Эргодическая динамика смешанной квазигеострофической системы баланса потоков энергии

А. ДУ
Технологический институт штата Иллинойс, США
e-mail: duaijun@iit.edu

ЦЗ. ДУАН
Технологический институт штата Иллинойс, США
e-mail: duan@iit.edu

Х. ГАО
Нанкинский нормальный университет, Китай
e-mail: gaohj@njnu.edu.cn

Т. ОЗГЁКМЕН
Университет Майами, США
e-mail: tamay@rsmas.miami.edu

УДК 517.9

Ключевые слова: эргодическая динамика, система уравнений баланса энергии, случайная динамика, коцикл, климатическая динамика.

Аннотация

Авторы рассматривают математическую модель для смешанной системы, включающей атмосферу и океан, а именно смешанную квазигеострофическую модель баланса энергии течений. Эта модель состоит из крупномасштабной квазигеострофической модели океанических потоков и уравнения переноса для температуры океана, связанной с моделью энергетического баланса атмосферы. После переформулировки этой смешанной модели как случайной динамической системы (со свойством коцикла) показано, что упомянутая смешанная система потоков с квазигеострофически энергетическим равновесием имеет случайный аттрактор, и при дополнительных условиях на физические данные и ковариацию возмущающего шума, система является эргодической, а именно для каждой наблюдаемой наших смешанных атмосферно-океанических потоков, её среднее по времени аппроксимирует среднее по статистическим ансамблям, когда промежуток времени достаточно велик.

Abstract

A. Du, J. Duan, H. Gao, T. Özgökmen, Ergodic dynamics of the coupled quasigeostrophic flow-energy balance system, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 6, pp. 67—84.

The authors consider a mathematical model for the coupled atmosphere-ocean system, namely, the coupled quasigeostrophic flow-energy balance model. This model consists of the large scale quasigeostrophic oceanic flow model and the transport equation for oceanic temperature, coupled with an atmospheric energy balance model. After reformulating this

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 6, с. 67—84.

coupled model as a random dynamical system (with the cocycle property), it is shown that the coupled quasigeostrophic-energy balance fluid system has a random attractor, and under further conditions on the physical data and the covariance of the noise, the system is ergodic, namely, for any observable of the coupled atmosphere-ocean flows, its time average approximates the statistical ensemble average, provided the time interval is sufficiently long.

1. Математическая модель

Мы рассматриваем крупномасштабные геофизические процессы, моделируемые посредством уравнения квазигеострофического потока в горизонтальной xy-плоскости в терминах завихрённости $q(x,y,t)$ и уравнения переноса для океанической температуры $T(x,y,t)$, соединённого с предложенным в [16] уравнением баланса атмосферной энергии для температуры воздуха $\Theta(x,y,t)$ в области $D=\{(x,y)\colon 0\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant y\leqslant l\}$:

$$\begin{aligned}
&\Theta_t = \Delta\Theta - (a+\Theta) + S_{\mathrm{a}}(x,y) - b(y)\bigl(S_{\mathrm{o}}(x,y) + \Theta - T(x,y)\bigr) + \dot{w},\\
&\frac{\partial q}{\partial t} = \nu\Delta q - rq + \mathrm{Pr}\,\mathrm{Ra}\,\partial_y T - J(\psi, q+\beta y),\\
&\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T - J(T,\psi),
\end{aligned} \tag{1}$$

где $\psi(x,y,t)$ — функция потока, $\beta\geqslant 0$ — меридиональный градиент параметра Кориолиса, $\nu>0$ — постоянная вязкой диссипации и $r>0$ — диссипационная постоянная Экмана. Далее,

$$q(x,y,t)=\Delta\psi(x,y,t) -$$

завихрённость, $a>0$ — константа, параметризующая эффект длинноволнового радиационного остывания Земли, $b(y)$ — широтная доля Земли, покрытой океанским бассейном, Pr — число Прандтля и Ra — число Рэлея. Отметим, что $S_{\mathrm{a}}(x,y)$ и $S_{\mathrm{o}}(x,y)$ — эмпирические функции, представляющие эффекты (в атмосфере и океане соответственно) коротковолновой солнечной радиации. Пусть $J(g,h)=g_xh_y-g_yh_x$ — оператор Якоби и $\Delta=\partial_{xx}+\partial_{yy}$ — оператор Лапласа. Все эти уравнения представлены в безразмерном виде. Флуктуирующий шум $\dot{w}(x,y,t)$ обычно отвечает более мелкой временно́й шкале по сравнению со шкалой времени отклика средней температуры воздуха. Поэтому мы пренебрегаем временем автокорреляции этого флуктуационного процесса и, таким образом, предполагаем, что шум является белым во времени. Пространственно коррелированный белый во времени шум $\dot{w}(x,y,t)$ описывается как обобщённая производная по времени винеровского процесса $w(x,y,t)$, определённого на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathbb{F},\mathbb{P})$ с нулевым средним и оператором ковариации Q. Геофизические основания подобных моделей для взаимодействия океана и атмосферы изложены в [2, 8]. Недавно некоторые авторы рассмотрели квазигеострофическое уравнение со случайной силой, чтобы учесть влияние неопределённых геофизических сил [7, 13, 14].

Одно граничное условие состоит в отсутствии движения потока по нормали и в свободе скольжения вдоль всей границы:

$$\psi = 0, \quad q = 0. \tag{2}$$

Другие граничные условия налагаются на температуру океана T и температуру атмосферы Θ:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial n} = 0, \tag{3}$$

где n — единичный вектор внешней нормали на границе. Из уравнения (1) и этого граничного условия находим, что $\int\limits_D T(x,y)\,dx\,dy = \mathrm{const}$, и, таким образом, без потери общности можем и будем считать, что $\int\limits_D T(x,y)\,dx\,dy = 0$.

Такова объединённая система детерминистских и стохастических дифференциальных уравнений в частных производных.

Эта статья организована следующим образом. В следующем разделе мы вводим основные понятия, связанные со случайными динамическими системами. Затем в разделе 3 мы переформулируем систему (1) как случайную динамическую систему с помощью случайного стационарного процесса Орнштейна—Уленбека. После получения в разделе 4 основных оценок для этой системы, мы показываем в разделе 5, что система (1) допускает случайный аттрактор. При дополнительных условиях на физические данные и ковариацию шума мы показываем, что система на самом деле эргодична, а именно для каждой наблюдаемой, определённой для нашей системы атмосфера-океан, среднее по времени аппроксимирует среднее по статистическому ансамблю, когда промежуток времени достаточно велик.

