптической области, имеющие особенность.

Abstract

K. A. Volosov, Eigenfunctions of structures described by the “shallow water” model in a plane, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 6, pp. 17—32.

We propose a new method for solving the “shallow water” equations. We show that from the equations of the “shallow water” model one obtains nonlinear Liouville type equations, Helmholtz equations, etc. This allows one to construct eigenfunctions of various structures that appear in the flow in the two-dimensional case. We obtain exact and asymptotic solutions in an elliptic domain with singularities.

1. Введение и основные результаты для несжимаемой жидкости

Уже более 20 лет прошло с тех пор, как В. П. Маслов [9] высказал гипотезу, что решения со слабыми точечными особенностями типа «квадратного корня» системы уравнений «мелкой воды» могут моделировать мезомасштабные вихри в атмосфере (возможно, тайфуны и циклоны), а траектория особенности — моделировать траекторию центра вихря («глáза тайфуна»). Таким решениям с необходимостью соответствуют бесконечные системы обыкновенных дифференциальных уравнений (цепочки). Эти цепочки связывают тейлоровские коэффициенты функций, задающих решения в окрестности особенности, и являются аналогом условий Гюгонио для ударных волн. В последней четверти

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 6, с. 17—32.

двадцатого столетия в работах [3, 6, 7, 14] изучались различные аспекты этой проблемы. В этих работах нет ответа на вопрос, существует ли решение в модели «мелкой воды» с указанной особенностью и свойствами. Одним из способов ответа на такой вопрос является построение точного решения с указанными свойствами. В данной работе предложен новый способ решения моделей «мелкой воды» (он пригоден и для уравнений Эйлера для несжимаемой невязкой жидкости) и показано, что из модели «мелкой воды» следует ряд нелинейных уравнений, среди них уравнение Гельмгольца.

Опишем исследуемую модель уравнений «мелкой воды»:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (\eta \mathbf{u}) = \mathbf{J}(x, y, t), \\ &\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} - \omega \mathbf{T}\mathbf{u} + \nabla \eta = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{u}$ — двумерный вектор скорости $\mathbf{u} = (u(x, y, t), w(x, y, t))$, $\eta(x, y, t) > 0$ — геопотенциал, $\mathbf{T} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ — матрица поворота на 90°, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\omega/2$ — частота Кориолиса на β-плоскости. $\mathbf{J}(x, y, t)$ — функция стока-источника. Система (1.1) возникает и в ряде других областей физики и механики как простейшая двухмерная эволюционная модель, описывающая нелинейные бездисперсионные невязкие процессы. Первое уравнение — уравнение неразрывности среды. Два последних уравнения представляют собой закон сохранения импульса среды с учётом вращения.

Известно стационарное решение системы «мелкой воды» в случае отсутствия вращения и при $\mathbf{J} = 0$:

$$\begin{aligned} &\eta(x, y) = \rho(r), \\ &u(x, y, t) = y u_0(r), \\ &w(x, y, t) = -x u_0(r). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь $\omega = 0$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\rho(r) = \int r u_0(r)^2\, dr$. Напомним, каким образом данное решение удовлетворяет системе (1.1). Первое уравнение системы не даёт никаких условий и удовлетворяется тождественно, а два вторых уравнения сводятся к одному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка $\rho'(r) = r u(r)^2$.

При наличии вращения $\omega \neq 0$ и $\mathbf{J} = 0$ нестационарные решения имеют вид

$$\begin{aligned} &\eta(x, y) = \rho(r), \\ &u(x, y, t) = (y - Y(t)) u_0(r) + X'(t), \\ &w(x, y, t) = (X(t) - x) u_0(r) + Y'(t). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь $r = \sqrt{(x - X(t))^2 + (y - Y(t))^2}$, $\rho(r) = \int (r u(r)^2 - r u(r)\omega)\, dr$, $X''(t) + \omega^2 X(t) = 0$, $Y(t) = X'(t)/\omega$. Эти решения получаются из стационарного решения преобразованием Галилея. Уравнение траектории точки $r = 0$ есть эллипс.

Пример 1. Пусть $\mathbf{J}(x, y, t) = 0$. Рассмотрим

$$S(x, y, t) = r^2 = (x - X(t))^2 + (y - Y(t))^2$$

и выберем функцию u_0 в виде

$$u_0(r) = f_1(r^2) + r f_2(r^2) = f_1(S) + \sqrt{S} f_2(S). \tag{1.4}$$

Эта функция имеет слабую особенность в точке $S = 0$ и содержит гладкую и негладкую части. Положим $f_1(r^2) = f_2(r^2) = \exp(-r^2)$. Тогда функция $\rho(r)$ имеет вид

$$\rho(r) = \left[\sqrt{S}\left\{\frac{\omega \exp(-S) - \exp(-2S)}{2}\right\} - \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\omega Erf(\sqrt{S}) + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}} Erf(\sqrt{2S})\right] + \\ + \left[\left(-\frac{3}{8} - \frac{S}{4}\right)\exp(-2S) + \exp(-S)\frac{\omega}{2}\right] + C_1.$$

Здесь в квадратных скобках выделены гладкая и негладкая части функции. При $r \to 0$ разложение имеет вид

$$\rho(r) = (1 - \omega)\frac{S}{2} + (2 - \omega)\frac{S^{3/2}}{3}.$$

Таким образом, при построении решения со слабой особенностью типа квадратного корня не возникает никаких дополнительных условий, кроме (1.4). Следует отметить, что построенные решения имеют следующее свойство: дивергенция скорости равна нулю. Поэтому решения описывают движение несжимаемой жидкости.

