О корректности смешанной задачи для гиперболических операторов с переменной кратностью характеристик*

П. А. ЗАХАРЧЕНКО, Е. В. РАДКЕВИЧ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: evra@mathlib.ru

УДК 517.9+533.7+533.723

Ключевые слова: гиперболические уравнения, смешанная задача, L_2-корректность, переменная кратность характеристик, условие Сакамото, гиперболические пучки, устойчивость.

Аннотация

Работа посвящена исследованию корректности смешанной задачи для гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами и переменной кратностью характеристик. Выделен класс гиперболических операторов высокого порядка с постоянными коэффициентами и переменной кратностью характеристик, для которых получено обобщение условий Сакамото L_2-корректности смешанной задачи.

Abstract

P. A. Zakharchenko, E. V. Radkevich, On the well-posedness of the mixed problem for hyperbolic operators with characteristics of variable multiplicity, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 6, pp. 85—98.

The paper is devoted to the study of the well-posedness of the mixed problem for hyperbolic equations with constant coefficients and characteristics of variable multiplicity. The authors distinguish a class of higher-order hyperbolic operators with constant coefficients and characteristics of variable multiplicity for which a generalization of the Sakamoto L_2-well-posedness of the mixed problem is obtained.

Введение

Анализ полиномиальных пучков дисперсионных уравнений систем моментов Грэда для кинетических уравнений Больцмана [2, 6, 7] и Фоккера—Планка [2, 5] показывает, что для моментных аппроксимаций кинетических уравнений (и в более широком смысле моделей механики сплошных сред, см. [4]) переменная кратность характеристик вытекает из самой природы описываемых физических процессов, связанных с включением в описание моментов высокого порядка,

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 03-01-00189).

неравновесных, неконсервативных переменных. Полиномиальные пучки дисперсионных уравнений имеют структуру вида

$$\mathcal{P}(\tau,\xi) - i\mathcal{Q}(\tau,\xi) = 0, \tag{1}$$

$$\mathcal{P}(\tau,\xi) = P_0(\tau,\xi) + \sum_{j\geqslant 1,\, N\geqslant 2j}^{[N/2]} (-1)^j \gamma_{2j} P_{2j}(\tau,\xi),$$

$$\mathcal{Q}(\tau,\xi) = \gamma_1 P_1(\tau,\xi) + \sum_{j\geqslant 1,\, N\geqslant 2j+1} (-1)^j \gamma_{2j+1} P_{2j+1}(\tau,\xi),$$

$P_j(\tau,\xi)$ — однородные полиномы порядка $m-j$ с равными единице старшими коэффициентами по τ.

Анализ полиномиальных пучков (1) показал, что они обладают чрезвычайно жёсткой структурой:

1) постоянные γ_j удовлетворяют условиям Рауса—Гурвица [3];
2) однородные полиномы $P_j(\tau,\xi)$ нестрого гиперболичны по τ и корни соседних полиномов нестрого разделяют друг друга, т. е.
$$[P_j, P_{j+1}] = P_{j+1}\partial_\tau P_j - P_j \partial_\tau P_{j+1}] \geqslant 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{R}^1,\ \xi \in \mathbb{R}^d;$$
3) структура однородных полиномов $P_j(\tau,\xi)$ степени $m-j$ напоминает структуру полиномов в представлении полинома Гурвица как полиномиального пучка [3]. А именно, в каждом из полиномов P_j отличны от нуля лишь коэффициенты при степенях τ, *имеющие только одну чётность*, т. е.
$$\mathcal{P}(\tau,\xi) = g(\tau^2,\xi), \quad \mathcal{Q}(\tau,\xi) = \tau f(\tau^2,\xi). \tag{2}$$

Эти факты позволили выделить класс устойчивых полиномиальных пучков, названных нами связными пучками, свойства которых, как показали прямые вычисления, воспроизводятся на каждом шаге метода моментных аппроксимаций Грэда [7].

Определение связного пучка. Полиномиальный пучок

$$\mathcal{P}(\tau,\xi) - i\mathcal{Q}(\tau,\xi) = 0, \tag{3}$$

$$\mathcal{P}(\tau,\xi) = \sum_{j\geqslant 0,\, N\geqslant 2j} (-1)^j \gamma_{2j} P_{2j}(\tau,\xi),$$

$$\mathcal{Q}(\tau,\xi) = \sum_{j\geqslant 0,\, N\geqslant 2j+1} (-1)^j \gamma_{2j+1} P_{2j+1}(\tau,\xi)$$

однородных полиномов P_j порядка $m-j$ с вещественными коэффициентами будем называть связным пучком порядка (m,N), если:

1) полиномы P_{2j}, $j\geqslant 0$, и полиномы P_{2j+1}, $j\geqslant 0$, имеют одну чётность, т. е.
$$P_{2j}(\tau,\xi) = \begin{cases} g_j(\tau^2,\xi), & m-2j \text{ чётное},\\ \tau f_j(\tau^2,\xi), & m-2j \text{ нечётное}, \end{cases}$$

и

$$P_{2j+1}(\tau, \xi) = \begin{cases} g_j(\tau^2, \xi), & m - 2j - 1 \text{ чётное}, \\ \tau f_j(\tau^2, \xi), & m - 2j - 1 \text{ нечётное}; \end{cases}$$

2) для коэффициентов $\gamma_j > 0$ справедливо правило Рауса—Гурвица;
3) для скобки Пуассона выполнено

$$[P_0, \partial_\tau(P_0)](\tau, \xi) \geqslant 0 \quad \forall(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1};$$

4) для скобок Пуассона соседних полиномов выполнено

$$[P_j, P_{j+1}](\tau, \xi) \geqslant 0 \quad \forall(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad j = 0, \ldots, N-1,$$

т. е. полиномы P_j, $j = 0, \ldots, N$, нестрого гиперболичны и корни соседних полиномов P_j, P_{j+1} нестрого разделяют друг друга.

