Метод интегральных уравнений в смешанной задаче с косой производной для гармонических функций вне разрезов на плоскости

П. А. КРУТИЦКИЙ, А. И. СГИБНЕВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 517.958+517.968

Ключевые слова: краевая задача, смешанные граничные условия, гармонические функции, интегральные уравнения, разрезы на плоскости.

Аннотация

Рассматривается смешанная задача для уравнения Лапласа на плоскости вне разрезов. В качестве граничных условий задаётся значение искомой функции на одной стороне каждого разреза и значение её косой производной на другой стороне. Эта задача обобщает смешанную задачу Дирихле—Неймана. С помощью метода потенциалов задача сводится к однозначно разрешимому интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

Abstract

P. A. Krutitskii, A. I. Sgibnev, The method of integral equations for the mixed problem with the skew derivative for harmonic functions outside cuts in a plane, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 6, pp. 115—135.

We consider the mixed problem for Laplace's equation outside cuts in a plane. The Dirichlet boundary condition is posed on one side of each cut, and the skew derivative condition is posed on the other side. This problem generalizes the mixed Dirichlet–Neumann problem. Using the method of potentials, this problem is reduced to a uniquely solvable Fredholm integral equation of the second kind.

Введение

В физике полупроводников возникают смешанные задачи с косой производной вне разрезов на плоскости. При этом условие Дирихле соответствует заданию потенциала, а условие с косой производной — заданию нормального тока с электрода в замагниченном полупроводнике. Смешанная задача для уравнения Лапласа, в которой условие Дирихле задано на одной части разрезов, а условие с косой производной на другой, исследована в [6]. В настоящей работе изучается смешанная задача с заданием условия Дирихле на одной стороне каждого разреза и условия с косой производной на другой. Эта задача обобщает смешанную задачу Дирихле—Неймана [7].

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 6, с. 115—135.

1. Постановка задачи

На плоскости $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ рассмотрим совокупность простых разомкнутых кривых $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N$ класса $C^{2,\lambda}$, $\lambda \in (0, 1]$, не имеющих общих точек, в том числе и концов. Эту совокупность кривых будем называть контуром Γ. Пусть контур Γ параметризован и в качестве параметра выступает длина дуги s:

$$\Gamma_n = \{x \colon x = x(s) = (x_1(s), x_2(s)),\ s \in [a_n, b_n]\}, \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

Параметризацию выберем так, чтобы для различных n отрезки $[a_n, b_n]$ не имели общих точек, в том числе и концов. Совокупность отрезков оси Os, отвечающих контуру Γ, будем также обозначать Γ. Вектор касательной на контуре Γ в точке $x(s)$ обозначим $\tau_x = (\cos\alpha(s), \sin\alpha(s))$, а вектор нормали — $\mathbf{n}_x = (\sin\alpha(s), -\cos\alpha(s))$, т. е. $\cos\alpha(s) = x_1'(s)$, $\sin\alpha(s) = x_2'(s)$. Пусть плоскость разрезана вдоль контура Γ. Через Γ^+ обозначим ту сторону контура Γ, которая остаётся слева при возрастании параметра s, а через Γ^- другую. Индексами $+$ и $-$ будем обозначать предельные значения функций на Γ^+ и на Γ^- соответственно.

Будем говорить, что функция $u(x)$ принадлежит классу $\mathbf{G}$, если

1) $u(x) \in C^0(\overline{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma})$ и $u(x)$ непрерывна на концах разрезов Γ;
2) $\nabla u(x) \in C^0(\overline{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma} \setminus X)$, где $X = \bigcup\limits_{n=1}^{N} (x(a_n) \cup x(b_n))$ — множество концов контура Γ;
3) при $x \to x(d) \in X$ справедливо неравенство
$$|\nabla u| \leqslant \mathrm{const}\, |x - x(d)|^{\delta}, \tag{1}$$
где $\mathrm{const} > 0$, $\delta > -1$ и $d = a_n$ либо $d = b_n$ $(n = 1, \ldots, N)$.

Под $C^0(\overline{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma})$ понимается класс функций, которые имеют предельные значения на разрезах Γ слева и справа, но эти значения могут быть различны во внутренних точках контура Γ, т. е. функции могут иметь скачок на контуре Γ.

Сформулируем смешанную задачу с косой производной для уравнения Лапласа вне системы разрезов на плоскости.

Задача $\mathcal{S}$. Найти функцию $u(x)$ из класса $\mathbf{G}$, удовлетворяющую в $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ уравнению Лапласа
$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \tag{2}$$
граничным условиям
$$u(x)|_{x(s)\in\Gamma^+} = f^+(s), \tag{3}$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_x} + \beta \frac{\partial u}{\partial \tau_x}\right)\bigg|_{x(s)\in\Gamma^-} = f^-(s) \tag{4}$$
и условиям на бесконечности
$$u(x) = A \ln|x| + O(1), \quad \frac{\partial u}{\partial |x|} = \frac{A}{|x|} + O(|x|^{-2}), \quad |x| \to \infty. \tag{5}$$

Считаем, что $f^+(s)$, $f^-(s)$ — известные функции, A и β — заданные константы. В случае $A = 0$ получим классическое условие ограниченности на бесконечности. В случае $\beta = 0$ получим смешанную задачу Дирихле—Неймана [7].

Докажем теорему единственности.

Теорема 1. *Задача $\mathcal{S}$ имеет не более одного решения.*

Доказательство. Предположим, что задача $\mathcal{S}$ имеет два решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ из класса $\mathbf{G}$. Тогда функция $u_0(x) = u_1(x) - u_2(x)$ принадлежит классу $\mathbf{G}$ и удовлетворяет задаче $\mathcal{S}$ с однородными граничными условиями (3), (4) и с условиями на бесконечности

$$u_0(x) = O(1), \quad \frac{\partial u_0}{\partial |x|} = O(|x|^{-2}), \quad |x| \to \infty. \tag{6}$$

Обозначим через l_r окружность большого радиуса r с центром в начале координат. Охватим замкнутой кривой каждый из разрезов Γ_n, $n = 1, \ldots, N$. Для области, ограниченной этими замкнутыми кривыми и окружностью l_r, запишем энергетическое тождество для уравнения (2). Стянем замкнутые кривые к разрезам Γ, устремим r к ∞ и воспользуемся свойствами гладкости функции $u_0(x)$ и условиями (6). Тогда энергетическое тождество примет вид

$$\|\nabla u_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)} = \lim_{r \to \infty} \|\nabla u_0\|^2_{L_2(C_r \setminus \Gamma)} = \int\limits_\Gamma u_0^+ \left(\frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}_x}\right)^+ ds - \int\limits_\Gamma u_0^- \left(\frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}_x}\right)^- ds,$$

где C_r — круг радиуса r с центром в начале координат. Первый интеграл обращается в нуль в силу однородного граничного условия (3). Во второй интеграл подставим

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}_x}\right)^- = -\beta \left(\frac{\partial u_0}{\partial \tau_x}\right)^-$$

и получим

$$\|\nabla u_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)} = \beta \int\limits_\Gamma u_0^- \left(\frac{\partial u_0}{\partial \tau_x}\right)^- ds = \frac{\beta}{2} \sum_{n=1}^N (u_0^2(b_n) - u_0^2(a_n)) = 0,$$

так как в силу однородного условия (3) и п. 1) определения класса $\mathbf{G}$ $u_0(a_n) = u_0(b_n) = 0$, $n = 1, \ldots, N$. Отсюда $u_0(x) \equiv \mathrm{const}$ в $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Однородное условие (3) даёт $\mathrm{const} = 0$. Отсюда заключаем, что $u_0(x) \equiv 0$. Теорема доказана. □

2. Сведение к системе сингулярных интегральных уравнений

Для доказательства теоремы существования наложим дополнительные требования гладкости на функции из граничных условий (3), (4):

$$f^+(s) \in C^{1,\lambda}(\Gamma), \quad f^-(s) \in C^{0,\lambda}(\Gamma), \quad \lambda \in (0, 1]. \tag{7}$$

Отметим, что коэффициент Гёльдера λ при определении гладкости контура Γ и функций $f^+(s)$, $f^-(s)$ предполагается одним и тем же. Если эти коэффициенты различны, то в качестве λ следует выбрать наименьший.

Заменим условие (3) эквивалентными граничными условиями на Γ:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \tau_x}\right|_{x(s)\in\Gamma^+} = f'^+(s), \quad f'^+(s) \equiv \frac{df^+(s)}{ds} \in C^{0,\lambda}(\Gamma), \tag{8}$$

$$u(x(a_n)) = f^+(a_n), \quad n = 1, \ldots, N. \tag{9}$$

В условии (8) учтено, что при выбранной параметризации $\partial/\partial\tau_x = \partial/\partial s$ в любой точке $x(s) \in \Gamma$.

