Построение асимптотического решения задачи об авторезонансе. Внутреннее разложение*

Р. Н. ГАРИФУЛЛИН
Институт математики
с вычислительным центром УНЦ РАН
e-mail: rustem@matem.anrb.ru

УДК 517.928.4

Ключевые слова: асимптотика, малый параметр, нелинейные уравнения, авторезонанс, метод многих масштабов.

Аннотация

В работе исследуется задача о возникновении авторезонанса. С использованием метода многих масштабов построено двухпараметрическое асимптотическое решение данной задачи. Построенное решение соответствует начальному этапу авторезонанса.

Abstract

R. N. Garifullin, Construction of asymptotic solutions of the autoresonance problem. Inner decomposition, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 6, pp. 33—48.

The problem of autoresonance arising is investigated. Using the multi-scale method, we construct an asymptotic solution of this problem in the domain $t \ll \varepsilon^{-1}$.

1. Введение. Постановка задачи

В данной работе исследуется нелинейное уравнение второго порядка, возмущённое быстро осциллирующей функцией с малой амплитудой:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u - \frac{2}{3}u^3 = 4\varepsilon f \cos\left(\frac{\Phi(\tau)}{\varepsilon}\right), \quad t > 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad \tau = \varepsilon t. \tag{1.1}$$

В качестве фазы возмущения берётся функция $\Phi(\tau) = \tau - \tau^3/3$; $f = \mathrm{const} \neq 0$. Рассматриваются решения, которые в начальный момент находятся вблизи устойчивого положения равновесия невозмущённого уравнения:

$$(|u| + |\dot{u}|)|_{t=0} = O(\varepsilon^{1/3}), \quad \varepsilon \to 0.$$

Для таких решений ставится задача о построении асимптотики при $\varepsilon \to 0$, пригодной на большом временно́м интервале $0 < t \leqslant O(\varepsilon^{-1})$. Особый интерес

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 06-01-00124, 06-01-92052 и INTAS 03-51-4286.

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 6, с. 33—48.

представляют решения, амплитуда которых нарастает со временем до величин порядка $O(1)$. Назовём такие решения авторезонансными.

Авторезонансом принято называть явление значительного роста амплитуды колебаний нелинейных систем под действием малого возмущения [5,10,11]. Подобные эффекты возникают и играют важную роль в ряде физических систем, например в ускорителях релятивистских частиц [1,3,14].

Для линейного уравнения (при отсутствие слагаемого u^3) подобная задача является тривиальной. При наличие резонанса, когда $\Phi(\tau) \equiv \tau$, все решения растут и становятся порядка $O(1)$ при $t = O(\varepsilon^{-1})$. В случае $\Phi(\tau) \neq \tau$ все решения остаются малыми.

В нелинейном уравнении ситуация оказывается совершенно иной. Независимо от исходных данных большинство решений остаются малыми. Решения, амплитуда которых вырастает до величин порядка $O(1)$ при $t = O(\varepsilon^{-1})$, существуют лишь при некоторых ограничениях на частоту и амплитуду возмущения. Ранее такие решения обнаруживались обычно в вычислительных экспериментах [9,10]. В частности, было выяснено, что выход на авторезонансные решения зависит от начальных данных [4].

В последние годы предпринимались значительные усилия по аналитическому исследованию авторезонанса в различных системах. Наибольшее продвижение получено при изучении начального этапа ($t \ll O(\varepsilon^{-1})$) этого явления. Для главного члена асимптотики было выведено уравнение главного резонанса [2,7], для которого доказано существование решений с растущей асимптотикой [13]. Как раз эти асимптотики служат ростками авторезонансных решений. Однако на этом этапе не было построено полного асимптотического разложения и не были исследованы поправки. Во внешней области ($t = O(\varepsilon^{-1})$) ранее было получено одно асимптотическое решения авторезонансного типа [12], вопрос о построении других асимптотических решений порядка $O(1)$ при $t = O(\varepsilon^{-1})$ не исследовался.

В данной работе строится двухпараметрическое асимптотическое решение на начальном этапе $t \ll O(\varepsilon^{-1})$. В частности, исследуется асимптотика для поправок на больших временах $t = O(\varepsilon^{-1+\delta})$ для любых $\delta > 0$. Найденная асимптотика позволяет построить двухпараметрическое решение во внешней области при $t \approx \varepsilon^{-1}$.

2. Переход к усреднённым уравнениям

На начальном этапе авторезонанса строится приближение решения по малой амплитуде. Для построения используются хорошо известные идеи Крылова—Боголюбова [2]. Асимптотика решения строится в несколько этапов. На первом этапе осуществляется переход к усреднённым уравнениям, которые и исследуются в дальнейшем.

Будем искать решение в виде функции нескольких переменных $u(t,\varepsilon) = v(\varphi, \theta, A, \varepsilon)$, где $\theta = \varepsilon^{2/3}t$ — медленное время, $\varphi = t - \theta^3/3$ — фаза внешнего возмущения (новая быстрая переменная, по которой проводится усреднение), $A = A(\theta,\varepsilon)$ — новая неизвестная функция. Требуется подобрать функцию $v(t,\theta,A,\varepsilon)$ так, чтобы уравнение на новую неизвестную A не содержало осцилляций по переменной t. Поставленная задача решается не точно, а асимптотически при $\varepsilon \to 0$. Для функции $v(t,\theta,A,\varepsilon)$ строится асимптотический ряд

$$v(\varphi,\theta;A,\varepsilon) = 2\,\mathrm{Re}[Ae^{i\varphi}] + \varepsilon^{1/3}\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{2k/3}v_k(\varphi,\theta,A) \tag{2.1}$$

с 2π-периодическими по φ коэффициентами $v_k(\varphi,\theta,A)$. В качестве главного члена берётся общее решение уравнения линейных колебаний. Для функции $A(\theta,\varepsilon)$ задаётся уравнение

$$\frac{dA}{d\theta} = F(\theta,A,\varepsilon), \tag{2.2}$$

правая часть которого строится в виде асимптотического ряда

$$F(\theta,A,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{2k/3}F_k(A,\theta)$$

с коэффициентами $F_k(A,\theta)$, определяющимися из требования асимптотичности ряда (2.1).

