# О динамике квантовых состояний, порождённой задачей Коши для уравнения Шрёдингера с вырождением на полупрямой*

**В. Ж. САКБАЕВ**
*Московский физико-технический институт*
e-mail: fumi2003@mail.ru

УДК 517.946

**Ключевые слова:** задача Коши, уравнение Шрёдингера, оператор переменного типа.

**Аннотация**

Рассмотрена задача Коши для уравнения Шрёдингера с оператором, вырождающимся на полуоси, и семейство регуляризованных задач Коши с равномерно эллиптическими операторами, решения которых аппроксимируют решение вырожденной задачи. Исследована сильная и слабая сходимость семейства решений регуляризованных задач и сходимость значений квадратичных форм ограниченных операторов на решениях регуляризованных задач при стремлении к нулю параметра регуляризации.

**Abstract**

*V. Zh. Sakbaev, On the dynamics of quantum states generated by the Cauchy problem for the Schrödinger equation with degeneration on the half-line*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 6, pp. 157—174.

The paper considers the Cauchy problem for the Schrödinger equation with an operator degenerate on the half-line and the family of regularized Cauchy problems with uniformly elliptic operators whose solutions approximate the solution of the degenerate problem. The author studies the strong and weak convergence of the regularized problems and the convergence of values of quadratic forms of bounded operators on solutions of the regularized problems when the regularization parameter tends to zero.

## Введение

В настоящей работе изучается задача Коши для уравнения Шрёдингера на прямой с оператором переменного типа, являющимся дифференциальным оператором второго порядка на полуоси и вырождающимся до дифференциального оператора первого порядка на дополнении к полуоси.

Условия корректности постановки начально-краевых задач для уравнений второго порядка смешанного типа исследованы в [9], в частности, указаны

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 04-01-00457.

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2006, том 12, № 6, с. 157—174.

области задания краевых условий в зависимости от вида дифференциального оператора. В [4] корректность начально-краевой задачи с оператором второго порядка с неотрицательной характеристической формой была исследована с помощью метода исчезающей вязкости. Этот метод эффективно применялся при исследовании вырождающихся уравнений переменного типа и уравнений с частными производными первого порядка (см. [8]). Например, для исследования корректности краевой задачи с вырождающимся оператором второго порядка в дивергентной форме в [1] рассматривается семейство регуляризованных задач с равномерно эллиптическими операторами, аппроксимирующих исходную задачу с вырожденным оператором при стремлении к 0 параметра регуляризации $\varepsilon$. Установлено существование и дано описание множества частичных пределов решений регуляризованных задач при $\varepsilon \to 0$, причём для каждого частичного предела определена вариационная формулировка предельной вырожденной задачи, в которой данный частичный предел является её единственным решением.

В настоящей работе рассмотрена модельная задача

$$i\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathbf{L}u(t,x), \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

$$u(+0,x) = u_0(x), \quad x\in\mathbb{R}, \tag{2}$$

$$\mathbf{L}v = \frac{\partial}{\partial x}\left[g(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right] + \frac{i}{2}\left(a(x)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial a(x)v}{\partial x}\right), \tag{3}$$

где $u_0(x)$ — заданная функция, $v(x)$ — пробная функция, функции $g(x)$ и $a(x)$ вещественнозначны, $g(x) \geqslant 0$. В работе рассматривается модельная задача для функции $g(x) = \theta(-x)$ и функции $a(x) = a\theta(x)$, $a\in\mathbb{R}$; здесь $\theta(x)$ — функция Хевисайда. Оператор $\mathbf{L}$ является оператором второго порядка на множестве $\mathbb{R}_-$ и оператором первого порядка на множестве $\mathbb{R}_+$.

