Слабое асимптотическое решение системы фазового поля в случае слияния свободных границ в задаче Стефана—Гиббса—Томсона

В. Г. ДАНИЛОВ
Московский технический университет связи и информатики

В. Ю. РУДНЕВ
Московский государственный институт электроники и математики
e-mail: pm@miem.edu.ru

УДК 517.9

Ключевые слова: задача Стефана—Гиббса—Томсона, система фазового поля, метод слабых асимптотик.

Аннотация

Анализируется процесс слияния свободных границ в бинарных средах в задаче Стефана—Гиббса—Томсона. С использованием метода слабых асимптотик строится глобальная по времени формула слабого асимптотического решения системы фазового поля в рассматриваемом случае.

Abstract

V. G. Danilov, V. Yu. Rudnev, A weak asymptotic solution of the phase-field system in the case of confluence of free boundaries in the Stefan–Gibbs–Thomson problem, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 6, pp. 49—66.

We analyze the confluence of free boundaries for binary mixtures in the Stefan–Gibbs–Thomson problem. Using the method of weak asymptotics, we obtain a global-time formula for a weak asymptotic solution of the phase-field system in this case.

1. Введение

В данной работе исследуется процесс слияния свободных границ в задаче Стефана—Гиббса—Томсона. Мы рассматриваем некоторую одномерную среду. Будем считать, что среда занимает область (отрезок) $\Omega = [l_1, l_2]$. Пусть существуют две свободные границы $\Gamma_{1,t} = \{x;\ x = \hat{\varphi}_1(t)\}$ и $\Gamma_{2,t} = \{x;\ x = \hat{\varphi}_2(t)\}$, где $x \in \mathbb{R}^1$. Таким образом, интервал Ω разделяется на три части: $\Omega^+_{1,t} = [l_1, \hat{\varphi}_1(t)]$, $\Omega^-_t = (\hat{\varphi}_1(t), \hat{\varphi}_2(t))$, $\Omega^+_{2,t} = [\hat{\varphi}_2(t), l_2]$, где $\hat{\varphi}_{1,2}(t)$ — некоторые неизвестные функции. Мы считаем, что среда имеет две фазы: $+$ и $-$. Таким образом, области $\Omega^+_{i,t}$ соответствуют фазе $+$, а область Ω^-_t соответствует фазе $-$. Наше изучение

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 6, с. 49—66.

рассматриваемой задачи основано на модели фазового поля. В нашем случае эта модель имеет вид [9]

$$L\theta = -\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\mathcal{L}u = 0, \tag{2}$$

где

$$L\theta = \frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}, \quad \mathcal{L}u = \varepsilon Lu - \frac{u-u^3}{\varepsilon} - \varepsilon\varkappa\theta. \tag{3}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, t_1]$ ($t_1 > t^*$, где t^* — момент слияния свободных границ $\Gamma_{i,t}$), θ — температура, u — функция порядка (значение $u = -1$ соответствует фазе $-$, а значение $u = 1$ соответствует фазе $+$), $\varkappa$ — некоторая постоянная и $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр.

Мы предполагаем, что уравнения (1), (2) дополнены согласованными начальными и граничными условиями.

Общеизвестно [3,4], что слабый предел $\bar{u}$, $\bar{\theta}$ решения системы (1), (2) (значения $\bar{u} = \pm 1$ соответствуют областям $\Omega^+_{1,2t}$ и Ω^-_t) описывается решением задачи Стефана—Гиббса—Томсона

$$\frac{\partial\bar{\theta}^\pm_i}{\partial t} = \frac{\partial^2\bar{\theta}^\pm_i}{\partial x^2}, \quad x \in \Omega^\pm_{i,t}, \quad t \in [0, t^*), \tag{4}$$

$$\left[\bar{\theta}^\pm_i\right]\big|_{x=\hat{\varphi}_{1,2}} = 0, \tag{5}$$

$$\left[\frac{\partial\bar{\theta}^\pm_i}{\partial x}\right]\bigg|_{x=\hat{\varphi}_{1,2}} = -2\hat{\varphi}_{1,2t}, \tag{6}$$

$$\bar{\theta}^\pm_i\big|_{x=\hat{\varphi}_{1,2}} = \pm\kappa\hat{\varphi}_{1,2t}. \tag{7}$$

В уравнениях (4)—(7) $i = 1, 2$, $\bar{\theta}^+_i$ — температура среды в областях $\Omega^+_{i,t}$, $\bar{\theta}^-_1 \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\theta}^-_2 \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\theta}^-$ — температура в области Ω^-_t (т. е. $\bar{\theta} = \bar{\theta}^+$ при $x \in \Omega^+_{i,t}$ и $\bar{\theta} = \bar{\theta}^-$ при $x \in \Omega^-_t$), κ — некоторая постоянная, $[g]|_{\Gamma_{i,t}} = g(\hat{\varphi}_{1,2} + 0) - g(\hat{\varphi}_{1,2} - 0)$ — скачок функции g на границе $\Gamma_{i,t}$.

Будем предполагать, что начальные данные задачи Стефана—Гиббса—Томсона (4)—(7) выбраны таким образом, что левая граница $\Gamma_{1,t}$ движется вправо ($\hat{\varphi}_{1t} > 0$), а правая граница $\Gamma_{2,t}$ — влево ($\hat{\varphi}_{2t} < 0$). Функции $\hat{\varphi}_{1,2}(t) \in C^1$ существуют при $0 < t < t^*$ ($t = t^*$ — момент слияния $\hat{\varphi}_1(t^*) = \hat{\varphi}_2(t^*)$), $\bar{\theta}^\pm(x,t) \in C^{2,1}$. Заметим, что в рассматриваемом случае у системы (1), (2) при $\hat{\varphi}_2(t) - \hat{\varphi}_1(t) > 0$ существует классическое решение. Существование такого решения следует из результатов работы [2][1]. Также мы должны предположить существование пределов

$$\lim_{t\to t^*-0} \hat{\varphi}_i(t), \quad i = 1, 2. \tag{8}$$

[1] А. М. Мейрманов. Частное сообщение.

В рассматриваемой ситуации асимптотика решения системы (1), (2) имеет вид

$$\theta_\varepsilon^{as} = \bar{\theta}^-(x,t) + (\bar{\theta}^+(x,t) - \bar{\theta}^-(x,t))\omega_1\left(\frac{\hat{\varphi}_1(t)-x}{\varepsilon}\right)\omega_1\left(\frac{x-\hat{\varphi}_2(t)}{\varepsilon}\right), \qquad (9)$$

$$u_\varepsilon^{as} = 1 + \omega_0\left(\frac{\hat{\varphi}_1(t)-x}{\varepsilon} + \check{\varphi}_1\right) + \\ + \omega_0\left(\frac{x-\hat{\varphi}_2(t)}{\varepsilon} + \check{\varphi}_2\right) + \varepsilon\left[\frac{\theta_\varepsilon^{as}}{2} + \omega\left(t, \frac{\hat{\varphi}_1(t)-x}{\varepsilon}, \frac{x-\hat{\varphi}_2(t)}{\varepsilon}\right)\right] \qquad (10)$$

при $t < t^*$. Здесь $\omega_1(z) \to 0, 1$ при $z \to \pm\infty$, $\omega_1^\alpha(z) \in \mathbb{S}(\mathbb{R}_z^1)$ при $\alpha > 0$, $\check{\varphi}_1(t)$, $\check{\varphi}_2(t)$ — некоторые гладкие функции. Функция $\omega_0(z) = \operatorname{th}(z)$ — решение модельного уравнения, $\omega(t, z_1, z_2) \in C^\infty([0,t^*], \mathbb{S}(\mathbb{R}_z^2))$. Если начальные данные для (1), (2) имеют вид (9), (10) при $t = 0$, то при $t < t^*$ выполнена оценка

$$\|u - u_\varepsilon^{as}; C(0,T; L^2(\mathbb{R}^1)\| + \|\theta - \theta_\varepsilon^{as}; \mathcal{L}^2(Q)\| \leqslant c\varepsilon^\mu, \quad \mu \geqslant \frac{3}{2}$$

(см. [1,5,8]). Здесь $Q = \mathbb{R}^1 \times [0, t^*)$, постоянная c не зависит от ε.