2. Случайные динамические системы

Для исследования динамики объединённой системы (1) на больших промежутках времени нам понадобятся подходящие понятия и методы из теории *случайных динамических систем*.

Случайная динамическая система состоит из двух составляющих. Первая из них — это *вынужденный поток* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \theta)$ как модель шума, где $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство и θ — $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{F}$-измеримый поток:

$$\theta_0 = \mathrm{id}, \quad \theta_{t+\tau} = \theta_t \circ \theta_\tau =: \theta_t \theta_\tau$$

для $t, \tau \in \mathbb{R}$. Чтобы выразить свойства стационарности и «хаотичности» шума, мера $\mathbb{P}$ предполагается эргодичной относительно θ. Вторая составляющая случайной динамической системы — $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(H), \mathcal{B}(H)$-измеримое отображение ϕ, удовлетворяющее свойству коцикличности

$$\varphi(t+\tau, \omega, x) = \varphi\big(t, \theta_\tau \omega, \varphi(\tau, \omega, x)\big), \quad \varphi(0, \omega, x) = x,$$

где фазовое пространство H является сепарабельным метрическим пространством, x — произвольный элемент из H. Мы обозначим эту случайную динамическую систему символом φ.

Стандартная модель для пространственно коррелированного и белого во времени шума — это обобщённая производная от двустороннего *броуновского движения*, или *винеровского процесса*, $w(x,y,t)$. Пусть U — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и индуцированной им нормой $\|\cdot\|$. Для стохастического дифференциального уравнения, содержащего такой шум, подходящим, или каноническим вероятностным, пространством является

$$\big(C_0(\mathbb{R},U),\mathcal{B}\big(C_0(\mathbb{R},U)\big),\mathbb{P}\big),$$

где $C_0(\mathbb{R},U)$ — пространство непрерывных функций на $\mathbb{R}$, принимающих нулевое значение при нулевом аргументе (времени). Это пространство наделяется компактно-открытой топологией (т. е. топологией равномерной сходимости на компактных промежутках $\mathbb{R}$). Эта топология метризуема, поскольку порождается полной метрикой

$$d(g_1,g_2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\,\frac{d_n(g_1,g_2)}{1+d_n(g_1,g_2)},$$

где $d_n(g_1,g_2)=\max\limits_{|t|\leqslant n}\|g_1(t)-g_2(t)\|$ для g_1, g_2 из $C_0(\mathbb{R},U)$. Таким образом, имеем открытые шары и открытые множества в $C_0(\mathbb{R},U)$, и $\mathcal{B}\big(C_0(\mathbb{R},U)\big)$ — соответствующая борелевская σ-алгебра. Предположим, что винеровский процесс w обладает ковариационным оператором Q на U. Пусть $\mathbb{P}$ означает *винеровскую меру* относительно Q. Отметим, что $\mathbb{P}$ эргодична относительно *винеровского сдвига* θ_t:

$$\theta_t\omega=\omega(\cdot+t)-\omega(t)\quad\text{для}\quad\omega\in C_0(\mathbb{R},U). \tag{4}$$

Важным примером случайной динамической системы является случайное дифференциальное уравнение. В качестве примера рассмотрим эволюционное уравнение

$$\frac{du}{dt}=f(u,\theta_t\omega),\qquad u(0)=x, \tag{5}$$

в некотором гильбертовом пространстве относительно некоторой метрической динамической системы $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},\theta)$. Если задача (5) корректно поставлена для каждого $\omega\in\Omega$ и решения $u(t,\omega;x)$ измеримо зависят от (t,ω,x), то оператор

$$\varphi\colon (t,\omega,x)\to u(t,\omega;x)$$

определяет случайную динамическую систему (коцикл) φ. Подробное изложение теории случайных динамических систем можно найти в [1].

Введём некоторые полезные понятия теории случайных динамических систем, мотивированные теорией детерминистских динамических систем.

Замкнутое множество $B(\omega)$, зависящее от ω, в сепарабельном гильбертовом пространстве H называется случайным, если отображение «расстояние от точки y до $B(\omega)$», $\omega \to \sup\limits_{x \in B(\omega)} \|x - y\|_H$, является случайной величиной для каждого $y \in H$.

Случайная динамическая система называется *диссипативной*, если существует случайное множество B, ограниченное при каждом ω и поглощающее в следующем смысле: для каждой случайной величины $x(\omega) \in H$ существует некоторое $t_x(\omega) > 0$, такое что если $t \geqslant t_x(\omega)$, то

$$\varphi\big(t, \omega, x(\omega)\big) \in B(\theta_t \omega).$$

В детерминистском случае (φ не зависит от ω) последнее соотношение совпадает с определением поглощающего множества. В случае дифференциальных уравнений с частными производными *параболического типа* благодаря свойству сглаживания обычно возможно доказать, что диссипативная система допускает компактные инвариантные поглощающие множества (детали см. [23, с. 22]). Следовательно, для системы *параболических* уравнений в частных производных, содержащих случайную силу, такой как случайная двуслойная система потока, введённая в последнем разделе, мы обычно предполагаем случайное множество $B(\omega)$ компактным. Кроме того, мы допускаем, что $B(\omega)$ инвариантно вперёд:

$$\varphi\big(t, \omega, B(\omega)\big) \subset B(\theta_t \omega), \quad t > 0.$$

В дальнейшем нам потребуется также понятие *умеренных случайных величин*. Случайная величина x называется умеренной, если

$$t \to |x(\theta_t \omega)|$$

растёт субэкспоненциально:

$$\limsup_{t \to \pm\infty} \frac{\log^+ |x(\theta_t \omega)|}{|t|} = 0 \ \text{ п. н.},$$

где

$$\log^+(x) = \max\{0, \log(x)\}.$$

Это техническое условие является не очень сильным ограничением, поскольку единственная альтернатива заключается в том, что введённый выше $\limsup$ бесконечен, что описывает вырожденный случай стационарности: (см. [1, с. 164]).

3. Свойство коцикла

В этом разделе мы покажем, что смешанная модель (1) определяет случайную динамическую систему (свойство коцикла). Свойство коцикла, по существу, вытекает из корректности.

