

Асимптотика решения усреднённых уравнений для системы связанных осцилляторов*

Л. А. КАЛЯКИН

Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН
e-mail: klenru@mail.ru

Ю. Ю. БАГДЕРИНА

Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН
e-mail: yulya@mail.ru

УДК 517.928.226

Ключевые слова: асимптотика, малый параметр, нелинейные уравнения, усреднение, метод многих масштабов.

Аннотация

В работе исследуются уравнения, которые появляются при усреднении системы трёх слабо нелинейных осцилляторов. Прослеживаются отличия асимптотик на бесконечности для решений усреднённых уравнений в случае постоянных и переменных собственных частот.

Abstract

L. A. Kalyakin, Yu. Yu. Bagderina, Asymptotics for the solution of averaged equations for the system of coupled oscillators, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 6, pp. 99–113.

The equations obtained by averaging the system of three weakly nonlinear oscillators are considered. Distinctive properties of asymptotics at infinity for the solutions of averaged equations for both constant and variable proper frequencies are studied.

1. Постановка задачи

Основной целью данной работы является исследование асимптотики на бесконечности для решений дифференциальных уравнений, которые возникают при усреднении системы слабо связанных нелинейных осцилляторов. Мы ограничиваемся случаем трёхмерной системы, которая содержит все характерные черты многомерных задач такого рода:

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 03-01-00716, «Научные школы» 1446.2003.1, INTAS 03-51-4286.

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_j}{d\theta} + \gamma_j \rho_k \rho_l \sin(\psi + \alpha(\theta)) &= f_j(\theta) \sin(\psi_j + \varphi_j(\theta)), \\ \rho_j \frac{d\psi_j}{d\theta} + \gamma_j \rho_k \rho_l \cos(\psi + \alpha(\theta)) &= f_j(\theta) \cos(\psi_j + \varphi_j(\theta)),\end{aligned}\quad (1)$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3, \quad (j = 1, 2, 3, \quad j + k + l = 6, \quad j \neq k \neq l).$$

Здесь α , f_j , $\varphi_j(\theta)$ — заданные функции, $\gamma_j = \text{const} \neq 0$.

Имея в виду возможность перенормировки искоемых функций $\rho_j(\theta)$, можно считать без ограничения общности, что действительные коэффициенты γ_j по модулю равны единице. При этом имеются лишь два принципиально разных варианта: либо все коэффициенты одного знака, либо знак одного коэффициента отличен от знака двух других. Если ещё учесть возможность преобразования ψ_j в $-\psi_j$, то достаточно рассмотреть два случая: 1) все γ_j равны 1; 2) $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = \gamma_3 = -1$. В данной работе основное внимание уделяется второму варианту, который как раз и встречается в приложениях.

Уравнения типа (1) возникают при рассмотрении разных физических задач. В частности, к ним приводят описание процесса синхронизации в двухконтурном генераторе [8], описание взаимодействия акустических волн в резонаторе [12], наконец, в пространственно-однородном случае к (1) редуцируется известная система трёх волн [2]. Все эти конкретные физические задачи в исходной математической модели содержат малый параметр и описываются системой трёх слабонелинейных осцилляторов, возмущённых малой внешней накачкой:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 z_j}{dt^2} + \omega_j^2(\tau) z_j &= \varepsilon G_j(\mathbf{z}, \varepsilon) + \varepsilon F_j(\theta) \cos(\omega_j^0 t + \phi_j(\theta)), \\ \mathbf{z} &= (z_1, z_2, z_3), \quad \theta = \varepsilon t, \quad \tau = \varepsilon^2 t.\end{aligned}\quad (2)$$

Уравнения вида (1) получаются в асимптотическом приближении при $\varepsilon \rightarrow 0$ и описывают медленные деформации амплитуд и сдвигов фаз для приближённого решения

$$z_j(t; \varepsilon) \approx \rho_j(\theta) \cos(\omega_j(0)t + \varphi_j(\theta)), \quad j = 1, 2, 3.$$

Надо понимать, что появление масштаба $\theta = \varepsilon t$ обусловлено не только явным присутствием θ в уравнениях (уравнения (2) могут не содержать явно переменной θ), но и порядком возмущения $\mathcal{O}(\varepsilon)$ в правых частях. Использование медленного времени $\theta = \varepsilon t$ обеспечивает асимптотическую аппроксимацию точного решения на временах $0 \leq t \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ [3, 10]. Однако для физических приложений интерес представляют далёкие времена $t \approx \varepsilon^{-2}$, на которых проявляется медленная деформация собственных частот $\omega_j(\tau)$, $\tau = \varepsilon^2 t$.

Для описания асимптотик на большем промежутке в похожих задачах с малым параметром обычно применяется метод многомасштабных разложений с привлечением медленных времен $\varepsilon^2 t$, $\varepsilon^3 t$ и т. д. Такой способ оказывается эффективным в случаях, когда решения осциллируют не только в быстром масштабе t , но и в последующих медленных масштабах так, что приближённые решения описываются периодическими либо почти периодическими функциями

в каждом масштабе. Подобные ситуации возникают при возмущениях, не зависящих от медленных переменных, и считаются хорошо изученными [1, 5, 9, 13, 14]. Свойство почти периодичности служит основанием для использования идей усреднения на разных этапах и обеспечивает один из способов вычисления асимптотики по малому параметру вплоть до далёких времен (например, до $t \approx \varepsilon^{-2}$) путём усреднения уравнений в медленных масштабах [11].

Иная ситуация складывается для слабонеавтономных уравнений. В ряде задач процедура усреднения в медленных переменных оказывается невозможной в принципе из-за неперiodического характера решений усреднённых уравнений уже на первом медленном масштабе (например, неосциллирующая зависимость от медленного времени лишает смысла процедуру усреднения в соответствующем масштабе). Характерной чертой соответствующих решений является стабилизация или рост на бесконечности (см., например, [6, 7]). В таких случаях для построения асимптотики, пригодной вплоть до далёких времен, привлекается метод согласования [4]. Реализация последнего требует детального изучения решений усреднённых уравнений в их асимптотике на бесконечности.