Основная цель нашей работы заключается в построении формального асимптотического решения системы (1), (2), которое описывало бы взаимодействие свободных границ, т. е. мы хотим построить некоторую приближённую (асимптотическую) формулу для решения системы (1), (2), работающую при $t \in [0, t_1]$, $t_1 > t^*$. Согласно общим теоремам существования такое решение задачи (1), (2) в рассматриваемой ситуации существует. Однако его построение традиционными методами затруднено, потому что в случае взаимодействия свободных границ в рамках классических асимптотических методов, для того чтобы найти главный член асимптотики функции порядка, необходимо решить уравнение в частных производных. Мы используем другой подход, который называется методом слабых асимптотик [6, 7, 9, 10, 12].

Необходимо отметить, что единственным примером аккуратного качественного анализа задачи слияния свободных границ, известным авторам, является исследование задачи Хеле—Шоу А. Мейрмановым и Б. Зальтцманом в [11]. Кроме того, при исследовании взаимодействия свободных границ в задаче Стефана—Гиббса—Томсона метод слабых асимптотик использовал Г. Омельянов [12].

2. Основные результаты

Главными результатами нашей работы являются формулы для слабого асимптотического решения системы фазового поля, определённого при $t \geqslant 0$. Эти формулы позволяют качественно описать поведение температуры во время слияния свободных границ. В задаче Стефана—Гиббса—Томсона в момент слияния происходит скачок температуры с конечной амплитудой: профиль графика резко меняется с W-образного на V-образный.

В случае задачи (4)—(7) слабое асимптотическое решение имеет вид

$$\hat{u}_\varepsilon = \frac{1}{2}\left[1 + \omega_0\left(\beta\frac{\varphi_1 - x}{\varepsilon}\right) + \omega_0\left(\beta\frac{x - \varphi_2}{\varepsilon}\right) - \right.$$
$$\left. - \omega_0\left(\beta\frac{\varphi_1 - x}{\varepsilon}\right)\omega_0\left(\beta\frac{x - \varphi_2}{\varepsilon}\right)\right], \tag{11}$$

$$\hat{\theta}_\varepsilon = T_\varepsilon + (\hat{\gamma} + \hat{\Pi})\omega_1\left(\frac{x - \varphi_1}{\varepsilon}\right)\omega_1\left(\frac{\varphi_2 - x}{\varepsilon}\right). \tag{12}$$

В формулах (11), (12) $\varphi_i(t,\varepsilon) = \varphi_{i0}(t) + \varepsilon\tau\varphi_{i1}(\tau,t)$, $i = 1,2$, где φ_{i0} — продолжения решений задачи Стефана—Гиббса—Томсона (4)—(7) с отрезка $[0,t^*]$ на отрезок $[0,t_1]$ с сохранением гладкости и знака производных, функции φ_{i1} находятся из формулы (46),

$$\tau = \frac{\varphi_{20}(t) - \varphi_{10}(t)}{\varepsilon}; \tag{13}$$

$\beta = 1 + \beta_1(\tau)$, функция β_1 определяется из равенства (37) и является положительной гладкой и равномерно ограниченной по $\tau \in (-\infty,\infty)$, причём $\varphi_{i1} \to 0$, $\beta_1 \to 0$ при $\tau \to \infty$; функции ω_0, ω_1 определены в (9), (10);

$$\hat{\Pi}(x,t) = \hat{\gamma}^-(x,t)\frac{(x - \varphi_1(t,\varepsilon))(\varphi_2(t,\varepsilon) - x)}{\varphi_2(t,\varepsilon) - \varphi_1(t,\varepsilon)},$$

где $\hat{\gamma}^-$ и $\hat{\gamma}$ — гладкие продолжения с сохранением знака производной функций $\gamma^- = \gamma_0^-(t)x + \gamma_1^-(t)$ и γ, определённых в (17), в область $t > t^*$. При этом с учётом (44), (45) на функции γ_0^-, γ_1^- имеем уравнения (36).

Для нахождения функции T_ε в формуле (12), определённой при $t \geqslant t^*$, имеем систему

$$\begin{aligned}
LT_\varepsilon &= F(x,t) - \frac{\beta\varphi_{1t}}{2\varepsilon}\dot{\omega}_0\left(\beta\frac{\varphi_1 - x}{\varepsilon}\right)\left[1 - \omega_0\left(\beta\frac{x - \varphi_2}{\varepsilon}\right)\right] + \\
&\quad + \frac{\beta\varphi_{2t}}{2\varepsilon}\dot{\omega}_0\left(\beta\frac{x - \varphi_2}{\varepsilon}\right)\left[1 - \omega_0\left(\beta\frac{\varphi_1 - x}{\varepsilon}\right)\right], \\
T_\varepsilon|_{t=0} &= \hat{\theta}_\varepsilon|_{t=0} - \left\{(\gamma + \hat{\Pi})\omega_1\left(\frac{x - \varphi_1}{\varepsilon}\right)\omega_1\left(\frac{\varphi_2 - x}{\varepsilon}\right)\right\}\Big|_{t=0}, \\
T_\varepsilon|_{x=l_{1,2}} &= \hat{\theta}_\varepsilon|_{x=l_{1,2}}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Здесь мы обозначили

$$F(x,t) = -L\left[\hat{\Pi}\omega_1\left(\frac{x - \varphi_1}{\varepsilon}\right)\omega_1\left(\frac{\varphi_2 - x}{\varepsilon}\right)\right],$$

оператор L определён в (3).

3. Построение слабого асимптотического решения

Согласно методу слабых асимптотик необходимо регуляризовать задачу (4)—(7). Подходящей регуляризацией как раз и является система фазового поля (1), (2) (см. [1, 4, 5, 8]).

Определение 1. Пара гладких функций $(\hat{u}_\varepsilon, \hat{\theta}_\varepsilon)$ является слабым асимптотическим решением системы (1), (2), если для любой пробной функции $\zeta(x)$ выполнены следующие соотношения:

$$\int (\hat{u}_{\varepsilon t} + \hat{\theta}_{\varepsilon t})\zeta\,dx + \int \hat{\theta}_{\varepsilon x}\zeta_x\,dx = \mathcal{O}(\varepsilon), \tag{15}$$

$$\varepsilon \int \hat{u}_{\varepsilon t}\zeta\,dx + \frac{\varepsilon}{2}\int \hat{u}_\varepsilon^2 \zeta_x\,dx - \\ - \frac{1}{\varepsilon}\int \left(\frac{\hat{u}_\varepsilon^4}{4} - \frac{\hat{u}_\varepsilon^2}{2} + \frac{1}{4}\right)\zeta_x\,dx + \varepsilon\varkappa \int \hat{u}_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}(\hat{\theta}_\varepsilon \zeta)\,dx = \mathcal{O}(\varepsilon). \tag{16}$$

Здесь и далее все интегралы берутся по $\mathbb{R}^1$.

Уравнение (16) получено умножением (2) на $\hat{u}_{\varepsilon x}$ и интегрированием по частям. Остатки $\mathcal{O}(\varepsilon)$ в правых частях (15) и (16) должны быть ограничены по t, т. е. для любого $t_1 \in [0, \infty)$ мы имеем

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant t_1} |\mathcal{O}(\varepsilon)| \leqslant C_{t_1}\varepsilon, \quad C_{t_1} = \text{const}.$$

Эта конструкция была введена и проанализирована в [1].

Заметим, что все наши построения формальные. Мы не доказываем близость построенных функций к точному решению системы (1), (2) при всех рассматриваемых временах. В то же время, как было отмечено выше, при $t < t^*$ асимптотика обоснована.

В случае задачи с двумя свободными границами до момента взаимодействия $t = t^*$ существует две области с веществом в фазе $+$ и область Ω_t^-. В момент контакта свободных границ область (интервал) Ω_t^- исчезает, и при $t > t^*$ существует только фаза $+$. Также понятно, что задача (1), (2) существенно нелинейная и представление решения для функции порядка в виде суммы кинков, как это делалось в [1] в случае невзаимодействующих границ, здесь (из-за слияния границ) невозможно. Если границы $\Gamma_{i,t}$ находятся на достаточно большом расстоянии друг от друга при $t < t^*$, т. е.

$$|\hat{\varphi}_2 - \hat{\varphi}_1| > \varepsilon^{1-\mu}, \quad \mu > 0,$$

то функция порядка в (1), (2) имеет вид (10). В то же время, если $t = t^*$ и $\hat{\varphi}_t \neq 0$, эти формулы не дают правильного ответа даже качественно.