Из аналогии с примером 1 следует, что для построения точного не радиально симметричного решения следовало бы выбрать анзац в виде

$$\begin{aligned} \eta(x, y, t) &= \rho(x, y, t) + R(x, y, t) S(x, y, t)^{3/2}, \\ u(x, y, t) &= C_1(y - Y(t)) u(r) + X'(t) + U_1(x, y, t)\sqrt{S(x, y, t)}, \\ w(x, y, t) &= C_2(x - X(t)) w(r) + Y'(t) + U_2(x, y, t)\sqrt{S(x, y, t)}, \end{aligned}$$

где $r = \sqrt{(x - X(t))^2 + (y - Y(t))^2}$. Именно такой анзац решения используется при построении «цепочек».

Последние два уравнения системы (1.1) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \omega w - u_t - u u_x - w u_y, \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} &= -\omega u - w_t - u w_x - w w_y. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Условием разрешимости этих уравнений является условие равенства смешанных производных функции геопотенциала:

$$\eta(x, y, t)''_{xy} = \eta(x, y, t)''_{yx}. \tag{1.6}$$

Далее вводим функцию тока:

$$\begin{aligned} &u(x,y,t) = \Psi(x,y,t)'_y,\\ &w(x,y,t) = -\Psi(x,y,t)'_x,\\ &\operatorname{div}\mathbf{u} = u_x + v_y = 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

В [12] рассмотрена модель «мелкой воды» с нулевой дивергенцией вектора скоростей. Тогда из (1.6) следует уравнение равенства смешанных производных

$$\Psi'''_{yyt} + \Psi'''_{xxt} - \Psi'_x(\Psi'''_{yyy} + \Psi'''_{xxy}) + \Psi'_y(\Psi'''_{xyy} + \Psi'''_{yyy}) = 0. \tag{1.8}$$

Покажем, что в этом уравнении «спрятано» первое уравнение системы (1.1) (уравнение неразрывности). Если построено решение уравнения (1.8), то удовлетворяются два последних (скалярных) уравнения системы (1.1). Затем построенное решение подставляем в первое уравнение системы (1.1). Определим функцию $\mathbf{J}$, при которой будет удовлетворено первое уравнение системы (1.1) (остаток при построении асимптотического решения). В данном случае $\mathbf{J} = 0$. Как и в (1.3), выберем $Y[t] = X'[t]/\omega$. Тогда, как и в приведённых выше примерах, точка $\phi = 0$, $\psi = 0$ в исходных переменных x, y, t движется по эллипсам $x = X(t)$, $y = Y(t)$, где $X(t)$ удовлетворяет уравнению $X''(t) + \omega^2 X(t) = 0$. Ниже доказано, что возникают два нелинейных дифференциальных уравнения с интересными свойствами.

Теорема 1. *Пусть решение переопределённой системы*

$$L_1\Phi = ((\Phi'_\phi)^2 - (\Phi'_\psi)^2)\Phi''_{\phi\psi} + \Phi'_\psi\Phi'_\phi(\Phi''_{\psi\psi} - \Phi''_{\phi\phi}) = 0, \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\rho}{\partial\phi} = (-\omega + \Phi''_{\psi\psi})\Phi'_\phi - \Phi'_\psi\Phi''_{\phi\psi},\\ &\frac{\partial\rho}{\partial\psi} = (-\omega + \Phi''_{\phi\phi})\Phi'_\psi - \Phi'_\phi\Phi''_{\phi\psi} \end{aligned} \tag{1.10}$$

и необходимого условия разрешимости $\rho_{\phi,\psi} = \rho_{\phi,\psi}$

$$L_2\Phi = -\Phi'''_{\psi\psi\psi}\Phi'_\phi + \Phi'_\psi\Phi'''_{\phi\psi\psi} - \Phi'_\phi\Phi'''_{\phi\phi\psi} + \Phi'_\psi\Phi'''_{\phi\phi\phi} = 0, \tag{1.11}$$

где $\eta(x,y,t) = \rho(\phi,\psi)|_{\phi=x-X(t),\ \psi=y-Y(t)}$, $Y[t] = X'[t]/\omega$, $X''(t) + \omega^2 X(t) = 0$, *имеет вид*

$$\begin{aligned} &\Psi(x,y,t) = -xY'(t) + yX'(t) + \Phi(\phi,\psi)|_{\phi=x-X(t),\ \psi=y-Y(t)},\\ &\Phi(\phi,\psi) = \frac{S(\phi,\psi)^{\alpha+1}}{1+S(\phi,\psi)^\alpha}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Тогда при любых $\alpha \in \mathbb{R}$ *функция* $S(\phi,\psi)$ *является решением двух однородных уравнений («скрытых квазиинвариантов»)*

$$\begin{aligned} &L_1 S(\phi,\psi) = S''_{\phi\psi}((S'_\phi)^2 - (S'_\psi)^2) + S'_\phi S'_\psi(S''_{\psi\psi} - S''_{\phi\phi}) = 0,\\ &L_2 S(\phi,\psi) = -S'''_{\psi\psi\psi}S'_\phi + S'_\psi S'''_{\phi\psi\psi} - S'_\phi S'''_{\phi\phi\psi} + S'_\psi S'''_{\phi\phi\phi} = 0. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Функции скорости вычисляются по формулам (1.7), *производные функции геопотенциала вычисляются по формулам* (1.10), *первое уравнение в системе* (1.1) *удовлетворяется тождественно при* $\mathbf{J}(x,y,t) = 0$.

Приведённые в теореме «скрытые квазиинварианты» — следствия переопределённой системы, которая возникает из уравнения равенства смешанных производных после подстановки решения в виде рациональных функций (дробей). Очевидно, что дифференциальные операторы в уравнении (1.13) $L_1 S(\phi, \psi) = 0$ и уравнении (1.9) совпадают. Дифференциальные операторы в уравнении (1.13) $L_2 S(\phi, \psi) = 0$ и уравнении (1.11) тоже совпадают. Слабая особенность может быть любой и движется по эллипсам.