В данной заметке анализируется влияние медленной деформации частот $\omega_j(\tau)$ на решения усреднённых уравнений. Хотя частоты меняются медленно ($\tau = \varepsilon\theta$), их влияние обнаруживается на временах $\theta \approx 1$ и оказывается весьма существенным при $\theta \rightarrow \infty$. Надо отметить, что получаемая в этом случае асимптотика не имеет ничего общего с решениями при «замороженных» частотах $\omega_j = \text{const}$. Вопрос о влиянии параметров внешней накачки f_j , $\varphi_j(\theta)$ будет обсуждаться в других публикациях.

2. Усреднение системы связанных осцилляторов

Вывод усреднённых уравнений в самых общих ситуациях можно найти в известных монографиях, например в [3]. Структура этих уравнений определяется как видом возмущения, так и резонансными соотношениями. Мы акцентируем здесь внимание на постановке исходных задач, которые ведут к специфическим усреднённым уравнениям (1). Процедуру усреднения продемонстрируем на примере задачи о возмущении системы трёх осцилляторов (2).

В качестве нелинейных слагаемых в возмущении берутся квадратичные формы

$$G_j(\mathbf{z}) = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=k}^3 P_j^{kl} z_k z_l, \quad P_j^{kl} = \text{const}.$$

Именно такого типа члены ответственны за нелинейные эффекты при колебаниях вблизи устойчивых положений равновесия для систем разной природы.

Заданные частоты $\omega_j(\tau)$ предполагаются гладкими (бесконечно дифференцируемыми) функциями с асимптотикой

$$\omega_j(\tau) = \omega_j(0) + \tau \omega'_j(0) + \mathcal{O}(\tau^2), \quad \tau \rightarrow 0.$$

Характерной чертой задачи является наличие резонансных соотношений между собственными частотами (внутренний резонанс), а также между собственными и вынуждающими частотами в начальный момент:

$$\omega_1(0) + \omega_2(0) + \omega_3(0) = 0, \quad \omega_j^0 = \omega_j(0).$$

Считается, что частоты медленно меняются и в ситуации общего положения со временем происходит расстройка внутреннего резонанса:

$$\omega'_1(0) + \omega'_2(0) + \omega'_3(0) \neq 0.$$

Выявление влияния этих медленных деформаций на главный член асимптотики решения при $\varepsilon \rightarrow 0$ составляет, по сути дела, основной предмет данной работы.

Для формального построения асимптотического решения при $\varepsilon \rightarrow 0$ используется анзац двухмасштабного разложения на основе общего решения линейного осциллятора

$$z_j = A_j(\theta) \exp(i\omega_j(0)t) + \text{к. с.} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \bar{z}_j^n(t, \theta), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3)$$

Зависимость от быстрой переменной t в коэффициентах $\bar{z}_j^n(t, \theta)$ определяется из линейных уравнений

$$\frac{d^2 \bar{z}_j^n}{dt^2} + \omega_j^2(0) \bar{z}_j^n = \bar{H}_j^n(t, \theta).$$

Правые части здесь вычисляются через предыдущие приближения по рекуррентным формулам. Требование отсутствия в коэффициентах растущих по t (секулярных) слагаемых приводит к уравнениям, из которых определяется зависимость от медленного времени θ . Иногда уравнения, полученные на этом пути, называют усреднёнными.

На первом шаге получаются уравнения для комплексных амплитуд $A_j(\theta)$:

$$iA'_j + \omega'_j(0)\theta A_j - \tilde{\gamma}_j \bar{A}_k \bar{A}_l = \tilde{F}_j(\theta) \exp(i\phi_j(\theta)), \quad j = 1, 2, 3,$$

с коэффициентами

$$\tilde{\gamma}_j = \omega_j^{-1}(0) \frac{P_j^{kl}}{2}, \quad \tilde{F}_j(\theta) = \omega_j^{-1}(0) \frac{F_j(\theta)}{4}$$

(номера k, l определяются по j однозначно из условия $j + k + l = 6$, $j \neq k \neq l$). Нелинейные слагаемые с участием произведения сопряжённых функций $\bar{A}_k \bar{A}_l$ возникают из-за основного внутреннего резонанса. Такого типа нелинейные уравнения, описывающие медленную деформацию главного члена асимптотического решения, принято называть уравнениями главного резонанса.

После подходящей перенормировки переменных

$$\tilde{A}_j = \frac{1}{2\omega_j(0)} \sqrt{|P_k^{jl} P_l^{jk}|} A_j \exp\left(-i\omega'_j(0) \frac{\theta^2}{2}\right)$$

для амплитуд и фаз комплексных функций $\tilde{A}_j(\theta) = \rho_j(\theta) \exp(i\psi_j(\theta))$ получают уравнения, представленные в начале статьи, с данными

$$\gamma_j = \text{sign } P_j^{kl}, \quad f_j(\theta) = -\omega_j^{-2}(0) \sqrt{|P_k^{jl} P_l^{jk}|} \frac{F_j(\theta)}{8} \quad (j+k+l=6, \quad j \neq k \neq l),$$

$$\varphi_j(\theta) = \omega'_j(0) \frac{\theta^2}{2} - \phi_j(\theta), \quad \alpha(\theta) = \alpha_0 \theta^2, \quad \alpha_0 = \frac{\omega'_1(0) + \omega'_2(0) + \omega'_3(0)}{2}.$$

Если каждую пару переменных ρ_j, ψ_j рассматривать как полярные координаты на плоскости, то в соответствующих декартовых координатах $x_j = \rho_j \cos \psi_j$, $y_j = \rho_j \sin \psi_j$ уравнения (1) принимают более симметричный вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{d\theta} + \gamma_j(x_k y_l + y_k x_l) \cos \alpha + \gamma_j(x_k x_l - y_k y_l) \sin \alpha &= f_j \sin \varphi_j, \\ \frac{dy_j}{d\theta} + \gamma_j(x_k x_l - y_k y_l) \cos \alpha - \gamma_j(x_k y_l + y_k x_l) \sin \alpha &= f_j \cos \varphi_j. \end{aligned} \quad (4)$$

Однако при построении асимптотик удобнее пользоваться уравнениями (1), рассматривая их в замкнутой области шестимерного пространства $\mathbb{R}_+^6 = \{\rho_j \geq 0, \psi_j \in \mathbb{R}\}$.