В случае задачи (4), (6), (7) будем искать решение системы (1), (2) в виде (11) и

$$\hat{\theta}_\varepsilon = \gamma(x,t) + T_{\mathrm{l}}^{+}\omega_1\left(\frac{\varphi_1 - x}{\varepsilon}\right) + T_{\mathrm{r}}^{+}\omega_1\left(\frac{x-\varphi_2}{\varepsilon}\right) + \\ + T^{-}\omega_1\left(\frac{x-\varphi_1}{\varepsilon}\right)\omega_1\left(\frac{\varphi_2 - x}{\varepsilon}\right), \quad (17)$$

где

$$\gamma(x,t) = \frac{(\varphi_{2t}(t) - \varphi_{1t}(t))x + \varphi_2(t,\varepsilon)\varphi_{1t}(t) - \varphi_1(t,\varepsilon)\varphi_{2t}(t)}{\varphi_2(t,\varepsilon) - \varphi_1(t,\varepsilon)},$$

$$T^{-}(x,t) = \gamma^{-}(x,t)\frac{(x-\varphi_1(t,\varepsilon))(\varphi_2(t,\varepsilon)-x)}{\varphi_2(t,\varepsilon)-\varphi_1(t,\varepsilon)}, \quad \gamma^{-}(x,t) = \gamma_0^{-}(t)x + \gamma_1^{-}(t),$$

$$T_{\mathrm{l}}^{+}(x,t) = \gamma_{\mathrm{l}}^{+}(x,t)(\varphi_1(t) - x), \quad T_{\mathrm{r}}^{+}(x,t) = \gamma_{\mathrm{r}}^{+}(x,t)(x - \varphi_2(t)).$$

Здесь γ_0^-, γ_1^-, γ_{l}^+, γ_{r}^+ — некоторые функции. Напомним, что при $t < t^*$ функции $\varphi_{10} = \hat{\varphi}_1$, $\varphi_{20} = \hat{\varphi}_2$ находятся из задачи (4)—(7). Продолженные функции мы также будем обозначать φ_{10}, φ_{20}, поскольку согласно нашим предположениям функции $\hat{\varphi}_{1,2}(t)$ могут быть продолжены для значений времени $t > t^*$ с сохранением гладкости и знака производных. Итак, переменная $\tau = \tau(t,\varepsilon)$ (см. (13)) определена при $t \geqslant t^*$, $\tau \to \infty$ при $t < t^*$ и $\varepsilon \to 0$ (до взаимодействия свободных границ), $\tau \to -\infty$ при $t > t^*$ и $\varepsilon \to 0$ (после взаимодействия свободных границ). Функцию β будем искать в виде $\beta = \beta_0(t) + \beta_1(\tau) > 0$.

Из формулы (11) получаем, что если $\varphi_2(t) - \varphi_1(t) > 0$, то

$$\hat{u}_\varepsilon = 1 - o(1), \qquad x < \varphi_1,\ x > \varphi_2,$$
$$\hat{u}_\varepsilon = -1 + o(1), \quad \varphi_1 < x < \varphi_2.$$

Если $\varphi_1(t^*) = \varphi_2(t^*) = x^*$, то

$$\hat{u}_\varepsilon = \frac{1 + \omega_0^2(\beta(x-x^*)/\varepsilon)}{2},$$

если $\varphi_2(t) - \varphi_1(t) < 0$, то

$$\hat{u}_\varepsilon = 1 - o(\varepsilon^N)$$

для любого $N > 0$, $x \in \mathbb{R}^1$.

Согласно определению 1, чтобы построить слабое асимптотическое решение системы фазового поля (1), (2) в виде (11), (17), мы должны потребовать удовлетворения соотношений (15), (16).

В частности, нам потребуется следующее определение. Будем считать, что семейство функций $f(t,x,\varepsilon)$ допускает оценку $\mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^\nu)$, если для любой пробной функции $\zeta(x)$ выполнено соотношение

$$\langle f, \zeta\rangle = \mathcal{O}(\varepsilon^\nu),$$

причём эта оценка является равномерной по $t \in [0, t_1]$.

Имеем

$$L\hat{\theta}_\varepsilon + \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t} = W_0[H(\varphi_2 - x) - H(\varphi_1 - x)] + W_1 H(\varphi_1 - x) + \\ + W_2[1 - H(\varphi_2 - x)] + W_1^1 \delta(x - \varphi_1) + W_2^1 \delta(\varphi_2 - x) + \\ + W_1^2 \delta'(x - \varphi_1) + W_2^2 \delta'(\varphi_2 - x) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon), \tag{18}$$

$$\frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial x} \mathcal{L}\hat{u}_\varepsilon = V_1^1 \delta(x - \varphi_1) + V_2^1 \delta(\varphi_2 - x) + \\ + V_1^2 \delta'(x - \varphi_1) + V_2^2 \delta'(\varphi_2 - x) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon), \tag{19}$$

где операторы L и $\mathcal{L}$ определены в (3). В уравнениях (18), (19) $H(\varphi_2 - x)$, $H(\varphi_1 - x)$ — функции Хевисайда на границах $\Gamma_{i,t}$ $(x = \varphi_{1,2})$, $\delta(x - \varphi_1)$, $\delta(\varphi_2 - x)$, $\delta'(x - \varphi_1)$, $\delta'(\varphi_2 - x)$ — δ-функции Дирака и их производные с носителями $\Gamma_{i,t}$.

В правой части (18) коэффициенты при функциях Хевисайда имеют вид

$$W_0 = B_{\dot{1}1}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(\gamma + T^-), \quad \varphi_1 < x < \varphi_2, \tag{20}$$

$$W_1 = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(\gamma + T_{\mathrm{l}}^+), \qquad x < \varphi_1, \tag{21}$$

$$W_2 = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\gamma + T_{\mathrm{r}}^+\right), \qquad x > \varphi_2. \tag{22}$$

Коэффициенты при δ-функциях в (18) определены формулами

$$W_1^1 = -\gamma_{\mathrm{l}}^+(\varphi_1, t) - \gamma^-(\varphi_1, t) B_{\dot{1}1} + \frac{\varphi_{1t}}{2}(2 - B_{\dot{0}0}) + \frac{\beta_\tau(\varphi_{20t} - \varphi_{10t})}{2\beta^2} B_{\dot{0}0}^z, \tag{23}$$

$$W_2^1 = -\gamma_{\mathrm{r}}^+(\varphi_2, t) - \gamma^-(\varphi_2, t) B_{\dot{1}1} - \frac{\varphi_{2t}}{2}(2 - B_{\dot{0}0}) + \frac{\beta_\tau(\varphi_{20t} - \varphi_{10t})}{2\beta^2} B_{\dot{0}0}^z. \tag{24}$$

Здесь мы обозначили

$$B_{\dot{0}0} = \int \dot{\omega}_0(z)\omega_0(-\eta - z)\, dz, \quad B_{\dot{1}1} = \int \dot{\omega}_1(z)\omega_1(\eta - z)\, dz,$$

$$B_{\dot{0}0}^z = \int z\dot{\omega}_0(z)\omega_0(-\eta - z)\, dz, \quad \eta = \rho\beta, \quad \rho = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varepsilon}.$$

Коэффициенты при производных δ-функций в (18) заданы соотношениями

$$W_1^2 = T_{\mathrm{l}}^+|_{x=\varphi_1} = 0,$$
$$W_2^2 = T_{\mathrm{r}}^+|_{x=\varphi_2} = 0.$$