Установлено [5], что второе условие в определении пучка Грэда (справедливость условий Рауса—Гурвица для старших коэффициентов полиномов P_j пучка) является следствием диссипативности матрицы представлений оператора столкновений в базисе функций Эрмита.

Как второе следствие диссипативности матрицы представлений оператора столкновений в базисе функций Эрмита была установлена неотрицательность скобок Пуассона крайних пар соседних полиномов пучка дисперсионного уравнения.

Воспроизводство причин неотрицательности скобок Пуассона всех пар соседних полиномов пучка на каждом шаге построения аппроксимации кинетического уравнения системой моментов Грэда мы отмечаем для всех просчитанных нами примеров.

Подсказанный физикой допустимый класс пучков дисперсионных уравнений гарантировал следующее обобщение классической теоремы Эрмита (об устойчивых полиномах).

Теорема 1. *Связный пучок* (1), *для которого*

$$[P_{N-1}, P_N](\tau, \xi) > 0 \quad \forall(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad (\tau, \xi) \neq 0, \tag{4}$$

является устойчивым, т. е. для мнимых частей корней уравнения $\mathcal{R} = 0$ выполнено

$$\operatorname{Im} \tau_j(\xi) > 0, \quad j = 1, \ldots, m, \quad \forall \xi \neq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Существование решения задачи Коши

Теорема 1 даёт естественную реализацию в разрешимости задачи Коши для операторов с переменной кратностью характеристик. Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{R}(D)u = f \tag{5}$$

в смысле теории распределений

$$(u, \mathcal{R}^*(D)\varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \tag{6}$$

Теорема 2. *Для связного пучка $\mathcal{R}(D)$ при условии* (4) *для любого $s \in \mathbb{R}$ существует достаточно большое $\gamma_s \gg 1$, что для любого $\gamma \geqslant \gamma_s$ для любого $f \in H_{s,\gamma,+}$ существует единственное решение $u \in H_{s,\gamma,+}$ уравнения* (5), *причём*

$$\frac{1}{\gamma}\|\mathcal{R}(D)u\|_{s,\gamma,+} \geqslant c_0\|u\|_{m-N+s,\gamma,+}, \tag{7}$$

$$\mathcal{R}^{(j)}(D)u \in H_{s,\gamma,+}, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{8}$$

Пространства функций задачи Коши

В случае постоянных коэффициентов вопрос о существовании решения задачи Коши (для связных пучков) решается напрямую, поскольку с помощью преобразования Фурье решение строится в явном виде. Однако мы предпочтём оставаться в рамках единого подхода — энергетических оценок. Здесь и далее будем понимать уравнение (5) в смысле теории распределений (6), где $\mathcal{D}$ — пространство $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ с компактным носителем, (f, g) — эрмитово скалярное произведение, $\mathcal{R}^*(D) = \overline{\mathcal{R}}(D)$. Здесь $H_{s,\gamma}$ — пополнение S (пространство функций Шварца) по норме

$$\|f\|_{s,\gamma} = \left(\int (1 + |(\xi, \sigma - i\gamma)|^2)^s |\tilde{f}(\xi, \sigma - i\gamma)|^2 \, d\xi \, d\sigma\right)^{1/2}.$$

Другими словами, мы можем определить $H_{s,\gamma}$ как пространство таких функций $f \in S'$, что $(1 + |D|^2)^{s/2}(e^{-\gamma t} f) \in L_2(\mathbb{R}^{n+1})$. Функция $(1 + |\zeta|^2)^{s/2}$, $\zeta = (\xi, \tau)$, — символ псевдодифференциального оператора $(1+|D|^2)^{s/2}$. В силу равенства Парсеваля и неравенства Гёльдера

$$|(f, \varphi)| = \left|\left((1 + |D|^2)^{s/2} f, (1 + |D|^2)^{s/2}\varphi\right)\right| \leqslant \|f\|_{s,\gamma}\|\varphi\|_{-s,-\gamma}$$

для функций $f, \varphi \in S$. Используя плотность S в H^s, форму (f, g) можно по непрерывности продолжить с $S \times S$ на $H_{s,\gamma} \times H_{-s,-\gamma}$. Вложение $H_{-s,-\gamma} \to (H_{s,\gamma})'$, индуцированное этой эрмитовой формой, является каноническим изоморфизмом $H_{-s,-\gamma}$ и банахово сопряжённого к $H_{s,\gamma}$ пространства.

Если Φ — некоторое пространство функций или распределений в $\mathbb{R}^{n+1}$, то через Φ_+ будем обозначать подпространство функций $f \in \Phi$, носитель которых принадлежит полупространству $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1},\ t \geqslant 0\}$.