Решение задачи будем искать в виде

$$u[\mu,\nu](x) = V[\mu](x) + T[\nu](x) + B_{2N}, \tag{10}$$

где B_{2N} — вещественная константа (смысл обозначения B_{2N} для константы будет прояснён позже),

$$V[\mu](x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma \mu(s)\ln|x-y(s)|\,ds$$

есть потенциал простого слоя для уравнения Лапласа (2), а

$$T[\nu](x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma \nu(s)\psi(x,y(s))\,ds$$

есть угловой потенциал для уравнения Лапласа (2), изучавшийся в [1, 4].

Неизвестные функции $\mu(s)$, $\nu(s)$, заданные на Γ, будем искать в пространстве $C_q^\varpi(\Gamma)$, $\varpi \in (0,1]$, $q \in [0,1)$.

Будем говорить, что функция $\mathcal{F}(s)$, определённая на Γ, принадлежит банахову пространству $C_q^\varpi(\Gamma)$, $\varpi \in (0,1]$, $q \in [0,1)$, если

$$\mathcal{F}_0(s) = \mathcal{F}(s)\prod_{n=1}^N |s-a_n|^q|s-b_n|^q \in C^{0,\varpi}(\Gamma).$$

Норма в пространстве $C_q^\varpi(\Gamma)$ задаётся соотношением

$$\|\mathcal{F}(s)\|_{C_q^\varpi(\Gamma)} = \|\mathcal{F}_0(s)\|_{C^{0,\varpi}(\Gamma)}.$$

Ядро углового потенциала определяется с точностью до $2\pi m$ (m целое) формулами

$$\cos\psi(x,y) = \frac{x_1-y_1}{|x-y|}, \quad \sin\psi(x,y) = \frac{x_2-y_2}{|x-y|}.$$

Очевидно, $\psi(x,y)$ — угол между вектором $\overrightarrow{yx}$ и направлением оси Ox_1. С другой стороны, $\psi(x,y)$ — многозначная гармоническая функция, сопряжённая с $\ln|x-y|$ относительно соотношений Коши—Римана.

Пусть x — произвольная фиксированная точка плоскости, лежащая вне контура Γ, и $y = y(s) \in \Gamma$, тогда под $\psi(x,y(s))$ будем понимать произвольную фиксированную ветвь этой функции, непрерывно изменяющуюся по s вдоль Γ. При таком определении $\psi(x,y(s))$ угловой потенциал — многозначная функция. Для его однозначности необходимо потребовать выполнения следующих условий [1, 4]:

$$\int\limits_{\Gamma_n} \nu(s)\,ds = 0, \quad n = 1,\ldots,N. \tag{11}$$

При выполнении условий (11) гармонический угловой потенциал можно записать в виде гармонического потенциала двойного слоя

$$T[\nu](x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} w(s)\frac{\partial \ln|x-y(s)|}{\partial \mathbf{n}_y}\,ds,$$

где

$$w(s) = \int\limits_{a_n}^{s} \nu(\sigma)\,d\sigma, \quad s\in[a_n,b_n], \quad n=1,\ldots,N.$$

Из условий (11) вытекает, что $w(a_n)=w(b_n)=0$ для $n=1,\ldots,N$.

Если потребовать

$$\int\limits_{\Gamma} \mu(s)\,ds = -2\pi A, \tag{12}$$

то функция $u[\mu,\nu](x)$ из (10) будет удовлетворять условиям на бесконечности (5).

Если плотности $\mu(s)$, $\nu(s)$ принадлежат $C_q^{\varpi}(\Gamma)$, $\varpi\in(0,1]$, $q\in[0,1)$, и удовлетворяют условиям (11), (12), то функция $u[\mu,\nu](x)$ из (10) принадлежит классу $\mathbf{G}$ и удовлетворяет всем условиям задачи $\mathcal{S}$, за исключением граничных условий [1, 4, 5]. В частности, неравенство (1) будет выполнено с показателем $\delta=-q$, если $q\in(0,1)$.

Рассмотрим граничные условия (4), (8). Подставляя функцию (10) в (4), (8) и учитывая предельные формулы для касательной и нормальной производных логарифмического и углового потенциалов [4, теорема 5], получим систему из двух сингулярных интегральных уравнений для $\nu(s)$, $\mu(s)$:

$$\frac{\nu(s)}{2} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\nu(\sigma)\frac{\cos\phi_0(x(s),y(\sigma))}{|x(s)-y(\sigma)|}\,d\sigma + {}$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\mu(\sigma)\frac{\sin\phi_0(x(s),y(\sigma))}{|x(s)-y(\sigma)|}\,d\sigma = f'^{+}(s), \quad s\in\Gamma,$$

$$-\frac{\mu(s)+\beta\nu(s)}{2} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}(\mu(\sigma)+\beta\nu(\sigma))\frac{\cos\phi_0(x(s),y(\sigma))}{|x(s)-y(\sigma)|}\,d\sigma - {}$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}(\nu(\sigma)-\beta\mu(\sigma))\frac{\sin\phi_0(x(s),y(\sigma))}{|x(s)-y(\sigma)|}\,d\sigma = f^{-}(s), \quad s\in\Gamma.$$

Вторые интегралы в уравнениях понимаются в смысле главного значения. Через $\phi_0(x(s), y(\sigma))$ обозначен угол между вектором $\overrightarrow{xy}$ и направлением нормали $\mathbf{n}_x$ в точке $x \in \Gamma$. Этот угол считается положительным, если он отсчитывается от вектора $\mathbf{n}_x$ против часовой стрелки, и отрицательным, если по часовой стрелке. Кроме того, при $x \neq y$ угол $\phi_0(x, y)$ полагается непрерывным по x, y на контуре Γ. Углы $\phi_0(x(s), y(\sigma))$, $\psi(x(s), y(\sigma))$ с точностью до $2\pi m$ (m целое) связаны соотношением

$$\phi_0(x(s), y(\sigma)) = \psi(x(s), y(\sigma)) - \alpha(s) - \frac{\pi}{2}.$$

Введём обозначения

$$Y_2(s, \sigma) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\phi_0(x(s), y(\sigma))}{|x(s) - y(\sigma)|} - \frac{1}{\sigma - s}\right], \quad Y_1(s, \sigma) = \frac{1}{\pi}\frac{\cos\phi_0(x(s), y(\sigma))}{|x(s) - y(\sigma)|}.$$

Как показано в [4, леммы 2 (1), 3 (1)], если $\Gamma \in C^{2,\lambda}$, то функции $Y_1(s, \sigma)$, $Y_2(s, \sigma)$ гёльдеровы на Γ по обеим переменным с показателем λ. Запишем сингулярные интегральные уравнения для $\nu(s)$, $\mu(s)$ в виде

$$\begin{aligned} &\nu(s) + \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \frac{\mu(\sigma)}{\sigma - s}\,d\sigma + \\ &\quad + \int_\Gamma \mu(\sigma) Y_2(s, \sigma)\,d\sigma + \int_\Gamma \nu(\sigma) Y_1(s, \sigma)\,d\sigma = 2f^{'+}(s), \quad s \in \Gamma, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &\mu(s) + \beta\nu(s) + \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \frac{\nu(\sigma) - \beta\mu(\sigma)}{\sigma - s}\,d\sigma + \int_\Gamma (\nu(\sigma) - \beta\mu(\sigma)) Y_2(s, \sigma)\,d\sigma - \\ &\quad - \int_\Gamma (\mu(\sigma) + \beta\nu(\sigma)) Y_1(s, \sigma)\,d\sigma = -2f^-(s), \quad s \in \Gamma. \end{aligned} \tag{14}$$

Подставляя функцию (10) в условия (9), получим дополнительные уравнения на $\mu(s)$, $\nu(s)$, B_{2N}:

$$V[\mu](x(a_n)) + T[\nu](x(a_n)) + B_{2N} = f^+(a_n), \quad n = 1, \ldots, N. \tag{15}$$

Тем самым мы получили систему интегральных уравнений (11)—(15) относительно функций $\mu(s)$, $\nu(s)$ при $s \in \Gamma$ и константы B_{2N}. Из приведённых выше рассуждений вытекает теорема.

Теорема 2. *Если выполнены условия* (7) *и система уравнений* (11)—(15) *имеет решение* $\mu(s)$, $\nu(s)$, B_{2N}, *такое что* $\mu(s), \nu(s) \in C_q^{\varpi}(\Gamma)$, $\varpi \in (0, 1]$, $q \in [0, 1)$, *то решение задачи* $\mathcal{S}$ *существует и даётся формулой* (10).

Дальнейшие исследования будут нацелены на изучение разрешимости системы интегральных уравнений (11)—(15).