В уравнении (19) коэффициенты при δ-функциях имеют вид

$$V_1^1 = -\frac{\varphi_{1t}}{4}(2a_F - 2B_{\dot{0}^2 0} - B_{\dot{0}^2 0^2}) + \frac{\varkappa\varphi_{1t}}{2}(2 - B_{\dot{0}0}) - \\ - \frac{\beta_\tau(\varphi_{20t} - \varphi_{10t})}{4\beta^2}(2B_{\dot{0}^2 0}^z - B_{\dot{0}^2 0^2}^z) + \frac{\varphi_{1t}}{8}(C_{\dot{0}\dot{0}} - 2C_{\dot{0}\dot{0}0} + C_{\dot{0}\dot{0}00}) + \\ + \frac{\beta_\tau(\varphi_{20t} - \varphi_{10t})}{4\beta^2}(C_{\dot{0}\dot{0}}^z - 2C_{\dot{0}\dot{0}0}^z + C_{\dot{0}\dot{0}00}^z), \tag{25}$$

$$
\begin{aligned}
V_2^1 = &-\frac{\varphi_{2t}}{4}(2a_F - 2B_{\dot{0}^2 0} - B_{\dot{0}^2 0^2}) + \frac{\varkappa\varphi_{2t}}{2}(2 - B_{\dot{0}0}) - \\
&- \frac{\beta_\tau(\varphi_{20t} - \varphi_{10t})}{4\beta^2}(2B^z_{\dot{0}^2 0} - B^z_{\dot{0}^2 0^2}) + \frac{\varphi_{2t}}{8}(C_{\dot{0}\dot{0}} - 2C_{\dot{0}\dot{0}0} + C_{\dot{0}\dot{0}00}) + \\
&+ \frac{\beta_\tau(\varphi_{20t} - \varphi_{10t})}{4\beta^2}(C^z_{\dot{0}\dot{0}} - 2C^z_{\dot{0}\dot{0}0} + C^z_{\dot{0}\dot{0}00}), \qquad (26)
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{gathered}
A_{\dot{0}1} = \int \dot\omega_0(z)\omega_1\left(\frac{z}{\beta}\right) dz, \quad \hat B_{\dot{0}01} = \int \dot\omega_0(z)\omega_0(-\eta - z)\omega_1\left(\frac{z}{\beta}\right) dz, \\
\hat B_{\dot{0}11} = \int \dot\omega_0(z)\omega_1\left(\frac{z}{\beta}\right)\omega_1\left(-\rho - \frac{z}{\beta}\right) dz, \\
B_{\dot{0}^2 0} = \int \dot\omega_0^2(z)\omega_0(-\eta - z)\, dz, \quad B_{\dot{0}^2 0^2} = \int \dot\omega_0^2(z)\omega_0^2(-\eta - z)\, dz, \\
B^z_{\dot{0}^2 0} = \int z\dot\omega_0^2(z)\omega_0(-\eta - z)\, dz, \quad B^z_{\dot{0}^2 0^2} = \int z\dot\omega_0^2(z)\omega_0^2(-\eta - z)\, dz, \\
C_{\dot{0}\dot{0}} = \int \dot\omega_0(z)\dot\omega_0(-\eta - z)\, dz, \quad C_{\dot{0}\dot{0}0} = \int \dot\omega_0(z)\dot\omega_0(z)\omega_0(-\eta - z)\, dz, \\
C_{\dot{0}\dot{0}00} = \int \dot\omega_0(z)\dot\omega_0(-\eta - z)\omega_0(z)\omega_0(-\eta - z)\, dz, \quad C^z_{\dot{0}\dot{0}} = \int z\dot\omega_0(z)\dot\omega_0(-\eta - z)\, dz, \\
C^z_{\dot{0}\dot{0}0} = \int z\dot\omega_0(z)\dot\omega_0(z)\omega_0(-\eta - z)\, dz, \\
C^z_{\dot{0}\dot{0}00} = \int z\dot\omega_0(z)\dot\omega_0(-\eta - z)\omega_0(z)\omega_0(-\eta - z)\, dz, \\
a_F = \int F(\omega_0(z))\, dz, \quad F(\omega_0) = \frac{\omega_0^4}{4} - \frac{\omega_0^2}{2} + \frac{1}{4}. \qquad (27)
\end{gathered}
$$

Коэффициенты при производных δ-функций в (19) заданы формулой

$$
V_i^2 = \beta^2 \hat C - \hat D, \quad i = 1, 2, \qquad (28)
$$

где мы обозначили

$$
\hat C = \frac{1}{8}(2a_F - 2B_{\dot{0}^2 0} + B_{\dot{0}^2 0^2} - C_{\dot{0}\dot{0}} + 2C_{\dot{0}\dot{0}0} - C_{\dot{0}\dot{0}00}), \qquad (29)
$$

$$
\hat D = \int F\left(\frac{1}{2}(\omega_0(z) + \omega_0(-\eta - z) + \omega_0(z)\omega_0(-\eta - z)) - 1\right) dz. \qquad (30)
$$

Согласно определению 1 пара функций (11), (17) является слабым асимптотическим решением системы (1), (2), если выполнены соотношения $L\hat\theta_\varepsilon = \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon)$, $\hat u_{\varepsilon x}\mathcal{L}\hat u_\varepsilon = \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon)$. Согласно лемме 2 эти уравнения удовлетворяются, если справедливы равенства

$$
\begin{gathered}
W_0(x, t, \tau) = 0, \\
W_i(x, t, \tau) = 0, \quad W_i^2(t, \tau) = 0, \quad V_i^2(t, \tau) = 0, \quad i = 1, 2, \qquad (31) \\
W_1^1(t, \tau) + W_2^1(t, \tau) = 0, \quad V_1^1(t, \tau) + V_2^1(t, \tau) = 0,
\end{gathered}
$$

где соответствующие коэффициенты определены формулами (20)—(26). Заметим, что в формуле (31) необходимость выполнения последних двух равенств следует из предположения, что коэффициенты W_i^1 и V_i^1, $i = 1, 2$, достаточно быстро убывают при $\tau \to \pm\infty$. Поскольку равенство $\lim\limits_{\tau \to -\infty} V_i^1(t, \tau) = 0$ выполняется без дополнительных условий, то наше предположение верно, если $\lim\limits_{\tau \to +\infty} V_i^1(t, \tau) = 0$. Пределы при $\tau \to +\infty$ дают уравнения Гиббса—Томсона (7) до взаимодействия свободных границ. Аналогично равенство $W_1^1 + W_2^1 = 0$ верно при условии, что выполнено уравнение Стефана (6).

Итак, если уравнения Стефана и Гиббса—Томсона выполнены до взаимодействия ($\tau \to +\infty$), то мы получаем систему уравнений

$$B_{\mathrm{i}1} L(T^- + \gamma) = 0, \quad \varphi_1 < x < \varphi_2, \tag{32}$$

$$L(\hat{\gamma}_{\mathrm{l}}^+(x - \varphi_1) + \hat{\gamma}) = 0, \quad x < \varphi_1, \quad L(\hat{\gamma}_{\mathrm{r}}^+(\varphi_2 - x) + \hat{\gamma}) = 0, \quad x > \varphi_2,$$

$$\begin{aligned} &\hat{\gamma}_{\mathrm{r}}^+(\varphi_2, t) + \hat{\gamma}_{\mathrm{l}}^+(\varphi_1, t) + (\hat{\gamma}^-(\varphi_2, t) + \hat{\gamma}^-(\varphi_1, t)) B_{\mathrm{i}1} + \\ &\quad + (\varphi_{2t} - \varphi_{1t}) \left(1 - \frac{B_{\dot{0}0}}{2}\right) + \frac{\beta_\tau(\varphi_{20t} - \varphi_{10t})}{\beta^2} = 0, \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} &- (\varphi_{2t} + \varphi_{1t})(2a_F - 2B_{\dot{0}^2 0} + B_{\dot{0}^2 0^2}) + \frac{\varkappa}{2}(\hat{\gamma}(\varphi_2, t) - \hat{\gamma}(\varphi_1, t))(2 - B_{\dot{0}0}) + \\ &\quad + \frac{\beta_\tau(\varphi_{20t} - \varphi_{10t})}{2\beta^2}(2B^z_{\dot{0}^2 0} - B^z_{\dot{0}^2 0^2} + C^z_{\dot{0}\dot{0}} - 2C^z_{\dot{0}\dot{0}0} + C^z_{\dot{0}\dot{0}00}) + \\ &\quad + \frac{\varphi_{2t} + \varphi_{1t}}{4}(C_{\dot{0}\dot{0}} - 2C_{\dot{0}\dot{0}0} + C_{\dot{0}\dot{0}00}) = 0. \end{aligned} \tag{34}$$