Предложение 1. *$f \in H_{\gamma,+}$ тогда и только тогда, когда $f \in H_\varrho$ при $\varrho > \gamma > 0$, а норма $\|e^{-\gamma t} f\|$ равномерно ограничена по $\varrho > \gamma$. Более того,*

$$\sup_{\varrho > \gamma}\left(\int d\xi \int\limits_{\operatorname{Im}\tau = -\varrho} |\tilde{f}(\xi, \tau)|^2 \, d\operatorname{Re}\tau\right)^{1/2} = \sup_{\varrho > \gamma}\|e^{-\varrho t} f\| = \|e^{-\gamma t} f\|, \quad f \in H_{\gamma,+}. \tag{9}$$

Предложение 2. *$f \in H_{s,\gamma,+}$ тогда и только тогда, когда преобразование Фурье—Лапласа $\tilde f(\tau,\xi)$ является голоморфной функцией τ при $\operatorname{Im}\tau < -\gamma$ почти при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и интеграл*

$$\int d\xi \int\limits_{\operatorname{Im}\tau=-\varrho} (1+|\xi|^2+|\tau|^2)^s |\tilde f(\xi,\tau)|^2 \, d\operatorname{Re}\tau$$

равномерно ограничен при $\varrho > \gamma$.

Теперь рассмотрим функцию $a(\tau,\xi)$, непрерывную по всем переменным, голоморфную по переменной τ, $\tau < 0$, и растущую на бесконечности не быстрее некоторой степени $|\xi| + |\operatorname{Re}\tau|$. Тогда значение псевдодифференциального оператора

$$\begin{aligned} {}_{\varrho}a(D)f = e^{\varrho t} a(D_t - i\gamma, D_x) e^{-\varrho t} f = \\ = (2\pi)^{-(n+1)/2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{i((x,\xi)+t(\sigma-i\varrho))} \tilde f(\xi, \sigma - i\varrho) \, d\xi \, d\sigma \end{aligned}$$

не зависит от $\varrho > 0$, так что оператор

$$a(D) = {}_{\varrho}a(D) \colon H_{-\infty,\gamma,+} \to H_{-\infty,\gamma,+}$$

определён корректно. Заметим, что

$${}_{\varrho}P(D) = e^{\varrho t} a(D_t - i\gamma, D_x) e^{-\varrho t} = P(D).$$

Хорошо известно, что пространство H^s можно определить как образ $H^0 = L_2$ при действии псевдодифференциального оператора $(1+|D|^2)^{s/2}$. В случае пространства $H_{s,\gamma,+}$ в качестве *градуирующего оператора* можно взять псевдодифференциальный оператор с символом

$$\delta_{s,+}(\tau,\xi) = \bigl(i\tau - \gamma_0 + \sqrt{1+|\xi|^2}\,\bigr)^s.$$

Этот символ голоморфен по τ для $\operatorname{Im}\tau < -\varrho_0$, а его модуль

$$|\delta_{s,+}(\tau,\xi)| = \bigl(|\operatorname{Re}\tau|^2 + (\sqrt{1+|\xi|^2} - \gamma_0 + \gamma)^2\bigr)^{s/2}, \quad \operatorname{Im}\tau = -\gamma,$$

можно сверху и снизу оценить через $(|\xi|^2+|\tau|^2)^{s/2}$ с постоянными, зависящими только от $\gamma_0 > 0$. Таким образом, псевдодифференциальный оператор

$$\delta_{s,+}(D) = {}_{\gamma}\delta_{s,+}(D), \quad \gamma \geqslant \gamma_0,$$

переводит пространство $H_{\infty,\gamma,+}$ в себя, и мы можем определить норму в $H_{\infty,\gamma,+}$ с помощью этого оператора:

$$\begin{aligned} \|f\|_{s,\gamma,+} = \|e^{-\gamma t}\delta_{s,+}(D) f = \|\delta_{s,+}(D_x, D_t - i\gamma) e^{-\gamma t} f\| = \\ = \biggl(\iint \bigl(\sigma^2 + \bigl(\sqrt{1+|\xi|^2} - \gamma_0 + \gamma\bigr)^2\bigr)^s |\tilde f(\xi, \sigma - i\gamma)|^2 \, d\xi \, d\sigma\biggr)^{1/2}. \end{aligned}$$

При $\gamma \geqslant \gamma_0$ эта норма эквивалентна введённой выше.

Дадим интерпретацию более простого свойства (8), связанного с корректностью по Петровскому полинома (1). Покажем, что из условия $\operatorname{Im}\tau_j(\xi) > 0$, $\xi \neq 0$, $j = 1, \dots, m$, справедливого для корней исследуемого полинома $\mathcal{R}(\tau, \xi)$, для любого $\gamma \geqslant \gamma_0 \gg 1$ следуют оценки

$$|\mathcal{R}(\sigma - i\gamma, \xi)| \geqslant c_0 \sum_{j=1}^{m} \gamma^j |\mathcal{R}^{(j)}(\sigma - i\gamma, \xi)| \quad \forall (\sigma, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

$$|\mathcal{R}^*(\sigma + i\gamma, \xi)| \geqslant c_0 \sum_{j=1}^{m} \gamma^j |(\mathcal{R}^*)^{(j)}(\sigma - i\gamma, \xi)| \quad \forall (\sigma, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

где для любого полинома $P(\tau)$

$$P^{(j)}(\tau) = \partial_\tau^j P(\tau), \quad j = 1, \dots, \deg P.$$

Действительно, для $\tau = \sigma - i\gamma$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, имеем

$$-\operatorname{Im}\mathcal{R}(\tau, \xi)\overline{\mathcal{R}^{(1)}(\tau, \xi)} = \sum_{k=1}^{m} \big(\gamma + \operatorname{Im}\tau_k(\xi)\big) \bigg| \prod_{l \neq k} (\sigma - i\gamma - \tau_l(\xi) \bigg| \geqslant \gamma |\mathcal{R}^{(1)}(\tau, \xi)|^2,$$