Непосредственное изучение задачи Коши (1), (2) связано с определёнными трудностями (см., например, [6, 9]). Чтобы определить решение задачи (1), (2), используем идеи метода исчезающей вязкости. Рассмотрим семейство зависящих от параметра регуляризации $\varepsilon\in(0,1)$ операторов $\mathbf{L}_\varepsilon$, задаваемых выражениями

$$\mathbf{L}_\varepsilon v = \frac{\partial}{\partial x}\left[g_\epsilon(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right] + \frac{i}{2}\left(a(x)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial a(x)v}{\partial x}\right),$$

в которых функция $a(x) = a\theta(x)$, $a\in\mathbb{R}$, и функции $g_\varepsilon(x) = 1-(1-\varepsilon)\theta(x)$ зависят от вещественного параметра $\varepsilon\in(0,1)$.

При каждом $\varepsilon\in(0,1)$ оператор $\mathbf{L}_\varepsilon$ есть дифференциальный оператор второго порядка эллиптического типа на оси $\mathbb{R}$. Характеристические формы регуляризованных операторов $\mathbf{L}_\varepsilon$ сходятся равномерно на каждом компакте к характеристической форме вырожденного оператора $\mathbf{L}$. Наряду с задачей (1), (2), в которой оператор $\mathbf{L}$ является вырождающимся на полуоси оператором переменного типа, рассмотрим семейство регуляризованных задач Коши с начальным условием (2) для семейства уравнений

$$i\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathbf{L}_\varepsilon u(t,x), \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}, \quad \varepsilon\in(0,1). \tag{4}$$

Регуляризованные задачи Коши (2), (4) хорошо изучены (см. [5, гл. 8]), и известно, что для любого начального условия $u_0(x) \in L_2(\mathbb{R})$ существует единственное решение регуляризованной задачи $u_\varepsilon(t,x)$, причём соответствие $\mathbf{U}_{\mathbf{L}_\varepsilon}(t)\colon u_0(x) \to u_\varepsilon(t,x)$, $t\in\mathbb{R}$, является унитарной группой.

В [7] исследована сходимость семейства решений регуляризованных задач (2), (4) при $\varepsilon \to 0$. Установлено, что слабая сходимость семейства при $\varepsilon \to 0$ имеет место при любом выборе начальных условий $u_0 \in L_2(\mathbb{R})$ и параметра оператора $a \in \mathbb{R}$. Определены условия на параметры задачи, необходимые и достаточные для сходимости семейства по норме при $\varepsilon \to 0$.

В задачах квантовой механики требуется определить динамику значений наблюдаемых — ограниченных операторов в $H$. Обозначим через $\mathcal{B}(H)$ банахово пространство ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $H$ с операторной нормой. Задача Коши для уравнения Шрёдингера, имеющая единственное решение, определяет динамику значений ограниченных операторов, т. е. отображение $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{B}(H) \to \mathbb{C}$, действующее по правилу $(t,\mathbf{A}) \to \big(u(t), \mathbf{A}u(t)\big)$. Если решение задачи Коши (1), (2) аппроксимируется решениями последовательности регуляризованных задач (2), (4), то будет ли последовательность регуляризованных динамик значений ограниченных операторов определять динамику значений ограниченных операторов для предельной задачи (1), (2) при стремлении к нулю параметра регуляризации?

Безусловно, из сильной сходимости последовательности регуляризованных решений $u_\varepsilon(t) \to u(t)$ при $\varepsilon \to 0$ следует сходимость регуляризованных динамик $\big(u_\varepsilon(t), \mathbf{A}u_\varepsilon(t)\big)$ к предельной $\big(u(t), \mathbf{A}u(t)\big)$. Однако слабая сходимость последовательности регуляризованных решений гарантирует лишь сходимость значений всех линейных непрерывных функционалов пространства $L_2(\mathbb{R}) = H$ на решениях, но не может гарантировать сходимости значений на последовательности регуляризованных решений квадратичных форм ограниченных операторов.

В настоящей работе показано, что в случае лишь слабой сходимости семейства регуляризованных задач сходимость значений квадратичных форм всех ограниченных операторов невозможна. Однако для некоторого более узкого класса ограниченных операторов $B_1 \subset \mathcal{B}(H)$ возможно указать такую бесконечно малую последовательность параметров регуляризации, что соответствующая ей последовательность динамик $\big(u_{\varepsilon_n}(t), \mathbf{A}u_{\varepsilon_n}(t)\big)$ сходится для любого оператора $\mathbf{A}$ из класса $B_1$.