Здесь функции $\hat{\gamma}$, $\hat{\gamma}^-$, $\hat{\gamma}_{\mathrm{l}}^+$, $\hat{\gamma}_{\mathrm{r}}^+$ являются гладкими продолжениями с сохранением знака производной в область $t > t^*$ соответственно функций γ, γ^-, γ_{l}^+, γ_{r}^+, определённых в (17). Уравнение $B_{\mathrm{i}1} L(T^- + \gamma) = 0$ в (32) означает, что $L(T^- + \gamma) = 0$ при $\varphi_1 < x < \varphi_2$, а при $t > t*$ оно справедливо для любой функции $G = T^- + \gamma$, такой что $L(G) = \mathcal{O}(\varepsilon^{-m})$, где m — некоторое фиксированное число, так как $B_{\mathrm{i}1}(\rho) = \mathcal{O}(\varepsilon^N)$ для любого N при $t > t^*$. Ниже мы докажем, что система (32)—(34) является регуляризацией обобщения задачи Стефана—Гиббса—Томсона (4), (6), (7) на времена $t \in [0, t_1]$, где $t_1 > t^*$.

4. Динамика свободных границ до взаимодействия

Принимая во внимание наши предположения, получаем, что до взаимодействия $\varphi_{i1} \to 0$, $i = 1, 2$, и, следовательно, $\tau \to \infty$, $\rho/\tau \to 1$ при $\varepsilon \to 0$, $t < t^*$.

Рассмотрим предел формулы (28) при $\tau \to \infty$. Ясно, что содержащиеся в $\hat{C}$ слагаемые $C_{\dot{0}\dot{0}}$, $C_{\dot{0}\dot{0}0}$ и $C_{\dot{0}\dot{0}00}$ стремятся к нулю при $\tau \to \infty$. Известно, что $\ddot{\omega}_0 = -\omega_0 + \omega_0^3$. Следовательно, умножая на $\dot{\omega}_0$ и интегрируя по $\mathbb{R}_z^1$ последнее уравнение, мы получим формулу для a_F:

$$2a_F = A_{\dot{0}^2} = \int \dot{\omega}_0^2(z)\, dz.$$

Ясно также, что $B_{\dot{0}^2 0} \to 2a_F$ и $B_{\dot{0}^2 0^2} \to 2a_F$ при $\rho \to \infty$. Отсюда получаем, что $\hat{C}_F \to a_F$ при $\rho \to \infty$. Непосредственный анализ коэффициента $\hat{D}$ показывает, что $\hat{D} \to a_F$ при $\rho \to \infty$.

Таким образом, с учётом наших предположений относительно функции β и проведённого выше анализа из предположения равенства нулю коэффициентов (28) имеем уравнение

$$\beta_0^2 - 1 = 0$$

при $\tau \to \infty$ (т. е. до слияния свободных границ). Поскольку мы считаем, что функция β положительная, то последнее уравнение имеет единственный корень

$$\beta_0 = 1. \tag{35}$$

Из наших построений следует, что условие (5) выполнено. При $\tau \to \infty$ из уравнения (34) получаем

$$\varkappa\gamma(\varphi_{10}(t), t) = A_{\dot{0}^2}\varphi_{10t}, \quad \varkappa\gamma(\varphi_{20}(t), t) = -A_{\dot{0}^2}\varphi_{20t},$$

где $\gamma(x, t)$ — температура (см. (17)). Итак, уравнения Гиббса—Томсона (7) выполняются, $\kappa = A_{\dot{0}^2}/\varkappa$. Предел при $\tau \to \infty$ в уравнении (33) даёт

$$(\gamma_0^- \varphi_{10} + \gamma_1^- + \gamma_{\mathrm{l}}^+)|_{x=\varphi_{10}} = 2\varphi_{10t}, \quad (\gamma_0^- \varphi_{20} + \gamma_1^- + \gamma_{\mathrm{r}}^+)|_{x=\varphi_{20}} = -2\varphi_{20t}. \tag{36}$$

Уравнения (36) в точности совпадают с уравнениями Стефана (6). Понятно также, что предел при $\tau \to \infty$ в (32) соответствует уравнению (4).

Итак, система (32)—(34) переходит в задачу Стефана—Гиббса—Томсона (4)—(7) на временах, предшествующих моменту слияния.

5. Слияние свободных границ

Исследуем решения системы фазового поля в случаях задачи Стефана и задачи Стефана—Гиббса—Томсона после слияния свободных границ. Имеем $\varphi_{20}(t) - \varphi_{10}(t) < 0$ и, следовательно, $\tau \to -\infty$ при $\varepsilon \to 0$.

Для того чтобы найти функцию $\beta_1(\tau)$, из равенства нулю коэффициентов (28) с учётом (35) получаем формулу

$$(1 + \beta_1)^2 = \frac{\hat{D}}{\hat{C}}. \tag{37}$$

Выражение для функции F из формулы (28) даёт, что $F(z) \geqslant 0$ при $z \in \mathbb{R}^1$, следовательно, $\hat{D} \geqslant 0$. Аналогично определённая в (28) функция $\hat{C}$ является главным членом асимптотики выражения $(\partial u/\partial x)^2$, и следовательно, она также положительная. Используя явную формулу

$$\omega_0(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^z}$$

и явный вид (27) и (29), (30) функции $F(z)$ и выражений $\hat{C}$, $\hat{D}$, можно проверить, что

$$\lim_{\eta\to-\infty}\frac{\hat{C}}{e^{2\eta}} = \mathrm{const} \neq 0, \quad \lim_{\eta\to-\infty}\frac{\hat{D}}{e^{2\eta}} = \mathrm{const} \neq 0.$$

Итак, правая часть соотношения (37) вещественная и положительная. Это означает, что существует единственный положительный корень уравнения (37). Этим корнем является вещественная ограниченная функция $\beta_1 = \beta_1(\rho)$. Таким образом, $\beta_1 \to 0$ при $\rho \to \infty$ и $\beta_1 \to \mathrm{const} \neq 0$ при $\rho \to -\infty$.

Как было отмечено в разделе 4, справедливость уравнений (5) вытекает непосредственно из наших построений.

Проблема рассматриваемых задач со взаимодействием состоит в гладком продолжении с сохранением знака производной температуры в область $t > t^*$, точнее, необходимо гладким образом определить температуру в окрестности точки (t^*, x^*). Указав способ продолжения, мы докажем глобальность системы (32)—(34). В нашем случае это легко сделать, поскольку функцию γ^- в (17) мы ищем в линейном виде.

Обозначим продолженные функции $\hat{\gamma}_{\mathrm{l}}^+ = \gamma_{\mathrm{l}}^+$ и $\hat{\gamma}_{\mathrm{r}}^+ = \gamma_{\mathrm{r}}^+$ (см. (17)), где $t \in [0, t_1]$, $t_1 > t^*$, и определим глобальную температуру как решение системы (14). Используя формулы метода слабых асимптотик, получим

$$\begin{aligned} F(x,t) - \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t} &= \hat{\Pi}_t B_{\dot{1}1}(H(\varphi_2 - x) - H(\varphi_1 - x)) + \\ &+ [\hat{\gamma}^-\delta(x-\varphi_2) - \hat{\gamma}^-\delta(x-\varphi_1)]B_{\dot{1}1} + \\ &+ \left(1 - \frac{B_{\dot{0}0}}{2}\right)[\varphi_{1t}\delta(x-\varphi_1) - \varphi_{2t}\delta(x-\varphi_2)] + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon). \end{aligned} \tag{38}$$

Если нам известны функции $\varphi_{1,2}$, то система (14) позволяет определить функцию T_ε при $t \geqslant t^*$. Можно проверить, что различные продолжения $\hat{\gamma}$ на времена $t \geqslant t^*$ приводят к изменениям порядка $\mathcal{O}(\varepsilon)$ для функции $F(x,t)$. Это следует из леммы 3.