Переформулируем модель так, что можно будет применить подходящие средства теории случайных динамических систем к анализу смешанной модели атмосфера-океан при случайной силе ветра. Для дальнейшего потребуются некоторые средства теории уравнений в частных производных.

Пусть $H^1(D)$ — соболевское пространство функций на D, первая обобщённая производная которых принадлежит пространству $L_2(D)$ квадратично интегрируемых функций на D с нормой и скалярным произведением вида

$$\|u\|_{L_2} = \left(\int\limits_D |u(x)|^2\,dD\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (u,v)_{L_2} = \int\limits_D u(x)v(x)\,dD, \quad u,v \in L_2(D).$$

Пространство $H^1(D)$ наделяется нормой

$$\|u\|_{H^1} = \|u\|_{L_2} + \|\partial_y u\|_{L_2} + \|\partial_z u\|_{L_2}.$$

Нулевые значения q на границе мотивируют введение пространства $\mathring{H}^1(D)$, содержащего, грубо говоря, функции, обращающиеся в нуль на границе ∂D множества D. На этом пространстве может быть определена норма

$$\|u\|_{\mathring{H}^1(D)} = \|\partial_y u\|_{L_2} + \|\partial_z u\|_{L_2}. \tag{6}$$

Другое соболевское пространство, обозначаемое $\dot{H}^1(D)$, является подпространством в $H^1(D)$, состоящим из функций u, таких что $\int\limits_D u\,dx\,dy = 0$. Норма, эквивалентная H^1-норме на $\dot{H}^1(D)$, даётся правой частью равенства (6). Пространство функций из $L_2(D)$, обладающих этим свойством, мы будем обозначать $\dot{L}_2(D)$.

Для удобства введём векторное обозначение для неизвестных геофизических величин: $u = (\Theta, q, T)$.

Выделим линейный дифференциальный оператор из правой части (1):

$$A(u) = \begin{pmatrix} -\Delta\Theta + \big(1 + b(x,y)\big)\Theta \\ -\nu\Delta q \\ -\Delta T \end{pmatrix}.$$

Напомним, что для функции $b(y)$ выполнено $0 < b(y) < 1$. Оператор A определён на функциях, являющихся достаточно гладкими. Имеем также следующие граничные условия из раздела 2:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial n} = 0,$$
$$\psi|_{\partial D} = 0, \quad q|_{\partial D} = 0.$$

Введём фазовое пространство для наших геофизических величин:

$$H = L_2(D) \times L_2(D) \times L_2(D),$$
$$V = H^1(D) \times \mathring{H}^1(D) \times \dot{H}^1(D).$$

После этой подготовки мы можем записать нашу задачу как стохастическое эволюционное уравнение. Пусть $\dot{w}$ — шум на $L_2(D)$ с конечной энергией, задаваемой оператором ковариации Q винеровского процесса $w(t)$, который определён на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Для вектора

$$W = (w, 0, 0),$$

мы перепишем уравнения смешанной системы атмосфера-океан (1) как стохастическое эволюционное уравнение на V':

$$\frac{du}{dt} + Au = F(u) + \dot{W}, \quad u(0) = u_0 \in H, \tag{7}$$

где $\dot{w}$ — белый шум как обобщённая производная по времени от винеровского процесса w с непрерывными траекториями на $\mathbb{R}$ и со значениями в $L_2(D)$. Далее, $F(u)$ определено следующим образом:

$$F(u) = \begin{pmatrix} -a + S_{\mathrm{a}}(x,y) - b(y)S_{\mathrm{o}}(x,y) + b(y)T(x,y) \\ -rq + \Pr \mathrm{Ra}\partial_y T - J(\psi, q + \beta y) \\ -J(T,\psi) \end{pmatrix}.$$

Для этой регулярности достаточно, чтобы след оператора ковариации был конечен относительно пространства $L_2(D)$: $\mathrm{tr}_{L_2} Q < \infty$. В частности, мы можем выбрать каноническое вероятностное пространство, в котором множество элементарных событий Ω состоит из траекторий w, и вероятностная мера $\mathbb{P}$ является винеровской мерой относительно ковариации Q.

В дальнейшем нам потребуется стационарный процесс Орнштейна—Уленбека, решающий следующее линейное стохастическое уравнение на D:

$$\frac{dz}{dt} + A_1 z = \dot{w}, \tag{8}$$

где $A_1 = -\Delta + \big(1 + b(y)\big)$ — линейный оператор, с нулевым граничным условием Неймана на ∂D и нулевым начальным условием.

Лемма 3.1. *Предположим, что оператор Q ковариации имеет конечный след: $\mathrm{tr}_{L_2} Q < \infty$. Тогда* (8) *имеет единственное стационарное решение, порождённое отображением*

$$(t,\omega) \to z(\theta_t \omega).$$

Более того, $Z(\omega) = (z(\omega), 0, 0)$ — случайная переменная в V.

Доказательство можно найти в [17, гл. 5] или в [4].

Для наших вычислений будет удобно преобразовать (7) в дифференциальное уравнение без белого шума, но со случайными коэффициентами. Положим

$$v := u - Z. \tag{9}$$

Таким образом мы получаем случайное дифференциальное уравнение в V'

$$\frac{dv}{dt} + Av = F\big(v + Z(\theta_t\omega)\big), \quad v(0) = v_0 \in H. \tag{10}$$

Эквивалентно, мы можем переформулировать уравнение (10) в терминах пробных функций:

$$\frac{d}{dt}(v(t),\zeta) + a(v(t),\zeta) = \big(F\big(v(t) + Z(\theta_t\omega)\big),\zeta\big) \ \text{ для всех } \ \zeta \in V.$$

Мы получили дифференциальное уравнение без белого шума, но со случайными коэффициентами. Такое дифференциальное уравнение может быть рассмотрено отдельно для *каждой* выборочной траектории ω. Следовательно, проще рассматривать (10), чем изучать непосредственно стохастическое дифференциальное уравнение (7). Ищем решение относительно $v \in C([0,\tau];H) \cap L^2(0,\tau;V)$ для всех $\tau > 0$. Если мы можем решить это уравнение, то $u := v + Z$ определяет решение уравнения (7). Для установления корректности задачи нам потребуется следующий результат.

Теорема 3.2 (корректность). *Для каждого $\tau > 0$ существует единственное решение* (10) *в $C([0,\tau];H) \cap L_2(0,\tau;V)$. В частности, разрешающее отображение*

$$\mathbb{R}^+ \times \Omega \times H \ni (t,\omega,v_0) \to v(t) \in H$$

измеримо по своим аргументам и разрешающее отображение $H \ni v_0 \to v(t) \in H$ непрерывно.