Построенное семейство решений имеет свойство, которое позволяет строить усложняющиеся решения (одевать их).

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{J}(x, y, t) = 0$. *Функция* $S(\phi, \psi) = \Lambda(H(\phi, \psi))$, *где* $\Lambda(z)$ — *произвольная непрерывная, трижды дифференцируемая функция, является одновременно решением переопределённой системы двух однородных уравнений, приведённых в теореме* 1

$$L_1 S(\phi, \psi) = 0,$$
$$L_2 S(\phi, \psi) = 0.$$

Тогда функция $H(\phi, \psi)$ *является решением двух уравнений (дифференциальные операторы совпадают)*

$$L_1 H(\phi, \psi) = 0, \tag{1.14}$$
$$L_2 H(\phi, \psi) = 0. \tag{1.15}$$

Доказательство приведено в разделе 3.

Вспомогательная усложненная (одетая) функция имеет вид

$$\Phi(\phi, \psi) = \frac{\Lambda(H(\phi, \psi))^{\alpha+1}}{1 + \Lambda(H(\phi, \psi))^{\alpha}} \tag{1.16}$$

и является решением уравнений (1.9), (1.11), а функция тока

$$\Psi(\phi, \psi, t) = -xY'(t) + yX'(t) + \frac{\Lambda(H(\phi, \psi))^{\alpha+1}}{1 + \Lambda(H(\phi, \psi))^{\alpha}} \tag{1.17}$$

является точным решением системы (1.1), (1.7).

Усложняя точное решение, можно положить, что новая функция S в теоремах 1, 2 равна

$$S(\phi, \psi) = \Phi(\phi, \psi) = \frac{\Lambda(H(\phi, \psi))^{\alpha+1}}{1 + \Lambda(H(\phi, \psi))^{\alpha}}. \tag{1.18}$$

Новая вспомогательная усложненная (одетая) функция $\Phi(\phi, \psi)$ снова является решением уравнений (1.9), (1.11). Это даёт возможность построить новую функцию тока, которая является точным решением системы (1.1), (1.7). Эта процедура одевания может повторятся бесконечно. Константа $\alpha \in \mathbb{R}$ здесь любая. Функции скорости вычисляются по формулам (1.7), производные функции геопотенциала вычисляются по формулам (1.5), первое уравнение в системе (1.1) удовлетворяется тождественно.

Основная роль в доказательстве, приведённом в разделе 3, отводится свойству однородности полученных уравнений. Конкретные решения различаются оценками роста на бесконечности и гладкостью (наличием производных).

Пример 2. 1°. В данном примере показано, как усложняется (одевается) точное решение. Этот процесс может быть повторен бесконечное число раз. Возможно, этот процесс связан с усложнением (развитием) вихрей. Для построения вещественного решения необходимо рассматривать положительные функции S, если знаменатель степени $\alpha = n/m$ чётный. Рассмотрим растущую на бесконечности функцию. В частности, представителями семейства функций, с которых можно стартовать, могут быть

$$S(\phi,\psi) = 1 - \exp\{-H(\phi,\psi)\}, \quad H(\phi,\psi) = \left(\frac{\phi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\psi}{a}\right)^2.$$

Далее вычисления идут по формулам (1.16)—(1.18).

2°. В другом варианте при построении точного решения можно выбрать ограниченную на бесконечности функцию $H = R$:

$$S(\phi,\psi) = 1 - \exp\{-H(\phi,\psi)\}, \quad H(\phi,\psi) = \sqrt{\left(\frac{\phi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\psi}{a}\right)^2}.$$

Если $\alpha = n/m$, где n, m — целые числа, и знаменатель чётный, то при построении точного вещественного решения следует выбрать неотрицательную функцию S. Если знаменатель нечётный, то при построении точного вещественного решения можно брать отрицательную функцию S.

На основе свойств, изложенных в теоремах 1, 2, можно построить асимптотическое решения системы (1.1) в эллиптической области $(\phi/a)^2 + (\psi/b)^2 = R^2$ с небольшим эксцентриситетом $\mu = \varepsilon^2 = 1 - (b/a)^2$. Другими словами, следует понять, какие радиально несимметричные возмущения выдерживают построенные решения (то есть устойчивы в некотором смысле относительно их).

Введём обобщённые полярные координаты

$$\phi = aR\cos\theta, \quad \psi = bR\sin\theta, \quad R = \sqrt{\left(\frac{\phi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\psi}{b}\right)^2}.$$

Теорема 3. *Пусть функции $P(R) = M(R^2)$, $Z(R,\theta)$, $Q(R,\theta)$ удовлетворяют переопределённой системе (шесть уравнений на три функции)*

$$\begin{aligned}
&L_{1\mu}P(R) = (P'_\theta)^3 + RP'_\theta P'_R(P''_{\theta\theta} - R^2P''_{RR}) + P''_{R\theta}R(R^2(P'_R)^2 - (P'_\theta)^2) = 0,\\
&L_{2\mu}P(R) = RP'_R(P'''_{\theta\theta\theta} + RP''_{R\theta} + R^2P'''_{RR\theta}) +\\
&\quad + P'_\theta(2P''_{\theta\theta} + RP'_R - RP'''_{R\theta\theta} - R^2P''_{RR} - R^3P'''_{RRR}) = 0,\\
&L_{11\mu}Z(R,\theta) = \sin(2\theta)(P'_R)^2 - 2P''_{RR}Z'_\theta + 2P'_RZ''_{R\theta} = 0,\\
&L_{21\mu}Z(R,\theta) = R\sin(2\theta)P'_R(-P'_R + RP''_{RR}) + Z'_\theta(P'_R - RP''_{RR} - R^2P'''_{RRR}) +\\
&\quad + Z'''_{\theta\theta\theta}P'_R + RP'_RZ''_{R\theta} + R^2Z'''_{RR\theta}P'_R = 0
\end{aligned} \tag{1.19}$$