В [12] исследована сходимость последовательности вероятностных мер на координатном пространстве $\mathbb{R}$, плотность которых определяется слабо сходящейся последовательностью $\{u_n(x)\}$ элементов пространства $L_2(\mathbb{R})$. Рассмотрена сходимость значений на данной последовательности элементов квадратичных форм некоторого класса псевдодифференциальных операторов. В настоящей работе исследуется динамика значений квадратичных форм всех операторов из алгебры операторов умножения на непрерывную функцию и унитарно эквивалентных абелевых алгебр операторов (см. [10]). Для этой цели рассмотрена сходимость при $\varepsilon \to 0$ семейства вероятностных мер $P_\varepsilon(t)$ с функциями распределения $F_\varepsilon(t,x)$, определяемыми решениями $u_\varepsilon(t)$ и ортогональным разложением $\mathbf{E}(\lambda)$ единичного оператора в $L_2(\mathbb{R})$ по правилу

$$F_\varepsilon(t,\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\lambda} \bigl(u_\varepsilon(t), d\mathbf{E}(\mu)u_\varepsilon(t)\bigr).$$

В терминах поведения семейства указанных вероятностных мер определены необходимые и достаточные условия сходимости значений квадратичных форм всех операторов умножения на функцию на семействе решений регуляризованных задач (2), (4) при $\varepsilon \to 0$.

Исследуемая в работе задача Коши (1), (2) с вырождающимся оператором переменного типа может возникнуть при исследовании линеаризации задачи Коши для нелинейного уравнения. Рассматриваемые в работе проблемы возникают при описании движения механических систем с переменной эффективной массой, примеры которых встречаются в физике твёрдого тела. Пример семейства квантовых систем, динамика которых описывается семейством задач (2), (4), приведён в [6].

## Определение решения задачи Коши

Максимальная область определения оператора $\mathbf{L}$, порождённого дифференциальным выражением (3), есть линейное многообразие $D(\mathbf{L})$ таких элементов $u(x) \in L_2(\mathbb{R})$, для которых применение к $u(x)$ дифференциального выражения (3) имеет смысл как элемент $\mathbf{L}u(x) \in L_2(\mathbb{R})$:

$$D(\mathbf{L}) = \{u(x) \in L_2(\mathbb{R})\colon \mathbf{L}u(x) \in L_2(\mathbb{R})\}. \tag{5}$$

Этим условием максимальная область определения оператора $\mathbf{L}$ задаётся однозначно при любом $a \neq 0$ (см. [6]).

Область определения оператора $D(\mathbf{L})$ плотна в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, и оператор $\mathbf{L}$ симметричен и замкнут. Легко установить, что сопряжённый оператор $\mathbf{L}^*$ действует по той же формуле (3) и имеет более широкую область определения. Тогда можно непосредственно проверить, что если $a \neq 0$, то $\mathrm{Ker}(\mathbf{L}^* - ia\mathbf{I}) = \{0\}$, а $\mathrm{Ker}(\mathbf{L}^* + ia\mathbf{I})$ есть нетривиальное одномерное линейное подпространство и индексы дефекта оператора $\mathbf{L}$ различны. Следовательно, спектр оператора $\mathbf{L}$ заполняет всю вещественную ось.

Превратим область определения $D(\mathbf{L})$ в гильбертово пространство, снабдив его нормой графика оператора $\mathbf{L}$. Далее через $C^m\bigl((a,b),X\bigr)$ обозначается пространство $m$ раз непрерывно дифференцируемых (по норме пространства $X$) отображений $x(t)$ интервала $(a,b)$ в линейное нормированное пространство $X$ с нормой

$$\|x(t)\|_{C^m((a,b),X)} = \max_{j=0,1,\dots,m}\Bigl\{\sup_{t\in(a,b)} \|x^{(j)}(t)\|_X\Bigr\}.$$

Через $X \cap Y$ обозначается пересечение пространств $X$ и $Y$, снабжённое нормой $\|f\|_{X\cap Y} = \max\{\|f\|_X, \|f\|_Y\}$.