откуда следует, что

$$\gamma |\mathcal{R}^{(1)}(\tau, \xi)|^2 \leqslant |\mathcal{R}(\tau, \xi)| |\mathcal{R}^{(1)}(\tau, \xi)| \implies \gamma |\mathcal{R}^{(1)}(\tau, \xi)| \leqslant |\mathcal{R}(\tau, \xi)|.$$

Теперь заметим, что

$$\mathcal{R}^*(\tau, \xi) = (-1)^m \mathcal{R}(-\tau, -\xi).$$

Из связности пучка $\mathcal{R}(\tau, \xi)$ следует, что корни полинома $\mathcal{R}^*(\tau, \xi) = 0$ по τ находятся в нижней полуплоскости комплексной плоскости переменной τ, т. е.

$$\mathcal{R}^* q(\tau, \xi) \neq 0, \quad \operatorname{Im}\tau \geqslant 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ \xi \neq 0.$$

Для корней полинома $\mathcal{R}^*(\tau, \xi)$ имеем $\operatorname{Im}\tau_j(\xi) < 0$, $\xi \neq 0$, $j = 1, \dots, m$, что позволяет по аналогии получить оценку для $\mathcal{R}^*$. Отсюда следует лемма.

Лемма 1. *Для связного пучка $\mathcal{R}(\tau, \xi)$ для любого $s \in \mathbb{R}$ и любого достаточно большого $\gamma \geqslant \gamma_0 \geqslant 1$ справедливы неравенства*

$$\sum_{j=1}^{m} \gamma^j \|\mathcal{R}^{(j)}(D)u\|_{s,\gamma} \leqslant C_0 \|\mathcal{R}(D)u\|_{s,\gamma} \quad \forall u \in H_{\infty,\gamma},$$

$$\sum_{j=1}^{m} \gamma^j \|(\mathcal{R}^*)^{(j)}(D)v\|_{-s,-\gamma} \leqslant C_0 \|\mathcal{R}^*(D)v\|_{-s,-\gamma} \quad \forall v \in H_{\infty,-\gamma}.$$

Это утверждение позволяет дать другую формулировку теоремы 2.

Теорема 3. *Предположим, что для оператора* (5) *и формально сопряжённого к нему оператору $\mathcal{R}^*(D)$ для любого $M > 0$ можно найти достаточно большое*

$\gamma(M) \gg 1$, *такое что при* $|s| \leqslant M$, $\gamma \geqslant \gamma(M)$ *справедливы неравенства*

$$\sum_{j=1}^{m} \gamma^j \|\mathcal{R}^{(j)}(D)u\|_{s,\gamma} \leqslant C_s \|\mathcal{R}(D)u\|_{s,\gamma} \quad \forall u \in H_{\infty,\gamma},$$

$$\sum_{j=1}^{m} \gamma^j \|(\mathcal{R}^*)^{(j)}(D)v\|_{-s,-\gamma} \leqslant C_s \|\mathcal{R}^*(D)v\|_{-s,-\gamma} \quad \forall v \in H_{\infty,-\gamma}.$$

Тогда для любого $\gamma \geqslant \gamma_s$ *и для любого* $f \in H_{s,\gamma,+}$ *существует единственное решение* $u \in H_{s,\gamma,+}$ *уравнения* (5), *причём*

$$\mathcal{R}^{(j)}(D)u \in H_{s,\gamma,+}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Разрешимость смешанной задачи для операторов с переменной кратностью характеристик

Постановка задачи

Для простоты мы ограничимся случаем, когда рассматриваемая область $\Omega \in \mathbb{R}^d$ является полупространством. Переход к случаю области с гладкой границей достаточно хорошо разработан (см., например, [1]). Рассмотрим связный нестрого гиперболический полиномиальный пучок (1) и связанный с ним дифференциальный оператор

$$\mathcal{R}(D_{x_1}, D_{x'}, D_t)u = f, \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \quad t > 0, \tag{10}$$

$D_t = -i\partial_t$, $D_1 = -i\partial_{x_1}$, $D_{x'} = -i\partial_{x'}$, порядка m с постоянными коэффициентами. На границе $\partial\Omega = \{x = 0, \ (y,t) \in \mathbb{R}^d\}$ определён набор дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами $B_j(D)$. Под смешанной задачей понимается задача определения решения уравнения (10), удовлетворяющего граничным условиям

$$\mathcal{B}_j(D_{x_1}, D_{x'}, D_t)u = g_j, \quad x \in \mathbb{R}^{n-1}_{x'}, \quad t > 0, \quad j = 1, \ldots, \mu, \tag{11}$$

$$u = f = g_j = 0 \quad \forall t < 0. \tag{12}$$

Как и в случае задачи Коши, мы ограничимся нулевыми данными Коши. Продолжим все функции из (10), (11) нулём для $t < 0$. Тогда уравнения (10), (11) будут выполняться при всех $t \in \mathbb{R}$, а начальные условия заменятся на условия (12).

Через $\mathcal{B}_j$ будем обозначать полиномиальные пучки с символами

$$\mathcal{B}_j(\lambda, \eta, \sigma) = B_{0j}(\lambda, \eta, \sigma) - iB_{1j}(\lambda, \eta, \sigma) + \ldots, \quad \deg B_{kj} = \beta_j < m.$$

Условие A. Пучок $\mathcal{R}$ — нестрого гиперболический связный пучок, удовлетворяющий (4).