Теорема 1. *Существует асимптотическая замена неизвестной функции $u(t,\varepsilon)$, которая представляет собой ряд* (2.1) *с 2π-периодическими коэффициентами, не содержащими первую гармонику. Новая неизвестная $A(\theta,\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению* (2.2). *Правая часть этого уравнения представляет собой асимптотический ряд. Верны следующие формулы*:

$$F_0 = -i[A(|A|^2-\theta^2)+f], \tag{2.3}$$

$$v_k = 2\,\mathrm{Re}\bigg[\sum_{l=1}^{k}e^{i(2l+1)\varphi}\bigg(v_k^l|A|^{2(k-l)}A^{2l+1} + \sum_{m=1}^{[(2k+1)/3]}v_k^{lm}(A,\theta)\bigg)\bigg], \quad k>1, \tag{2.4}$$

$$F_k = ia_k|A|^{2k+2}A + \sum_{m=1}^{[2k/3]+1}a_k^m(A,\theta), \quad k>1. \tag{2.5}$$

Здесь v_k^l, a_k — действительные константы, функции $v_k^{lm}(A,\theta)$, $a_k^m(A,\theta)$ являются однородными полиномами по A, $\bar{A}$ и θ степени $2k+1-3m$ и $2k+3-3m$ соответственно.

Доказательство. Оператор полной производной по t, применяемый к функции $v(\varphi,\theta,A,\varepsilon)$, имеет вид

$$\frac{d}{dt} = (1-\varepsilon^{2/3}\theta^2)\frac{\partial}{\partial\varphi} + \varepsilon^{2/3}\frac{\partial}{\partial\theta} + \varepsilon^{2/3}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{2k/3}\bigg(F_k(A,\theta)\frac{\partial}{\partial A} + \overline{F_k}(\bar{A},\theta)\frac{\partial}{\partial\bar{A}}\bigg).$$

Подставив (2.1) и (2.2) в уравнение (1.1), получим рекуррентную систему уравнений для определения функций v_n:

$$\partial_\varphi^2 v_1 + v_1 = 4f\cos\varphi + \frac{2}{3}v_0^3 + 2\theta^2\partial_\varphi^2 v_0 - 2F_0\partial_{\varphi A}v_0 - 2\overline{F_0}\partial_{\varphi\bar{A}}v_0, \tag{2.6а}$$

$$\partial_\varphi^2 v_n + v_n = \frac{2}{3}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{n-1-l} v_l v_m v_{n-1-l-m} - 2\partial_{\varphi\theta}v_{n-1} + 2\theta^2\partial_\varphi^2 v_{n-1} - \partial_{\theta\theta}v_{n-2} -$$
$$- \theta^4\partial_\varphi^2 v_{n-2} + 2\theta\partial_\varphi v_{n-2} + 2\theta^2\partial_{\varphi\theta}v_{n-2} - 2\sum_{l=0}^{n-1}(F_l\partial_{\varphi A}v_{n-1-l} + \overline{F_l}\partial_{\varphi\bar{A}}v_{n-1-l}) +$$
$$+ 2\theta^2\sum_{l=0}^{n-2}(F_l\partial_{\varphi A}v_{n-2-l} + \overline{F_l}\partial_{\varphi\bar{A}}v_{n-2-l}) - \sum_{l=0}^{n-2}M_l[v_{n-2-l}]. \tag{2.6б}$$

Здесь M_l — часть оператора второй производной:

$$M_l = 2F_l\partial_{A\theta} + 2\overline{F_l}\partial_{\bar{A}\theta} + \partial_\theta F_l\partial_A + \partial_\theta\overline{F_l}\partial_{\bar{A}} +$$
$$+ \sum_{m=0}^{l}\big(F_mF_{l-m}\partial_{AA} + 2F_m\overline{F_{l-m}}\partial_{A\bar{A}} + \overline{F_m}\,\overline{F_{l-m}}\partial_{\bar{A}\bar{A}}\big) +$$
$$+ \sum_{m=0}^{l}\big[(F_{l-m}\partial_A + \overline{F_{l-m}}\partial_{\bar{A}})F_m\partial_A + (F_{l-m}\partial_A + \overline{F_{l-m}}\partial_{\bar{A}})\overline{F_m}\partial_{\bar{A}}\big].$$

После упрощений уравнение (2.6а) приводится к виду

$$\partial_\varphi^2 v_1 + v_1 = 2\,\mathrm{Re}\left[2(A(|A|^2 - \theta^2) - iF_0 + f)e^{i\varphi} + \frac{2}{3}A^3e^{3i\varphi}\right]. \tag{2.7}$$

Для ограниченности решений уравнения (2.7) необходимо равенство нулю множителя при $\exp\{i\varphi\}$. Из этого требования следует соотношение (2.3).

Из уравнения (2.7) определяется функция v_1:

$$v_1(\varphi, \theta, A) = 2\,\mathrm{Re}\left[-\frac{1}{12}A^3e^{3i\varphi}\right]. \tag{2.8}$$

С учётом формулы (2.8) уравнение на v_2 имеет вид

$$\partial_\varphi^2 v_2 + v_2 = 2\,\mathrm{Re}\Bigg[\left(\frac{5}{6}|A|^4A + f(2|A|^2 + \theta^2 - A^2) - 2iF_1\right)e^{i\varphi} +$$
$$+ \left(\frac{7}{6}|A|^2A^3 + \frac{3}{2}A^2f\right)e^{3i\varphi} - \frac{1}{6}A^5\Bigg].$$

Из требования ограниченности решений этого уравнения находится F_1, а затем определяется v_2:

$$F_1 = -\frac{i}{12}(5|A|^4A + 6f(\theta^2 + 2|A|^2 - A^2)),$$
$$v_2 = 2\,\mathrm{Re}\left[-\left(\frac{7}{48}|A|^2A^3 + \frac{3}{16}A^2f\right)e^{3i\varphi} + \frac{1}{144}A^5e^{5i\varphi}\right].$$

Приведённые построения доказывают теорему при $k = 0, 1, 2$. По индукции докажем её при $k > 2$. Предположим что построены k коэффициентов v_l,

$l = 1, \ldots, k$, и F_l, $l = 0, \ldots, k-1$, с требуемыми свойствами, и покажем, как строятся $k+1$-е коэффициенты v_{k+1} и F_k. Для этого необходимо исследовать уравнение (2.6б) при $n = k+1$.