и уравнениям для следующей поправки (порядка μ^2)

$$
\begin{aligned}
&L_{12\mu}Q(R,\theta) = 2R^2(P'_R)^2Q''_{R\theta} - 2R^2P'_RP''_{RR}Q'_\theta + \\
&\quad + \{2RP'_RZ'_\theta(\cos 2\theta P'_R + R\cos\theta^2P''_{RR}) + P'_R(R\sin(2\theta)P'_R + 2Z'_\theta)Z''_{\theta\theta} + \\
&\quad + R^2(3\sin(2\theta)(P'_R)^2 - 2P''_{RR})Z'_\theta Z'_R - 2R^2P'_R(\cos\theta^2P'_R - 2Z'_R)Z''_{R\theta} - \\
&\quad - 2R^2P'_RZ'_\theta Z''_{RR}\} = 0, \\
&L_{22\mu}Q(R,\theta) = -2RP'_RQ'''_{\theta\theta\theta} - 2R^2P'_RQ''_{R\theta} - 2R^3P'_RQ'''_{RR\theta} + \\
&\quad + 2RQ'_\theta(-P'_R + RP''_{RR} + R^2P'''_{RRR}) + \\
&\quad + \{(R(1+3\cos 2\theta)P'_R - 2R^2(\sin\theta^2P''_{RR} + R\cos\theta^2P'''_{RRR}))Z'_\theta + \\
&\quad + 4(R\sin 2\theta P'_R - Z'_\theta)Z''_{\theta\theta} + 2RP'_R\sin\theta^2Z'''_{\theta\theta\theta} - \\
&\quad - 2R(-2R\sin 2\theta P'_R + R^2\sin 2\theta P''_{RR} + Z'_\theta + Z'''_{\theta\theta\theta})Z'_R + \\
&\quad + R^2((1-5\cos 2\theta)P'_R - 2Z'_R)Z''_{R\theta} + 2R(-R\sin 2\theta P'_R + Z'_\theta)(Z'''_{R\theta\theta} + R''_{RR}) + \\
&\quad + R^3(-2Z'_RZ'''_{RR\theta} + 2P'_R\cos\theta^2Z'''_{RR\theta} + 2Z'_\theta Z'''_{RRR})\} = 0.
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

Тогда функции-компоненты вектора скорости u, w, определённые в (1.7), *где*

$$
\begin{aligned}
&\Psi(x,y,t) = -xY'(t) + yX'(t) + \Phi(\phi,\psi)|_{\phi=x-X(t),\ \psi=y-Y(t)}, \\
&\Phi(\phi,\psi) = \frac{S(\phi,\psi)^{\alpha+1}}{1+S(\phi,\psi)^\alpha}, \\
&S(\phi,\psi) = P(R) + \mu Z(R,\theta) + \mu^2Q(R,\theta) + \\
&\quad + O(\mu^3)|_{R=\sqrt{(\phi/a)^2+(\psi/b)^2},\ \theta=\mathrm{arctg}((b\psi)/(a\phi))},
\end{aligned}
$$

есть вещественное асимптотическое решение системы (1.1), *удовлетворящее ей с точностью $O(\mu^3)$ в замкнутой области, если $P(R) = M(R^2)$ растёт при больших R, и во всём пространстве, если эта функция является ограниченной.*

Теорема 4. *Решение переопределённой системы* (1.19), (1.20) *имеет вид*

$$
\begin{aligned}
&Z(R,\theta) = C_0 + \left(C_1\cos\theta + \frac{R}{4}\cos(2\theta) + C_2\sin\theta\right)P'_R, \\
&Q(R,\theta) = C_5 + \frac{1}{64R}\{(-16((C_1^2 - C_2^2)\cos 2\theta + 2C_1C_2\sin 2\theta) + \\
&\quad + R^2(8\cos 2\theta - \cos 4\theta) + \\
&\quad + R(-8(-8C_3\cos\theta + C_1\cos 3\theta - 8C_4\sin\theta + C_2\sin 3\theta)))P'_R\} + \\
&\quad + \frac{1}{64}\{(16((C_1^2 - C_2^2)\cos 2\theta + 2C_1C_2\sin 2\theta) + R^2\cos 4\theta + \\
&\quad + R(16\cos 2\theta(C_1\cos\theta + C_2\sin\theta)))P''_{RR}\},
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

где $P(R)$ — произвольная трижды дифференцируемая функция из $\mathbb{C}^3$.

Доказательство приведено в разделе 3.

Теорема 5. *Существуют функции* $P(R) = M(R^2)$ *и набор констант* $C_0 = 0$, $C_5 = 0$, C_i, $i = 1, 4$, *такой что вычисленная в теореме* 3 *неотрицательная функция* S *имеет один нуль* $S = 0$ *тогда и только тогда, когда* $R = 0$.

Пример 3. Асимптотическое решение тоже одевается. Однако здесь возникают трудности. Рассмотрим систему (1.19):

$$\begin{aligned}
&L_{11\mu}Z(R,\theta) = \sin(2\theta)(\operatorname{sh} R)^2 - 2\operatorname{ch} R Z'_\theta + 2\operatorname{sh} R Z''_{R\theta} = 0,\\
&L_{21\mu}Z(R,\theta) = (-R\operatorname{ch} R + \operatorname{sh} R - R^2\operatorname{sh} R)Z'_\theta + \operatorname{sh} R(z'''_{\theta\theta\theta} + R^2\operatorname{ch} R\sin(2\theta) -\\
&\quad - R\operatorname{sh} R\sin(2\theta) + RZ''_{R\theta} + R^2 Z'''_{RR\theta}) = 0. \qquad (1.22)
\end{aligned}$$