Рассмотрим семейство регуляризованных задач (2), (4) при $\varepsilon \in (0,1)$, аппроксимирующее задачу (1), (2) при $\varepsilon \to 0$.

Максимальная область определения $D(\mathbf{L}_\varepsilon)$ оператора $\mathbf{L}_\varepsilon$ описана в [4], где установлено, что при любом $\varepsilon > 0$ дифференциальный оператор $\mathbf{L}_\varepsilon$ является самосопряжённым оператором в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Поэтому (см. [5]) для любого $\varepsilon > 0$ задача Коши (2), (4) задаёт в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ группу унитарных преобразований $U_{L_\varepsilon}(t) = \exp(iL_\varepsilon t)$, $t \in \mathbb{R}$.

**Определение 1.** Функцию $u(t,x) \in C\big(\mathbb{R}_+, L_2(\mathbb{R})\big)$ назовём сильным аппроксимативным решением задачи (1), (2), если существует такая последовательность $\{\varepsilon_k\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$, что для любого $T > 0$ выполняется условие

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|U_{L_\varepsilon}(t)u_0(x) - u(t,x)\|_{C([0,T],L_2(\mathbb{R}))} = 0.$$

**Определение 2.** Слабо непрерывное отображение $u(t,x)$ полуоси $\mathbb{R}_+$ в пространство $L_2(\mathbb{R})$ назовём слабым аппроксимативным решением задачи (1), (2), если существует такая последовательность $\{\varepsilon_k\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$, что для любой функции $v(x) \in L_2(\mathbb{R})$ и для любого $T > 0$ выполняется условие

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \big|\big(U_{L_{\varepsilon_k}}(t)u_0(x) - u(t,x), v(x)\big)\big| = 0,$$

где через $(\cdot,\cdot)$ обозначено скалярное произведение пространства $L_2(\mathbb{R})$.

Сильное и слабое аппроксимативные решения удовлетворяют уравнению (1) в смысле интегрального тождества (см. [7]) и условию (2) в смысле сильной и слабой сходимости в $L_2$ соответственно.

# О сходимости решений

В [6] доказан следующий результат о сходимости семейства регуляризованных задач.

**Теорема 1.** *Пусть $a \leqslant 0$. Тогда для любого $u_0 \in L_2(\mathbb{R})$ существует единственное сильное аппроксимативное решение $u(t,x)$, причём для любого $T > 0$ справедливо равенство*

$$\lim_{\varepsilon\to +0} \|u_\varepsilon(t,x) - u(t,x)\|_{C([0,T],L_2(\mathbb{R}))} = 0.$$

Следующая теорема является незначительной переформулировкой и обобщением утверждений теоремы 5 работы [7].

**Теорема 2.** *Для любого $a > 0$ существуют такие подпространства $H_0$, $H_1$ пространства $H = L_2(\mathbb{R})$, что*

1) *для любого $u_0(x) \in H_0$ существует единственное сильное аппроксимативное решение $u(t,x)$ задачи Коши* (1), (2), *причём для любого $t > 0$ выполнены условия $u(t,x) \in H_0$ и $\|u(t,x)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|u_0(x)\|_{L_2(\mathbb{R})}$;*

2) *для любого* $u_0(x) \in H_1$ *существует единственное слабое аппроксимативное решение* $u^*(t,x)$ *задачи Коши* (1), (2), *причём для любого* $t > 0$ *выполнены условия* $u^*(t,x) \in H_1$ *и* $\lim\limits_{t\to+\infty} \|u^*(t,x)\|_{L_2(\mathbb{R})} = 0$;
3) *для того чтобы задача Коши* (1), (2) *имела сильное аппроксимативное решение, необходимо и достаточно, чтобы* $u_0(x) \in H_0$.

Доказательство теоремы опубликовано в [7], там же найдено представление подпространств $H_0$, $H_1$ через параметры оператора задачи (1), (2).