Обозначим через $D_{k,n}$ и E_n выражения вида

$$D_{k,n} = 2\,\mathrm{Re}\bigg[\sum_{l=1}^{k} e^{i(2l+1)\varphi}\bigg(c^l_{k,n}|A|^{2(n-l)}A^{2l+1} + \sum_{m=1}^{[(2n+1)/3]} c^{l,m}_{k,n}(A,\theta)\bigg)\bigg],$$

$$E_n = 2\,\mathrm{Re}\bigg[\bigg(b_n|A|^{2n}A + \sum_{m=1}^{[(2n+1)/3]} b^m_n(A,\theta)\bigg)e^{i\varphi}\bigg]$$

с какими-либо действительными коэффициентами $c^l_{k,n}$, b_n и однородными полиномами $c^{l,m}_{k,n}(A)$, $b^m_n(A)$ по A, $\bar{A}$ и θ степени $2n+1-3m$.

В следующих леммах исследуется правая часть уравнения для $(k+1)$-й поправки (2.6б).

Лемма 1.1. *Пусть F_l при $l < k$ определяются по формулам* (2.3), (2.5). *Тогда при $k > 2$*

$$M_{k-1}[v_0] = E_{k+1}.$$

Лемма 1.2. *Пусть v_l при $l \leqslant k$ определяются по формуле* (2.4). *Тогда при $k > 2$*

$$\sum_{l=0}^{k}\sum_{m=0}^{k-l} v_l v_m v_{k-l-m} = E_{k+1} + D_{k+1,k+1}.$$

Эти леммы доказываются непосредственной проверкой.

В правой части уравнения для v_{k+1} множитель при $\exp\{i\varphi\}$ имеет вид

$$b_k|A|^{2k+2}A + \sum_{m=1}^{[2k/3]+1} b^m_k(A,\theta) - 2iF_k.$$

Из требования равенства нулю этого выражения определяется F_k по формуле вида (2.5).

Также непосредственной проверкой доказывается следующая лемма.

Лемма 1.3. *Пусть v_l при $l \leqslant k$ определяются по формуле* (2.4), *F_l при $l < k$ определяются по формулам* (2.3), (2.5). *Тогда при $k > 2$*

$$\partial_{\theta\theta}v_{k-1} - 2\theta\partial_\theta v_{k-1} + \theta^4\partial^2_\varphi v_{k-1} + M_0[v_{k-1}] = D_{k-1,k+1},$$

$$M_l[v_{k-1-l}] = D_{k-1-l,k+1}, \quad l = 1, \ldots, k-2,$$

$$\partial_{\varphi\theta}v_k + \sum_{l=0}^{k-1}(F_l\partial_{\varphi A}v_{k-l} + \overline{F_l}\partial_{\varphi\bar{A}}v_{k-l}) = D_{k,k+1}.$$

Следовательно, уравнение на v_{k+1} имеет вид

$$\partial^2_\varphi v_{k+1} + v_{k+1} = D_{k+1,k+1}.$$

Очевидно, что решение этого уравнения имеет вид (2.4). Теорема доказана. $\square$

3. Неограниченные решения усреднённого уравнения

В предыдущем разделе исходное уравнение было сведено к уравнению (2.2). Это уравнение и будет исследоваться в дальнейшем. Задача об авторезонансе сводится к нахождению растущих решений уравнения (2.2).

Для таких решений может быть построена асимптотика [2] при $\varepsilon \to 0$ в виде ряда по степеням $\varepsilon^{2/3}$ с коэффициентами, зависящими от θ:

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k/3} A_k(\theta).$$

После подстановки этого ряда в (2.2) получаются уравнения, из которых определяются $A_k(\theta)$. При исследовании асимптотики коэффициентов $A_k(\theta)$ при $\theta \to \infty$ обнаруживается, что $A_k = O(\theta^{1+13k/4})$. Следовательно, область пригодности этого ряда $\theta\varepsilon^{8/39} \ll 1$. Этой области недостаточно для решения исходной задачи, так как исходная постановка задачи подразумевала нахождение решения, пригодного при $t \ll \varepsilon^{-1}$, что соответствует $\theta\varepsilon^{1/3} \ll 1$. Для построения ряда, пригодного на требуемом промежутке, необходимо усложнить структуру коэффициентов разложения $A(\theta, \varepsilon)$ в асимптотический ряд, а именно ввести зависимость от ε в коэффициенты этого ряда аналогично методу многих масштабов [8]:

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k/3} A_k(\theta, \varepsilon).$$

На этом пути можно построить ряд, пригодный для решения поставленной задачи, определить асимптотики коэффициентов при $\theta \to \infty$. Однако этот способ приводит к существенному усложнению вычислений.

В данной работе предлагается другой путь. Здесь будет построена асимптотика при $\theta \to \infty$ растущих решений урезанного уравнения

$$\frac{dA}{d\theta} = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^{2k/3} F_k(A, \theta). \tag{3.1}$$

Здесь $N \geqslant 0$ — любое число; функция A зависит от N, однако эта зависимость не будет явно указываться. Предлагается строить асимптотику в виде ряда по обратным степеням θ с коэффициентами, зависящими от θ, ε. Оказывается, всю зависимость от ε удобнее удерживать в переменной $\tau = \varepsilon^{1/3}\theta$. Далее будет определён ряд, который является асимптотическим решением уравнения (3.1) при $\theta \to \infty$ равномерно по τ на некотором конечном промежутке. Обоснование построенной асимптотики может быть проведено способом, аналогичным обоснованию асимптотики уравнения главного резонанса [13], которое соответствует уравнению (3.1) при $N = 0$.