Если выбрать растущую при больших R функцию $P(R)$, решение системы (1.22) Z имеет вид

$$\begin{aligned}
&P(R) = -1 + \operatorname{ch} R,\\
&Z(R,\theta) = \operatorname{sh} R\left(C_1\cos\theta + \frac{R}{4}\cos(2\theta) + C_2\sin\theta\right).
\end{aligned}$$

Однако следующая поправка Q имеет особенность при $R = 0$. Она не возникает, если выбрать функцию $P(R) = -1 + \operatorname{ch} R^2$. Следовательно, функция, приведённая в пункте 2° примера 2, для построения асимптотического решения непригодна. Расчёты показывают, что для растущей по R функции теорема 5 верна локально в замкнутой области. На расстоянии $O(1)$ возникают области-лакуны (лепестки), в которых $S < 0$. Следовательно, асимптотическое решение, построенное по теоремам 3, 4 в этих областях комплексное. Чтобы избежать этого, можно, как в [12], выделить некоторую узкую область вдоль границы этих областей и с помощью процедуры «разбиения единицы» склеить функцию S с константой. Ниже приведена гипотеза автора.

При реализации процедуры одевания надо иметь в виду следующее. Если $\alpha = n/m$, где n, m — целые числа, и знаменатель чётный, то для построения вещественного устойчивого относительно нерадиально симметричного асимптотического решения следует выбрать неотрицательную ограниченную функцию $P(R) = M(R^2)$. Если знаменатель $\alpha = n/m$ нечётный, то при построении вещественного асимптотического решения можно брать отрицательную функцию $P(R) = M(R^2)$.

Следующим результатом данной работы является новая процедура «расщепления» уравнения (1.8). Как следствие, становится возможным построение собственных функций и вычисление собственных значений вихрей в модели (1.1) или в моделях, описываемых уравнениями Эйлера.

Теорема 6. *Уравнение* (1.8) *эквивалентно системе*

$$F(x,y,t) = \Delta\Psi,$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\phi\phi} + \frac{\partial^2}{\partial\psi\psi} -$$

оператор Лапласа и

$$F'_t + \Psi'_y F'_x - \Psi'_x F'_y = 0 \tag{1.23}$$

(*уравнение Лиувилля*).

Заметим, что в терминах скоростей уравнение (1.8) имеет вид

$$F'_t + uF'_x + wF'_y = 0, \tag{1.24}$$

что совпадает с известным в механике жидкости и газа уравнением «вмороженности» в поле скоростей. Уравнение Лиувилля возникает при исследовании вращательных движений жидкости [2]. Отметим, что факт, аналогичный изложенному в теореме 4 справедлив и для уравнений Эйлера для несжимаемой жидкости без вязкости. Вывод о существовании факта, изложенного в теореме, был сделан после анализа «скрытого квазиинварианта» — это эвристический подход к построению нетривиальных точных решений, развитый в [5,15,16]. Ещё в [4] автор выписал инфинитезимальные операторы соответствующих групп преобразований вырождающегося квазилинейного уравнения [10]. Однако затем наступило разочарование в этом методе, так как все полученные группы оказались простыми преобразованиями сдвига, растяжения и т. п. Отметим, что термин «скрытая симметрия» введён в [11]. Поиск «скрытых квазиинвариантов», с помощью которых можно было бы построить нетривиальные новые точные решения, привел к результатам этой работы. С точки зрения автора, имеющего опыт поиска частичных симметрий, предложенный эвристический подход быстрее приводит к успеху.

Заметим, что система уравнений на траекториях для (1.24) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{y} &= w, \\ \dot{x} &= u, \\ \dot{t} &= 1. \end{aligned}$$

Здесь точкой обозначена производная по новому времени вдоль траекторий, которое совпадает со старым временем t. Однако решить эту систему и найти общее решение уравнения первого порядка в частных производных нелегко.

В теореме 5 построено конкретное семейство решений.

Теорема 7. *Предположим, что функции F, Ψ имеют вид*

$$\begin{aligned} &F(x,y,t) = -\lambda W(f(\phi,\psi))|_{\phi=x-X(t),\ \psi=y-Y(t)}, \\ &\Psi(x,y,t) = -xY'(t) + yX'(t) + Z(f(\phi,\psi))|_{\phi=x-X(t),\ \psi=y-Y(t)}, \end{aligned} \tag{1.25}$$

$W(f(\phi,\psi))$, $Z(f(\phi,\psi))$ — *непрерывные, дважды дифференцируемые функции. Тогда уравнение* (1.8) *удовлетворяется тождественно и функция f удовлетворяет обобщению уравнения Гельмгольца*

$$L_\Gamma f = \left(\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\right) Z(f) + \lambda W(f) = 0. \tag{1.26}$$

Доказательство следует из подстановки (1.25) в (1.23). Заметим только, что $W(f)$ — новая произвольная функция.

Выражения для производных функции $\eta(x,y,t) = \rho(x - X(t), y - Y(t), t)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\rho(\phi,\psi,t)}{\partial\phi} &= \omega Y'(t) - X''(t) - \omega f'_\phi + f''_{\psi\psi} f'_\phi - f'_\psi f''_{\phi\psi},\\
\frac{\partial\rho(\phi,\psi,t)}{\partial\psi} &= -\omega X'(t) - Y''(t) - \omega f'_\psi - f''_{\phi\psi} f'_\phi + f'_\psi f''_{\phi\phi}.
\end{aligned}$$

Первое уравнение системы (1.1) имеет вид

$$\begin{aligned}
&-\mathbf{J} + \frac{\partial\rho(\phi,\psi,t)}{\partial t} + (\omega Y'(t) - X''(t)) f'_\psi +\\
&\qquad + \{(f'_\phi)^2 - (f'_\psi)^2\} f''_{\phi\psi} + (\omega X'(t) + Y''(t) + f'_\psi (f''_{\psi\psi} - f''_{\phi\phi})) f'_\phi = 0. \qquad (1.27)
\end{aligned}$$

В силу необходимости выполнения равенств смешанных производных функции η и, следовательно, функции ρ по всем переменным,

$$\eta(x,y,t)''_{xt} = \eta(x,y,t)''_{tx}, \quad \eta(x,y,t)''_{ty} = \eta(x,y,t)''_{yt},$$

получим соотношения

$$\omega Y'(t) - X''(t) = 0, \quad \omega X'(t) + Y''(t) = 0.$$

Это те же самые соотношения, что и в (1.3), они описывают семейство эллипсов. Это траектории движения структур. Таким образом, отделяются слагаемые, содержащие время $\frac{\partial\rho(\phi,\psi,t)}{\partial t} = 0$, $\mathbf{J} = 0$, и остаётся уравнение $L_1 f = 0$. Этот нелинейный дифференциальный оператор определён в теореме 1.