При аккуратной постановке задачи дифференциальные уравнения в форме (1) должны быть дополнены условиями скачка для фаз при переходе амплитудой нулевого значения:

$$\psi_j(\theta+0) - \psi_j(\theta-0) = \pi \quad \text{при} \quad \rho_j(\theta) = 0.$$

В ситуации общего положения амплитуды отличны от нуля в главных членах асимптотики, и условия скачка не используются при формальных построениях.

В следующих разделах для главного члена формального решения (3) исследуется поведение при $\theta \rightarrow \infty$. При этом не надо думать, что получаемые результаты обеспечат пригодность асимптотики (3) вплоть до далёких времен $t \approx \varepsilon^{-2}$; это просто неверно. Как обычно, в методе согласования разложение на первом медленном масштабе (3) с использованием переменной $\theta = \varepsilon t$ даёт росток, необходимый для конструкции на следующем масштабе $\tau = \varepsilon^2 t$. Для процедуры согласования требуется информация о решении (3) в переходном слое, где $\theta \rightarrow \infty$. Об этом и пойдёт речь ниже.

3. Постоянные частоты без внешней накачки

Исчерпывающие ответы для усреднённых уравнений получаются при $\alpha \equiv 0$, $f_j \equiv 0$. Этот случай соответствует постоянным собственным частотам $\omega_j \equiv \text{const}$ при отсутствии внешней накачки. Такая система

$$\frac{d\rho_j}{d\theta} + \gamma_j \rho_k \rho_l \sin \psi = 0, \quad \rho_j \frac{d\psi_j}{d\theta} + \gamma_j \rho_k \rho_l \cos \psi = 0 \quad (5)$$

при $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$, $|\gamma_j| = 1$, $j = 1, 2, 3$ ($j+k+l=6$, $j \neq k \neq l$) легко интегрируется.

Теорема 1. Для системы уравнений (5) существует общее решение

$$\rho_j = R_j(\theta + S_0; \mathbf{E}), \quad \psi_j = \Psi_j(\theta + S_0; \mathbf{E}) + \theta \Omega_j(\mathbf{E}) + S_j \quad (j = 1, 2, 3) \quad (6)$$

с шестью произвольными константами $\mathbf{E} = \{E_1, E_2, E_3\}$, $\mathbf{S} = \{S_0, S_1, S_2\}$ при $S_1 + S_2 + S_3 = 0$. В случае, когда γ_j имеют разные знаки, вектор-функции $R_j(\theta; \mathbf{E})$, $\Psi_j(\theta; \mathbf{E})$ являются гладкими, периодическими по θ с периодом $\Theta = \Theta(\mathbf{E})$ и с частотой $\Omega = 2\pi/\Theta$. В случае, когда γ_j имеют одинаковые знаки, вектор-функции $R_j(\theta; \mathbf{E})$ имеют полюса. Фазовые функции ψ_j содержат линейные по θ слагаемые с коэффициентами, которые удовлетворяют соотношению $\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 \equiv 0$.

Доказательство теоремы основано на наличии трёх первых интегралов

$$\rho_1 \rho_2 \rho_3 \cos \psi = E_1, \quad \rho_1^2 - \gamma_2 \rho_2^2 = E_2, \quad \rho_1^2 - \gamma_3 \rho_3^2 = E_3 \quad (\text{при } \gamma_1 = 1), \quad (7)$$

значения которых используются в качестве параметров. Поскольку уравнения для четырёх функций ψ , ρ_j ($j = 1, 2, 3$) можно отделить от остальных,

$$\rho'_j + \gamma_j \rho_k \rho_l \sin \psi = 0, \quad \rho_1 \rho_2 \rho_3 \psi' + [(\rho_2 \rho_3)^2 + \gamma_2 (\rho_1 \rho_3)^2 + \gamma_3 (\rho_1 \rho_2)^2] \cos \psi = 0, \quad (8)$$

то первые интегралы обеспечивают решение задачи в терминах эллиптических функций Якоби.

В частности, для обратной функции $\theta = \theta(\rho_1^2)$ выписывается интегральное представление

$$\theta = \pm \frac{1}{2} \int_{\rho_0^2}^{\rho_1^2} \frac{d\eta}{\sqrt{\eta(E_2 + \gamma_2 \eta)(E_3 + \gamma_3 \eta) - E_1^2}}, \quad \rho_0 = \text{const}, \quad (9)$$

из которого извлекается решение для первой амплитуды $\rho_1 = R_1(\theta; \mathbf{E})$. После этого выражения для оставшихся амплитуд $\rho_2 = R_2(\theta; \mathbf{E})$, $\rho_3 = R_3(\theta; \mathbf{E})$ и для комбинационной фазы $\psi = \Psi(\theta; \mathbf{E})$ получаются из интегралов (7). При интегрировании двух оставшихся уравнений из (5) появляются две дополнительные константы интегрирования в фазовых функциях ψ_j в виде аддитивных слагаемых S_j . Отметим, что третье из уравнений для ψ_j в (5) будет тождеством, поскольку для комбинационной фазы $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$ решение получено из (7).

В случае, когда все γ_j равны 1, легко показать, учитывая свойства $\rho_2^2 = E_2 + \eta \geq 0$, $\rho_3^2 = E_3 + \eta \geq 0$, что подкоренное выражение в (9) имеет не более одного нуля. Следовательно, интеграл в (9), взятый с бесконечным пределом, остаётся сходящимся, что соответствует наличию полюса в решении.