Условие B. Граница $\partial\Omega$ не является характеристической, т. е. $P_0(\nu) \neq 0$, $P_{m-N}(\nu) \neq 0$, где $\nu = (1, 0, \ldots, 0)$ — нормаль к плоскости $\partial\Omega$.

В силу условия B полином $P_0(\lambda,\eta,\sigma)$ можно разрешить относительно старшей степени λ^m. Поэтому можно предположить, что

$$P_0(\lambda,\eta,\sigma)=\lambda^m+\sum_{j=1}^{m}p_{0j}(\eta,\sigma)\lambda^{m-j},$$

где $p_{0j}(\eta,\sigma)$ — вещественные однородные полиномиальные по (η,σ) символы порядка j. Рассмотрим дисперсионное уравнение

$$\mathcal{R}(X,\lambda)=0,\quad X=(\eta,\tau),\quad \eta\in\mathbb{R}^{d-1},\quad \sigma=\operatorname{Re}\tau\in\mathbb{R},\quad \operatorname{Im}\tau=-\gamma,\quad \gamma\geqslant 0. \tag{13}$$

Ввиду условия A это уравнение не имеет вещественных корней. Из B следует непрерывность корней $\lambda_j(X)$ от многомерного параметра X. Таким образом, при всех значениях X, $\operatorname{Im}\tau<0$, число корней уравнения (13) в полуплоскостях $\operatorname{Im}\lambda>0$ и $\operatorname{Im}\lambda<0$ не зависит от X. Обозначим их через $m_\pm$, $m_++m_-=m$.

Условие C. $\mu=m^+$.

Наша задача — исследовать корректность смешанной задачи (10), (11), (12).

Факторизация

Справедлива следующая лемма (см. [1]).

Лемма 2. *Пусть*

$$A(\omega,\lambda)=\sum_{j=0}^{m}a_j(\omega)\lambda^{m-j},$$

где $a_j(\omega)$ — функции от параметра $\omega\in\Omega$ класса $C^l(\Omega)$, $l\geqslant 0$, и пусть

$$|a_0(\omega)|>a_0>0\quad\forall\omega\in\Omega.$$

Предположим, что корни полинома A по λ распадаются (с учётом кратности) на J групп, так что при всех $\omega\in\Omega$ корни группы j принадлежат множеству $U_j\subset C$, причём все эти множества находятся на положительном расстоянии друг от друга. Тогда полином A разлагается на множители:

$$A(\omega,\lambda)=\prod_{j=1}^{J}A_j(\omega,\lambda),$$

где корни полиномов $A_j(\omega,\lambda)$ при всех $\omega\in\Omega$ принадлежат U_j, $j=1,\dots,J$, а коэффициенты полиномов A_j имеют ту же гладкость, что и коэффициенты A, и коэффициенты при старших степенях λ в A_j равномерно отделены от нуля.

Эта лемма даёт факторизацию полинома

$$\mathcal{R}(\lambda,\eta,\sigma-i\gamma)=\mathcal{P}(\lambda,\eta,\sigma-i\gamma)-i\mathcal{Q}(\lambda,\eta,\sigma-i\gamma)=\mathcal{R}^+(\lambda,\eta,\sigma-i\gamma)\mathcal{R}^-(\lambda,\eta,\sigma-i\gamma).$$

Полиномы $\mathcal{R}^\pm(\lambda,\eta,\sigma-i\gamma)$ разрешены относительно старших степеней λ и имеют корни в полуплоскости $\pm\operatorname{Im}\lambda>0$.

Постараемся оценить числа $m^{\pm}$, поскольку число граничных условий определяется m^{+}. Для этого прежде всего отметим, что одним из условий связности является строгая гиперболичность по τ крайнего полинома P_N. В силу леммы 2 число граничных условий определяется следующим образом:

$$m^{+} = m_b^{+} + m_d^{+},$$

где m_d^{+} — число корней $\lambda_{j,b}^{+}$ в верхней комплексной полуплоскости $\lambda_{j,b}^{+} > 0$ полинома

$$P_b(\lambda) = \mathcal{R}(\lambda, 0, 0)/\lambda^{m-N}.$$

Постоянная $m^{+}d-$ — число корней $\lambda_{j,d}^{+}$ в верхней комплексной полуплоскости $\lambda_{j,d}^{+} > 0$ полинома $P_N(\lambda, \eta, \sigma - i\gamma)$, $\gamma > 0$ — в силу строгой гиперболичности P_N определяется (см. [2]) следующей леммой.

Лемма 3. *Пусть $P_N(\lambda, \eta, \tau)$ — строго гиперболический полином, нехарактеристичный по λ. В случае чётного $m - N$ имеем $m_+ = m_- = (m - N)/2$. Для нечётного $m - N$ имеем $|m_+ - m_-| = 1$.*