Произведём замену неизвестных функций по формулам

$$\begin{aligned} \rho_1(s) &= \frac{\nu(s) - \bigl(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\bigr)\mu(s)}{\bigl(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\bigr)} \in C_q^{\varpi}(\Gamma), \\ \rho_2(s) &= \frac{\mu(s) + \bigl(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\bigr)\nu(s)}{\bigl(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\bigr)} \in C_q^{\varpi}(\Gamma), \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \nu(s) &= \frac{\rho_1(s) + \bigl(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\bigr)\rho_2(s)}{2\sqrt{1+\beta^2}}, \\ \mu(s) &= \frac{\rho_2(s) - \bigl(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\bigr)\rho_1(s)}{2\sqrt{1+\beta^2}}. \end{aligned} \tag{17}$$

Уравнения (13), (14) в терминах $\rho_1(s)$, $\rho_2(s)$ имеют вид

$$\rho_1(s) - \bigl(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\bigr)\frac{1}{\pi}\int\limits_\Gamma \frac{\rho_1(\sigma)}{\sigma - s}\,d\sigma = F_1(s), \quad s\in\Gamma, \tag{18}$$

$$\rho_2(s) + \bigl(\sqrt{1+\beta^2}-\beta\bigr)\frac{1}{\pi}\int\limits_\Gamma \frac{\rho_2(\sigma)}{\sigma - s}\,d\sigma = F_2(s), \quad s\in\Gamma, \tag{19}$$

где функции

$$\begin{aligned} F_1(s) &= 2\sqrt{1+\beta^2}f'^{+}(s) + 2f^{-}(s) + \\ &+ \bigl(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\bigr)\Bigl(-\int\limits_\Gamma \rho_2(\sigma)Y_1(s,\sigma)\,d\sigma + \int\limits_\Gamma \rho_1(\sigma)Y_2(s,\sigma)\,d\sigma\Bigr), \quad s\in\Gamma, \\ F_2(s) &= 2\bigl(\sqrt{1+\beta^2}-\beta\bigr)\bigl(\sqrt{1+\beta^2}f'^{+}(s) - f^{-}(s)\bigr) - \\ &- \bigl(\sqrt{1+\beta^2}-\beta\bigr)\Bigl(\int\limits_\Gamma \rho_1(\sigma)Y_1(s,\sigma)\,d\sigma + \int\limits_\Gamma \rho_2(\sigma)Y_2(s,\sigma)\,d\sigma\Bigr), \quad s\in\Gamma, \end{aligned}$$

принадлежат $C^{0,\lambda}(\Gamma)$.

В терминах $\rho_1(s)$, $\rho_2(s)$ уравнения (11), (12), (15) примут вид

$$\int\limits_{\Gamma_n} \bigl(\rho_1(s) + \bigl(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\bigr)\rho_2(s)\bigr)\,ds = 0, \quad n=1,\ldots,N, \tag{20}$$

$$\int\limits_{\Gamma} \bigl(\rho_2(s) - \bigl(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\bigr)\rho_1(s)\bigr)\,ds = -4\pi A\sqrt{1+\beta^2}, \tag{21}$$

$$\begin{aligned} &V\bigl[\rho_2 - \bigl(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\bigr)\rho_1\bigr](x(a_n)) + T\bigl[\rho_1 + \bigl(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\bigr)\rho_2\bigr](x(a_n)) + \\ &\quad + 2\sqrt{1+\beta^2}B_{2N} = 2\sqrt{1+\beta^2}f^{+}(a_n), \quad n=1,\ldots,N. \end{aligned} \tag{22}$$

Таким образом, система интегральных уравнений относительно $\mu(s)$, $\nu(s)$, B_{2N} сведена к системе уравнений относительно $\rho_1(s)$, $\rho_2(s)$, B_{2N}. Главное достоинство последней системы заключается в том, что характеристическая часть каждого из уравнений (18), (19) содержит только одну неизвестную функцию (либо $\rho_1(s)$, либо $\rho_2(s)$). Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Между решениями* $\mu(s), \nu(s) \in C_q^{\varpi}(\Gamma)$, B_{2N} *системы* (11)—(15) *и решениями* $\rho_1(s), \rho_2(s) \in C_q^{\varpi}(\Gamma)$, B_{2N} *системы* (18)—(22) *существует взаимно-однозначное соответствие, которое устанавливается формулами* (16), (17).

3. Регуляризация. Исследование регуляризованной системы

Будем решать уравнение (18) относительно $\rho_1(s)$, а (19) — относительно $\rho_2(s)$, считая функции $F_1(s)$, $F_2(s)$ известными. Используя результаты [2, 9], можно доказать следующее утверждение (см. раздел 5).

Лемма 2. *Пусть* $F_1(s)$, $F_2(s)$ *— заданные гёльдеровы на* Γ *функции. Тогда уравнения* (18), (19) *имеют решения в пространстве* $C_q^{\varpi}(\Gamma)$, $\varpi \in (0,1]$, $q \in [0,1)$. *Эти решения даются следующими выражениями: для уравнения* (18)

$$\rho_1(s) = \frac{\left(\sqrt{1+\beta^2}-\beta\right)}{2\sqrt{1+\beta^2}} F_1(s) + \\ + \frac{1}{2\pi\sqrt{1+\beta^2}Q_1(s)} \int\limits_{\Gamma} \frac{F_1(\sigma)Q_1(\sigma)}{\sigma - s}\, d\sigma - \frac{\cos\pi\eta}{Q_1(s)} \sum_{m=0}^{N-1} B_m s^m, \quad s \in \Gamma,$$

для уравнения (19)

$$\rho_2(s) = \frac{\left(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\right)}{2\sqrt{1+\beta^2}} F_2(s) - \\ - \frac{1}{2\pi\sqrt{1+\beta^2}Q_2(s)} \int\limits_{\Gamma} \frac{F_2(\sigma)Q_2(\sigma)}{\sigma - s}\, d\sigma - \frac{\sin\pi\eta}{Q_2(s)} \sum_{m=0}^{N-1} B_{m+N} s^m, \quad s \in \Gamma,$$

где $B_0, \dots, B_{2N-1}$ *— произвольные вещественные константы,*

$$Q_1(s) = \prod_{n=1}^{N} |s-a_n|^{1/2-\eta} |s-b_n|^{1/2+\eta} \operatorname{sign}(s-a_n),$$
$$Q_2(s) = \prod_{n=1}^{N} |s-a_n|^{1-\eta} |s-b_n|^{\eta} \operatorname{sign}(s-a_n);$$

число η *определяется равенством*

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arcctg} \beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

и удовлетворяет соотношениям

$$\cos\pi\eta = \left(\frac{\sqrt{1+\beta^2}+\beta}{2\sqrt{1+\beta^2}}\right)^{1/2}, \quad \sin\pi\eta = \left(\frac{\sqrt{1+\beta^2}-\beta}{2\sqrt{1+\beta^2}}\right)^{1/2},$$
$$\operatorname{tg}\pi\eta = \left(\sqrt{1+\beta^2}-\beta\right), \qquad \operatorname{ctg}\pi\eta = \left(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\right).$$

Раскрывая выражения $F_1(s)$, $F_2(s)$, получим для $\rho_1(s)$, $\rho_2(s)$ систему регуляризованных уравнений

$$\rho_1(s) + \frac{1}{Q_1(s)}\int\limits_\Gamma \rho_1(\sigma)K_{11}(s,\sigma)\,d\sigma + \frac{1}{Q_1(s)}\int\limits_\Gamma \rho_2(\sigma)K_{12}(s,\sigma)\,d\sigma +$$
$$+\cos\pi\eta\frac{\sum\limits_{m=0}^{N-1}B_m s^m}{Q_1(s)} = \frac{\Phi_1(s)}{Q_1(s)}, \quad s\in\Gamma, \tag{23}$$
$$\rho_2(s) + \frac{1}{Q_2(s)}\int\limits_\Gamma \rho_1(\sigma)K_{21}(s,\sigma)\,d\sigma + \frac{1}{Q_2(s)}\int\limits_\Gamma \rho_2(\sigma)K_{22}(s,\sigma)\,d\sigma +$$
$$+\sin\pi\eta\frac{\sum\limits_{m=0}^{N-1}B_{m+N} s^m}{Q_2(s)} = \frac{\Phi_2(s)}{Q_2(s)}, \quad s\in\Gamma, \tag{24}$$