Очевидно, что выполнено равенство

$$\hat{\theta}_\varepsilon = T_\varepsilon + \hat{\Pi}\omega_1\left(\frac{x-\varphi_1}{\varepsilon}\right)\omega_1\left(\frac{\varphi_2 - x}{\varepsilon}\right) \tag{39}$$

(см. (14)).

Поскольку в рассматриваемой задаче область $\Omega_t^- = [\varphi_1, \varphi_2]$ существует только при $t < t^*$ ($\varphi_2 - \varphi_1 < 0$ при $t > t^*$, поэтому $\hat{\Pi}\omega_1((x-\varphi_1)/\varepsilon)\omega_1((\varphi_2-x)/\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^N)$ при $t > t^*$), то $\hat{\theta}_\varepsilon = T_\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon)$ при $t > t^*$ Ясно, что по (14) имеем $T_\varepsilon \in \mathbb{C}^\infty$ при $t > t^*$. С учётом (17) получим выражение для T_ε:

$$\begin{aligned} T_\varepsilon = B_{\dot{1}1}\hat{T}^-[H(\varphi_2 - x) - H(\varphi_1 - x)] &+ \\ + T_{\mathrm{l}}^+ H(\varphi_1 - x) + T_{\mathrm{r}}^+ H(\varphi_2 - x) &+ \hat{\gamma}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned} \tag{40}$$

где $\hat{T}^- = \hat{\Pi} - T^-$, $\partial\hat{T}^-/\partial x|_{x=\varphi_i} = 0$, $i = 1,2$, и $\hat{\gamma}(t) = \gamma(\varphi_1(t),\varphi_2(t),t)$. Обозначим главный член асимптотики T_ε через T_0. Имеем

$$T_0|_{x=\pm\varphi} = \{B_{\dot{1}1}\hat{T}^-[H(\varphi_2 - x) - H(\varphi_1 - x)]\}|_{x=\varphi_{1,2}} + \hat{\gamma}(t) = \hat{\gamma}(t). \qquad (41)$$

Итак, задача (14) позволяет определить «глобальное» решение, которое, во-первых, описывает температуру в области Ω при $t < t^*$ (см. формулу (39)) и, во-вторых, не зависит от топологии области. Последнее означает, что «глобальная» температура определена при $t \geqslant t^*$, т. е. после слияния свободных границ.

Упомянутые выше факты верны при условии, что функции $\varphi_{1,2}$ определены при $t > t^*$ и $\varphi_2 - \varphi_1 < 0$ при $t > t^*$. Казалось бы, уравнение (33) позволяет нам определить функции $\varphi_{1,2}$ при $t > t^*$. Однако оно содержит неизвестные функции $\hat{\gamma}^+_{l,r}(\varphi_{1,2},t)$, имеющие смысл левой (правой) производных температуры в точках $x = \varphi_{1,2}$. Заметим, что согласно (40) функции $\hat{\gamma}^+_{l,r}$ могут быть найдены из (14) как скачки функции $(T_\varepsilon)_x$ в точках $x = \varphi_{1,2}$. Легко проверить, что выполнены уравнения

$$\hat{\gamma}^+_{\mathrm{l}}(\varphi_1,t) = \frac{\varphi_{1t}}{2}(2 - B_{\dot{0}0}) - \hat{\gamma}^-(\varphi_1,t)B_{\dot{1}1} + \frac{\beta_\tau(\varphi_{20t} - \varphi_{10t})}{2\beta^2}B^z_{\dot{0}0}, \qquad (42)$$

$$\hat{\gamma}^+_{\mathrm{r}}(\varphi_2,t) = -\frac{\varphi_{2t}}{2}(2 - B_{\dot{0}0}) - \hat{\gamma}^-(\varphi_2,t)B_{\dot{1}1} + \frac{\beta_\tau(\varphi_{20t} - \varphi_{10t})}{2\beta^2}B^z_{\dot{0}0}. \qquad (43)$$

Легко видеть, что эти уравнения в точности означают равенство нулю коэффициентов при $\delta(x - \varphi_{1,2})$. Но уравнение (33) получено как равенство нулю суммы этих коэффициентов, поэтому уравнения (42), (43) влекут (33). Заметим, что в силу (42), (43) $\hat{\gamma}^+_{l,r}(\varphi_{1,2},t) \to 0$ при $t > t^*$. Этот факт снова означает гладкость функции T_ε при $t \geqslant t^*$ и соответствует падению температуры.

Уравнения (42), (43) содержат неизвестные функции $\hat{\gamma}^+_{\mathrm{l}}|_{x=\varphi_1}$, $\hat{\gamma}^+_{\mathrm{r}}|_{x=\varphi_2}$ и $\varphi_{1,2}$, поэтому построение единственной формулы для слабого асимптотического решения невозможно. Положим, как обычно,

$$\varphi_i = \varphi_{i0} + (\varphi_{20} - \varphi_{10})\varphi_1(\tau,t), \quad i = 1,2, \quad \hat{\gamma}^+_{\mathrm{l,r}}|_{x=\varphi_{1,2}} = \gamma^+_{\mathrm{l,r}0} + \gamma^+_{\mathrm{l,r}1}(\tau,t),$$

где $\varphi_1, \gamma^+_{\mathrm{l,r}1} \to 0$ при $\tau \to +\infty$ («до взаимодействия»), φ_1, $\gamma^+_{\mathrm{l,r}1}$ — гладкие равномерно ограниченные функции, а их производные убывают по τ быстрее, чем $|\tau|^{-1}$.

При $\tau \to -\infty$ с учётом (42) получим, что функции $\gamma^+_{l,r0}$, φ_{i0}, γ^- формируют уравнения Стефана (36). Пусть теперь φ_{i1} — произвольные функции, удовлетворяющие сформулированным выше условиям, такие что $|1 + \varphi_{i1}| \geqslant C > 0$ при любых $\tau \in (-\infty,+\infty)$, $t \in [0,t_1]$. Тогда из (42), (43) получим соотношения

$$\begin{aligned}\gamma^+_{l1}(\tau,t) = {}&-2\varphi_{10t} + \\ &+ \{\varphi_{10t} + (\varphi_{20} - \varphi_{10})\varphi_{11t}(\tau,t) + (\varphi_{20t} - \varphi_{10t})[\tau\varphi_{11}(\tau,t)]_\tau\}\left(1 - \frac{B_{\dot{0}0}}{2}\right) - \\ &- \hat{\gamma}^-(\varphi_1,t)(B_{\dot{1}1} - 1) + \frac{\beta_\tau(\varphi_{20t} - \varphi_{10t})}{\beta^2}B^z_{\dot{0}0}, \end{aligned} \qquad (44)$$

$$\gamma^{+}_{r1}(\tau,t) = 2\varphi_{20t} -$$
$$- \{\varphi_{20t} + (\varphi_{20} - \varphi_{10})\varphi_{21t}(\tau,t) + (\varphi_{20t} - \varphi_{10t})[\tau\varphi_{21}(\tau,t)]_\tau\} \left(1 - \frac{B_{\dot{0}0}}{2}\right) -$$
$$- \hat{\gamma}^{-}(\varphi_2,t)(B_{\dot{1}1} - 1) + \frac{\beta_\tau(\varphi_{20t} - \varphi_{10t})}{\beta^2} B^z_{\dot{0}0}. \tag{45}$$

В частности, предположение о росте производных по τ следует из (44), (45). Связь между функциями φ_{i1}, $i = 1, 2$, получаем из (34):

$$\left\{-(2a_F - 2B_{\dot{0}^2 0} + B_{\dot{0}^2 0^2}) + \frac{1}{4}(C_{\dot{0}\dot{0}} - 2C_{\dot{0}\dot{0}0} + C_{\dot{0}\dot{0}00})\right\} \times$$
$$\times (\varphi_{20t} - \varphi_{10t})[\tau(\varphi_{21} - \varphi_{11})]_\tau =$$
$$= (\varphi_{10t} - \varphi_{20t}) - \frac{\varkappa}{2}(\hat{\gamma}(\varphi_2) - \hat{\gamma}(\varphi_1))(2 - B_{\dot{0}0}) +$$
$$+ \frac{\beta_\tau(\varphi_{20t} - \varphi_{10t})}{2\beta^2}\left\{2B^z_{\dot{0}^2 0} - B^z_{\dot{0}^2 0^2} + C^z_{\dot{0}\dot{0}} + C^z_{\dot{0}\dot{0}0} + C^z_{\dot{0}\dot{0}00}\right\}. \tag{46}$$

Рассмотрим соотношение (34) в момент слияния свободных границ (т. е. при $t \to t^*$). Имеем

$$\frac{\varphi_{2t} + \varphi_{1t}}{2}[2a_F - 2B_{\dot{0}^2 0} + B_{\dot{0}^2 0^2}]|_{\rho=0} = 0. \tag{47}$$

Поскольку в (47) соотношение в квадратных скобках не обращается в нуль, необходимо положить

$$\varphi_{1t} = -\varphi_{2t}, \quad t = t^*. \tag{48}$$

6. Техника метода слабых асимптотик

Следующая лемма является основным техническим результатом, который мы используем в наших вычислениях.