Для фиксированного достаточно малого $0 < \delta_0 \ll 1$ положим

$$\begin{aligned}
\Sigma^{+}_{\text{ellip}} &= \big\{(\eta, \sigma, \gamma) \in \Sigma^{+},\ \varepsilon_0 \leqslant \gamma \leqslant 1 - \varepsilon_0,\ \varepsilon_0 \leqslant \sqrt{|\sigma|^2 + |\eta|^2} \leqslant 1 - \varepsilon_0\big\},\\
\Sigma^{+}_{\text{parab}} &= \big\{(\eta, \sigma, \gamma) \in \Sigma^{+},\ \gamma > 1 - \varepsilon_0,\ 0 \leqslant \sqrt{|\sigma|^2 + |\eta|^2} < \varepsilon_0\big\},\\
\Sigma^{+}_{\text{hyperb}} &= \big\{(\eta, \sigma, \gamma) \in \Sigma^{+},\ 0 \leqslant \gamma < \varepsilon_0,\ \sqrt{|\sigma|^2 + |\eta|^2} < 1 - \varepsilon_0\big\},\\
\Sigma^{\pm} &= \{(\eta, \sigma, \gamma) \in \mathbb{R}^n,\ |\eta|^2 + \sigma|^2 + |\gamma|^2 = 1\}.
\end{aligned}$$

Микролокализация позволяет разбить верхнюю полуплоскость

$$\Xi^{+} = \{(\gamma, |\sigma| + |\eta|) \in \mathbb{R}^2,\ \gamma \geqslant 0,\ |\sigma| + |\eta| \geqslant 0\}$$

области параметров $X = (\eta, \sigma, \gamma)$ на три конуса:

1) эллиптический конус

$$\mathcal{K}^{+}_{\text{ellip},\varepsilon_0} = \{(\gamma, \sigma, \eta) = \Lambda(\tilde\gamma, \tilde\sigma, \tilde\eta),\ (\tilde\gamma, \tilde\sigma, \tilde\eta) \in \Sigma^{+}_{\text{ellip}}\},$$

2) параболический конус

$$\mathcal{K}^{+}_{\text{parab},\varepsilon_0} = \{(\gamma, \sigma, \eta) = \Lambda(\tilde\gamma, \tilde\sigma, \tilde\eta),\ (\tilde\gamma, \tilde\sigma, \tilde\eta) \in \Sigma^{+}_{\text{parab}}\},$$

3) гиперболический конус

$$\mathcal{K}^{+}_{\text{hyperb},\varepsilon_0} = \{(\gamma, \sigma, \eta) = \Lambda(\tilde\gamma, \tilde\sigma, \tilde\eta),\ (\tilde\gamma, \tilde\sigma, \tilde\eta) \in \Sigma^{+}_{\text{hyperb}}\}.$$

Теперь можно сформулировать условие Лопатинского — условие корректности смешанной задачи для нестрого гиперболического пучка.

Условие Лопатинского

Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\begin{gathered}\mathcal{R}(D_{x_1}, D_{x'}, D_t)u = f, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad x_1 > 0, \quad t > 0, \\ \mathcal{B}_j(D_{x_1}, D_{x'}, D_t)u = g_j, \quad j = 1, \dots, m^+, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad t > 0.\end{gathered} \tag{14}$$

Пусть $\mathcal{B}'_j(\lambda, \eta, \sigma, \gamma)$ — остаток от деления символа полиномиального пучка $\mathcal{B}_j(\lambda, \eta, \sigma - i\gamma)$ на полином $\mathcal{R}^+(\lambda, \eta, \sigma, \gamma)$ по λ. Тогда $\mathcal{B}'_j$ являются полиномами по λ не выше $m^+ - 1$:

$$\mathcal{B}'_j(\lambda, \eta, \sigma, \gamma) = \sum_{k=0}^{m^+-1} b_{jk}(\eta, \sigma, \gamma)\lambda^k.$$

Рассмотрим матрицу Лопатинского

$$\mathcal{L}(\eta, \sigma, \gamma) = \|b_{jk}(\eta, \sigma, \gamma)\|, \quad j, k = 1, \dots, m^+.$$

Определим полином

$$\mathcal{R}_p(\lambda, \gamma^{-1}) = \mathcal{R}(\gamma\lambda, 0, -i\gamma)/\gamma^m, \quad \gamma \geqslant \gamma_0 \gg 1, \quad \mathcal{R}_p(\lambda) = \mathcal{R}_p^+(\lambda)\mathcal{R}_p^-(\lambda).$$

Пусть $\mathcal{B}'_{j,p}(\lambda)$ — остаток от деления символа полиномиального пучка

$$\mathcal{B}_j^p(\lambda) = \mathcal{B}_j(\gamma\lambda, 0, -i\gamma)/\gamma^{m_j}$$

на полином $\mathcal{R}_p^+(\lambda)$ по λ. Тогда $\mathcal{B}'_{j,p}$ являются полиномами по λ не выше $m^+ - 1$:

$$\mathcal{B}'_{j,p}(\lambda) = \sum_{k=0}^{m^+-1} d_{jk}(\gamma)\lambda^k.$$

Рассмотрим матрицу Лопатинского параболической зоны

$$\mathcal{L}_p = \|d_{jk}(\gamma)\|, \quad j, k = 1, \dots, m^+.$$

Условие Лопатинского. Будем говорить, что для смешанной задачи (14) выполнено равномерно условие Лопатинского, если

1) в эллиптической зоне

$$\operatorname{Lop}(\mathcal{R}, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{m^+}) = \det \mathcal{L}(\eta, \sigma, \gamma) \neq 0 \quad \forall (\eta, \sigma, \gamma) \in \mathcal{K}_{\text{ellip}}, \quad \Lambda \geqslant 0,$$

2) в параболической зоне

$$\operatorname{Lop}_p(\mathcal{R}, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{m^+}) = \det \mathcal{L}_p(\gamma) \neq 0, \quad \gamma \geqslant \gamma_0 \gg 1,$$

3) в гиперболической зоне

$$\operatorname{Lop}(\mathcal{R}, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{m^+}) = \det \mathcal{L}(\eta, \sigma, \gamma) \neq 0 \ \ \forall (\eta, \sigma, \gamma) \in \mathcal{K}_{\text{hyperb}}, \ \ \gamma_0 \leqslant \gamma \leqslant \varepsilon_0 \Lambda.$$

Условие D. Выполнено условие Лопатинского.