Для дальнейших построений удобнее выделить множитель, характеризующий порядок роста решений,

$$A(\theta,\varepsilon)=\theta R(\theta,\tau)e^{i\Psi(\theta,\tau)}, \tag{3.2}$$

и свести задачу к поиску двух действительных функций: неубывающей амплитуды $R(\theta,\tau)$ и фазы $\Psi(\theta,\tau)$, которые зависят от θ, τ и не зависят от ε. Для этих функций выписываются свои уравнения. В них самое замечательное то, что ε исключается в силу формулы $\varepsilon=\tau^3/\theta^3$. Уравнения на R и Ψ имеют вид

$$\begin{aligned}&\theta^3 f_{-1}(R,\tau)+R\left(\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}+\tau\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}\right)+\sum_{k=0}^{[2N/3]}\theta^{-3k}f_k(R,\Psi,\tau)=0,\\&\theta\frac{\partial R}{\partial\theta}+\tau\frac{\partial R}{\partial\tau}+\sum_{k=0}^{[2N/3]}\theta^{-3k}g_k(R,\Psi,\tau)=0.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь f_k, g_k — гладкие функции, определяемые по виду коэффициентов F_k, например:

$$\begin{aligned}f_{-1}&=R^3-R+\frac{5}{12}\tau^2R^5+\ldots-a_k\tau^{2N}R^{2N+3},\\f_0&=f\cos\Psi+\frac{f\tau^2}{2}\cos\Psi(R^2+1)+\ldots+\tau^{2N}f_{0N}(R,\Psi),\\g_0&=R+f\sin\Psi+\frac{\tau^2f}{2}\sin\Psi(3R^2+1)+\ldots+\tau^{2N}g_{0N}(R,\Psi).\end{aligned}$$

Все остальные функции также, очевидно, являются полиномами по τ, R, зависимость от Ψ содержится в тригонометрических функциях. При $\tau\to0$ эти функции ведут себя следующим образом:

$$g_k,f_k=O\big(\tau^{2[(3k+1)/2]}\big),\quad \tau\to0,\quad k\geqslant1.$$

Для системы (3.3) можно построить степенные асимптотики двух частных решений с неубывающей амплитудой.

Теорема 2. *Пусть $f>1$. Тогда существует $\tau_0>0$, такое что при $\tau\in[0,\tau_0]$ для системы уравнений* (3.3) *существует асимптотическое решение в виде ряда по обратным степеням θ:*

$$\begin{pmatrix}R\\ \Psi\end{pmatrix}=\sum_{k=0}^{\infty}\theta^{-3k}\begin{pmatrix}R_k(\tau)\\ \Psi_k(\tau)\end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Коэффициенты R_k, Ψ_k — гладкие функции τ. Если требовать $R_0(\tau)>0$, $\Psi_0(\tau)\in\in(-\pi,\pi)$ при $\tau\in[0,\tau_0]$, то существуют два асимптотических решения в форме рядов (3.4).

Доказательство. После подстановки рядов (3.4) в систему (3.3) получим рекуррентную систему для определения коэффициентов R_k, Ψ_k:

$$f_{-1}(R_0,\tau)=0, \tag{3.5а}$$
$$g_0(R_0,\Psi_0,\tau)+\tau R_0'=0, \tag{3.5б}$$

$$\begin{gathered}
R_k\partial_R f_{-1}(R_0,\tau)+\sum_{l=0}^{k-1}R_{k-1-l}(\tau\Psi_m'-3m\Psi_m)+\\
+F_k(\tau,R_0,\dots,R_{k-1},\Psi_0,\dots,\Psi_{k-1})=0,\\
\Psi_k\partial_\Psi g_0(R_0,\Psi_0,\tau)+R_k\partial_R g_0(R_0,\Psi_0,\tau)+\tau R_k'+\\
+G_k(\tau,R_0,\dots,R_{k-1},\Psi_0,\dots,\Psi_{k-1})=0.
\end{gathered} \tag{3.6}$$

Здесь F_k, G_k — гладкие функции.

Рассмотрим уравнение (3.5а). У этого уравнения при $\tau=0$ существует единственный положительный корень, равный 1. Так как $\partial_R f_{-1}(1,0)\neq 0$, то по теореме о неявной функции у уравнения (3.5а) при $\tau\in[0,\tau_R]$ существует единственный простой корень $R_0(\tau)$, такой что $R_0(0)=1$. Так как $f_1(R,\tau)$ — гладкая функция, то $R_0(\tau)$ также гладкая функция.

Рассмотрим уравнение (3.5б). При $\tau=0$ это уравнение принимает вид

$$1+f\sin\Psi_0(0)=0.$$

У этого уравнения при $f>1$ в промежутке $(-\pi,\pi)$ имеются два корня:

$$\Psi_0^1(0)=-\pi+\arcsin\left(\frac{1}{f}\right),\quad \Psi_0^2(0)=-\arcsin\left(\frac{1}{f}\right).$$

Также из теоремы о неявной функции следует, что у уравнения (3.5б) на отрезке $[0,\tau_\Psi]$ имеются два простых корня $\Psi_0^1(\tau)$ и $\Psi_0^2(\tau)$.

В качестве τ_0 можно взять минимум двух чисел τ_R и τ_Ψ. Если зафиксировать один из корней $\Psi_0(\tau)$, то построение остальных коэффициентов проводится однозначно, они находятся из линейных алгебраических уравнений (3.6). Теорема доказана. □

Для решения задачи о двухпараметрической асимптотике необходимо присутствие двух произвольных параметров в конструкции асимптотического разложения. В приведённых выше степенных асимптотиках они отсутствуют. Ниже приводится конструкция асимптотики двухпараметрического решения уравнения (3.3). Эти решения находятся в окрестности первой из приводимых выше степенных асимптотик. Вторая из степенных асимптотик описывает неустойчивое решение.