В случае, когда $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = \gamma_3 = -1$, из первых интегралов следует ограниченность амплитуд. Поэтому интеграл в (9) берётся по промежутку, который содержится между соответствующими нулями подкоренного выражения. На этом пути для первой компоненты получается выражение через функцию синус амплитуды

$$R_1(\theta; \mathbf{E}) = \left[\eta_1 + (\eta_3 - \eta_1) k^2 \text{sn}^2(\sqrt{\eta_3 - \eta_1} \theta, k) \right]^{1/2}, \quad k^2 = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_3 - \eta_1}. \quad (10)$$

Используемые здесь параметры $\eta_1 < \eta_2 < \eta_3$ являются корнями полинома $\eta(E_2 - \eta)(E_3 - \eta) - E_1^2$. В терминах этой эллиптической функции с учётом первых интегралов (7) выписываются остальные компоненты решения ρ_j, ψ_j .

Период зависит от констант интегрирования $\Theta = \Theta(\mathbf{E})$ и вычисляется через интеграл (9) по замкнутой траектории. Его можно выписать через полный эллиптический интеграл первого рода в форме

$$\Theta = \frac{2}{\sqrt{\eta_3 - \eta_1}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \quad k^2 = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_3 - \eta_1}. \quad (11)$$

Очевидно, тот же период имеют и периодические части фазовых функций $\Psi_j(\theta; \mathbf{E})$.

При интегрировании уравнений для фазовых функций появляются непериодические слагаемые, обусловленные ненулевыми средними значениями

$$\Omega_j = -\gamma_j E_1 \frac{1}{\Theta} \int_0^\Theta (R_j)^{-2} d\theta \equiv -\gamma_j E_1 \langle (R_j)^{-2} \rangle. \quad (12)$$

Очевидно, $\Omega_j \neq 0$ при $E_1 \neq 0$. Однако сумма коэффициентов Ω_j равна нулю, $\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 = 0$, поскольку комбинационная фаза $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$ является периодической функцией. По той же причине три константы интегрирования S_j содержат лишь два произвола; связь между ними определяется способом фиксации средних значений фаз ψ_j . Например, если осциллирующие части фиксировать, требуя нулевого среднего значения $\langle \Psi_j \rangle = 0$, то константы интегрирования будут связаны со средним значением комбинационной фазы соотношением $S_1 + S_2 + S_3 = \langle \psi \rangle$. Если же положить $S_1 + S_2 + S_3 = 0$, то среднее $\langle \psi \rangle$ будет содержаться в средних значениях осциллирующих частей Ψ_j . Теорема доказана. $\square$

Следствие. В декартовых переменных полученное при $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = \gamma_3 = -1$ решение представляется трёхпериодическими функциями $x_j(\theta), y_j(\theta)$ с частотами Ω, Ω_j .

Заметим, что все амплитуды $\rho_j(\theta)$ имеют одну (основную) частоту $\Omega(\mathbf{E})$. Дополнительные частоты $\Omega_j(\mathbf{E})$ проявляются в компонентах $x_j(\theta), y_j(\theta)$ через фазовые функции.

Дополнение 1. В случае $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = \gamma_3 = -1$ все остальные решения невозмущённой системы либо входят в четырёхпараметрическое семейство решений с постоянными ненулевыми амплитудами

$$R_1 = \frac{R_2 R_3}{\sqrt{R_2^2 + R_3^2}} \quad \text{для любых } R_2, R_3 = \text{const} \neq 0,$$

либо входят в четырёхпараметрическое семейство непериодических (сепаратрисных) решений, либо представляют собой неподвижные точки (для системы в декартовых координатах типа (4)), в которых по крайней мере пара амплитуд обращается в нуль.

Дополнение 2. В случае $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = \gamma_3 = -1$ на плоскости параметров $E_2 = E_3$ при $E_1 \neq 0$ происходит вырождение решения в двухчастотное с $\Omega_2 = \Omega_3$ и $\rho_2(\theta) \equiv \rho_3(\theta)$. На плоскости параметров $E_1 = 0$ при $E_2 \neq E_3$ решение вырождается в одночастотное с $\Omega \neq 0$, $\Omega_j = 0$; в этом решении амплитуда $\rho_1(\theta)$ проходит через нулевое значение при постоянной комбинационной фазе $\psi \equiv \pm\pi/2$. На пересечении плоскостей решения будут непериодическими.

4. Переменные частоты без внешней накачки

Переменные частоты с $\omega'_j(0) \neq 0$ индуцируют переменный сдвиг фазы $\alpha(\theta)$, и в ситуации общего положения $\alpha(\theta) = \alpha_0\theta^2$ при $\alpha_0 = \text{const} \neq 0$. В этом случае уравнения (1) с нулевыми правыми частями будут неавтономными:

$$\frac{d\rho_j}{d\theta} + \gamma_j \rho_k \rho_l \sin(\psi + \alpha(\theta)) = 0, \quad \rho_j \frac{d\psi_j}{d\theta} + \gamma_j \rho_k \rho_l \cos(\psi + \alpha(\theta)) = 0 \quad (13)$$

при $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$, $|\gamma_j| = 1$, $j = 1, 2, 3$ ($j + k + l = 6$, $j \neq k \neq l$), и они оказываются неинтегрируемыми. Более того, по сравнению с предыдущим случаем свойства общего решения меняются кардинально: амплитуды стабилизируются к константам, а фазовые функции растут логарифмически при $\theta \rightarrow \infty$.