Рассмотрим свойства операторов, связанных с данной задачей.

Теорема 8. *Пусть $K = [H, \Delta] = (H\Delta - \Delta H)$ — коммутатор операторов Лапласа Δ и гамильтонова поля H,*

$$H = f'_\psi \frac{\partial}{\partial\phi} - f'_\phi \frac{\partial}{\partial\psi}.$$

Тогда на функции $Z(f(\phi,\psi))$

$$KZ(f) = 2Z''(f)[L_1 f] + Z'(f)[L_2 f] = 0, \qquad (1.28)$$

если верны соотношения

$$L_1 f = 0, \quad L_2 f = 0.$$

Если для произвольной дважды дифференцируемой функции $M(\phi,\psi)$ справедливо равенство $KM(\phi,\psi) = 0$, то верны соотношения

$$L_\Gamma f = \mathrm{const}, \quad L_1 f = 0,$$

что эквивалентно равенству

$$L_2 f = H(\Delta f + \lambda W(f)) = 0.$$

Доказательство приведено в разделе 3.

Теорема 9. *Пусть функция $f(\phi,\psi)$ является решением переопределённой системы*

$$L_1 f = 0, \quad L_2 f = 0. \tag{1.29}$$

Тогда существует единственный оператор D, такой что

$$K = (H\Delta - \Delta H) = DH = \left(A_1 \frac{\partial}{\partial\phi} + A_2 \frac{\partial}{\partial\psi} + A_3\right) H = 0,$$

где

$$\begin{gathered} A_1 = -\frac{2f''_{\phi\psi}}{f'_\psi}, \quad A_2 = -\frac{2f''_{\phi\psi}}{f'_\phi}, \\ A_3 = -\frac{1}{f'_\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}(\Delta f) + \frac{f''_{\phi\psi}}{(f'_\psi)^2 f'_\phi}\frac{\partial}{\partial\psi}((f'_\psi)^2 + (f'_\phi)^2). \end{gathered} \tag{1.30}$$

Доказательство приведено в разделе 3.

Анализируя соотношение (1.27), получим, что, в частности, в линейном случае $Z(f) = f$, $W(f) = f$ коммутатор обращается в нуль: $KZ(f) = 0$. Тогда уравнением на собственные функции является классическое уравнение Гельмгольца

$$f''_{\phi\phi} + f''_{\psi\psi} + f(\phi,\psi)\lambda = 0.$$

Решение первой краевой задачи с краевым условием $f = 0$ в эллиптической области $(\phi/a)^2 + (\psi/b)^2 = 1$, $a > b$, такой задачи проведено в [11] (см. также [1]). Замена

$$\begin{gathered} \phi = d\operatorname{ch}\alpha\cos\varphi, \quad \psi = d\operatorname{sh}\alpha\sin\varphi, \quad d = a\varepsilon, \quad \varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha^* = \operatorname{arch}\varepsilon^{-1}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \end{gathered}$$

даёт уравнение в эллиптических координатах

$$\mu''_{\alpha\alpha} + \mu''_{\varphi\varphi} + a\lambda(\operatorname{ch}^2\alpha - \cos^2\varphi)\mu = 0, \quad f(\phi,\psi) = \mu(\alpha,\varphi)|_{\alpha=\alpha(\phi,\psi),\ \varphi=\varphi(\phi,\psi)}.$$

Здесь $\varepsilon = \sqrt{1-(b/a)^2}$ — эксцентриситет эллипса. Как показано в [1], при переходе к радиальному случаю $\varepsilon \to 0$ приведённая замена вырождается, поэтому там проведён аккуратный асимптотический анализ. Здесь кратко приведены его результаты.

Метод разделения переменных приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с двумя параметрами. Решениями этих уравнений являются модифицированные функции Матье. Как показано в [1, 8], такой формальный подход с априорным заданием одного из параметров на основе общих соображений приводит к ошибке. Поэтому в [1] введены обобщённые полярные координаты (1.18). Далее в [1] применялся вариационный подход. Построены собственные значения и собственные функции в эллиптической области. Главные члены асимптотики при малом параметре ε выписываются и имеют вид

$$\lambda_1 = \gamma_{10}^2 \frac{1/a^2 + 1/b^2}{2}, \qquad f_1 = J_0(\gamma_{10} R),$$
$$\lambda_2^{(c)} = \gamma_{11}^2 \frac{3/a^2 + 1/b^2}{2}, \quad f_2^{(c)} = J_1(\gamma_{11} R)\cos\theta,$$
$$\lambda_2^{(s)} = \gamma_{11}^2 \frac{1/a^2 + 3/b^2}{2}, \quad f_2^{(s)} = J_1(\gamma_{11} R)\sin\theta,$$

где $\gamma_{10} = 2{,}4048$, $\gamma_{11} = 3{,}8317$ — корни функций Бесселя $J_0(\gamma_{10}) = 0$, $J_1(\gamma_{11}) = 0$. Индексы s, c введены в [1] и соответствуют несимметричному (нечётному) и симметричному (чётному) семействам. Очевидно, что главный член асимптотики $J_0(\gamma_{10} R)$ является радиально симметричной функцией. Таким образом, построено точное решение двух последних уравнений исходной системы «мелкой воды» (1.1) и главный член асимптотического решения по малому экцентриситету первого уравнения системы (1.1) и всей системы (1.1).