Доказательство. Свойства A и F обеспечивают, что случайное дифференциальное уравнение (10), по существу, становится подобным двумерному уравнению Навье—Стокса. Следовательно, мы получаем существование и единственность, а также упомянутые выше условия регулярности. □

Преобразование (9) даёт, что (7) также имеет единственное решение.

Поскольку разрешающее уравнение

$$\mathbb{R}^+ \times \Omega \times H \ni (t,\omega,v_0) \to v(t,\omega,v_0) =: \varphi(t,\omega,v_0) \in H$$

корректно, мы можем определить случайную динамическую систему. На Ω мы можем определить оператор сдвига θ_t на траекториях винеровского процесса, определяемый нашим шумом,

$$w(\cdot,\theta_t\omega) = w(\cdot + t,\omega) - w(t,\omega) \quad \text{for} \quad t \in \mathbb{R},$$

который называется *винеровским сдвигом*. Тогда $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ образует поток, являющийся эргодическим для вероятностной меры $\mathbb{P}$. Свойства разрешающего отображения индуцируют соотношения

$$\begin{aligned}&\varphi(t+\tau,\omega,u) = \varphi\big(t,\theta_\tau\omega,\varphi(\tau,\omega,u)\big) \quad \text{для} \quad t,\tau \geqslant 0,\\ &\varphi(0,\omega,u) = u\end{aligned}$$

для произвольных $\omega \in \Omega$ и $u \in H$. Это свойство называется коциклическим свойством отображения φ и является важным для изучения динамики случайных систем. Оно является обобщением полугруппового свойства. Коцикл φ вместе с потоком θ образуют *случайную динамическую систему*.

4. Диссипативность

В этом разделе мы покажем, что смешанная система атмосфера-океан (1) диссипативна в том смысле, что обладает поглощающим (случайным) множеством. Это определение было использовано для детерминистских систем в [23].

Оно означает, что по прошествии достаточного времени вектор решения v оказывается заключён в определённой области фазового пространства H. Диссипативность будет весьма важна для понимания асимптотической динамики системы. Эта диссипативность даст нам оценку эволюции атмосферной температуры при наличии обратной связи с океаном. Динамические свойства, вытекающие из диссипативности, будут рассмотрены в следующем разделе. В частности, мы покажем, что смешанная система атмосфера-океан имеет случайный аттрактор, обладает конечным числом степеней свободы и является эргодической при подходящих условиях.

Пусть

$$\tilde{v} = (\tilde{\Theta}, T), \quad \tilde{\Theta} = \Theta - z. \tag{11}$$

Интегрируя по частям и используя неравенство Пуанкаре, получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\lambda_0}{2}\|\tilde{\Theta}\|^2_{L^2} + \|T\|^2_{L^2}\right) \leqslant \\ \leqslant -2\|\nabla\Theta\|^2_{L_2} - \|\nabla T\|^2_{L^2} - \frac{1}{2}\|\Theta\|^2_{L^2} - \frac{\lambda_0}{2}\|T\|^2_{L^2} + 6a^2 + 6\|S_{\mathrm{a}}\|^2_{L^2} + 6\|S_{\mathrm{o}}\|^2_{L^2}. \tag{12}$$

Здесь использовано неравенство Пуанкаре $\lambda_0\|u\|^2 \leqslant \|\nabla u\|^2$ ($\lambda_0 > 0$). Мы подчёркиваем, что здесь и в дальнейшем $0 < b(y) < 1$.

Для q имеем

$$\frac{d}{2dt}\|q\|^2_{L^2} = -\nu\|\nabla q\|^2_{L^2} - r\|q\|^2_{L^2} + \mathrm{Pr}\,\mathrm{Ra}\int\limits_D \partial_y T q\,dx\,dy - \beta\int\limits_D \frac{\partial\psi}{\partial x} q\,dx\,dy.$$

При условии

$$4\nu r > \frac{\beta^2|l|^2}{\pi^2}, \tag{13}$$

вытекающем из обсуждения в [12], для некоторой положительной константы $\alpha > 0$ находим

$$\frac{d}{2dt}\|q\|^2_{L^2} \leqslant -\alpha\|q\|^2_{L^2} + \mathrm{Pr}\,\mathrm{Ra}\int\limits_D \partial_y T q\,dx\,dy,$$

в силу неравенства Коши—Шварца получаем

$$\frac{d}{dt}\|q\|^2_{L^2} \leqslant -\alpha\|q\|^2_{L^2} + \frac{\mathrm{Pr}^2\mathrm{Ra}^2}{\alpha}\|\nabla T\|^2_{L^2}.$$

Собирая все эти оценки, находим, что для некоторых положительных констант α_1 и C_1

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\lambda_0}{2}\|\tilde{\Theta}\|^2_{L^2} + \|T\|^2_{L^2} + \frac{\alpha\lambda_0}{2\mathrm{Pr}^2\mathrm{Ra}^2}\|q\|^2_{L^2}\right) + \alpha_2\|\nabla v\|^2 \leqslant \\ \leqslant -\alpha_1\left(\frac{\lambda_0}{2}\|\tilde{\Theta}\|^2_{L^2} + \|T\|^2_{L^2} + \frac{\alpha\lambda_0}{2\mathrm{Pr}^2\mathrm{Ra}^2}\|q\|^2_{L^2}\right) + C_1.$$

По неравенству Гронуолла мы заключаем, что

$$\|v\|_H^2 \leqslant C_2 \|v(0)\|_H^2 e^{-\alpha_1 t} + C_3 \tag{14}$$

и

$$\int_s^t \|\nabla v(\tau)\|_H^2 \, d\tau \leqslant C_4 \|v(0)\|_H^2 e^{-\alpha_1 s} + C_5(t-s) \quad \text{для каждого} \quad 0 \leqslant s \leqslant t. \tag{15}$$

Теперь получим диссипативность решения v. Грубо говоря, диссипативность означает, что все траектории системы движутся к ограниченному множеству фазового пространства. Для случайной системы имеем следующую версию свойства диссипативности.