Структурные ограничения

Потребуем, чтобы пучок $\mathcal{R}$ удовлетворял дополнительным структурным условиям, подсказанным свойствами полиномиальных пучков дисперсионных уравнений линеаризаций в окрестности состояний равновесия моментных приближений кинетических уравнений.

Условие E. Согласованная кратность корней полиномов $P_j(\tau,\lambda,\eta)$, $(\lambda,\eta)\in\in\mathbb{R}^d$, по τ пучка $\mathcal{R}$.

Потребуем, чтобы

1) однородные нестрого гиперболические по τ полиномы $P_j(\lambda,\eta,\tau)$, $j==0,\dots,m-N+1$, были представимы в виде
$$P_j(\lambda,\eta,\tau)=\prod_{k=1}^{\mu_j}\mathcal{P}_{k,j}(\lambda,\eta,\tau),$$
где $\mathcal{P}_{k,j}$ — строго гиперболические по τ полиномы, имеющие общие корни. Таким образом, кратные корни полинома P_j образуются общими корнями строго гиперболических полиномов $P_{k,j}$;
2) корень $\tau_0(\lambda_0,\eta_0)$ нестрого гиперболического полинома $P_0(\tau,\lambda,\eta)=0$ кратности $r(\lambda_0,\eta_0)>1$ является корнем нестрого гиперболических полиномов $P_j(\tau,\lambda,\eta)=0$, $j=1,\dots,r-1$, при $(\lambda,\eta)=(\lambda_0,\eta_0)$ соответственно кратности $r-j$ и $P_r(\tau_0,\lambda_0,\eta_0)\neq 0$.

Пространства смешанной задачи

Через $H^{m,s}_{[\gamma]}(\mathbb{R}^{d+1}_+)$ обозначим пространство сужений функций из $H^{m,s}_{[\gamma]}(\mathbb{R}^{d+1})$ на полупространство $\mathbb{R}^{d+1}_+=\{x_1\geqslant 0\}$. Положим
$$\|u\|^{m,s}_{[\gamma]}=\left(\sum_{j=0}^{m}\int_0^\infty dx_1\int d\eta\int\limits_{\operatorname{Im}\tau=-\gamma}|(1+|\eta|^2+\tau|^2)^{m+s-j}|D_1^j\hat{u}(x,\eta,\tau)|^2\,d\tau\right)^{1/2}.$$
Через $H^{m,s}_{[\gamma]}(\mathbb{R}^{d+1})^+_t$, $H^{m,s}_{[\gamma]}(\mathbb{R}^{d+1}_+)^+_t$ обозначим подпространства функций из $H^{m,s}_{[\gamma]}(\mathbb{R}^{d+1})$, $H^{m,s}_{[\gamma]}(\mathbb{R}^{d+1}_+)$, равных нулю при $t<0$.

Для смешанной задачи рассмотрим ещё пространство $H^s_{[\gamma]}(\mathbb{R}^d)$ функций (распределений), сосредоточенных на границе $\Gamma=\{x_1=0\}$, с нормой
$$\langle g\rangle_{s,[\gamma]}=\left(\int\limits_{\operatorname{Im}\tau=-\gamma}(1+|\tau|^2+|\eta|^2)^s|\hat{g}(\eta,\tau)|^2\right)^{1/2}$$
и подпространство $H^s_{[\gamma]}(\mathbb{R}^d)^+_t$ функций, равных нулю при $t<0$.

Теорема 4. *Пусть для набора операторов $\mathcal{R},\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_\mu$ выполнены условия* A, B, C, D. *Тогда для любого $s_0\in\mathbb{R}^1$ найдётся такое $\gamma_0=\gamma_0(s_0)\gg 1$, что при*

$|s| < s_0$, $\gamma \geqslant \gamma_0$ *задача*

$$\begin{gathered}
\mathcal{R}(D_{x_1}, D_{x'}, D_t)u = f, \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \quad t > 0, \\
\mathcal{B}_j(D_{x_1}, D_{x'}, D_t)u = g_j, \quad x \in \mathbb{R}^{n-1}_{x'}, \quad t > 0, \quad j = 1, \ldots, \mu, \\
u = f = g_j = 0, \quad t < 0,
\end{gathered}$$

при правых частях

$$f \in H_{0,s+1+5(N-1)/3,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)^+_t, \quad g_j \in H_{m+s-\beta_j+N-1,\gamma}(\mathbb{R}^n)^+_t, \quad j = 1, \ldots, m^+,$$

имеет единственное решение

$$u \in H_{m,s,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)^+_t, \quad D^j_{x_1} u(0, x', t) \in H_{m+s-j+N-1,\gamma}(\mathbb{R}^n), \quad j = 1, \ldots, m-1,$$

для которого справедлива оценка

$$c_0 \left\{ \sum_{j=1}^{m-1} \langle D^j_1 u \rangle^2_{m+s+N-1-j,\gamma} + \gamma \|u\|^2_{m,s,\gamma} \right\} \leqslant \\
\leqslant \frac{1}{\gamma} \|f\|^2_{0,s+1+5(N-1)/3,\gamma} + \sum_{j=1}^{m^+} \langle g_j \rangle^2_{m+s+N-1-\beta_j,\gamma}.$$

Эта теорема является обобщением результатов [8, 9] для строго гиперболических операторов высокого порядка.