Проведём замену неизвестных переменных

$$R=R_0(\tau)+\theta^{-7/4}\tilde R(\theta,\tau),\quad \Psi=\Psi_0(\tau)+\theta^{-1/4}\tilde\Psi(\theta,\tau),$$

где $R_0(\tau)$, $\Psi_0(\tau)$ — построенные выше функции, $\tilde R$, $\tilde\Psi$ — новые неизвестные переменные. На новые неизвестные получаем следующую систему уравнений:

$$\theta^{5/4}\tilde{R}f_{-1}^{10}+(R_0+\theta^{-7/4}\tilde{R})\biggl(\tau\Psi_0'+\theta^{3/4}\partial_\theta\tilde{\Psi}+\theta^{-1/4}\biggl(\tau\partial_\tau\tilde{\Psi}-\frac{\tilde{\Psi}}{4}\biggr)\biggr)+$$
$$+\theta^{-1/2}\tilde{R}^2\sum_{k=0}^{\infty}f_{-1}^{k+2,0}\theta^{-7k/4}\tilde{R}^k+\sum_{k=0}^{2N/3}\sum_{l,m=0}^{\infty}\theta^{-3k}f_k^{lm}\theta^{-(7l+m)/4}\tilde{R}^l\tilde{\Psi}^m=0,$$
$$\theta^{-1/4}\tilde{\Psi}g_0^{01}+\theta^{-3/4}\partial_\theta\tilde{R}+\theta^{-7/4}\biggl(\tau\partial_\tau\tilde{R}-\frac{7\tilde{R}}{4}\biggr)+\theta^{-7/4}\tilde{R}g_0^{10}+$$
$$+\sum_{k+l\geqslant 2}g_0^{kl}\theta^{-(7k+l)/4}\tilde{R}^k\tilde{\Psi}^l+\sum_{k=1}^{2N/3}\sum_{l,m=0}^{\infty}\theta^{-3k}g_k^{lm}\theta^{-(7l+m)/4}\tilde{R}^l\tilde{\Psi}^m=0. \tag{3.7}$$

Здесь используются обозначения

$$f_k^{lm}=f_k^{lm}(\tau)=\frac{1}{l!m!}\,\frac{\partial^{l+m}}{\partial^l R\partial^m\Psi}f_k(R_0(\tau),\Psi_0(\tau),\tau),$$
$$g_k^{lm}=g_k^{lm}(\tau)=\frac{1}{l!m!}\,\frac{\partial^{l+m}}{\partial^l R\partial^m\Psi}g_k(R_0(\tau),\Psi_0(\tau),\tau).$$

Для построения асимптотики системы (3.7) более удобным является подход Крылова—Боголюбова. С этой целью ищется такая асимптотическая замена неизвестных переменных $\tilde{R}(\theta,\tau)$, $\tilde{\Psi}(\theta,\tau)$ на новые неизвестные $C(\theta,\tau)$, $\eta(\theta,\tau)$:

$$\begin{pmatrix}\tilde{\Psi}(\theta,\tau)\\ \tilde{R}(\theta,\tau)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi(\eta,\tau,C,\theta)\\ r(\eta,\tau,C,\theta)\end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

чтобы система уравнений на новые переменные оказалось треугольной:

$$\tau\partial_\tau C+\theta\partial_\theta C=T(\tau,C,\theta), \tag{3.9}$$
$$\tau\partial_\tau\eta+\theta\partial_\theta\eta=Y(\tau,C,\theta). \tag{3.10}$$

Теорема 3. *Если в качестве $\Psi_0(\tau)$ выбрать первый корень $\Psi_0^1(\tau)$ уравнения* (3.5б)*, то при $\tau\in[0,\tau_0]$ для системы* (3.7) *существует асимптотическая замена неизвестных функций, которая приводит систему к треугольному виду. Для функций $\psi(\eta,\tau,\theta,C)$, $r(\eta,\tau,\theta,C)$ и правых частей уравнений* (3.9), (3.10) *строятся асимптотические ряды*:

$$\begin{pmatrix}\psi(\eta,\tau,C,\theta)\\ r(\eta,\tau,C,\theta)\end{pmatrix}=\sum_{k=0}^{\infty}\theta^{-k/4}\begin{pmatrix}\psi_k(\eta,\tau,C)\\ \lambda(\tau)r_k(\eta,\tau,C)\end{pmatrix},$$
$$T(\tau,C,\theta)=\frac{\lambda f_{-1}^{10}}{R_0}\sum_{k=0}^{\infty}\theta^{-k/2}a_k(\tau,C), \tag{3.11}$$
$$Y(\tau,C,\theta)=\theta^{3/2}b_0(\tau)\biggl(1+\sum_{k=1}^{\infty}\theta^{-k/2}b_k(\tau,C)\biggr).$$

Здесь $\lambda(\tau)=\sqrt{-g_0^{01}R_0/f_{-1}^{10}}$; ψ_k, r_k — гладкие тригонометрические полиномы по переменной η, причём коэффициенты с чётными номерами содержат только нечётные гармоники, с нечётными — чётные; a_k, b_k — гладкие функции. Все *функции ψ_k, r_k, a_k, b_k определяются однозначно, если дополнительно требовать, чтобы $\psi_k(\eta,\tau,C)$ при $k\geqslant 1$ не содержала первых гармоник.*

Доказательство. Для положительности подкоренного выражения в λ необходимо выполнение условия

$$f_{-1}^{10}(\tau)g_0^{01}(\tau)<0. \tag{3.12}$$

Это условие выполняется за счёт выбора одного из корней $\Psi_0^{1,2}(\tau)$, а именно при $\Psi_0(\tau)\equiv\Psi_0^1(\tau)$ условие (3.12) выполнено, в этом легко убедиться, проверив условие при $\tau=0$. При таком выборе корня $f_{-1}^{10}>0$, $g_0^{01}<0$. Это условие обеспечивает ограниченность решений уравнений на коэффициенты r_k, ψ_k.