где введены обозначения

$$K_{11}(s,\sigma) = -\frac{Y_2(s,\sigma)Q_1(s)}{2\sqrt{1+\beta^2}} + \frac{\left(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\right)}{2\pi\sqrt{1+\beta^2}}\int\limits_\Gamma \frac{Y_2(\xi,\sigma)}{\xi-s}Q_1(\xi)\,d\xi,$$
$$K_{12}(s,\sigma) = \frac{Y_1(s,\sigma)Q_1(s)}{2\sqrt{1+\beta^2}} + \frac{\left(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\right)}{2\pi\sqrt{1+\beta^2}}\int\limits_\Gamma \frac{Y_1(\xi,\sigma)}{\xi-s}Q_1(\xi)\,d\xi,$$
$$K_{21}(s,\sigma) = \frac{Y_1(s,\sigma)Q_2(s)}{2\sqrt{1+\beta^2}} - \frac{\left(\sqrt{1+\beta^2}-\beta\right)}{2\pi\sqrt{1+\beta^2}}\int\limits_\Gamma \frac{Y_1(\xi,\sigma)}{\xi-s}Q_2(\xi)\,d\xi,$$
$$K_{22}(s,\sigma) = \frac{Y_2(s,\sigma)Q_2(s)}{2\sqrt{1+\beta^2}} - \frac{\left(\sqrt{1+\beta^2}-\beta\right)}{2\pi\sqrt{1+\beta^2}}\int\limits_\Gamma \frac{Y_2(\xi,\sigma)}{\xi-s}Q_2(\xi)\,d\xi,$$
$$\Phi_1(s) = \left(\sqrt{1+\beta^2}-\beta\right)\left(f'^{+}(s) + \frac{f^{-}(s)}{\sqrt{1+\beta^2}}\right)Q_1(s) +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_\Gamma \frac{Q_1(\sigma)}{\sigma-s}\left(f'^{+}(\sigma) + \frac{f^{-}(\sigma)}{\sqrt{1+\beta^2}}\right)d\sigma, \tag{25}$$

$$\Phi_2(s) = \left(f'^{+}(s) - \frac{f^{-}(s)}{\sqrt{1+\beta^2}}\right)Q_2(s) -$$
$$- \frac{\left(\sqrt{1+\beta^2}-\beta\right)}{\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{Q_2(\sigma)}{\sigma - s}\left(f'^{+}(\sigma) - \frac{f^{-}(\sigma)}{\sqrt{1+\beta^2}}\right)d\sigma. \tag{26}$$

Положим $\eta_0 = \min\{\eta, 1/2-\eta\}$. Заметим, что плотности сингулярных интегралов в выражениях для функций $K_{pj}(s,\sigma)$, $\Phi_p(s)$ ($p=1,2$, $j=1,2$) являются гёльдеровыми на Γ (причём плотности в $K_{pj}(s,\sigma)$ гёльдеровы по обеим переменным). В частности, эти плотности гёльдеровы на Γ по переменной ξ с показателем $\omega = \min\{\lambda, \eta, 1/2-\eta\}$ (равномерно по σ в случае $K_{pj}(s,\sigma)$) и обращаются в нуль, если ξ — конец Γ (так как функции $Q_1(\xi)$, $Q_2(\xi)$ принадлежат классу $C^{0,\eta_0}(\Gamma)$ и обращаются в нуль на концах Γ). Из этих рассуждений и из свойств сингулярных интегралов [9, § 18] следует лемма 3.

Лемма 3. *Функции $K_{pj}(s,\sigma)$ ($p=1,2$, $j=1,2$) гёльдеровы на Γ по обеим переменным. В частности, эти функции гёльдеровы на Γ по переменной s с показателем $\omega = \min\{\lambda,\eta,1/2-\eta\}$ равномерно по $\sigma \in \Gamma$. Если выполнены условия* (7), *то $\Phi_1(s), \Phi_2(s) \in C^{0,\omega}(\Gamma)$.*

Очевидно, что если функции $\rho_1(s)$, $\rho_2(s)$ из пространства $C_q^{\varpi}(\Gamma)$, $\varpi \in (0,1]$, $q \in [0,1)$, дают решение интегральных уравнений (23), (24), то эти функции представимы в виде $\rho_j(s) = \rho_{j*}(s)/Q_j(s)$, $j=1,2$, где $\rho_{1*}(s), \rho_{2*}(s) \in C^{0,\omega}(\Gamma)$, ω берётся из леммы 3. Поэтому ниже функции $\rho_1(s)$, $\rho_2(s)$ будем искать именно в таком виде. Из этого представления следует, в частности, что $\rho_1(s), \rho_2(s) \in C_q^{\varpi}(\Gamma)$, где

$$q = \max\left\{\frac{1}{2}+\eta, 1-\eta\right\}, \quad \varpi = \begin{cases}\min\left\{\omega, \left|2\eta - \frac{1}{2}\right|\right\}, & \eta \neq \frac{1}{4},\\ \omega, & \eta = \frac{1}{4}.\end{cases} \tag{27}$$

Ниже будем считать, что $\omega = \min\{\lambda, \eta, 1/2-\eta\}$, а ϖ и q определяются в (27). Отметим, что $0 < \omega \leqslant 1/4$, $0 < \varpi \leqslant 1/4$, $1/2 < q < 1$. Если $\beta > 0$, то $0 < \eta < 1/4$ и $q = 1-\eta$; если $\beta < 0$, то $1/4 < \eta < 1/2$ и $q = 1/2+\eta$; если же $\beta = 0$, то $\eta = 1/4$, $q = 3/4$.

Умножим уравнение (23) на $Q_1(s)$, а уравнение (24) на $Q_2(s)$. Примем за новые неизвестные функции $\rho_{j*}(s) = \rho_j(s)Q_j(s) \in C^{0,\omega}(\Gamma)$, $j=1,2$. Заметим, что соотношение между $\rho_j(s)$ и $\rho_{j*}(s)$ взаимно-однозначное ($j=1,2$). Уравнения (23), (24) примут вид

$$\rho_{1*}(s) + \int\limits_{\Gamma}\rho_{1*}(\sigma)Q_1^{-1}(\sigma)K_{11}(s,\sigma)\,d\sigma + \int\limits_{\Gamma}\rho_{2*}(\sigma)Q_2^{-1}(\sigma)K_{12}(s,\sigma)\,d\sigma +$$
$$+ \cos\pi\eta\sum_{m=0}^{N-1}B_m s^m = \Phi_1(s), \quad s \in \Gamma, \tag{28}$$

$$\rho_{2*}(s) + \int\limits_{\Gamma} \rho_{1*}(\sigma) Q_1^{-1}(\sigma) K_{21}(s,\sigma)\, d\sigma + \int\limits_{\Gamma} \rho_{2*}(\sigma) Q_2^{-1}(\sigma) K_{22}(s,\sigma)\, d\sigma +$$
$$+ \sin \pi\eta \sum_{m=0}^{N-1} B_{m+N} s^m = \Phi_2(s), \quad s \in \Gamma. \tag{29}$$

Используя лемму 3, нетрудно показать, что справедлива лемма 4.

Лемма 4. *Пусть функции* $\rho_{1*}(s)$, $\rho_{2*}(s)$ *из* $C^0(\Gamma)$ *удовлетворяют уравнениям* (28), (29) *для* $\Phi_1(s), \Phi_2(s) \in C^{0,\omega}(\Gamma)$ *с* $\omega = \min\{\lambda, \eta, 1/2-\eta\}$. *Тогда* $\rho_{1*}(s)$, $\rho_{2*}(s)$ *принадлежат пространству* $C^{0,\omega}(\Gamma)$.

Замечание. Очевидно, что если $\Phi_1(s), \Phi_2(s) \in C^{0,\omega_1}(\Gamma)$, $\omega_1 \in (0,1]$, то функции $\rho_{1*}(s)$, $\rho_{2*}(s)$ из $C^0(\Gamma)$, удовлетворяющие уравнениям (28), (29), принадлежат пространству $C^{0,\omega_2}(\Gamma)$ с $\omega_2 = \min\{\lambda, \omega_1, \eta, 1/2-\eta\}$.

Как следует из леммы 3, условие $\Phi_1(s), \Phi_2(s) \in C^{0,\omega}(\Gamma)$ выполнено, если выполнены условия (7). Поэтому ниже будем искать решения $\rho_{1*}(s)$, $\rho_{2*}(s)$ уравнений (28), (29) в $C^0(\Gamma)$. Согласно лемме 4 эти решения автоматически будут принадлежать $C^{0,\omega}(\Gamma)$. Разрешимость уравнений (28), (29) в $C^0(\Gamma)$ будем изучать при более слабых условиях на $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$, а именно будем предполагать, что $\Phi_1(s), \Phi_2(s) \in C^0(\Gamma)$. Если окажется, что уравнения (28), (29) имеют решение $\rho_{1*}(s), \rho_{2*}(s) \in C^0(\Gamma)$ для $\Phi_1(s), \Phi_2(s) \in C^{0,\omega}(\Gamma) \subset C^0(\Gamma)$, то по лемме 4 $\rho_{1*}(s), \rho_{2*}(s) \in C^{0,\omega}(\Gamma)$.