Определение 4.1. Случайное множество $B = \{B(\omega)\}_{\omega \in \Omega}$, состоящее из замкнутых ограниченных множеств $B(\omega)$, называется притягивающим для случайной динамической системы φ, если для каждого ограниченного случайного множества $D = \{D(\omega)\}_{\omega \in \Omega}$ с ограниченными $D(\omega) \in H$, такого что $t \to \sup\limits_{y \in D(\theta_t \omega)} \|y\|_H$ имеет субэкспоненциальный рост при $t \to \pm\infty$, выполнены соотношения

$$\begin{aligned} &\varphi\big(t, \omega, D(\omega)\big) \subset B(\theta_t \omega) \quad \text{для} \quad t \geqslant t_0(D, \omega), \\ &\varphi\big(t, \theta_{-t}\omega, D(\theta_{-t}\omega)\big) \subset B(\omega) \quad \text{для} \quad t \geqslant t_0(D, \omega). \end{aligned} \tag{16}$$

B называется инвариантным вперёд, если

$$\varphi(t, \omega, u_0) \in B(\theta_t \omega), \quad \text{если} \quad u_0 \in B(\omega), \quad \text{для} \quad t \geqslant 0.$$

Из (14) мы могли получить существование поглощающего множества $B(\omega) = \{v \in H,\ \|v\|_H^2 \leqslant 2C_3\}$. Предположим, что $t \to \|v_0(\theta_{-t}\omega)\|_H^2$ растет не сильнее, чем субэкспоненциально. Тогда рост $B(\omega)$ также субэкспоненциален, и получаем следующую лемму.

Лемма 4.2. *Случайное множество*

$$B(\omega) = B\big(0, R(\omega)\big) = \{v \in H,\ \|v\|_H^2 \leqslant R = 2C_3\}$$

является поглощающим и инвариантным вперёд множеством для случайной динамической системы, порождённой соотношениями (10).

Для применения в следующем разделе нам потребуется некоторая регулярность элементов, содержащихся в поглощающем множестве. Для этого введём функциональное пространство

$$\mathcal{H}^s := \big\{u \in H \colon \|u\|_s^2 := \|A^{\frac{s}{2}} u\|_H^2 < \infty\big\},$$

где $s \in \mathbb{R}$. Оператор A^s является s-й степенью положительного симметрического оператора A. Отметим, что эти пространства вложены в пространства Слободецкого H^s, $s > 0$. Норма в этих пространствах обозначается через $\|\cdot\|_{H^s}$. Эта норма описывается в [10, с. 118]. Но явный вид этой нормы нам не нужен. Мы отметим лишь, что на $\mathcal{H}^s$ норма $\|\cdot\|_s$ из H^s эквивалентна норме из $\mathcal{H}^s$ при $0 < s$ (см. [15]).

Наша цель — показать, что $v(1, \omega, D)$ — ограниченное множество в $\mathcal{H}^s$ для некоторого $s > 0$. Это свойство влечёт вполне непрерывность отображения $v(1, \omega, \cdot)$. Выведем теперь дифференциальное неравенство для $t\|v(t)\|_s^2$. С помощью цепного правила получим, что

$$\frac{d}{dt}(t\|v(t)\|_s^2) = \|v(t)\|_s^2 + t\frac{d}{dt}\|v(t)\|_s^2.$$

Отметим, что для константы вложения $c_{6,s}$ между $\mathcal{H}^s$ и V

$$\int_0^t \|v\|_s^2\, ds \leqslant c_{6,s}^2 \int_0^t \|v\|_V^2\, ds \quad \text{для} \quad s \leqslant 1,$$

так что левая часть ограничена, если начальные условия v_0 содержатся в ограниченном множестве в H. Второй член в приведённой выше формуле может быть выражен следующим образом:

$$t\frac{d}{dt}\big(A^{\frac{s}{2}}v, A^{\frac{s}{2}}v\big)_H = 2t\left(\frac{d}{dt}v, A^s v\right)_H = -2t(Av, A^s v)_H + 2t\big(F\big(v + Z(\theta_t\omega)\big), A^s v\big)_H.$$

Получим

$$(Av, A^s v)_H = \big\|A^{\frac{1}{2}+\frac{s}{2}}v\big\|_H = \|v\|_{1+s}^2.$$

Для членов, содержащих оператор Якоби, применяем некоторые теоремы вложения (см. [22, с. 12]), затем, беря F_3 в качестве примера, получим для некоторой константы $c_5 > 0$

$$(F_3(v), \zeta)_H \leqslant c_6\, \|v\|_{m_1+1}\|\psi\|_{m_2+1}\|\zeta\|_{m_3}, \quad \zeta \in H_{m_3},$$

где $m_1 + m_2 + m_3 \geqslant 1$ и $0 \leqslant m_i < 1$. Здесь мы используем двумерность множества D. Затем найдём, что для $m_1 = 0$, $m_2 = s < 1$ и $m_3 = 1 - s$

$$|(F_3(v), A^s T)_H| \leqslant c_7\|T\|_V\|\psi\|_{1+s}\|T\|_{1+s}.$$

$\|\psi(t)\|_{1+s}$ ограничено числом $c_1'\|q(t)\|_H$ по определению величин $\psi(t)$ и $\|v(t)\|_{L_\infty(0,T;H)} < \infty$. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся константа $c_8(\varepsilon)$, такая что

$$\begin{aligned}\big(F_3\big(v(t)\big), A^s T(t)\big)_H \leqslant c_8(\varepsilon)\|q\|_{L_\infty(0,T;H)}^2\|T(t)\|_V^2 + \varepsilon\|T(t)\|_{1+s}^2 \leqslant \\ \leqslant c_8(\varepsilon)\|v\|_{L_\infty(0,T;H)}^2\|v(t)\|_V^2 + \varepsilon\|v(t)\|_{1+s}^2,\end{aligned}$$

где ε выбрано достаточно малым. Другие члены могут быть оценены подобным образом, и мы опускаем здесь эти оценки. Используя (15), можно получить, что $\|v(t, \omega, v_0)\|_s$ для $0 < s < \frac{1}{4}$ является ограниченным при $t_0 \leqslant T < \infty$, $t_0 > 0$, если v_0 содержится в ограниченном множестве. Это позволит нам записать главное в этом разделе утверждение относительно диссипативности.

Теорема 4.3. *Для случайной динамической системы, порождённой соотношениями* (10), *существует компактное случайное множество* $B = \{B(\omega)\}_{\omega \in \Omega}$, *удовлетворяющее определению* 4.1.