Операторы производных, применяемые к функциям $r(\eta,\tau,C,\theta)$, $\psi(\eta,\tau,C,\theta)$, принимают вид

$$(\tau\partial_\tau+\theta\partial_\theta)\begin{pmatrix}\tilde\Psi\\ \tilde R\end{pmatrix}=(\tau\partial_\tau+\theta\partial_\theta+(\tau\partial_\tau\eta+\theta\partial_\theta\eta)\partial_\eta+(\tau\partial_\tau C+\theta\partial_\theta C)\partial_C)\begin{pmatrix}\psi\\ r\end{pmatrix}.$$

Подставив ряды (3.11) в систему (3.7), при старшей степени θ получим следующую задачу для определения зависимости от η в функциях r_0, ψ_0:

$$\begin{aligned}&R_0b_0\partial_\eta\psi_0+\lambda f_{-1}^{10}r_0=0,\\&\lambda b_0\partial_\eta r_0-g_0^{01}\psi_0=0.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Для обеспечения 2π-периодичности функций r_0, ψ_0 необходимо выбрать $b_0(\tau,C)$ следующим образом:

$$b_0=\frac{g_0^{01}}{\lambda}. \tag{3.14}$$

При таком выборе b_0 решения системы (3.13) имеют вид

$$\begin{pmatrix}\psi_0\\ r_0\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}\cos\eta\\ \sin\eta\end{pmatrix}.$$

На следующем шаге получаем систему

$$\begin{aligned}&\partial_\eta\psi_1+r_1=0,\\&\partial_\eta r_1-\psi_1=-\frac{g_0^{02}}{g_0^{01}}\psi_0^2.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Решение этой системы имеет вид

$$\begin{pmatrix}\psi_1\\ r_1\end{pmatrix}=\frac{g_0^{02}}{6g_0^{01}}C^2\begin{pmatrix}\cos2\eta-3\\ 2\sin2\eta\end{pmatrix}.$$

На втором шаге получаем систему

$$\begin{aligned}&\partial_\eta\psi_2+r_2=-b_1\partial_\eta\psi_0,\\&\partial_\eta r_2-\psi_2=-b_1\partial_\eta r_0-\frac{2g_0^{02}}{g_0^{01}}\psi_0\psi_1-\frac{g_0^{03}}{g_0^{01}}\psi_0^3.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Из требования ограниченности решений этой системы определяется $b_1(\tau, C)$:

$$b_1 = C^2 \left(\frac{3g_0^{03}}{8} - \frac{5(g_0^{02})^2}{12(g_0^{01})^2} \right).$$

Далее аналогично определяются r_2, ψ_2, r_3, ψ_3, b_2, r_4, ψ_4, r_5, ψ_5, удовлетворяющие условиям теоремы. Начиная с шестого шага, при $n = 2k$, $k = 3, \ldots$, на r_n, ψ_n получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \partial_\eta \psi_{2k} + r_{2k} &= +b_k C \sin\eta - a_{k-3} \cos\eta + F_{2k}(\eta, \tau, C), \\ \partial_\eta r_{2k} - \psi_{2k} &= -b_k C \cos\eta - a_{k-3} \sin\eta + G_{2k}(\eta, \tau, C). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Здесь $F_{2k}(\eta, \tau, C)$, $G_{2k}(\eta, \tau, C)$ — функции, определяемые предыдущими поправками. Если для предыдущих поправок выполнены условия теоремы, то эти функции содержат только нечётные гармоники по η и являются гладкими функциями τ, C. Из требования ограниченности решений системы (3.17) определяются a_{k-3}, b_k:

$$b_k = \frac{1}{2\pi C} \int\limits_0^{2\pi} (G_{2k}(\eta, \tau, C) \cos\eta - F_{2k}(\eta, \tau, C) \sin\eta)\, d\eta,$$

$$a_{k-3} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} (G_{2k}(\eta, \tau, C) \sin\eta + F_{2k}(\eta, \tau, C) \cos\eta)\, d\eta.$$

Это гладкие функции τ, C, особенность при $C = 0$ в выражении для b_k сокращается. После определения a_{k-3}, b_k система (3.17) решается однозначно в классе 2π-периодических функций переменной η при требовании, чтобы ψ_{2k} не содержала первых гармоник, причём это решении содержит только нечётные гармоники.

При нечётных n, т. е. при $n = 2k+1$, $k = 3, \ldots$, система уравнений на ψ_n, r_n имеет вид

$$\begin{aligned} \partial_\eta \psi_{2k+1} + r_{2k+1} &= F_{2k+1}(\eta, \tau, C), \\ \partial_\eta r_{2k+1} - \psi_{2k+1} &= G_{2k+1}(\eta, \tau, C). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Здесь $F_{2k+1}(\eta, \tau, C)$, $G_{2k+1}(\eta, \tau, C)$ — функции, определяемые предыдущими поправками. Если для предыдущих поправок выполнены условия теоремы, то эти функции содержат только чётные гармоники по η и являются гладкими функциями τ, C. Система (3.17) решается однозначно в классе 2π-периодических функций переменной η при требовании, чтобы ψ_{2k} не содержала первых гармоник, причём это решении содержит только нечётные гармоники. Теорема доказана. □

Следует отметить, что все построенные выше функции гладко зависят от τ^2. В коэффициентах исходного уравнения (3.8) содержится только зависимость от τ^2, она и наследуется во всех остальных функциях. Производная по τ не меняет этой структуры, так как перед ней есть множитель τ и верно выражение

$$\tau\frac{\partial}{\partial\tau} = 2\tau^2\frac{\partial}{\partial(\tau^2)}.$$

Задача о нахождении асимптотики решений уравнения (3.1) при $\theta \to \infty$ свелась к системе уравнений (3.9) и (3.10). Далее будет построена асимптотика для решений этих уравнений при $\theta \to \infty$. Необходимо заметить, что эти уравнения являются уравнениями в частных производных, как это обычно бывает в методе многих масштабов. Поэтому в конструкции общих решений должны появляться произвольные функции от характеристической переменной. Эта переменная имеет вид $\tau/\theta = \varepsilon^{1/3}$, следовательно, произвольная функция зависит от внешнего параметра ε. В приводимых ниже построениях наличие произвольной функции проявляется в бесконечной серии произвольных констант интегрирования. Предлагается все эти константы, за исключением первых, считать нулями, а первые считать зависящими от ε.