Определим операторы $\mathbf{K}_{pj}$ с помощью равенства

$$\mathbf{K}_{pj}[v](s) = \int\limits_{\Gamma} K_{pj}(s,\sigma) Q_j^{-1}(\sigma) v(\sigma)\, d\sigma, \quad p = 1,2, \quad j = 1,2. \tag{30}$$

Лемма 5. *Операторы* $\mathbf{K}_{pj}$ $(p = 1,2,\ j = 1,2)$ *компактны как операторы, действующие из* $C^0(\Gamma)$ *в* $C^0(\Gamma)$.

Доказательство основано на теореме Арцела и проводится непосредственной проверкой с использованием леммы 3.

Подставив в условия (20)—(22) функции $\rho_1(s) = \rho_{1*}(s)/Q_1(s)$, $\rho_2(s) = \rho_{2*}(s)/Q_2(s)$, где $\rho_{1*}(s)$, $\rho_{2*}(s)$ выражаются из (28), (29), запишем условия (20)—(22) следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Gamma} Q_j^{-1}(\sigma) L_{n,j}(\sigma) \rho_{j*}(\sigma)\, d\sigma + \sum_{m=0}^{2N} w_{n,m} B_m = \chi_n, \quad n = 0, \ldots, 2N, \tag{31}$$

где введены обозначения

$$\chi_0 = \int\limits_{\Gamma} \left(\frac{\Phi_2(s)}{Q_2(s)} - \left(\sqrt{1+\beta^2} + \beta\right) \frac{\Phi_1(s)}{Q_1(s)} \right) ds + 4\pi A \sqrt{1+\beta^2},$$

$$\chi_n = \int\limits_{\Gamma_n} \left(\left(\sqrt{1+\beta^2} + \beta\right) \frac{\Phi_2(s)}{Q_2(s)} + \frac{\Phi_1(s)}{Q_1(s)} \right) ds, \quad n = 1, \ldots, N,$$

$$\chi_n = -2\sqrt{1+\beta^2} f^+(a_{n-N}) + V\left[\frac{\Phi_2(\cdot)}{Q_2(\cdot)} - \big(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\big)\frac{\Phi_1(\cdot)}{Q_1(\cdot)}\right](x(a_{n-N})) +$$
$$+ T\left[\big(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\big)\frac{\Phi_2(\cdot)}{Q_2(\cdot)} + \frac{\Phi_1(\cdot)}{Q_1(\cdot)}\right](x(a_{n-N})), \quad n = N+1,\ldots,2N,$$
$$w_{0,m} = -\cos\pi\eta\big(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\big)\int\limits_{\Gamma}\frac{s^m}{Q_1(s)}\,ds, \quad m = 0,\ldots,N-1,$$
$$w_{0,m} = \sin\pi\eta\int\limits_{\Gamma}\frac{s^{m-N}}{Q_2(s)}\,ds, \quad m = N,\ldots,2N-1,$$
$$w_{n,m} = \cos\pi\eta\int\limits_{\Gamma_n}\frac{s^m}{Q_1(s)}\,ds, \quad m = 0,\ldots,N-1, \quad n = 1,\ldots,N,$$
$$w_{n,m} = \cos\pi\eta\int\limits_{\Gamma_n}\frac{s^{m-N}}{Q_2(s)}\,ds, \quad m = N,\ldots,2N-1, \quad n = 1,\ldots,N,$$
$$w_{n,m} = \cos\pi\eta\bigg(-\big(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\big)V\left[\frac{(\cdot)^m}{Q_1(\cdot)}\right](x(a_{n-N})) +$$
$$+ T\left[\frac{(\cdot)^m}{Q_1(\cdot)}\right](x(a_{n-N}))\bigg), \quad m = 0,\ldots,N-1, \quad n = N+1,\ldots,2N,$$
$$w_{n,m} = \sin\pi\eta\bigg(V\left[\frac{(\cdot)^{m-N}}{Q_2(\cdot)}\right](x(a_{n-N})) + \big(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\big)T\left[\frac{(\cdot)^{m-N}}{Q_2(\cdot)}\right](x(a_{n-N}))\bigg),$$
$$m = N,\ldots,2N-1, \quad n = N+1,\ldots,2N,$$
$$w_{0,2N} = 0, \quad w_{n,2N} = 0, \quad n = 1,\ldots,N,$$
$$w_{n,2N} = -2\sqrt{1+\beta^2}, \quad n = N+1,\ldots,2N,$$
$$L_{0,j}(\sigma) = \int\limits_{\Gamma}\left(\frac{K_{2j}(s,\sigma)}{Q_2(s)} - \big(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\big)\frac{K_{1j}(s,\sigma)}{Q_1(s)}\right)ds, \quad j = 1,2,$$
$$L_{n,j}(\sigma) = \int\limits_{\Gamma_n}\left(\big(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\big)\frac{K_{2j}(s,\sigma)}{Q_2(s)} + \frac{K_{1j}(s,\sigma)}{Q_1(s)}\right)ds, \quad j=1,2, \quad n=1,\ldots,N,$$
$$L_{n,j}(\sigma) = V\left[\frac{K_{2j}(\cdot,\sigma)}{Q_2(\cdot)} - \big(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\big)\frac{K_{1j}(\cdot,\sigma)}{Q_1(\cdot)}\right](x(a_{n-N})) +$$
$$+ T\left[\big(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\big)\frac{K_{2j}(\cdot,\sigma)}{Q_2(\cdot)} + \frac{K_{1j}(\cdot,\sigma)}{Q_1(\cdot)}\right](x(a_{n-N})),$$
$$j = 1,2, \quad n = N+1,\ldots,2N.$$

Точка $(\cdot)$ означает переменную интегрирования в потенциалах. В системе (31) номер $n = 0$ отвечает уравнению (21), номера $n = 1,\ldots,N$ отвечают уравнениям (20), а $n = N+1,\ldots,2N$ — уравнениям (22). Для каждого фиксированного n во всех формулах, содержащих угловой потенциал, берётся одна и та же ветвь функции $\psi(x(a_{n-N}), y(s))$ при $s \in \Gamma$. В качестве альтернативы можно использовать представление углового потенциала через потенциал двойного слоя.

Заметим, что функции $Q_1(s)$, $Q_2(s)$ нетрудно привести к виду, который аналитически продолжаем на всю комплексную плоскость (см. раздел 5). Применяя к этим функциям теорию вычетов, нетрудно доказать равенства

$$\cos\pi\eta \int\limits_{\Gamma} \frac{s^m}{Q_1(s)}\, ds = \sin\pi\eta \int\limits_{\Gamma} \frac{s^m}{Q_2(s)}\, ds = \begin{cases} 0, & m = 0, \dots, N-2, \\ \pi, & m = N-1. \end{cases}$$

Учитывая, что при $m = 0, 1, \dots, N-1$ функция $s^m(\cos\pi\eta)/Q_1(s)$ удовлетворяет однородному уравнению (18), а функция $s^m(\sin\pi\eta)/Q_2(s)$ удовлетворяет однородному уравнению (19), можно показать, что

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\Phi_p(s)}{Q_p(s)} ds = 0, \quad p = 1, 2,$$

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{K_{pj}(s,\sigma)}{Q_p(s)}\, ds \equiv 0, \quad \sigma \in \Gamma, \quad p = 1, 2, \quad j = 1, 2.$$

Отсюда вытекают следующие упрощения выражений для коэффициентов системы (31):

$$w_{0,m} = 0, \quad m = 0, 1, \dots, N-2, N, N+1, \dots, 2N-2,$$
$$w_{0,N-1} = -\pi\big(\sqrt{1+\beta^2} + \beta\big), \quad w_{0,2N-1} = \pi,$$
$$L_{0,j}(\sigma) \equiv 0, \quad \sigma \in \Gamma, \quad j = 1, 2, \qquad \chi_0 = 4\pi A\sqrt{1+\beta^2}.$$

Введём вектор-столбец, составленный из коэффициентов

$$\overline{B} = (B_0, \dots, B_{2N})^{\mathrm{T}} \in E_{2N+1}.$$

Систему уравнений (28), (29), (31) можно записать в виде одного векторного уравнения относительно неизвестного вектор-столбца

$$\overline{\rho} = (\rho_{1*}(s), \rho_{2*}(s), \overline{B})^{\mathrm{T}},$$

принадлежащего банахову пространству $C^0(\Gamma) \times C^0(\Gamma) \times E_{2N+1}$ с нормой $\|\overline{\rho}\|_{C^0(\Gamma)\times C^0(\Gamma)\times E_{2N+1}} = \|\rho_{1*}\|_{C^0(\Gamma)} + \|\rho_{2*}\|_{C^0(\Gamma)} + \|\overline{B}\|_{E_{2N+1}}$:

$$(\mathbf{I} + \mathbf{R})\overline{\rho} = \overline{\Phi}, \tag{32}$$

где введены следующие обозначения:

$$\overline{\Phi} = (\Phi_1(s), \Phi_2(s), \chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{2N})^{\mathrm{T}} \in C^0(\Gamma) \times C^0(\Gamma) \times E_{2N+1},$$