Положим

$$B(\omega) = \overline{\varphi\Big(1, \theta_{-1}\omega, B\big(0, R(\theta_{-1}\omega)\big)\Big)} \subset \mathcal{H}^s, \quad 0 < s < \frac{1}{4}. \tag{17}$$

В частности, $\mathcal{H}^s$ компактно вложено в H.

5. Случайная динамика

В этом разделе мы анализируем динамику связанной системы атмосфера-океан (1). Однако достаточно будет анализировать преобразованную случайную динамическую систему, порождённую (7). С помощью преобразования (9) мы можем перенести все качественные свойства на систему (7).

Мы рассмотрим следующие динамические свойства: наличие случайных аттракторов, эволюция атмосферной температуры при обратной связи с океаном и эргодичность.

Сначала рассмотрим климатические аттракторы. Напомним некоторые основные понятия (см., например, [11]).

Определение 5.1. Пусть φ — случайная динамическая система. Случайное множество $A = \{A(\omega)\}_{\omega \in \Omega}$, состоящее из компактных непустых множеств $A(\omega)$, называется случайным глобальным аттрактором, если для произвольного случайного ограниченного множества D имеет место сходимость по вероятности

$$(\mathbb{P}) \lim_{t \to \infty} \operatorname{dist}_H\big(\varphi\big(t, \omega, D(\omega)\big), A(\theta_t\omega)\big) = 0$$

и

$$\varphi\big(t, \omega, A(\omega)\big) = A(\theta_t\omega)$$

при всех $t \geqslant 0$ и $\omega \in \Omega$.

Существенная часть долговременного движения случайной системы проходит в случайном аттракторе. В предыдущем разделе мы показали, что динамическая система φ, порождённая соотношениями (7), диссипативна, что означает существование случайного множества B, удовлетворяющего соотношению (16). Более того, это множество компактно. Теперь напомним и приложим к нашей ситуации следующую теорему из [11].

Теорема 5.2. *Пусть* φ — *случайная динамическая система на пространстве состояний* H, *являющемся сепарабельным банаховым пространством, такая что отображение* $x \to \varphi(t, \omega, x)$ *непрерывно. Предположим, что* B — *множество, выражающее диссипативность, из определения* 4.1. *Кроме того, пусть* B *имеет субэкспоненциальный рост* (*см. определение* 4.1) *и является регулярным* (*компактным*). *Тогда динамическая система* φ *обладает случайным аттрактором.*

Эта теорема может быть применена к нашей случайной динамической системе φ, порождённой стохастическим дифференциальным уравнением (7). В самом деле, все допущения выполнены. Множество B определено в теореме 4.3. Его субэкспоненциальный рост вытекает из включения $B(\omega) \subset B\big(0, R(\omega)\big)$, где радиус $R(\omega)$ был введён в предыдущем разделе. Отметим, что φ — *непрерывная* случайная динамическая система (см. теорему 3.2). Таким образом, φ обладает случайным аттрактором. С учётом преобразования (9) это также верно для исходной связанной системы атмосфера-океан.

Следствие 5.3 (случайный аттрактор). *Связанная система атмосфера-океан имеет случайный аттрактор.*

Теперь рассмотрим случайную неподвижную точку и эргодичность. Мы можем несколько модифицировать уравнение (1) следующим образом. Заменим лапласиан ΔT на $\nu \Delta T$, где $\nu > 0$ — коэффициент вязкости. При определённых условиях на физические данные в (1) мы можем показать, что поведение нашей динамической системы ламинарно. Для стохастических систем это означает, что через относительно короткое время все траектории, стартовавшие из различных начальных положений, показывают почти одинаковое динамическое поведение. Это легко увидеть, если a, S_{a} и S_{o} равны нулю, шум отсутствует и ν достаточно велико. Покажем, что ламинарное поведение возникает и тогда, когда a, S_{a} и S_{o} в некотором смысле малы. На математическом языке ламинарное поведение означает, что случайная динамическая система имеет единственную экспоненциально притягивающую случайную неподвижную точку.

Определение 5.4. Случайная величина $v^* : \Omega \to H$ является по определению случайной неподвижной точкой для случайной динамической системы, если

$$\varphi\big(t, \omega, v^*(\omega)\big) = v^*(\theta_t \omega)$$

для $t \geqslant 0$ и $\omega \in \Omega$. Случайная неподвижная точка v^* называется экспоненциально притягивающей, если

$$\lim_{t \to \infty} \|\varphi(t, \omega, x) - v^*(\theta_t \omega)\|_H = 0$$

для произвольных $x \in H$ и $\omega \in \Omega$.

Достаточные условия для существования случайной неподвижной точки приведены в [21]. Здесь мы формулируем более простую версию этой теоремы, которая пригодна для нашей системы.

Теорема 5.5 (теорема о случайной неподвижной точке). *Пусть φ — случайная динамическая система. Предположим, что B является полным инвариантным вперёд множеством. Пусть также B имеет субэкспоненциальный рост* (см. определение 4.1). *Предположим, что выполнены следующие условия сжимаемости*:

$$\sup_{v_1 \neq v_2 \in B(\omega)} \frac{\|\varphi(1, \omega, v_1) - \varphi(1, \omega, v_2)\|_H}{\|v_1 - v_2\|_H} \leqslant k(\omega), \tag{18}$$

где математическое ожидание величины $\log k$*, обозначенное* $\mathbb{E}\log k$*, меньше нуля. Тогда* φ *имеет единственную случайную неподвижную точку в* B*, являющуюся экспоненциально притягивающей.*

Эта теорема может быть рассмотрена как случайная версия теоремы Банаха о неподвижной точке. Условие сжимаемости сформулировано в среднем для правой части равенства (18).