Пусть $\Gamma_t = \{x - \varphi(t) = 0\}$, $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(t)$ — некоторая гладкая функция. Пусть $\omega(z) \in \mathbb{S}$ ($\mathbb{S}$ — пространство Шварца), $\beta = \beta(t) > 0$.

Лемма 1. *Для любой пробной функции $\zeta(x)$ выполнено соотношение*

$$\frac{1}{\varepsilon}\left\langle \omega\left(\beta\frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}\right), \zeta(x)\right\rangle = \frac{1}{\beta}A_\omega\zeta(\varphi) + \mathcal{O}(\varepsilon). \tag{49}$$

Здесь $A_\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega(z)\,dz$.

Доказательство. Соотношение в правой части уравнения (49) может быть переписано в виде

$$\frac{1}{\varepsilon}\int \omega\left(\beta\frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}\right)\zeta(x)\,dx = \zeta(\varphi)\int \omega(z)\,dz + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Для того чтобы получить это уравнение, необходимо произвести замену переменных $z = \beta(x-\varphi)/\varepsilon$ и применить формулу Тейлора к подынтегральному выражению в точке $x = \varphi$. Согласно определению последний интеграл является действием функции $A_\omega \delta(x-\varphi)$ на пробную функцию ζ. □

Если мы хотим рассмотреть линейную комбинацию обобщённых функций с точностью $\mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^\alpha)$, то нам необходимо модифицировать понятие линейной комбинации. Эта модификация играет ключевую роль в рассмотрении задач со взаимодействием солитонов.

В самом деле, пусть $\phi_1 \neq \phi_2$ — не зависящие от x функции. Рассмотрим соотношение

$$g_1\delta(x-\phi_1) + g_2\delta(x-\phi_2) = \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^\alpha), \quad \alpha > 0, \tag{50}$$

где функции g_i не зависят от ε. Понятно, что

$$g_i = \mathcal{O}(\varepsilon^\alpha), \quad i = 1, 2.$$

С учётом наших предположений имеем

$$g_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

Если же мы предположим зависимость коэффициентов g_i от ε, то соотношения, полученные выше, не будут верны. Здесь мы рассмотрим только особый случай такой зависимости. Именно, пусть

$$g_i = A_i + S_i\left(\frac{\Delta\phi}{\varepsilon}\right), \quad i = 1, 2, \tag{51}$$

где A_i не зависят от ε и $S_i(\sigma)$ возрастают быстрее, чем $|\sigma|$ стремится к ∞.

Лемма 2. *Пусть выполнена оценка*

$$|\sigma S_i(\sigma)| \leqslant \mathrm{const}, \quad i = 1, 2.$$

Тогда из соотношения (50) *при* $\alpha = 1$ *следуют равенства*

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad S_1 + S_2 = 0. \tag{52}$$

Доказательство. Используя разложение Тейлора в (50), с учётом (51) имеем

$$[S_1\zeta(\phi_1)) + S_2\zeta(\phi_2))] = S_1\zeta(\phi_1)) + S_2\zeta(\phi_1)) + S_2(\phi_2-\phi_1)\zeta'(\phi_1+\mu\phi_2), \quad 0 < \mu < 1.$$

Мы видим, что

$$S_2\left(\frac{\Delta\phi}{\varepsilon}\right)(\phi_2-\phi_1) = \{-\sigma S_2(\sigma)\}|_{\sigma=\Delta\phi/\varepsilon} \cdot \varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon),$$

поскольку функция $\sigma S_2(\sigma)$ является равномерно ограниченной по $\sigma \in \mathbb{R}_1$.

Итак, соотношение (50) можно переписать в виде

$$A_1\zeta(\phi_1) + A_2\zeta(\phi_2) + (S_1+S_2)\zeta(\phi_1) = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Отсюда, поскольку коэффициенты A_i не зависят от ε, получаем утверждение леммы. □

Следствие 1. *Пусть в соотношении* (50)

$$g_i(z) \in \mathcal{C}^\infty, \quad g_i = g_i\left(\frac{\Delta\phi}{\varepsilon}\right), \quad \frac{\partial g_i(z)}{\partial z}\bigg|_{|z|\to\infty} = \mathcal{O}(|z|^{-N}), \quad N > 0, \quad i = 1, 2.$$

Тогда имеем равенство

$$g_1 + g_2 = 0.$$

Доказательство. Запишем функции g_i в виде

$$g_i(z) = g_i^- + \omega(z)(g_i^+ - g_i^-) + g_i(z) - g_i^- - \omega(z)(g_i^+ - g_i^-), \tag{53}$$

где $\omega \in \mathbb{C}^\infty$, $\omega(-\infty) = 0$, $\omega(\infty) = 1$ и $\omega^{(\alpha)} \in \mathbb{S}$ при $\alpha > 0$, $g_i^\pm = \lim\limits_{z\to\pm} g_i$. Заметим, что выражения в скобках в (53) имеют такие же свойства, как и функции S_i в (52). Выражение (50) эквивалентно пределам

$$\lim_{z\to\pm\infty} g_i(z) = 0, \quad i = 1, 2. \tag{54}$$

Поэтому если выполнены равенства (54), то мы получаем ситуацию леммы 2 при $A_i = 0$. □

Лемма 3. *Пусть* $f(t) \in \mathbb{C}^1$, $f(t_0) = 0$ *и* $f'(t_0) \neq 0$. *Пусть* $g(t,\tau)$ — *функция, локально равномерно удовлетворяющая оценкам*

$$|\tau g(t,\tau)| \leqslant \mathrm{const}, \quad |\tau g'(t,\tau)| \leqslant \mathrm{const}, \quad -\infty < \tau < \infty,$$

и $g(t_0,\tau) = 0$. *Тогда на любом интервале, не содержащем нулей функции* $f(t)$, *за исключением* t_0, *выполнено неравенство*

$$\left|g\left(t, \frac{f(t)}{\varepsilon}\right)\right| \leqslant \varepsilon C_{\hat{t}}$$

где $C_{\hat{t}} = \mathrm{const}$.

Доказательство. Дробь $f(t)/(t - t_0)$ локально ограничена по t. Дробь $\tau g(t,\tau)/(t - t_0)$ также локально ограничена. Имеем

$$g\left(t, \frac{f(t)}{\varepsilon}\right) = \varepsilon\frac{g(t, f(t)/\varepsilon)}{t - t_0}\,\frac{f(t)}{\varepsilon}\,\frac{t - t_0}{f(t)}.$$

Согласно предположениям леммы на рассматриваемом интервале последний множитель в правой части ограничен, в то время как произведение первого и среднего множителей (без ε) ограничено в силу свойств функции $g(t,\tau)$. □

Следствие 2. *Предположим, что выполнены условия леммы* 3 *при* $0 \leqslant \tau < \infty$ $(-\infty < \tau \leqslant 0)$. *Тогда утверждение леммы* 3 *справедливо на любом интервале* $[t_0, \hat{t}]$, *не содержащем нулей функции* $f(t)$, *и* $\operatorname{sign}\hat{t} = \operatorname{sign} f(t)$, $t \in [t_0, \hat{t}]$.