функции $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$ заданы в (25), (26), $\mathbf{I}$ — единичный оператор, отображающий пространство $C^0(\Gamma) \times C^0(\Gamma) \times E_{2N+1}$ в себя,

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & P_1 \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & P_2 \\ \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 & W - I_{2N+1} \end{pmatrix},$$

I_{2N+1} — единичная матрица порядка $2N+1$, $W = \{w_{n,m}\}_{m=0,\ldots,2N}^{n=0,\ldots,2N}$ — квадратная матрица размерности $(2N+1)\times(2N+1)$,

$$\mathbf{L}_j = (\mathcal{L}_{0,j}, \mathcal{L}_{1,j}, \ldots, \mathcal{L}_{2N,j})^{\mathrm{T}}, \quad j = 1, 2,$$

функционалы $\mathcal{L}_{n,j}$ определяются при помощи введённых выше функций $L_{n,j}(\sigma)$ выражениями

$$\mathcal{L}_{n,j}\rho_{j*} = \int\limits_{\Gamma} Q_j^{-1}(\sigma) L_{n,j}(\sigma)\rho_{j*}(\sigma)\, d\sigma, \quad j = 1, 2, \quad n = 0, \ldots, 2N,$$

операторы $\mathbf{K}_{pj}$ $(p = 1, 2,\ j = 1, 2)$ определены в (30), операторы умножения P_1 и P_2 определяются равенствами

$$P_1\overline{B} = \cos\pi\eta \sum_{m=0}^{N-1} B_m s^m, \quad P_2\overline{B} = \sin\pi\eta \sum_{m=0}^{N-1} B_{m+N} s^m.$$

Лемма 6. *Уравнение* (32) *является фредгольмовым в пространстве* $C^0(\Gamma)\times C^0(\Gamma)\times E_{2N+1}$.

Доказательство. Рассмотрим операторы, из которых составлен оператор $\mathbf{R}$. Операторы $\mathbf{K}_{pj}$ $(p = 1, 2,\ j = 1, 2)$ являются компактными из $C^0(\Gamma)$ в $C^0(\Gamma)$ по лемме 5. Оператор $(W - I_{2N+1})$ действует из E_{2N+1} в E_{2N+1}. Поскольку всякий линейный оператор, действующий в конечномерном пространстве, компактен [3, с. 222], то $(W - I_{2N+1})$ — компактный оператор. Операторы P_1, P_2, действующие из E_{2N+1} в $C^0(\Gamma)$, операторы $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$, действующие из $C^0(\Gamma)$ в E_{2N+1}, являются конечномерными, а потому компактными [3, с. 222; 10, с. 64]. Итак, все операторы, составляющие $\mathbf{R}$, компактны. Поэтому $\mathbf{R}$ является компактным оператором, отображающим $C^0(\Gamma)\times C^0(\Gamma)\times E_{2N+1}$ в себя. Согласно [10, с. 67] уравнение вида (32) с компактным оператором $\mathbf{R}$ удовлетворяет альтернативе Фредгольма. Лемма доказана. □

Лемма 7. *Пусть выполнены условия* (7) *и уравнение* (32) *имеет решение*

$$\overline{\rho} = (\rho_{1*}(s), \rho_{2*}(s), \overline{B})^{\mathrm{T}} \in C^{0,\omega}(\Gamma)\times C^{0,\omega}(\Gamma)\times E_{2N+1},$$

где $\omega = \min\{\lambda, \eta, 1/2 - \eta\}$. *Тогда*

1) *функции*

$$\rho_1(s) = \frac{\rho_{1*}(s)}{Q_1(s)} \in C_q^{\varpi}(\Gamma), \quad \rho_2(s) = \frac{\rho_{2*}(s)}{Q_2(s)} \in C_q^{\varpi}(\Gamma) \tag{33}$$

и константа B_{2N} *(последняя компонента вектора* $\overline{B}$*) дают решение системы* (18)—(22), *индексы* ϖ *и* q *берутся из* (27);

2) *решение задачи $\mathcal{S}$ существует и даётся формулой* (10), *в которой*

$$\begin{aligned} \nu(s) &= \frac{\rho_1(s) + \left(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\right)\rho_2(s)}{2\sqrt{1+\beta^2}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+\beta^2}}\left[\frac{\rho_{1*}(s)}{Q_1(s)} + \left(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\right)\frac{\rho_{2*}(s)}{Q_2(s)}\right] \in C_q^{\varpi}(\Gamma), \\ \mu(s) &= \frac{\rho_2(s) - \left(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\right)\rho_1(s)}{2\sqrt{1+\beta^2}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+\beta^2}}\left[\frac{\rho_{2*}(s)}{Q_2(s)} - \left(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\right)\frac{\rho_{1*}(s)}{Q_1(s)}\right] \in C_q^{\varpi}(\Gamma), \end{aligned} \tag{34}$$

а B_{2N} — последняя компонента вектора $\overline{B}$.

Доказательство. Пусть уравнение (32) имеет решение

$$\overline{\rho} = (\rho_{1*}(s), \rho_{2*}(s), \overline{B})^{\mathrm{T}} \in C^{0,\omega}(\Gamma) \times C^{0,\omega}(\Gamma) \times E_{2N+1},$$

обращающее в тождества уравнения (28), (29), (31). Докажем 1). Очевидно, что функции $\rho_1(s)$, $\rho_2(s)$, построенные по формулам (33), и константы $B_0, \ldots, B_{2N-1}$, входящие в вектор $\overline{B}$, обращают в тождества уравнения (23), (24). На функциях $w(s) \in C_q^{\varpi}(\Gamma)$ определим сингулярные операторы $\mathbf{S}_-$ и $\mathbf{S}_+$:

$$\mathbf{S}_- w = w(s) - \left(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\right)\frac{1}{\pi}\int\limits_\Gamma \frac{w(\sigma)}{\sigma - s}\,d\sigma,$$

$$\mathbf{S}_+ w = w(s) + \left(\sqrt{1+\beta^2}-\beta\right)\frac{1}{\pi}\int\limits_\Gamma \frac{w(\sigma)}{\sigma - s}\,d\sigma.$$

Подействуем оператором $\mathbf{S}_-$ на тождество (23) и оператором $\mathbf{S}_+$ на тождество (24). В результате получим, что $\rho_1(s)$, $\rho_2(s)$ удовлетворяют сингулярным интегральным уравнениям (18), (19). Пользуясь тождествами (31), которые являются составной частью тождества (32), нетрудно проверить, что функции $\rho_1(s)$, $\rho_2(s)$ и константа B_{2N} удовлетворяют условиям (20)—(22). Таким образом, функции (33) и константа B_{2N} дают решение системы (18)—(22), и первое утверждение леммы доказано.

Докажем 2). Мы показали, что функции из (33)) и константа B_{2N} дают решение системы (18)—(22). Согласно лемме 1 функции $\mu(s)$, $\nu(s)$, построенные по формулам (17) (или, что то же самое, по формулам (34)) и константа B_{2N} дают решение системы (11)—(15). Подставим функции $\mu(s)$, $\nu(s)$ и константу B_{2N} в функцию (10). По теореме 2 функция (10) является решением задачи $\mathcal{S}$. Лемма доказана. □

В следующем разделе, пользуясь полученными результатами, мы докажем разрешимость уравнения (32) и задачи $\mathcal{S}$.

4. Существование решения

Докажем теперь разрешимость уравнения (32).

Теорема 3.

1. *Уравнение* (32) *имеет единственное решение* $\overline{\rho}$ *в пространстве* $C^0(\Gamma)\times C^0(\Gamma)\times E_{2N+1}$ *при любой правой части* $\overline{\Phi}\in C^0(\Gamma)\times C^0(\Gamma)\times E_{2N+1}$.
2. *Если правая часть* $\overline{\Phi}$ *принадлежит пространству* $C^{0,\omega}(\Gamma)\times C^{0,\omega}(\Gamma)\times E_{2N+1}$, $\omega=\min\{\lambda,\eta,1/2-\eta\}$, *то решение* $\overline{\rho}$ *принадлежит тому же пространству.*

Доказательство.