Теорема 5.6. *Предположим, что физические данные* $|a|$*,* $\|S_{\mathrm{a}}\|_{L^2}$*,* $\|S_{\mathrm{o}}\|_{L^2}$ *и след ковариации для шума* $\mathrm{tr}_H\, Q$ *достаточно малы и что вязкость* ν *достаточно велика. Тогда случайная динамическая система* (7) *имеет единственную случайную неподвижную точку в* B*.*

Здесь мы дадим лишь набросок доказательства. Предположим на время, что B задано как шар $B(0,R)$, введённый в лемме 4.2. Предположим также, что данные в допущениях этой леммы малы, а величина ν велика. Отсюда следует, что величина $\mathbb{E}R$ также мала. Для вывода свойства сжимаемости оценим величину $\big\|\varphi\big(1,\omega,v_1(\omega)\big)-\varphi\big(1,\omega,v_2(\omega)\big)\big\|_H^2$ для произвольных случайных переменных $v_1,v_2\in B$. По свойству оператора Якоби находим, что

$$\langle J(q_1,\psi_1)-J(q_1,\psi_1),q_1-q_2\rangle\leqslant c_9\|q_1-q_2\|^2_{W_2^1}+c_{10}\|q_1\|^2_{\mathring{H}^1(D)}\|q_1-q_2\|^2_{L_2},$$

где константа c_{10} может быть выбрана достаточно малой, если ν велико. Непосредственное вычисление даёт

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big\|\varphi\big(t,\omega,v_1(\omega)\big)-\varphi\big(t,\omega,v_2(\omega)\big)\big\|_H^2\leqslant\\ \leqslant\big(-\alpha'+c_{10}\big\|\varphi\big(t,\omega,v_2(\omega)\big)\big\|_V^2\big)\big\|\varphi\big(t,\omega,v_1(\omega)\big)-\varphi\big(t,\omega,v_2(\omega)\big)\big\|_H^2\end{aligned}$$

для некоторой положительной α', зависящей от ν. Из этого неравенства и леммы Гроноулла вытекает, что условие сжимаемости (18) выполнено, если

$$\mathbb{E}\sup_{u_2\in B(\omega)}c_{10}\int_0^1\|\varphi(t,\omega,v_2)\|_V^2\,dt<\alpha'.$$

Но в силу энергетического неравенства это условие также выполнено, если величины $\mathbb{E}R$ и $\mathbb{E}\|z\|_V^2$ достаточно малы, что, в свою очередь, следует из допущений.

Пусть теперь B — случайное множество, определённое в (17). Поскольку множество B, введённое в (17), поглощает любое состояние, неподвижная точка v^* содержится в этом B. Кроме того, v^* притягивает *любое* состояние из H, а не только состояния из B.

Следствие 5.7 (единственная случайная неподвижная точка). *Предположим, что физические данные* $|a|$*,* $\|S_{\mathrm{a}}\|_{L^2}$*,* $\|S_{\mathrm{o}}\|_{L^2}$ *и след ковариации шума* $\mathrm{tr}_H\, Q$ *достаточно малы, а вязкость* ν *достаточно велика. Тогда в силу свойств преобразования* (9) *исходная система* (1) *имеет единственную экспоненциально притягивающую случайную неподвижную точку* $u^*(\omega)=v^*(\omega)+Z(\omega)$*, где* $u=(\Theta,q,T)$*.*

Единственность этой случайной неподвижной точки влечёт *эргодичность*. Мы прокомментируем этот вывод в конце этого раздела.

Согласно теореме 3.2 о корректности стохастическое дифференциальное уравнение (7) для смешанной системы атмосфера-океан имеет единственное решение. Это решение является марковским процессом. Мы можем определить ассоциированные с ним марковские операторы $\mathcal{T}(t)$ для $t \geqslant 0$, как указано в [19, 20]. Более того, $\{\mathcal{T}(t)\}_{t\geqslant 0}$ — полугруппа.

Пусть M^2 — множество вероятностных распределений μ, обладающих конечной энергией, т. е.

$$\int\limits_H \|u\|_H^2 \, d\mu(u) < \infty.$$

Тогда распределение решения $u(t)$ (в момент t) стохастического дифференциального уравнения (7) задаётся формулой $\mathcal{T}(t)\mu_0$, где распределение μ_0 начальных данных содержится в M^2.

Отметим, что математическое ожидание решения $\|u(t)\|_H^2$ может быть выражено в терминах этого распределения $\mathcal{T}(t)\mu_0$:

$$\mathbb{E}\|u(t)\|_H^2 = \int\limits_H \|u\|_H^2 \, d\mathcal{T}(t)\mu_0.$$

Мы можем вывести следующее энергетическое неравенство в среднем, используя наши более ранние оценки в (14) и (15).

Теорема 5.8. *Динамическая величина* $u = (\Theta, q, T)$ *смешанной системы атмосфера-океан* (1) *удовлетворяет оценке*

$$\mathbb{E}\|u(t)\|_H^2 + \alpha \mathbb{E} \int\limits_0^t \|u(\tau)\|_V^2 \, d\tau \leqslant \mathbb{E}\|u_0\|_H^2 + tc_{11} + t \operatorname{tr}_{L_2} Q,$$

где положительные константы c_{11} *и* α *зависят от физических данных* a, $\|S_\mathrm{a}\|_{L^2}$, $\|S_\mathrm{o}\|_{L^2}$, Pr *и* Ra.

По неравенству Гроноулла далее получим следующий результат об асимптотической среднеквадратичной оценке.

Следствие 5.9 (асимптотическая среднеквадратичная оценка). *Для ожидания динамической величины* $u = (\Theta, q, T)$ *смешанной системы атмосфера-океан* (1) *справедлива асимптотическая оценка*

$$\limsup_{t\to\infty} \mathbb{E}\|u(t)\|_H^2 = \limsup_{t\to\infty} \int\limits_H \|u\|_H^2 \, d\mathcal{T}(t)\mu_0 \leqslant \frac{c_{11} + \operatorname{tr}_{L_2} Q}{c_{12}},$$

если начальное распределение μ_0 *случайного начального условия* $u_0(\omega)$ *содержится в* M^2. *Здесь* $c_{12} > 0$ *также зависит от физических данных. В частности, справедлива асимптотическая среднеквадратичная оценка для эволюции температуры атмосферы при наличии обратной связи с океаном*

$$\limsup_{t\to\infty} \mathbb{E}\|\Theta\|_H^2 \leqslant \frac{c_{11} + \mathrm{tr}_{L_2} Q}{c_{12}}. \tag{19}$$

Таким образом, атмосферная температура $\Theta(y,t)$ в модели смешанной системы атмосфера-океан (1) *является ограниченной асимптотически в среднеквадратичной норме в терминах физических величин, таких как след оператора ковариации внешнего шума, коэффициент длинноволнового радиационного охлаждения Земли a и эмпирические функции $\|S_\mathrm{a}\|_{L^2}$ и $\|S_\mathrm{o}\|_{L^2}$, представляющие широтную зависимость коротковолнового солнечного излучения, а также число Прандтля* Pr *и число Рэлея* Ra *для океанических течений.*

В силу оценок теоремы 5.8 мы можем использовать известную процедуру Крылова—Боголюбова для вывода существования инвариантных мер нашей марковской полугруппы.