Сначала будем решать уравнение (3.9), оно является замкнутым относительно $C(\theta,\tau)$. Решения этого уравнения строятся в виде ряда

$$C(\theta,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty}\theta^{-k/2}C_k(\tau). \tag{3.19}$$

После подстановки ряда (3.19) в уравнение (3.9) при θ^0 получим уравнение для определения $C_0(\tau)$:

$$\tau C_0' = a_0(\tau, C_0)\sqrt{-\frac{g_0^{01}f_{-1}^{10}}{R_0}}.$$

После подстановки явного вида $a_0(\tau, C)$ это уравнение примет вид

$$\tau C_0' = C_0\left(1 - \frac{1}{2}g_0^{10} - \frac{f_0^{01}}{2R_0} + \frac{\tau}{4}\frac{d}{d\tau}\ln\frac{-f_{-1}^{10}}{g_0^{01}R_0}\right). \tag{3.20}$$

Выражение в скобках — гладкая функция τ^2, она раскладывается в ряд по степеням τ^{2k}, причём коэффициент при τ^0 равен

$$1 - \frac{1}{2}g_0^{10}(0) - \frac{f_0^{01}(0)}{2R_0(0)} = 0.$$

Поэтому общее решение уравнения (3.20)

$$C_0(\tau) = C^0\left(-\frac{f_{-1}^{10}}{g_0^{01}R_0}\right)^{1/4}\exp\left(\int\limits_0^\tau\frac{1}{\tau'}\left[1 - \frac{g_0^{10}(\tau')}{2} - \frac{f_0^{01}(\tau')}{2R_0(\tau')}\right]d\tau'\right) \tag{3.21}$$

является гладкой функцией τ^2. Здесь C^0 — произвольная константа.

На следующие функции получаются неоднородные линейные уравнения вида

$$\tau C_k' - C_k\left(\frac{k}{2} + 1 - \frac{1}{2}g_0^{10} - \frac{f_0^{01}}{2R_0} + \frac{\tau}{4}\frac{d}{d\tau}\ln\frac{-f_{-1}^{10}}{g_0^{01}R_0}\right) = H_k(\tau), \quad k > 1, \tag{3.22}$$

где $H_k(\tau)$ — функция, определяемая предыдущими поправками.

Методом индукции доказывается следующая теорема.

Теорема 4. *Существуют решения уравнения* (3.22), *которые имеют следующую асимптотику при* $\tau \to 0$:

$$C_k(\tau) = \sum_{l=0}^{\infty} \tau^{2l} \sum_{m=0}^{C_k^l} \ln^m \tau C_k^{lm}, \quad C_k^l = \min\left\{2l-1, 2\left[\frac{k}{4}\right]-1\right\}. \tag{3.23}$$

Если требовать $C_{4l}^{l,0} = 0$, *то решения определяются единственным образом.*

Доказательство. Предположим, что теорема доказана для всех $n < k$, и докажем её для k. Решение однородного уравнения (3.22) имеет вид

$$C_k^0(\tau) = \tau^{k/2}\left(-\frac{f_{-1}^{10}}{g_0^{01}R_0}\right)^{1/4} \exp\left(\int_0^\tau \frac{1}{\tau'}\left[1 - \frac{g_0^{10}(\tau')}{2} - \frac{f_0^{01}(\tau')}{2R_0(\tau')}\right] d\tau'\right).$$

Функция $H_k(\tau)$ имеет вид

$$H_k(\tau) = a_k^*(\tau, C_0) + \sum_{l=1}^{k-1}\sum_{m=1}^{k-l}(a_l^*)^{(m)}(\tau, C_0) \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_m=k-l\\ i_1,\ldots,i_m \geqslant 1}} C_{i_1}C_{i_2}\ldots C_{i_m},$$

где $a_i^* = \sqrt{-(g_0^{01}f_{-1}^{10})/R_0}\, a_i$. Частное решение уравнения (3.22) имеет вид

$$C_k(\tau) = C_k^0(\tau)\int^\tau (C_l^0(\tau')\tau')^{-1} H_k(\tau')\, d\tau'. \tag{3.24}$$

Имеем следующие асимптотики для решения однородного уравнения и правой части:

$$C_k^0(\tau) = \tau^{k/2}\sum_{l=0}^{\infty}\tau^{2l}d_l, \quad d_l = \mathrm{const}, \quad \tau \to 0,$$

$$H_k(\tau) = \sum_{l=0}^{\infty}\tau^{2l}\sum_{m=0}^{H_k^l}\ln^m \tau H_k^{lm}(C^0), \quad H_k^l = \min\left\{2l-1, 2\left[\frac{k-5}{4}\right]\right\}, \quad \tau \to 0.$$

По формуле (3.24) с помощью приведённых выше асимптотик можно получить асимптотики (3.23). В случае $k = 4l$ можно занулить коэффициент $C_{4l}^{l0} = 0$ с помощью решения однородного уравнения. Теорема доказана. □

С учётом формулы (3.19) переразложим правую часть уравнения (3.10) при $\theta \to \infty$:

$$\tau\partial_\tau\eta + \theta\partial_\theta\eta = \theta^{3/2}b_0(\tau)\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\theta^{-k/2}b_k^*(\tau, C^0)\right), \tag{3.25}$$

где

$$b_k^*(\tau, C^0) = b_k(\tau, C_0) + \sum_{l=1}^{k-1}\sum_{m=1}^{k-l} b_l^{(m)}(\tau, C_0)\sum_{\substack{i_1+\ldots+i_m=k-l\\ i_1,\ldots,i_m \geqslant 1}} C_{i_1}C_{i_2}\ldots C_{i_m}.$$

Решение уравнения (3.25) ищется в виде ряда

$$\eta = \theta^{3/2} \sum_{k=0}^{\infty} \theta^{-k/2} \eta_k(\tau, C^0) + \eta^*(C^0) \ln \theta + \eta^0, \tag{3.26}$$

где η^0 — произвольная константа, слагаемое $\eta^*(C^0) \ln \theta$ необходимо для отсутствия в функции η_3 слагаемого $\ln \tau$. Для коэффициентов η_k доказывается следующая теорема.