1. По лемме 6 уравнение (32) является фредгольмовым в пространстве $C^0(\Gamma)\times C^0(\Gamma)\times E_{2N+1}$. Согласно альтернативе Фредгольма для доказательства первого пункта достаточно показать, что однородное уравнение (32) имеет только тривиальное решение в этом пространстве. Последнее утверждение будем доказывать от противного. Предположим, что однородное уравнение (32) имеет нетривиальное решение

$$\overline{\rho}^0=(\rho^0_{1*}(s),\rho^0_{2*}(s),B^0_0,\ldots,B^0_{2N})^{\mathrm{T}}\in C^0(\Gamma)\times C^0(\Gamma)\times E_{2N+1}.$$

Это означает, что функции $\rho^0_{1*}(s),\rho^0_{2*}(s)\in C^0(\Gamma)$ и константы $B^0_0,\ldots,B^0_{2N-1}$ удовлетворяют однородным уравнениям (28), (29), которые являются частью (32). На основании леммы 4 можно утверждать, что

$$\overline{\rho}^0\in C^{0,\omega}(\Gamma)\times C^{0,\omega}(\Gamma)\times E_{2N+1}.$$

Однородное уравнение (32) возникает, если $f^+(s)\equiv 0$, $f^-(s)\equiv 0$ и $A=0$, т. е. однородной задаче $\mathcal{S}$ соответствует однородное уравнение (32). По второму пункту леммы 7 функция

$$u^0(x)=V[\mu^0](x)+T[\nu^0](x)+B^0_{2N}, \tag{35}$$

в которой μ^0 и ν^0 определяются через ρ^0_{1*}, ρ^0_{2*} по формулам (34), является решением однородной задачи $\mathcal{S}$. С другой стороны, из теоремы 1 следует, что однородная задача $\mathcal{S}$ имеет только тривиальное решение

$$u^0(x)\equiv 0. \tag{36}$$

Принимая во внимание предельные формулы для потенциалов [1, 4]

$$\left[\left(\frac{\partial V[\mu]}{\partial \mathbf{n}_x}\right)^+-\left(\frac{\partial V[\mu]}{\partial \mathbf{n}_x}\right)^-\right]\Bigg|_\Gamma=\mu(s),\quad s\in\Gamma,$$

$$\left[\left(\frac{\partial T[\nu]}{\partial \mathbf{n}_x}\right)^+-\left(\frac{\partial T[\nu]}{\partial \mathbf{n}_x}\right)^-\right]\Bigg|_\Gamma=0,$$

$$\left[\left(\frac{\partial V[\mu]}{\partial \tau_x}\right)^+-\left(\frac{\partial V[\mu]}{\partial \tau_x}\right)^-\right]\Bigg|_\Gamma=0,$$

$$\left[\left(\frac{\partial T[\nu]}{\partial \tau_x}\right)^+ - \left(\frac{\partial T[\nu]}{\partial \tau_x}\right)^-\right]\Bigg|_{\Gamma} = \nu(s), \quad s \in \Gamma,$$

получим

$$\left[\left(\frac{\partial u^0}{\partial \tau_x}\right)^+ - \left(\frac{\partial u^0}{\partial \tau_x}\right)^-\right]\Bigg|_{x(s)\in\Gamma} = \nu^0(s) \equiv 0,$$

$$\left[\left(\frac{\partial u^0}{\partial \mathbf{n}_x}\right)^+ - \left(\frac{\partial u^0}{\partial \mathbf{n}_x}\right)^-\right]\Bigg|_{x(s)\in\Gamma} = \mu^0(s) \equiv 0.$$

Из формул (34) (см. также (16)) находим

$$\frac{\rho^0_{1*}(s)}{Q_1(s)} = \frac{\nu^0(s) - \left(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\right)\mu^0(s)}{\left(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\right)} \equiv 0, \quad s \in \Gamma,$$

$$\frac{\rho^0_{2*}(s)}{Q_2(s)} = \frac{\mu^0(s) + \left(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\right)\nu^0(s)}{\left(\sqrt{1+\beta^2}+\beta\right)} \equiv 0, \quad s \in \Gamma.$$

Поэтому $\rho^0_{1*}(s) \equiv 0$, $\rho^0_{2*}(s) \equiv 0$, $s \in \Gamma$. Учитывая (36) и (35), имеем $B^0_{2N} = 0$. Из однородных тождеств (28), (29), которые являются составной частью векторного уравнения (32), вытекает

$$\sum_{m=0}^{N-1} B^0_m s^m \equiv 0, \quad \sum_{m=0}^{N-1} B^0_{m+N} s^m \equiv 0, \quad s \in \Gamma.$$

Согласно основной теореме алгебры о числе корней полинома, эти тождества возможны только в случае, если $B^0_m = 0$, $m = 0, 1, \ldots, 2N-1$. Итак, $\overline{\rho}^0 \equiv 0$, что противоречит нашему предположению. Первое утверждение доказано.

2. Пусть

$$\overline{\rho} = (\rho_{1*}(s), \rho_{2*}(s), \overline{B})^{\mathrm{T}} \in C^0(\Gamma) \times C^0(\Gamma) \times E_{2N+1} \text{ —}$$

решение неоднородного уравнения (32) для

$$\overline{\Phi} \in C^{0,\omega}(\Gamma) \times C^{0,\omega}(\Gamma) \times E_{2N+1}.$$

Из первого утверждения следует, что такое решение существует. Функции $\rho_{1*}(s)$, $\rho_{2*}(s)$ удовлетворяют уравнениям (28), (29), которые являются частью (32). Следовательно, по лемме 4

$$\overline{\rho} \in C^{0,\omega}(\Gamma) \times C^{0,\omega}(\Gamma) \times E_{2N+1}.$$

Теорема доказана. □

Таким образом, теорема 3 гарантирует однозначную разрешимость уравнения (32) в пространстве $C^{0,\omega}(\Gamma) \times C^{0,\omega}(\Gamma) \times E_{2N+1}$, когда правая часть уравнения (32) принадлежит тому же пространству. По лемме 3 вектор $\overline{\Phi}$ действительно принадлежит этому пространству, если выполнены условия (7). По второму пункту леммы 7 решение задачи $\mathcal{S}$ существует и даётся формулой (10), в которой $\mu(s)$, $\nu(s)$, B_{2N} выражаются через элементы решения уравнения (32). При этом оказывается, что $\mu(s), \nu(s) \in C_q^{\varpi}(\Gamma)$.

На основании теоремы 1, теоремы 3 и второго пункта леммы 7 сформулируем итоговую теорему.

Теорема 4. *Пусть* $\Gamma \in C^{2,\lambda}$ *и выполнены условия* (7)*. Тогда решение задачи* $\mathcal{S}$ *существует, единственно и даётся формулой* (10)*, где плотности* $\mu(s)$, $\nu(s)$ *берутся из* (34)*, функции* $\rho_{1*}(s), \rho_{2*}(s) \in C^{0,\omega}(\Gamma)$ $(\omega = \min\{\lambda, \eta, 1/2 - \eta\})$ *и константа* B_{2N} *определяются в результате решения уравнения Фредгольма второго рода* (32)*, которое однозначно разрешимо по теореме* 3.

Из свойств потенциалов [4] вытекает, что градиент решения задачи $\mathcal{S}$, как правило, является неограниченным в окрестности концов контура Γ. Более того [4, теорема 5], неравенство (1) выполняется с $\delta = -q$, где q — константа из (27). Численные методы решения интегральных уравнений развиты в [8].

5. Решение сингулярных уравнений

Доказательство леммы 2. Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение (19). Пусть функция $\rho_2(s)$ удовлетворяет уравнению (19). Рассмотрим интеграл типа Коши

$$R_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{\rho_2(\sigma)}{\sigma - z}\, d\sigma, \quad z \notin \Gamma. \tag{37}$$

Согласно формулам Сохоцкого

$$\begin{gathered} R_2^+(s) - R_2^-(s) = \rho_2(s), \quad s \in \Gamma, \\ R_2^+(s) + R_2^-(s) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{\rho_2(\sigma)}{\sigma - s}\, d\sigma, \quad s \in \Gamma. \end{gathered} \tag{38}$$

Таким образом, если функция $\rho_2(s)$ удовлетворяет уравнению (19), то предельные значения на $\Gamma^\pm$ функции $R_2(z)$ должны удовлетворять соотношению

$$(R_2^+(s) - R_2^-(s)) + \big(\sqrt{1+\beta^2} - \beta\big) i (R_2^+(s) + R_2^-(s)) = F_2(s), \quad s \in \Gamma.$$

Приведя последнее уравнение к стандартному виду, дадим строгую формулировку получившейся задачи сопряжения [2].

Задача **C**. Найти функцию $R_2(z)$, кусочно-голоморфную с линией скачков Γ, удовлетворяющую условию на бесконечности $R_2(\infty) = 0$ и граничному условию

$$R_2^+(s) - \mathcal{G}(s) R_2^-(s) = \frac{F_2(s)}{1 + i\big(\sqrt{1+\beta^2} - \beta\big)}, \quad s \in \Gamma, \tag{39}$$

где

$$\mathcal{G}(s) = \frac{\beta - i}{\sqrt{1+\beta^2}}.$$

(Условие $R_2(\infty) = 0$ следует из вида функции (37).)