Теорема 2. Пусть $\alpha(\theta) = \alpha_0\theta^2$. Тогда для уравнений (13) существует шестипараметрическое решение с асимптотикой на бесконечности в виде рядов

$$\begin{aligned} \rho_j(\theta; A_1, A_2, A_3, \Delta) &= A_j + \sum_{n=1}^{\infty} \theta^{-n} \rho_j^n(\sigma; A_1, A_2, A_3), \\ \psi_j(\theta; A_1, A_2, A_3, \Delta_j) &= \delta_j \ln \theta + \Delta_j + \sum_{n=1}^{\infty} \theta^{-n} \psi_j^n(\sigma; A_1, A_2, A_3), \quad \delta_j = \text{const}. \end{aligned} \quad (14)$$

Коэффициенты рядов являются 2π -периодическими функциями по «быстрой» переменной $\sigma = \alpha(\theta) + \delta \ln \theta + \Delta$ при $\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$, $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$. Произвольные константы A_j , $\Delta_j \in \mathbb{R}$ представляют собой параметры решения.

Пояснение. Хотя амплитуды $\rho_j(\theta)$ стабилизируются при $\theta \rightarrow \infty$, в декартовых переменных решение осциллирует из-за логарифмических слагаемых в асимптотике фазовых функций с коэффициентами $\delta_j \neq 0$. Естественно, что частота осцилляций стремится к нулю на бесконечности: $\psi'_j(\theta) \approx \delta_j/\theta$, $\theta \rightarrow \infty$. Более быстрые осцилляции с линейно растущей частотой содержатся в поправках, которые убывают по амплитуде как $\mathcal{O}(\theta^{-1})$ при $\theta \rightarrow \infty$.

Как и в предыдущем разделе, для определённости будем считать $\gamma_1 = 1$. Для уравнений (13) имеется два первых интеграла

$$\rho_2^2 - \gamma_2 \rho_1^2 = E_2 = \text{const}, \quad \rho_3^2 - \gamma_3 \rho_1^2 = E_3 = \text{const}. \quad (15)$$

С учётом этих соотношений для одной из амплитуд, например для $\rho = \rho_1(\theta)$, и для комбинационной фазы $\psi(\theta)$ получается замкнутая система двух неавтономных уравнений

$$\frac{d\rho}{d\theta} + \rho_2\rho_3 \sin(\psi + \alpha(\theta)) = 0, \quad \rho\rho_2\rho_3 \frac{d\psi}{d\theta} + a \cos(\psi + \alpha(\theta)) = 0 \quad (16)$$

при $\rho_2\rho_3 = \sqrt{(E_2 + \gamma_2\rho^2)(E_3 + \gamma_3\rho^2)}$, $a = 3\gamma_2\gamma_3\rho^4 + 2(\gamma_3E_2 + \gamma_2E_3)\rho^2 + E_2E_3$. Если для амплитуд ρ_j берётся асимптотический анзац (14), то константы A_j должны быть связаны со значениями первых интегралов соотношениями

$$E_2 = A_2^2 - \gamma_2A_1^2, \quad E_3 = A_3^2 - \gamma_3A_1^2. \quad (17)$$

Эти значения E_j используются в коэффициентах уравнений (16).

Лемма. Пусть $\alpha(\theta) = \alpha_0\theta^2$. При любых константах $A_2, A_3 \geq 0$ уравнения (16) имеют двухпараметрическое семейство решений с асимптотикой на бесконечности в виде рядов

$$\begin{aligned} \rho(\theta; A_1, A_2, A_3, \Delta) &= A_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \theta^{-n} \rho^n(\sigma; A_1, A_2, A_3), \\ \psi(\theta; A_1, A_2, A_3, \Delta) &= \delta \ln \theta + \Delta + \sum_{n=1}^{\infty} \theta^{-n} \psi^n(\sigma; A_1, A_2, A_3) \end{aligned} \quad (18)$$

с произвольными постоянными $A_1 \geq 0$, $\Delta \in \mathbb{R}$. Коэффициенты рядов (18) определяются однозначно по рекуррентным формулам и являются 2π -периодическими функциями по быстрой переменной

$$\sigma = \alpha(\theta) + \delta \ln \theta + \Delta, \quad (19)$$

где $\delta = -(\gamma_2\gamma_3A_1^2 + \gamma_3A_2^2 + \gamma_2A_3^2)/\alpha_0$.

Доказательство. Подстановка анзаца (18) в соотношения (16) приводит к системе неоднородных линеаризованных уравнений, которые выглядят тривиально:

$$\frac{d\rho^n}{d\sigma} = G^n(\sigma), \quad \frac{d\psi^n}{d\sigma} = F^n(\sigma), \quad n \geq 1. \quad (20)$$

Правые части в (20) определяются через предыдущие приближения. При их вычислении тригонометрические функции $\sin(\psi + \alpha(\theta))$, $\cos(\psi + \alpha(\theta))$ разлагаются в ряды Тейлора при $\psi + \alpha(\theta) \rightarrow \sigma$ с учётом (18), (19). В частности, имеем

$$\frac{1}{G} = -\frac{A_2A_3}{2\alpha_0} \sin \sigma, \quad \frac{1}{F} = -\frac{A_2A_3}{2\alpha_0} p \cos \sigma.$$

Для краткости записи здесь и далее используются обозначения для констант

$$\begin{aligned} p &= A_1(\gamma_2A_2^{-2} + \gamma_3A_3^{-2}) + A_1^{-1}, \\ q &= A_1^2(\gamma_2A_2^{-2} - \gamma_3A_3^{-2})^2 - 2(\gamma_2A_2^{-2} + \gamma_3A_3^{-2}) + A_1^{-2}. \end{aligned}$$

Первая поправка имеет вид

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} + \frac{A_2A_3}{2\alpha_0} \cos \sigma, \quad \frac{1}{\psi} = \frac{1}{\Psi} - \frac{A_2A_3}{2\alpha_0} p \sin \sigma, \quad \frac{1}{R} = \text{const}, \quad \frac{1}{\Psi} = \text{const}, \quad (21)$$