Теорема 5. *Существуют функции $\eta_k(\tau; C^0)$, такие что ряд* (3.26) *удовлетворяет уравнению* (3.25). *Асимптотика этих функций при $\tau \to 0$ имеет вид*

$$\eta_k(\tau) = \sum_{l=0}^{\infty} \tau^{2l} \sum_{m=0}^{\eta_k^l} \ln^m \tau \eta_k^{lm}, \quad \eta_k^l = \min\left\{2l-1, 2\left[\frac{k-1}{4}\right] - K(k)\right\}, \tag{3.27}$$

где $K(k) = 1$, $k \neq 4n-1$, $K(k) = 0$, $k = 4n-1$. Если требовать $\eta_{3+4l}^{l0} = 0$, то все ряды (3.27) *определяются однозначно.*

Доказательство. На коэффициенты η_k получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} &\tau\eta_0' + \frac{3\eta_0}{2} = b_0(\tau), \\ &\tau\eta_k' + \frac{(3-k)\eta_k}{2} = b_0(\tau) b_k^*(\tau; C^0), \quad k \neq 3, \\ &\tau\eta_3' + \eta^* = b_0(\tau) b_3^*(\tau; C^0). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Как видно, эти уравнения не связаны между собой, и их можно решать независимо друг от друга. Решение уравнения для η_0 в форме (3.27) имеет вид

$$\eta_0 = \tau^{-3/2} \int_0^{\tau} \tau'^{1/2} b_0(\tau') \, d\tau'. \tag{3.29}$$

Это гладкая функция τ^2. Правая часть уравнения для η_3 также является гладкой функцией τ^2. Для того чтобы η_3 была гладкой функцией, необходимо взять

$$\eta^* = b_0(0) b_3(0, C^0),$$

тогда η_3, определённая по формуле

$$\eta_3 = \int_0^{\tau} \frac{b_0(\tau') b_3(\tau'; C^0) - \eta^*(C^0)}{\tau'} \, d\tau',$$

удовлетворяет условиям теоремы. В остальных случаях частное решение уравнения (3.28) имеет вид

$$\eta_k = \tau^{(k-3)/2} \int^{\tau} (\tau')^{(1-k)/2} b_0(\tau') b_k^*(\tau'; C^0) \, d\tau'.$$

Асимптотика функций $b_k^*(\tau;C^0)$ при $\tau\to 0$ имеет вид

$$b_k^*(\tau;C^0)=\sum_{l=0}^{\infty}\tau^{2l}\sum_{m=0}^{b_k^l}\ln^m\tau b_k^{lm},\quad b_k^l=\min\left\{2l-1,2\left[\frac{k-1}{4}\right]-1\right\}.$$

Из этой асимптотики следует требуемая асимптотика (3.27). С помощью решения однородного уравнения можно занулить требуемый коэффициент. Теорема доказана. □

4. Заключение

Найденное внутреннее асимптотическое решение уравнения (1.1) описывается рядом (2.1), в котором для параметра A определена асимптотика при $\theta\to\infty$. Коэффициенты ряда v_k — полиномы по A степени $2k+1$, следовательно, область пригодности ряда (2.1) — $\theta\ll\varepsilon^{-1/3}$, т. е. $t\ll\varepsilon^{-1}$. При таких, не очень больших, значениях t решение задачи описывается найденными рядами (2.1), (2.4). Найденные ряды описывают начальный этап возникновение авторезонанса, его дальнейшее развитие при $t=O(\varepsilon^{-1})$ описывается другими рядами, так называемым внешним асимптотическим разложением. Построение внешнего разложения будет описано в другой статье. Построенные асимптотики при $\theta\to\infty$ (3.2), (3.11), (3.19), (3.26) помогают определить структуру внешнего разложения, в частности, во внешнем решении обнаруживаются дробные степени ε. Внешнее разложение может быть согласовано с построенным выше внутренним разложением [6].

Автор выражает благодарность Л. А. Калякину за постановку задачи и её обсуждения, О. М. Киселёву за полезные замечания.

Литература

[1] Андронов А. А., Горелик Г. А. О резонансных явлениях при движении релятивистской частицы в циклотроне // ДАН СССР. — 1945. — Т. 49. — С. 664—666.

[2] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974.

[3] Векслер В. И. О новом методе ускорения релятивистских частиц // ДАН СССР. — 1944. — Т. 43. — С. 346—348; 393—396.

[4] Гарифуллин Р. Н. Исследование роста решений нелинейного уравнения в зависимости от начальных данных // Труды III Региональной школы-конф. по математике и физике для студентов, аспирантов и молодых учёных. Ч. I. Математика. — 2003. — С. 189—195.

[5] Голованевский К. С. Гиромагнитный авторезонанс с переменной частотой // Физика плазмы. — 1985. — Т. 11, вып. 3. — С. 295—299.

[6] Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. — М.: Наука, 1989.

[7] Калякин Л. А. Асимптотический анализ модели авторезонанса // Докл. РАН. — 2001. — Т. 378, № 5. — С. 594—597.

[8] Кузмак Г. Е. Асимптотические решения нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами // ПММ. — 1951. — Т. 23, № 3. — С. 519—506.

[9] Aranson I., Meersoh B., Tajima T. Excitation of solitons by an external resonant wave with a slowly varying phase velocity // Phys. Rev. A. — 1992. — Vol. 74. — P. 7000—7510.

[10] Fajans J., Friedland L. Autoresonant (nonstationary) excitation of pendulums, Plutinos, plasmas, and other nonlinear oscillators // Amer. J. Phys. — 2001. — Vol. 69, no. 10. — P. 1096—1102.

[11] Friedland L. Autoresonant excitation and evolution of nonlinear waves: The variational approach // Phys. Rev. E. — 1997. — Vol. 55. — P. 1929—1939.

[12] Kalyakin L. A. Asymptotic analysis of an autoresonance model // Russ. J. Math. Phys. — 2002. — Vol. 9, no. 1. — P. 84—95.

[13] Kalyakin L. A. Justification of asymptotic expansions for the principal resonance equations // Proc. of the Steklov Inst. of Math. — 2003. – Suppl. 1. — P. S108—S122.

[14] MacMillan E. M. The synchrotron: A proposed high energy particle accelerator // Phys. Rev. — 1945. — Vol. 68. — P. 143—144.