В силу того что главный член асимптотики является радиально симметричной функцией, уравнение $L_1 f = 0$ в главном порядке выполнено. Функция стока-источника (остаток в уравнении (1.25)) имеет оценку

$$J = \varepsilon^2 8 (G'(R^2))^3 \phi \frac{\psi}{a^2 (1-\varepsilon^2)^2}.$$

Таким образом, первое уравнение системы (1.1) приближённо выполняется с точностью $O(\varepsilon^2)$. Явный вид следующей поправки вычислен в [1, формулы (3.2)—(3.4)].

Гипотеза. Возможно, что некоторые вихри ведут себя как несжимаемая жидкость в замкнутой области, которая выделена собственными функциями. Вне этой области жидкость сжимаемая.

Пример 4. Поскольку не известно, каким образом будет «размазана» та или иная особенность при введении в модель вязкости, приведём пример решения с логарифмической особенностью и суперпозицией эллиптического (с зависящими от времени полуосями) и радиального решения:

$$\Psi(\phi,\psi) = -xY'(t) + yX'(t) + C_0 \frac{\phi^2 + \psi^2 cy(t)}{1 + cy(t)} - \\ - C_1 \ln(\phi^2 + \psi^2) + C_2 + C_3(\phi^2 + \psi^2)|_{\phi = x - X(t),\ \psi = y - Y(t)},$$

$cy(t)$ — произвольная, имеющая одну производную функция, моделирующая эллипс (если она положительная). Если эта функция отрицательная, то имеем гиперболы. Таким образом, эта функция имеет особенность в точке $1 + cy(t) = 0$. Тогда возникает «эффект»: решение существует конечное время. В первое уравнение системы (1.1) входит свободная функция стока-источника.

2. Сжимаемая жидкость

Покажем, как происходит расщепление уравнения (1.6) в случае сжимаемой жидкости. Вводим функцию тока (в этом разделе, как для сжимаемой жидкости)

$$\begin{aligned}
&u(x,y,t) = \Psi(x,y,t)'_y,\\
&w(x,y,t) = \Psi(x,y,t)'_x,\\
&\operatorname{div}\mathbf{u} = u_x + v_y = 2\Psi(x,y,t)''_{xy}.
\end{aligned}$$

Тогда, если ввести переменную $F(x,y,t) = \Psi''_{yy} - \Psi''_{xx}$, уравнение равенства смешанных производных (1.6) имеет вид

$$F'_t + \Psi'_y F'_x + \Psi'_x F'_y + 2\Psi''_{xy}(\omega - F(x,y,t)) = 0.$$

В терминах скоростей функция $F = -\operatorname{curl}\mathbf{u}$ — z-компонента ротора вектора скорости. Решение уравнения (1.6) даёт решение задачи Коши для волнового (гиперболического) уравнения:

$$\begin{aligned}
&F(x,y,t) = \omega,\\
&\Psi(x,y,t) = -(2 + A(t))\omega\phi^2 - A(t)\omega\frac{\psi^2}{4} + f(\phi,\psi)\Big|_{\phi=x-X(t),\ \psi=y-Y(t)},\\
&f''_{\psi\psi} - f''_{\phi\phi} = 0.
\end{aligned}$$

Здесь нет решения со свойствами, похожими на изложенные в разделе 1.

3. Краткие доказательства утверждений и пояснения

Доказательство теоремы 1. После подстановки функции (1.12) в уравнение (1.11) получим соотношение

$$2\alpha(-1 - \alpha - S^\alpha + S^\alpha)L_1 S + S(1 + S^\alpha)(1 + \alpha + S^\alpha)L_2 S = 0.$$

После подстановки функции (1.12) в уравнение (1.9) получим соотношение

$$S^{3\alpha}(1 + \alpha + S^\alpha)^3 L_1 S = 0,$$

откуда следует (1.13). Очевидно, что полученные соотношения верны для любого α. □

В доказательстве теоремы 2 основную роль играет свойство однородности.

Доказательство теоремы 3. После подстановки анзаца решения (1.12) в уравнения (1.13), записанные в обобщённых полярных координатах (1.18), получим систему (1.19), (1.20). Первые два уравнения (1.19) в каждом слагаемом содержат производные по θ, которые равны нулю. Так как функция

$P(R)$ зависит только от R, они удовлетворяются тождественно. Очевидна замена $Z'_\theta(R,\theta) = Z_1(R,\theta)$. Решение первого уравнения для функции $Z(R,\theta)$ имеет вид

$$Z(R,\theta) = C_0 + \frac{1}{2}P'_R \int (2C\Theta(\theta) - R\sin(2\theta))\,d\theta. \tag{3.1}$$

После подстановки (3.1) во второе уравнение (1.19) для функции $Z(R,\theta)$ получаем уравнение на функцию $C\Theta(\theta)$ и его решение:

$$C\Theta(\theta) + C\Theta''(\theta) = 0,$$
$$C\Theta(\theta) = C_2\cos\theta - C_1\sin\theta.$$

Отсюда следует решение (1.21),

$$Z(R,\theta) = C_0 + \left(C_1\cos\theta + \frac{R}{4}\cos(2\theta) + C_2\sin\theta\right) P'_R.$$

Подставим функцию Z в уравнение для поправки Q, получим два уравнения (1.20):

$$L_{12\mu}Q(R,\theta) = 0, \quad L_{12\mu}Q(R,\theta) = 0.$$

Первое из этих уравнений более простое и после замены $Q'_\theta(R,\theta) = Q_1(R,\theta)$ интегрируется. В полученное выражение входит неизвестная функция $Ck(\theta)$. После подстановки вычисленных функций в уравнение

$$L_{12\mu}Q(R,\theta) = 0$$

получим обыкновенное дифференциальное уравнение на неизвестную функцию $Ck(\theta)$ и его решение:

$$Ck''(\theta) + Ck(\theta) + 3C_1\sin(3\theta) - 3C_2\cos(3\theta) = 0,$$
$$Ck(\theta) = C_4\cos\theta - \frac{3}{8}C_2\cos(3\theta) - C_3\sin\theta + \frac{3}{8}C_1\sin(3\theta).$$

Отсюда следует решение (1.21). □

Доказательство теоремы 5 проводится подстановкой различных функций и, в частности, функции из примера 2 (пункт 1°).