Примеры

Приведём примеры операторов с переменной кратностью характеристик, для которых справедливы условия A, B, E, D.

Пример 1.

$$\mathcal{R}(D_t, D_x) = P_0(D_t, D_x) - P_2(D_t, D_x) - iP_1(D_t, D_x).$$

Символы операторов P_j:

$$\begin{aligned}
&P_0(\lambda, \eta, \tau) = (\tau^2 - \lambda^2 - \eta^2)(\tau^2 - 5\lambda^2 - \eta^2), \\
&P_1(\lambda, \eta, \tau) = (\tau^2 - 3\lambda^2 - \eta^2)(\tau - \lambda), \\
&P_2(\lambda, \eta, \tau) = \tau^2 - 2\lambda^2 - \frac{1}{2}\eta^2.
\end{aligned}$$

Здесь P_1, P_2 разделяются строго:

$$\tau_{2,1} = \lambda < \tau^+_{1,2} = \sqrt{2\lambda^2 + \frac{1}{2}\eta^2} < \tau^+_{1,1} = \sqrt{3\lambda^2 + \eta^2}, \quad |\eta| + |\tau| \neq 0,$$

P_0, P_1 разделяются нестрого:

$$\tau_{2,1} \leqslant \tau^+_{2,0} = \sqrt{\lambda^2 + \eta^2} \leqslant \tau^+_{1,1} = \sqrt{3\lambda^2 + \eta^2} \leqslant \tau^+_{1,0} = \sqrt{5\lambda^2 + \eta^2}.$$

Пример 2.

$$\mathcal{R}(D_t, D_x) = P_0(D_t, D_x) - P_2(D_t, D_x) - i\big(P_1(D_t, D_x) - P_3(D_t, D_x)\big).$$

Символы операторов P_j:

$$P_0(\lambda,\eta,\tau) = (\tau^2 - \lambda^2 - \eta^2)(\tau^2 - 4\lambda^2 - \eta^2)(\tau^2 - 6\lambda^2 - \eta^2),$$
$$P_1(\lambda,\eta,\tau) = (\tau^2 - 2\lambda^2 - \eta^2)(\tau^2 - 5\lambda^2 - \eta^2)(\tau - \lambda),$$
$$P_2(\lambda,\eta,\tau) = \left(\tau^2 - \lambda^2 - \frac{1}{2}\eta^2\right)(\tau^2 - 3\lambda^2 - \eta^2),$$
$$P_3(\lambda,\eta,\tau) = \left(\tau - \frac{1}{2}\lambda\right)\left(\tau^2 - \frac{3}{2}\lambda^2 - \frac{2}{3}\eta^2\right).$$

Здесь P_2, P_3 разделяются строго:

$$\tau_{2,2} = \frac{1}{2}\lambda < \tau_{1,2}^{+} = \sqrt{\lambda^2 + \frac{1}{2}\eta^2} <$$
$$< \tau_{2,1}^{+} = \sqrt{\frac{3}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2}\eta^2} < \tau_{1,1}^{+} = \sqrt{3\lambda^2 + \frac{1}{2}\eta^2}, \quad |\eta| + |\tau| \neq 0,$$

P_0, P_1 и P_1, P_2 разделяются нестрого:

$$\tau_{3,1} = \lambda \leqslant \tau_{3,0}^{+} = \sqrt{\lambda^2 + \eta^2} \leqslant \tau_{2,1}^{+} = \sqrt{2\lambda^2 + \eta^2} \leqslant$$
$$\leqslant \tau_{2,0}^{+} = \sqrt{4\lambda^2 + \eta^2} \leqslant \tau_{1,1}^{+} = \sqrt{5\lambda^2 + \eta^2} \leqslant \tau_{1,0}^{+} = \sqrt{6\lambda^2 + \eta^2}.$$

Литература

[1] Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г. Смешанная задача для дифференциальных уравнений в частных производных с квазиоднородной старшей частью. — М.: Эдиториал УРСС, 1999.

[2] Волевич Л. Р., Радкевич Е. В. Устойчивые пучки гиперболических полиномов и задачи Коши для гиперболических уравнений с малым параметром при старших производных // Тр. ММО. — 2004. — Т. 65. — С. 69—113.

[3] Годунов С. Г. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1994.

[4] Годунов С. К., Роменский Е. И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. — Новосибирск : Науч. кн., 1998. — (Универ. сер.; Т. 4).

[5] Захарченко П. А., Радкевич Е. В. О свойствах представления уравнения Фоккера—Планка в базисе функций Эрмита // Докл. РАН. — 2004. — Т. 395, № 1. — С. 36—39.

[6] Levermore C. D. Moment closure hierarchies for kinetic theories // J. Statist. Phys. — 1996. — Vol. 83. — P. 1021—1065.

[7] Müller I., Ruggeri T. Extended Thermodynamics. — Springer, 1993.

[8] Sakamoto R. Mixed problems for hyperbolic equations. I: Energy inequalities // J. Math. Kyoto Univ. — 1970. — Vol. 10. — P. 349—373.

[9] Sakamoto R. Mixed problems for hyperbolic equations. II: Existence theorems with zero initial datas and energy inequalities with initial datas // J. Math. Kyoto Univ. — 1970. — Vol. 10. — P. 403—417.