## О сходимости вероятностных мер

В [7] проведено исследование сходимости вероятностных мер на координатном пространстве, определённых последовательностью решений регуляризованных задач и ортогональным разложением единицы оператора умножения на координату, при стремлении к нулю параметра регуляризации. Цель данной работы — обобщить результат [7] на случай произвольного ортогонального разложения единицы $\mathbf{E}(\lambda)$. Однако в этом случае мы не сможем установить дифференцируемость плотностей мер по параметру $\lambda$ и использовать теоремы вложения Никольского, как в [7]. В настоящей работе этот пробел преодолен использованием принципа выбора Хелли, что позволило доказать теорему 3. Для случая гладких начальных условий установлена равностепенная непрерывность по $t$ на промежутке $(0,+\infty)$ семейства функций распределения вероятностных мер, что позволило доказать теорему 4. Теорема 5 доказана с помощью установленной в лемме 2 непрерывной зависимости функции распределения начального условия, которая позволила результат теоремы 6 продолжить по непрерывности на все пространство начальных условий $L_2(\mathbb{R})$.

Пусть всюду далее $\mathbf{E}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, — ортогональное разложение единицы в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}) \equiv H$. Тогда справедливо следующее утверждение.

**Теорема 3.** *Пусть* $u_0(x) \in L_2(\mathbb{R})$ *и* $\{\varepsilon_n\}$ — *некоторая бесконечно малая последовательность. Тогда для любого* $t > 0$ *существуют подпоследовательность* $\varepsilon_{n_k}$ *последовательности* $\{\varepsilon_n\}$ *и функция* $G(t,\xi) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, *определённая на всей оси* $\mathbb{R}$, *монотонно возрастающая, удовлетворяющая неравенствам* $0 \leqslant G(t,\xi) \leqslant 1$, *такие что последовательность* $\{G_{n_k}(t,\xi)\}$, *где*

$$G_{n_k}(t,\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\xi} \bigl(u_{\varepsilon_{n_k}}(t), d\mathbf{E}(\lambda)u_{e_{n_k}}(t)\bigr),$$

*сходится к функции* $G(t,\xi)$ *в пространстве* $L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

**Доказательство.** Пусть $\varepsilon_n$ — произвольная бесконечно малая последовательность. При фиксированном значении $t > 0$ рассмотрим последовательность функций

$$G_n(t,\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\lambda} \big(u_{\varepsilon_n}(t), d\mathbf{E}(\mu)u_{\varepsilon_n}(t)\big), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда при каждом $n \in \mathbb{N}$ функция $G_n(t,\lambda)$ является монотонно возрастающей, $0 \leqslant G_n(t,\lambda) \leqslant 1$ и $G_n(0,\lambda) = G_0(\lambda)$, $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим при фиксированном $t > 0$ последовательность функций $G_n(t,\lambda)$, $n \in \mathbb{N}$. Так как все элементы указанной последовательности равномерно ограничены в равномерной норме и, будучи монотонными функциями, по вариации, то согласно теореме Хелли (см. [2]) из последовательности $G_n(t,\lambda)$ можно выделить подпоследовательность $G_{n_k}(t,\lambda)$, которая сходится поточечно на оси $\mathbb{R}$ к функции $G(t,\lambda)$, монотонной (следовательно, имеющей конечное изменение) и такой, что $0 \leqslant G(t,\lambda) \leqslant 1$.

Фиксируем некоторое $l > 0$. Тогда согласно теореме Егорова (см. [5]) для любого $\delta > 0$ на отрезке $[-l,l]$ существует множество $\Omega$, $\operatorname{mes}\Omega \leqslant \delta$, такое что последовательность $G_n(t,x)$ сходится равномерно на множестве $[-l,l]\setminus\Omega$. Тогда легко видеть, что в силу равномерной ограниченности функций $G_n(t,x)$, $G(t,x)$ и произвольности $\delta > 0$ последовательность $G_n(t,x)$ сходится в пространстве $L_1([-l,l])$, откуда следует утверждение теоремы 3. $\square$

Обозначим через $K_{T,l}$, $T > 0$, $l > 0$, множество $[0,T] \times (-l,l]$ и через $C\big(\mathbb{R}_+, L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})\big) \equiv C_{\mathrm{loc}}$ (см. [3]) линейное топологическое пространство функций $u(t,x)$, таких что для любых $T > 0$, $l > 0$ справедливо $u(t,x)|_{K(T,l)} \in C\big([0,T], L_1([-l,l])\big)$, сходимость в котором определяется семейством полунорм $p_{T,l}(u) = \|u(t,x)|_{K(T,l)}\|_{C([0,T],L_1(-l,l))}$.