Доказательство теорем 6, 7 проводится подстановкой.

Доказательство теоремы 8. Рассмотрим, как действуют операторы на функцию f. Применим к уравнению Гельмгольца (1.26) оператор гамильтонова поля H и получим

$$HL_\Gamma Z(f) = 0.$$

С другой стороны, очевидно, что верны равенства

$$HZ(f) = 0, \quad HW(f) = 0.$$

Также верно, что $\Delta HZ(f) = 0$. Вычитая эти равенства, получим (1.28). □

Доказательство теоремы 9. Вычислим коммутатор $KM(\phi,\psi)=0$ операторов Лапласа Δ и гамильтонова поля H на произвольной дважды дифференцируемой функции $M(\phi,\psi)$:

$$KM(\phi\psi)=(H\Delta-\Delta H)M=$$
$$=-M'_\phi\frac{\partial}{\partial\psi}\Delta f+M'_\psi\frac{\partial f}{\partial\phi}\Delta f+2(M''_{\psi\psi}-M''_{\phi\phi})\frac{\partial^2 f}{\partial\psi\phi}-2M''_{\phi\psi}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\psi\psi}-\frac{\partial^2 f}{\partial\phi\phi}\right).$$

Приравняем коммутатор к выражению $DHM(\phi,\psi)$, которое имеет вид

$$\left(A_1\frac{\partial}{\partial\phi}+A_2\frac{\partial}{\partial\psi}+A_3\right)HM=0.$$

Приводим подобные и приравниваем к нулю коэффициенты при одинаковых степенях производных функции M, получаем пять соотношений, а именно $M''_{\psi\psi}$, $M''_{\phi\phi}$, M'_ϕ, M'_ψ, $M''_{\phi\psi}$. Из первых трёх соотношений следуют выражения для коэффициентов A_i, $i=1,2,3$, оператора D (1.30), а их подстановка в два последних соотношения даёт уравнения (1.29). □

Автор выражает благодарность В. Г. Данилову, М. В. Карасёву. А. С. Братусю, А. Д. Филимонову, А. Д. Мышкису за полезные обсуждения и А. Г. Куликовскому за проявленный интерес к работе.

Литература

[1] Акуленко Л. Д., Нестеров С. В. Собственные значения эллиптической мембраны // Изв. РАН. МТТ.— 2000. — № 1. — С. 191—202.

[2] Аристов С. Н., Пухначёв В. В. Об уравнениях вращательно-симметричного движения вязкой несжимаемой жидкости // Докл. РАН. — 2004. — Т. 394, № 5. — С. 611—614.

[3] Булатов В. В., Владимиров Ю. В., Данилов В. Г., Доброхотов С. Ю. Пример вычисления «глаза» тайфуна на основе гипотезы В. П. Маслова // ДАН. — 1994. — Т. 338. — С. 102—105.

[4] Волосов К. А. Математические вопросы теории нелинейных процессов переноса. — Дис.... канд. физ.-мат. наук. — М., 1982.

[5] Волосов К. А. Об одном свойстве анзаца метода Хироты для квазилинейных параболических уравнений // Мат. заметки. — 2002. — Т. 71, № 3. — С. 373—389.

[6] Данилов В. Г., Маслов В. П., Шелкович В. М. Алгебры особенностей обобщённых решений строго гиперболических систем квазилинейных уравнений первого порядка // Теор. и матем. физ. — 1998. — Т. 114. — С. 3—55.

[7] Данилов В. Г., Омельянов Г. А., Розенкоп Д. Л. Динамика точечной слабой особенности для уравнений мелкой воды на сфере. — Конфиденциальное сообщение.

[8] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными. — М.: Международная программа образования, 1996.

[9] Маслов В. П. Три алгебры, отвечающие негладким решениям систем квазилинейных гиперболических уравнений // Успехи мат. наук. — 1980. — Т. 35, вып. 2. — С. 252—253.

[10] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1989.

[11] Пухначёв В. В. Преобразование эквивалентности и скрытая симметрия эволюционных уравнений // ДАН СССР. — 1987. — Т. 294, № 3. — С. 555—558.

[12] Chatelon F. J., Orenga P. On a non-homogeneous shallow-water problem // RAIRO, Modélisation Math. Anal. Numér. — 1997. — Vol. 31, no. 1. — P. 27—55.

[13] Danilov V. G., Maslov V. P., Volosov K. A. Mathematical Modelling of Heat and Mass Transfer Processes. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1995.

[14] Dobrokhotov S. Yu. Hugoniót—Maslov chains for solitary vortices of the shallow water equations. I, II // Russ. J. Math. Phys. — 1999. — Vol. 6, no. 2. — P. 137—173; Vol. 6, no. 3. — P. 282—313.

[15] Volosov K. A. Invariant properties of the ansatz of the Hirota method for quasilinear parabolic equations. — 2001. — arXiv:math.PH/0103014.

[16] Volosov K. A. Tools for mathematical modeling // The Third Int. Conf. — St. Petersburg, 2001. — P. 169—171.