Рассмотрим выражение

$$\int f(x,t)\omega_0\left(\beta\frac{\varphi_1 - x}{\varepsilon}\right)\zeta(x)\,dx = \int \omega_0\left(\beta\frac{\varphi_1 - x}{\varepsilon}\right)\left(\frac{d}{dx}\int\limits_{-\infty}^{x} f(y,t)\zeta(y)\,dy\right)dx =$$

$$
\begin{aligned}
&= \omega_0\left(\beta\frac{\varphi_1 - x}{\varepsilon}\right)\int\limits_{-\infty}^{x} f(y,t)\zeta(y)\,dy\bigg|_{-\infty}^{\infty} + \\
&+ \frac{\beta}{\varepsilon}\int \dot\omega_0\left(\beta\frac{\varphi_1 - x}{\varepsilon}\right)\bigg(\int\limits_{-\infty}^{x} f(y,t)\zeta(y)\,dy\bigg)dx = \\
&= \int \zeta(x)\,dx - \int \dot\omega_0(z)\,dz\int\limits_{-\infty}^{\varphi_1} f(x,t)\zeta(x)\,dx + \mathcal{O}(\varepsilon),
\end{aligned}
$$

где $f(x,t)$ — некоторая гладкая функция и $\zeta(x)$ — пробная функция. (Напомним, что интегралы берутся по $\mathbb{R}^1$.) Последний интеграл получен в результате замены переменных $z = \beta(\varphi_1 - x)/\varepsilon$ и использования формулы Тейлора в точке $x = \varphi_1$. Заметим, что согласно лемме 1 наши преобразования корректны. В результате имеем

$$
f(x,t)\omega_0\left(\beta\frac{\varphi_1 - x}{\varepsilon}\right) = f(\varphi_1,t)(1 + 2H(\varphi_1 - x)) + \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon),
$$

где $H(z)$ — функция Хевисайда.

Покажем, как от произведения двух кинков перейти к линейной комбинации обобщённых функций (см. лемму 2):

$$
\begin{aligned}
&\int f(x,t)\omega_0\left(\beta\frac{\varphi_1 - x}{\varepsilon}\right)\omega_0\left(\beta\frac{x - \varphi_2}{\varepsilon}\right)\zeta(x)\,dx = \\
&= \omega_0\left(\beta\frac{\varphi_1 - x}{\varepsilon}\right)\omega_0\left(\beta\frac{x - \varphi_2}{\varepsilon}\right)\int\limits_{-\infty}^{x} f(y,t)\zeta(y)\,dy\bigg|_{-\infty}^{\infty} + \\
&+ \frac{\beta}{\varepsilon}\int \dot\omega_0\left(\beta\frac{\varphi_1 - x}{\varepsilon}\right)\omega_0\left(\beta\frac{x - \varphi_2}{\varepsilon}\right)\bigg(\int\limits_{-\infty}^{x} f(y,t)\zeta(y)\,dy\bigg)dx - \\
&- \frac{\beta}{\varepsilon}\int \dot\omega_0\left(\beta\frac{x - \varphi_2}{\varepsilon}\right)\omega_0\left(\beta\frac{\varphi_1 - x}{\varepsilon}\right)\bigg(\int\limits_{-\infty}^{x} f(y,t)\zeta(y)\,dy\bigg)dx = \\
&= \int f(x,t)\zeta(x)\,dx + \int \dot\omega_0(z)\omega_0(-z-\eta)\,dz\int\limits_{-\infty}^{\varphi_1} f(x,t)\zeta(x)\,dx - \\
&- \int \dot\omega_0(z)\omega_0(-z-\eta)\,dz\int\limits_{-\infty}^{\varphi_2} f(x,t)\zeta(x)\,dx + \mathcal{O}(\varepsilon).
\end{aligned}
$$

В последних двух интегралах произведём соответственно замены переменных $z = \beta(\varphi_1 - x)/\varepsilon$, $z = \beta(x - \varphi_2)/\varepsilon$ и применим формулу Тейлора в точках $x = \varphi_{1,2}$. Таким образом, получим

$$f(x,t)\omega_0\left(\beta\frac{\varphi_1-x}{\varepsilon}\right)\omega_0\left(\beta\frac{x-\varphi_2}{\varepsilon}\right)=$$
$$=1+B_{\dot{0}0}[f(\varphi_1,t)H(\varphi_1-x)-f(\varphi_2,t)H(\varphi_2-x)]+\mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon),$$

где

$$B_{\dot{0}0}(\eta)=\int\dot{\omega}_0(z)\omega_0(-z-\eta)\,dz,\quad \eta=\beta\rho,\quad \rho=\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\varepsilon}.$$

Заметим, что вычисления слабой асимптотики решения системы фазового поля в рассматриваемых случаях (в частности, вычисление производных $\partial\hat{u}_0/\partial t$ и $\partial\hat{\theta}_0/\partial t$) приводят к появлению членов, содержащих произведения функций Хевисайда и интегралов вида $(B_{\dot{j}j})_t$, $j=0,1$. Выражения такого рода мы преобразуем следующим образом:

$$(B_{\dot{j}j})_t f(x,t)[H(\varphi_1-x)-H(\varphi_2-x)]=$$
$$=\frac{2}{\varepsilon}B'_{\dot{j}j}(\eta)(\beta\rho)_\tau f(x,t)[H(\varphi_1-x)-H(\varphi_2-x)]=$$
$$=2\rho B'_{\dot{j}j}(\eta)(\beta\rho)_\tau f(x,t)[\lambda\delta(x-\varphi_1)+(1-\lambda)\delta(x-\varphi_2)]+\mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(\varepsilon),$$

где $f(x,t)$ — некоторая функция и $0\leqslant\lambda\leqslant 1$. С учётом наших построений мы принимаем $\lambda=1/2$.

Литература

[1] Данилов В. Г., Омельянов Г. А., Радкевич Е. В. Асимптотическое решение системы фазового поля и модифицированная задача Стефана // Дифференц. уравн. — 1995. — Т. 31, № 3. — С. 483—491.

[2] Мейрманов А. М. Задача Стефана. — Новосибирск: Наука, 1986.

[3] Радкевич Е. В. Поправка Гиббса—Томсона и условия существования классического решения модифицированной задачи Стефана // ДАН СССР. — 1991. — Т. 316, № 6. — С. 1311—1315.

[4] Caginalp G. Stefan and Hele—Shaw type models as asymptotic limits of the phase-field equations // Phys. Rev. — 1989. — Vol. 39. — P. 5887—5896.

[5] Chen X. Spectrum for the Allen–Cahn, Cahn–Hilliard and phase-field equations for generic interfaces // Comm. Part. Different. Equations. — 1994. — Vol. 19, no. 7. — P. 1371—1395.

[6] Danilov V. G. Propagation and interaction of shock waves of quasilinear equation // Nonlinear Stud. — 2001. — Vol. 8, no. 1. — P. 211—245.

[7] Danilov V. G. Generalized solutions describing singularity interaction // Int. J. Math. Math. Sci. — 2002. — Vol. 29, no. 8. — P. 481—494.

[8] Danilov V. G., Omel'yanov G. A., Radkevich E. V. Hugoniot-type conditions and weak solutions to the phase-field system // European J. Appl. Math. — 1999. — Vol. 10. — P. 55—77.

[9] Danilov V. G., Omel'ynov G. A., Shelkovich V. M. Weak asymptotics method and interaction of nonlinear waves // Asymptotic Methods for Wave and Quantum Problems / Karasev M. V., ed. — Providence: Amer. Math. Soc., 2003. — (Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2; Vol. 208 (53)). — P. 33—163.

[10] Danilov V. G., Shelkovich V. M. Propagation and interaction of nonlinear waves // Eighth Int. Conf. on Hyperbolic Problems, Theory-Numerics Applications, Abstracts, Magdeburg, Germany, February 28—March 3, 2000. — P. 326—328.

[11] Meirmanov A., Zaltzman B. Global in time solution to the Hele—Shaw problem with a change of topology // European J. Appl. Math. — 2002. — Vol. 13. — P. 431—447.

[12] Omel'yanov G. A. Dynamics and interaction of nonlinear waves: multidimensional case // Int. Conf. «Differentional Equations and Related Topics», dedicated to the centenary anniversary of I. G. Petrovskii. Book of abstracts. — Izd. Mosk. Univ., 2001. — P. 305—306.