Следствие 5.10. *Полугруппа марковских операторов $\{\mathcal{T}(t)\}_{t\geqslant 0}$ допускает инвариантное распределение μ_i в M^2:*

$$\mathcal{T}(t)\mu_i = \mu_i \quad \text{для} \quad t \geqslant 0.$$

Фактически, предельные точки для

$$\left\{\frac{1}{t}\int_0^t \mathcal{T}(\tau)\mu_0\,d\tau\right\}_{t\geqslant 0}$$

при $t \to \infty$ являются инвариантными распределениями. Существование таких предельных точек вытекает из оценки в теореме 5.8.

В некоторых ситуациях такая инвариантная мера может оказаться единственной. Например, единственная случайная неподвижная точка в следствии 5.7 определяется случайной величиной $u^*(\omega) = v^*(\omega) + z(\omega)$. Эта случайная величина соответствует единственной инвариантной мере марковской полугруппы. Более подробно, эта единственная инвариантная мера является ожиданием дираковской меры относительно такой случайной величины, как случайная точка единичной массы

$$\mu_i = \mathbb{E}\delta_{u^*(\omega)}.$$

Поскольку единственность инвариантной меры влечёт эргодичность [18], заключаем, что смешанная модель атмосфера-океан (1) эргодична при подходящих условиях, указанных в следствии 5.7 для физических данных и случайного шума. Мы переформулируем следствие 5.7 в виде следующего принципа эргодичности.

Теорема 5.11 (эргодичность). *Предположим, что физические данные $|a|$, $\|S_\mathrm{a}\|_{L^2}$, $\|S_\mathrm{o}\|_{L^2}$ и след ковариации шума $\mathrm{tr}_H Q$ достаточно малы, а вязкость ν достаточно велика. Тогда смешанная система атмосфера-океан* (1) *эргодична, а именно для произвольной наблюдаемой атмосферно-океанических течений её среднее по времени на достаточно больших временах усреднения приближает среднее по статистическому ансамблю.*

Эта работа была частично поддержана грантами Национального научного фонда США (NSF) DMS-0209326 и DMS-0139073, а также грантом Государственного фонда естественных наук (NNSF) Китая. Часть работы была сделана во время пребывания Цз. Дуана в Московском государственном университете в мае 2004 г. Х. Гао благодарит за гостеприимство Технологический институт штата Иллинойс в Чикаго.

Литература

[1] Arnold L. Random Dynamical Systems. — New York: Springer, 1998.

[2] Chen F., Ghil M. Interdecadal variability in a hybrid coupled ocean-atmosphere model // J. Phys. Oceanography. — 1996. — Vol. 26. — P. 1561—1578.

[3] Chueshov I. D., Duan J., Schmalfuß B. Probabilistic dynamics of two-layer geophysical flows // Stoch. Dyn. — 2001. — Vol. 1, no. 4. — P. 451—476.

[4] Chueshov I. D., Scheutzow M. Inertial manifolds and forms for stochastically perturbed retarded semilinear parabolic equations // J. Dynam. Differential Equations. — 2001. — Vol. 13. — P. 355—380.

[5] Crauel H., Flandoli F. Hausdorff dimension of invariant sets for random dynamical systems // J. Dynam. Differential Equations. — 1998. — Vol. 10. — P. 449—474.

[6] Debussche A. Hausdorff dimension of a random invariant set // J. Math. Pures Appl. — 1998. — Vol. 9. — P. 967—988.

[7] DelSole T., Farrell B. F. A stochastically excited linear system as a model for quasi-geostrophic turbulence: Analytic results for one- and two-layer fluids // J. Atmospheric Sci. — 1995. — Vol. 52. — P. 2531—2547.

[8] Dijkstra H. A. Nonlinear Physical Oceanography. — Boston: Kluwer Academic, 2000.

[9] Duan J., Gao H., Schmalfuss B. Stochastic dynamics of a coupled atmosphere-ocean model // Stoch. Dyn. — 2002. — Vol. 2, no. 3. — P. 357—380.

[10] Egorov Yu. V., Shubin M. A. Partial differential equations // Encyclopedia of Mathematical Sciences. Vol. I. — New York: Springer, 1991.

[11] Flandoli F., Schmalfuß B. Random attractors for the stochastic 3-D Navier—Stokes equation with multiplicative white noise // Stochastics Stochastics Rep. — 1996. — Vol. 59. — P. 21—45.

[12] Gao H. J., Duan J. Averaging principle for quasi-geostrophic motion under rapidly oscillating forcing // Appl. Math. Mech. — In press.

[13] Griffa A., Castellari S. Nonlinear general circulation of an ocean model driven by wind with a stochastic component // J. Marine Research. — 1991. — Vol. 49. — P. 53—73.

[14] Holloway G. Ocean circulation: Flow in probability under statistical dynamical forcing // Stochastic Models in Geosystems / S. Molchanov, W. Woyczynski, eds. — Springer, 1996.

[15] Lions J.-L., Magenes E. Problémes aux limites non homogénes et applications. Vol. 1. — Dunod, 1968.

[16] North G. R., Cahalan R. F. Predictability in a solvable stochastic climate model // J. Atmospheric Sci. — 1981. — Vol. 38. — P. 504—513.

[17] Da Prato G., Zabczyk J. Stochastic Equations in Infinite Dimension. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.

[18] Da Prato G., Zabczyk J. Ergodicity for Infinite Dimensional Systems. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996.

[19] Schmalfuß B. Invariant attracting sets of nonlinear stochastic differential equations // ISAM Seminar — Gaußig. Vol. 54 / H. Langer, V. Nollau, eds. — Akademie, 1989. — P. 217—228.

[20] Schmalfuß B. Long-time behaviour of the stochastic Navier—Stokes equation // Math. Nachr. — 1991. — Vol. 152. — P. 7—20.

[21] Schmalfuß B. A random fixed point theorem and the random graph transformation // J. Math. Anal. Appl. — 1998. — Vol. 225, no. 1. — P. 91—113.

[22] Temam R. Navier—Stokes equation and Nonlinear Functional Analysis. — Philadelphia: SIAM, 1983. — (CBMS–NSF Regional Conf. Ser. in Appl. Math.; Vol. 66).

[23] Temam R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. — Berlin: Springer, 1997.