**Лемма 1.** *Если последовательность $f_n(t,x)$ фундаментальна в пространстве $C_{\mathrm{loc}}$ (т. е. для любых $T,l > 0$ последовательность $f_n(t,x)|_{K(T,l)}$ фундаментальна в $C\big([0,T], L_1(-l,l)\big)$), то она имеет предел в пространстве $C_{\mathrm{loc}}$.*

**Доказательство.** Пространство $C\big([0,T], L_1(-l,l)\big)$ полное, поэтому для любых $T,l > 0$ последовательность $f_n(t,x)|_{K(T,l)}$ имеет предел $f^{T,l}(t,x) \in C\big([0,T], (-l,l)\big)$. При этом если $T_1 > T$, $l_1 > l$, то в силу единственности предела $F^{T_1,l_1}(t,x)|_{K(T,l)} = f^{T,l}(t,x)$. Поэтому однозначно определена функция $f(t,x) \in C\big(\mathbb{R}_+, L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})\big)$, такая что для любого $K(T,l)$ справедливо равенство $f(t,x)|_{K(T,l)} = f^{T,l}(t,x)$. Тогда $f(t,x)$ есть предел последовательности $f_n(t,x)$ в пространстве $C_{\mathrm{loc}}$. Лемма 1 доказана. $\square$

**Теорема 4.** *Для любой функции $u_0 \in \bigcap\limits_{\varepsilon\in[0,1]} D(\mathbf{L}_\varepsilon)$ и любой бесконечно малой последовательности $\{\varepsilon_n\}$ существуют её подпоследовательность $\varepsilon_k$ и функция $F(t,\lambda) \in C\big(\mathbb{R}_+, L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})\big)$, такие что последовательность $F_{\varepsilon_k}(t,\lambda)$ сходится к $F(t,\lambda)$ в $C\big(\mathbb{R}_+, L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})\big)$, причём $0 \leqslant F(t,\lambda) \leqslant 1$ и при каждом $t > 0$ функция $F(t,\lambda)$ монотонна на $\mathbb{R}$.*

**Доказательство.** Пусть $t_j$, $j \in \mathbb{N}$, — некоторая последовательность, задающая нумерацию всех рациональных чисел промежутка $[0, +\infty)$. Тогда из последовательности $\varepsilon_n$ можно выделить подпоследовательность $\varepsilon^1_{n_k}$ и указать функцию $F(t_1, \lambda) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, для которых $F_{e^{(1)}_{n_k}}(t_1, \lambda)$ сходится в $L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ к $F(t_1, \lambda)$ при $k \to \infty$, причём согласно теореме 3 $0 \leqslant F(t_1, \lambda) \leqslant 1$ и функция $F(t_1, \lambda)$ монотонно возрастает на оси $\mathbb{R}$.

Аналогично из последовательности $\varepsilon^{(1)}_{n_k}$ можно выделить подпоследовательность $\varepsilon^{(2)}_{n_k}$ и указать функцию $F(t_2, \lambda) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, для которых $F_{e^{(2)}_{n_k}}(t_1, \lambda)$ сходится в $L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ к $F(t_1, \lambda)$ при $k \to \infty$ и функция $F(t_2, \lambda)$ удовлетворяет тем же условиям ограниченности и монотонности.

Таким образом, для любого $p \in \mathbb{N}$ существует последовательность $\varepsilon^{(p)}_{n_k}$ — подпоследовательность последовательности $\varepsilon^{(p-1)}_{n_k}$ — и определена функция $F(t_p, \lambda) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, для которых $F_{e^p_{n_k}}(t_p, \lambda)$ сходится в $L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ к $F(t_p, \lambda)$ при $k \to \infty$ и функция $F(t_p, \lambda)$ удовлетворяет условиям ограниченности и монотонности.