В понятие кусочно-голоморфной функции у нас включается следующее условие: функция может иметь интегрируемые особенности на концах контура Γ.

Мы решим задачу $\mathbf{C}$, а затем с помощью формулы (38) найдём функцию $\rho_2(s)$. Эта функция будет давать решение сингулярного интегрального уравнения (19).

Определим число η с помощью равенства

$$e^{i2\pi\eta} = \frac{\beta + i}{\sqrt{1+\beta^2}}, \quad \eta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

(это определение равносильно приведённому в условии леммы 2).

Каноническое решение однородной задачи сопряжения $\mathbf{C}$ имеет вид [2] $R_2^0(z) = 1/Q_2(z)$, где

$$Q_2(z) = \prod_{n=1}^{N} (z - a_n)^{1-\eta}(z - b_n)^{\eta}.$$

В дальнейшем нам понадобятся выражения для предельных значений $Q_2(z)$ на Γ^+ и Γ^-:

$$\lim_{z \to s \in \Gamma^\pm} Q_2(z) \equiv Q_2^\pm(s) = \prod_{n=1}^{N} [(s - a_n)^{1-\eta}]^\pm [(s - b_n)^{\eta}]^\pm.$$

Если $s \notin \Gamma_n$, то

$$[(s - a_n)^{1-\eta}(s - b_n)^{\eta}]^\pm = |s - a_n|^{1-\eta}|s - b_n|^{\eta} \operatorname{sign}(s - a_n).$$

Если $s \in \Gamma_n$, то

$$[(s - a_n)^{1-\eta}]^\pm = |s - a_n|^{1-\eta},$$

$$[(s - b_n)^{\eta}]^+ = e^{i\pi\eta}|s - b_n|^{\eta}, \quad [(s - b_n)^{\eta}]^- = e^{-i\pi\eta}|s - b_n|^{\eta}.$$

Всюду $n = 1, \ldots, N$.

Таким образом,

$$Q_2^+(s) = e^{i\pi\eta} Q_2(s), \quad Q_2^-(s) = e^{-i\pi\eta} Q_2(s), \quad s \in \Gamma. \tag{40}$$

Здесь

$$Q_2(s) = \prod_{n=1}^{N} |s - a_n|^{1-\eta}|s - b_n|^{\eta} \operatorname{sign}(s - a_n) \,—$$

вещественная функция, называемая прямым значением функции $Q_2(z)$ на оси Os, в частности на Γ.

Вернёмся к задаче сопряжения $\mathbf{C}$ для функции $R_2(z)$. Согласно [2] решение неоднородной задачи сопряжения $\mathbf{C}$, удовлетворяющее условию $R_2(\infty) = 0$, имеет вид

$$R_2(z) = \frac{1}{2\pi i Q_2(z)} \int\limits_{\Gamma} \frac{F_2(\sigma)Q_2^+(\sigma)}{(\sigma - z)\bigl(1 + i\bigl(\sqrt{1+\beta^2} - \beta\bigr)\bigr)}\, d\sigma + \frac{\sum\limits_{m=0}^{N-1} \tilde{B}_{m+N} z^m}{Q_2(z)},$$

где $\tilde{B}_N, \ldots, \tilde{B}_{2N-1}$ — произвольные комплексные константы.

Теперь найдём по формуле (38) решение уравнения (19):

$$\rho_2(s) = R_2^+(s) - R_2^-(s) = \frac{1}{Q_2^+(s)} \Biggl(\frac{F_2(s)Q_2^+(s)}{2\bigl(1 + i\bigl(\sqrt{1+\beta^2} - \beta\bigr)\bigr)} +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{F_2(\sigma)Q_2^+(\sigma)}{1 + i\bigl(\sqrt{1+\beta^2} - \beta\bigr)} \frac{d\sigma}{\sigma - s} + \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{B}_{m+N} s^m \Biggr) -$$
$$- \frac{1}{Q_2^-(s)} \Biggl(- \frac{F_2(s)Q_2^+(s)}{2\bigl(1 + i\bigl(\sqrt{1+\beta^2} - \beta\bigr)\bigr)} +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{F_2(\sigma)Q_2^+(\sigma)}{1 + i\bigl(\sqrt{1+\beta^2} - \beta\bigr)} \frac{d\sigma}{\sigma - s} + \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{B}_{m+N} s^m \Biggr) =$$
$$= \frac{\bigl(\sqrt{1+\beta^2} + \beta\bigr)}{2\sqrt{1+\beta^2}} F_2(s) - \frac{1}{2\pi\sqrt{1+\beta^2} Q_2(s)} \int\limits_{\Gamma} \frac{F_2(\sigma)Q_2(\sigma)}{\sigma - s}\, d\sigma -$$
$$- \sin\pi\eta \frac{\sum\limits_{m=0}^{N-1} B_{m+N} s^m}{Q_2(s)},$$

где $B_N, \ldots, B_{2N-1}$ — произвольные вещественные константы. В последнем равенстве использованы соотношения (40) и определение константы η.

Итак, лемма 2 для уравнения (19) доказана.

Сингулярное интегральное уравнение (18) для функции $\rho_1(s)$ рассматривается аналогично. Для функции

$$R_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\rho_1(\sigma)}{\sigma - z}\, d\sigma, \quad z \notin \Gamma,$$

получим задачу сопряжения [2] с граничным условием

$$R_1^+(s) + \mathcal{G}(s) R_1^-(s) = \frac{F_1(s)}{1 - i\bigl(\sqrt{1+\beta^2} + \beta\bigr)}, \quad s \in \Gamma.$$

Решение однородной задачи сопряжения имеет вид $R_1(z) = 1/Q_1(z)$, где

$$Q_1(z) = \prod_{n=1}^{N} (z - a_n)^{1/2-\eta} (z - b_n)^{1/2+\eta}.$$

Предельные значения функции $Q_1(z)$ на $\Gamma^{\pm}$ даются соотношениями

$$Q_1^+(s) = ie^{i\pi\eta}Q_1(s), \quad Q_1^-(s) = -ie^{-i\pi\eta}Q_1(s), \quad s \in \Gamma, \tag{41}$$

где

$$Q_1(s) = \prod_{n=1}^{N} |s-a_n|^{1/2-\eta}|s-b_n|^{1/2+\eta}\operatorname{sign}(s-a_n) \text{ —}$$

прямое значение $Q_1(z)$ на оси Os, в частности на Γ. Построив решение неоднородной задачи сопряжения, найдём

$$\rho_1(s) = \frac{\left(\sqrt{1+\beta^2}-\beta\right)}{2\sqrt{1+\beta^2}}F_1(s) + \\ + \frac{1}{2\pi\sqrt{1+\beta^2}Q_1(s)}\int\limits_{\Gamma}\frac{F_1(\sigma)Q_1(\sigma)}{\sigma-s}\,d\sigma - \cos\pi\eta\frac{\sum\limits_{m=0}^{N-1}B_m s^m}{Q_1(s)},$$

где $B_0, \ldots, B_{N-1}$ — произвольные вещественные константы.

Лемма 2 доказана. □

Работа частично поддержана грантом РФФИ 02-01-01067.

Литература

[1] Габов С. А. Угловой потенциал и его некоторые приложения // Мат. сб. — 1977. — Т. 103 (145), № 4. — С. 490—504.

[2] Гостева А. С., Крутицкая Н. Ч., Крутицкий П. А. Смешанная задача в замагниченной полупроводниковой пленке с разрезами вдоль прямой // Фундамент. и прикл. мат. — 2000. — Т. 6, вып. 4. — С. 1061—1073.

[3] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972.

[4] Крутицкий П. А. Задача Дирихле для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости // ЖВМ и МФ. — 1994. — Т. 34, № 8—9. — С. 1237—1258.

[5] Крутицкий П. А. Задача Неймана для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости // ЖВМ и МФ. — 1994. — Т. 34, № 11. — С. 1652—1665.

[6] Крутицкий П. А. Смешанная задача для уравнения Лапласа вне разрезов на плоскости // Дифференц. уравн. — 1997. — Т. 33, № 9. — С. 1181—1190.

[7] Крутицкий П. А., Сгибнев А. И. Метод интегральных уравнений в смешанной задаче Дирихле—Неймана для уравнения Лапласа вне разрезов на плоскости // Дифференц. уравн. — 2001. — Т. 37, № 10. — С. 1299—1310.

[8] Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. — М.: ТОО «Янус», 1995.

[9] Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.

[10] Функциональный анализ / Под ред. С. Г. Крейна. — М.: Наука, 1964.