и на этом этапе определяется с точностью до двух констант $\overset{1}{R}, \overset{1}{\Psi}$. Правые части в (20) на следующем шаге зависят от этих констант:

$$\begin{aligned}\overset{2}{G} &= \frac{A_2 A_3}{2\alpha_0} \left(\left(\frac{\alpha_1}{2\alpha_0} + (A_1^{-1} - p) \overset{1}{R} \right) \sin \sigma - \overset{1}{\Psi} \cos \sigma \right) + \frac{A_2^2 A_3^2}{8\alpha_0^2 A_1} \sin 2\sigma, \\ \overset{2}{F} &= \frac{A_2^2 A_3^2}{8\alpha_0^2} ((q + p^2) \cos 2\sigma + q - p^2) - \frac{\delta}{2\alpha_0} + \frac{A_2 A_3}{2\alpha_0} \left(p \overset{1}{\Psi} \sin \sigma + \left(\frac{\alpha_1}{2\alpha_0} p + q \overset{1}{R} \right) \cos \sigma \right).\end{aligned}$$

Из требования ограниченности по σ второй поправки определяется множитель при логарифме:

$$\delta = \frac{A_2^2 A_3^2}{4\alpha_0} (q - p^2),$$

константы $\overset{1}{R}, \overset{1}{\Psi}$ остаются пока неопределёнными. Выражение для второй поправки

$$\begin{aligned}\overset{2}{\rho} &= \overset{2}{R} + \frac{A_2 A_3}{2\alpha_0} \left((p - A_1^{-1}) \overset{1}{R} - \frac{\alpha_1}{2\alpha_0} \right) \cos \sigma - \frac{A_2 A_3}{2\alpha_0} \overset{1}{\Psi} \sin \sigma - \frac{A_2^2 A_3^2}{16\alpha_0^2 A_1} \cos 2\sigma, \\ \overset{2}{\psi} &= \overset{2}{\Psi} + \frac{A_2^2 A_3^2}{16\alpha_0^2} (q + p^2) \sin 2\sigma - \frac{A_2 A_3}{2\alpha_0} p \overset{1}{\Psi} \cos \sigma + \frac{A_2 A_3}{2\alpha_0} \left(\frac{\alpha_1}{2\alpha_0} p + q \overset{1}{R} \right) \sin \sigma.\end{aligned}\tag{22}$$

содержит ещё одну пару констант интегрирования $\overset{2}{R}, \overset{2}{\Psi}$.

Вычисление правых частей на третьем шаге приводит к формулам

$$\begin{aligned}\overset{3}{G} &= \frac{1}{2\alpha_0} \left(A_2 A_3 \left(\frac{\overset{1}{\psi}^2}{2} + (A_1^{-1} - p) \overset{2}{\rho} + \frac{(q + \frac{p}{A_1} - \frac{2}{A_1^2}) \overset{1}{\rho}^2}{2} \right) \sin \sigma - \right. \\ &\quad \left. - A_2 A_3 \left(\overset{2}{\psi} + (p - A_1^{-1}) \overset{1}{\rho} \overset{1}{\psi} \right) \cos \sigma + \overset{1}{\rho} - \delta \frac{d\overset{1}{\rho}}{d\sigma} - \alpha_1 \frac{d\overset{2}{\rho}}{d\sigma} \right), \\ \overset{3}{F} &= \frac{1}{2\alpha_0} \left(A_2 A_3 \left(\frac{p \overset{1}{\psi}^2}{2} + q \overset{2}{\rho} - \left(\frac{q(3p - \frac{7}{A_1})}{2} + \frac{3p^2}{A_1} + \frac{2p}{A_1^2} + \frac{12}{A_1^3} \right) \overset{1}{\rho}^2 \right) \cos \sigma + \right. \\ &\quad \left. + A_2 A_3 \left(p \overset{2}{\psi} - q \overset{1}{\rho} \overset{1}{\psi} \right) \sin \sigma + \overset{1}{\psi} - \delta \frac{d\overset{1}{\psi}}{d\sigma} - \alpha_1 \frac{d\overset{2}{\psi}}{d\sigma} \right).\end{aligned}$$

Именно на этом этапе находятся константы $\overset{1}{R}, \overset{1}{\Psi}$. Требование ограниченности по σ третьей поправки приводит к равенствам $\overset{1}{R} = 0, \overset{1}{\Psi} = 0$. Вычисление следующих поправок выполняется аналогично. В общем случае на каждом шаге функции $\overset{n}{G}(\sigma), \overset{n}{F}(\sigma)$ представляют собой отрезки рядов Фурье. Решение уравнений (20) выписывается в подобной форме:

$$\begin{aligned}\overset{n}{\rho} &= \overset{n}{R} + \overset{n}{P}_n \cos n\sigma + \sum_{m=1}^{n-1} \left(\overset{n}{P}_m \cos m\sigma + \overset{n}{Q}_m \sin m\sigma \right), \\ \overset{n}{\psi} &= \overset{n}{\Psi} + \overset{n}{S}_n \sin n\sigma + \sum_{m=1}^{n-1} \left(\overset{n}{S}_m \sin m\sigma + \overset{n}{T}_m \cos m\sigma \right).\end{aligned}$$

Коэффициенты здесь зависят от исходных параметров A_1, A_2, A_3 . От этих параметров зависят и постоянные интегрирования $\overset{n}{R}, \overset{n}{\Psi}$, которые определяются на $(n+2)$ -м шаге из условия ограниченности решений $\overset{n+2}{\rho}, \overset{n+2}{\psi}$. Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2. В предыдущей лемме построена асимптотика общего решения системы (16), в частности асимптотика первой амплитуды ρ_1 . После этого асимптотика для оставшихся амплитуд ρ_2, ρ_3 получается из интегралов (15).

Фазовые функции ψ_j находятся при интегрировании трёх оставшихся уравнений (13). При этом одно из этих уравнений будет тождеством, так как решение для комбинационной фазы $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$ уже известно. Коэффициенты асимптотики $\overset{n}{\psi}_j(\sigma)$ вычисляются аналогично предыдущим из рекуррентной системы тривиальных уравнений вида

$$\frac{d\overset{n}{\psi}_j}{d\sigma} = \overset{n}{F}_j(\sigma), \quad n \geq 1.$$

Возникающие при этом константы интегрирования определяются при исключении секулярных слагаемых на шаге $n+2$. На первом шаге для этих целей используется коэффициент при логарифме, для которого в общем случае получается выражение $\delta_j \neq 0$.

Формальное построение асимптотического решения можно дополнить обоснованием. Доказательство существования точного решения с асимптотикой (14) выполняется аналогично [16], и на нём мы не останавливаемся. Теорема доказана. $\square$

Комментарии. Как видно из приведённой выше конструкции, уравнения (13) фактически линеаризуются на далёких временах. Квадратичные нелинейности не участвуют в определении главных членов асимптотики (констант A_j, Δ_j), хотя соответствующие слагаемые не убывают на бесконечности. Этот эффект имеет место из-за наличия при нелинейных членах множителей типа $\exp(i\theta^2)$, быстро осциллирующих при $\theta \rightarrow \infty$. Вклад в асимптотику от нелинейностей оказывается порядка $\mathcal{O}(\theta^{-1})$. Появление логарифмических сдвигов в асимптотике фазовых функций связано с медленным убыванием первых поправок амплитуд $\rho_j = \text{const} + \mathcal{O}(\theta^{-1})$, что наблюдается даже в решениях линейных уравнений с переменными коэффициентами.

Обобщения.

1. Теорема 2 остаётся справедливой для любой гладкой функции $\alpha(\theta)$ со степенной асимптотикой

$$\alpha(\theta) = \theta^2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \theta^{-n}, \quad \alpha_0 \neq 0.$$

Ввиду возможной перенормировки переменных можно считать $\alpha_0 = 1$.

2. Возможные обобщения на случай функций с более быстрым ростом, например $\alpha(\theta) = \mathcal{O}(\theta^3)$, не содержат принципиальных отличий.
3. В случае линейной функции $\alpha(\theta) \equiv \alpha_1 \theta$ уравнения интегрируются аналогично теореме 1. Дело сводится к консервативной системе для пары переменных $\psi + \alpha$, ρ_1 , и решения выписываются через эллиптические функции.
4. В случае, когда функция $\alpha(\theta) = \mathcal{O}(\theta^{-1})$ убывает на бесконечности и разлагается по отрицательным степеням, структура асимптотики решений резко меняется. Главный член описывается осциллирующими решениями, описанными в разделе 3 (при $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = \gamma_3 = -1$).

5. Обсуждение результатов

Структура уравнений (13) инвариантна относительно замены θ, ψ на $-\theta, -\psi$. Поэтому при $\theta \rightarrow -\infty$ решение имеет асимптотику того же типа (14). Естественно, что в общем случае константы асимптотики на разных бесконечностях будут различны, обозначим их $A_j^\pm, \Delta_j^\pm$ при $\theta \rightarrow \pm\infty$. Вопрос о формулах связи для констант с разных бесконечностей остаётся открытым. Подобная задача вызывает затруднения даже для интегрируемых уравнений Пенлеве. Между тем связь амплитудных констант $A_j^\pm$ оказывается весьма важной для приложений, поскольку характеризует перераспределение энергии между разными модами. Ниже приводятся результаты численных экспериментов, которые показывают возможные сценарии обмена энергией.

На рис. 1, 2 представлены результаты численного решения уравнений

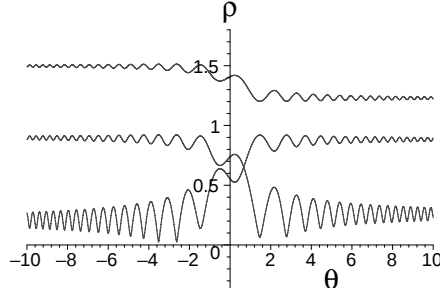
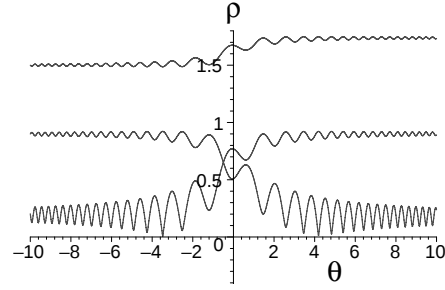
$$\begin{aligned} \rho'_j + \gamma_j \rho_k \rho_l \sin(\psi + \alpha(\theta)) &= 0, \quad j = 1, 2, 3, \\ \psi' \rho_1 \rho_2 \rho_3 + (\gamma_1 (r_2 r_3)^2 + \gamma_2 (r_1 r_3)^2 + \gamma_3 (r_1 r_2)^2) \cos(\psi + \alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

в случае $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = \gamma_3 = -1$, $\alpha(\theta) = \theta^2$. Используются краевые условия при $\theta \rightarrow -\infty$ с константами

$$A_1^- = 0,2, \quad A_2^- = 0,9, \quad A_3^- = 1,5 \quad (\text{рис. 1}),$$

$$A_1^- = 0,9, \quad A_2^- = 0,2, \quad A_3^- = 1,5 \quad (\text{рис. 2}).$$

Берётся решение, которое соответствует заданию фазы ψ в некоторой фиксированной точке θ_0 ; в данном случае $\psi(\theta_0) = \pi/3$ при $\theta_0 = -40$. Значение Δ^-


 Рис. 1. Обмен энергией между ρ_1 , ρ_2 , ρ_3

 Рис. 2. Обмен энергией между ρ_1 , ρ_2 , ρ_3

вычисляется приближённо. Значения констант A_1^+ и Δ^+ на другой бесконечности (при $\theta \rightarrow \infty$) определяются приближённо из результатов численного счёта. После этого постоянные A_2^+ , A_3^+ вычисляются из первых интегралов (17), в которых $E_2 = (A_1^\pm)^2 + (A_2^\pm)^2$, $E_3 = (A_1^\pm)^2 + (A_3^\pm)^2$. Переход амплитуд $\rho_j(\theta)$ с одних констант на другие в своей асимптотике на бесконечности наглядно просматривается на рис. 1 и 2. Как видим, ρ_3 мало меняет своё положение, а ρ_1 , ρ_2 фактически обмениваются амплитудами, проходя через окрестность точки $\theta = 0$.

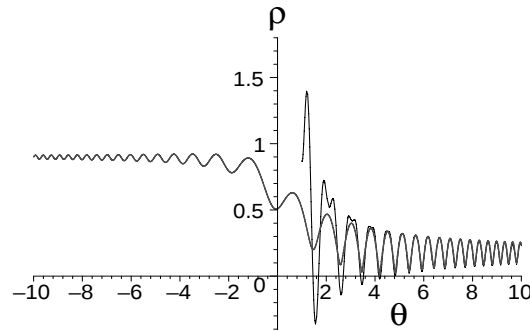
Нелинейный характер взаимодействия приводит к перераспределению энергии между разными модами. Из рис. 1 видно, что если при $\theta \rightarrow -\infty$ среднее значение ρ_1 убывает, а ρ_2 , ρ_3 возрастают, то при $\theta \rightarrow +\infty$ ρ_1 возрастает, а ρ_2 , ρ_3 убывают. На рис. 2, наоборот, среднее значение ρ_1 возрастает, ρ_2 , ρ_3 убывают при $\theta \rightarrow -\infty$, а на другой бесконечности ρ_1 убывает, ρ_2 , ρ_3 возрастают. Перебор различных вариантов показывает, что вариация параметров $A_j^\pm$, $\Delta^\pm$ не влияет на качественную картину происходящего. В случае $\rho_3 \equiv 0$ (система двух слабосвязанных осцилляторов) похожие результаты приведены в [15].

Надо понимать, что асимптотические формулы, полученные в теореме 2, пригодны лишь при больших значениях $|\theta|$; интервал конечных времён $|\theta| \leq \mathcal{O}(1)$ для них недоступен. Для сравнения приведём график асимптотического решения ρ_1 с теми же параметрами $A_1^- = 0,9$, $A_2^- = 0,2$, $A_3^- = 1,5$, $\psi(\theta_0) = \pi/3$. Эти приближённые решения представляют собой отрезки асимптотических рядов (14):

$$r_j(\theta) = A_j^+ + \theta^{-1} \rho_j^1(\sigma) + \theta^{-2} \rho_j^2(\sigma), \quad j = 1, 2, 3.$$

Константы интегрирования во второй поправке (22) равны

$$\begin{aligned} \overset{2}{R} &= \frac{1}{16\alpha_0^2 A_1} (A_2^2 A_3^2 - 2A_1^2 (A_2^2 + A_3^2)), \\ \overset{2}{\Psi} &= \frac{1}{8\alpha_0^3} (A_1^4 + A_2^4 + A_3^4 + 5(A_2^2 A_3^2 - A_1^2 (A_2^2 + A_3^2))); \end{aligned}$$

Рис. 3. Сравнение численного и асимптотического решений для амплитуды ρ_1

они определяют неосциллирующие слагаемые в асимптотике на бесконечности. Как видно из рис. 3, численные и асимптотические результаты для амплитуд практически совпадают на далёких временах.

В заключение отметим возможность переноса всех результатов на системы большей размерности и с другими, например кубическими, нелинейностями. Уравнения главного резонанса типа (1) с кубическими нелинейностями играют важную роль в приложениях, и многомерный случай остаётся пока неисследованным; результаты для системы с одной степенью свободы приведены в [16]. Анализ системы двух слабосвязанных осцилляторов проведён в [15].

Литература

- [1] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
- [2] Бломберг Н. Нелинейная оптика. — М.: Мир, 1966.
- [3] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974.
- [4] Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. — М.: Наука, 1989.
- [5] Ильин А. М. О методе двух масштабов в задаче о возмущении одночастотного колебания // Теор. и матем. физ. — 1999. — Т. 118, № 4. — С. 383—389.
- [6] Калякин Л. А. Асимптотический анализ модели авторезонанса // Докл. РАН. — 2001. — Т. 378, № 5. — С. 594—597.
- [7] Калякин Л. А. Авторезонанс в динамической системе // Соврем. мат. и её прил. — 2003. — Т. 5. — С. 79—108.
- [8] Каплан А. Е., Кравцов Ю. А., Рылов В. А. Параметрические генераторы и делители частоты. — М.: Советское радио, 1966.
- [9] Ларичева В. В. О расширении интервала применимости осреднения // ДАН СССР. — 1975. — Т. 220, № 4. — С. 775—778.

- [10] Митропольский Ю. А., Хома Г. П. Математическое обоснование асимптотических методов нелинейной механики. — Киев: Наукова думка, 1983.
- [11] Найфэ А. Х. Методы возмущений. — М.: Мир, 1976.
- [12] Наугольных К. А., Островский Л. А. Нелинейные волновые процессы в акустике / Под ред. А. В. Гапонова-Грехова. — М.: Наука, 1990.
- [13] Нехорошев Н. Н. Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым // Успехи мат. наук. — 1977. — Т. 32, № 6. — С. 5—66.
- [14] Нехорошев Н. Н. Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым. II // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. — 1979. — Вып. 5. — С. 5—50.
- [15] Ablowitz M. J., Funk B. A., Newell A. C. Semi-resonant interactions and frequency dividers // Stud. Appl. Math. — 1973. — Vol. 52, no. 1. — P. 51—74.
- [16] Kalyakin L. A. Justification of asymptotic expansions for the principal resonance equations // Proc. Steklov Inst. Math. — 2003. — Suppl. 1. — P. S108—S122.