Тогда последовательность $\varepsilon^{(p)}_{n_p}$ — подпоследовательность последовательности $\varepsilon_n$ — такова, что для любого $q \in \mathbb{N}$ последовательность $F_{\varepsilon^{(p)}_{n_p}}(t_q, \lambda)$ сходится к $F(t_q, \lambda)$ в пространстве $L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Следовательно, для любого $t_q \in \mathbb{Q}^+$, для любого $l > 0$, для любого $\sigma > 0$ найдётся такой номер $p_0 \in \mathbb{N}$, что при любом $p \geqslant p_0$

$$\bigl\| F_{\varepsilon^{(p)}_{n_p}}(t_q, \lambda) - F(t_q, \lambda) \bigr\|_{L_1([-l,l])} \leqslant \sigma. \tag{6}$$

Покажем, что существует такая функция $F(t, \lambda) \in C\bigl(\mathbb{R}_+, L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})\bigr)$, что последовательность $F_{\varepsilon^{(p)}_{n_p}}(t, \lambda)$ сходится к $F(t, \lambda)$ при $p \to \infty$ в пространстве $C\bigl(\mathbb{R}_+, L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})\bigr)$, т. е. для любых $T > 0$, $l > 0$, $\sigma > 0$ существует такое $p_0$, что для всех $p > p_0$ выполнено неравенство

$$\bigl\| F_{\varepsilon^{(p)}_{n_p}}(t, \lambda) \bigr|_{K(T,l)} - F(t, \lambda)|_{K(T,l)} \|_{C([0,T], L_1([-l,l]))} < \sigma.$$

Согласно уравнению (1) для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} F_{\varepsilon_n}(t, \lambda) = j_n(t, \lambda),$$

где

$$j_n(t, \lambda) = i \int\limits_{-\infty}^{\lambda} \bigl[ \bigl( \mathbf{L}_{\varepsilon_n} u_{\varepsilon_n}(t), d\mathbf{E}(\mu) u_{\varepsilon_n}(t) \bigr) - \bigl( u_{\varepsilon_n(t)}, d\mathbf{E}(\mu) \mathbf{L}_{\varepsilon_n} u_{\varepsilon_n}(t) \bigr) \bigr].$$

Следовательно, для любых $n \in \mathbb{N}$ в соответствии с неравенством Коши—Буняковского справедливы оценка

$$\sup_{t>0,\,\lambda\in\mathbb{R}} |j_n(t,\lambda)| \leqslant 2 \sup_{t>0,\,\varepsilon\in(0,1)} \Bigg[\int\limits_{-\infty}^{\lambda} \big(\mathbf{L}_{\varepsilon_n} u_{\varepsilon_n}(t), d\mathbf{E}(\mu)\mathbf{L}_{\varepsilon_n} u_{\varepsilon_n}(t)\big)\Bigg]^{1/2} \times$$

$$\times \Bigg[\int\limits_{-\infty}^{\lambda} \big(u_{\varepsilon_n}(t), d\mathbf{E}(\mu) u_{\varepsilon_n}(t)\big)\Bigg]^{1/2} \leqslant \|\mathbf{L}_\varepsilon u_\varepsilon(t)\|_{L_2} \|u_\varepsilon(t)\|_{L_2} = 2\|\mathbf{L}_1 u_0\|_{L_2}$$

в силу унитарности преобразований $\mathbf{U}_{\mathbf{L}_\varepsilon}(t)$ и для любого $u_0 \in \bigcap\limits_{\varepsilon\in[0,1]} D(\mathbf{L}_\varepsilon)$ соотношения $\|\mathbf{L}_\varepsilon u_0\| \leqslant \|\mathbf{L}_1 u_0\|$, $\varepsilon \in (0,1)$.

Поэтому для любого $l > 0$ существует такая постоянная $c(l) > 0$, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{t\geqslant 0} \Bigg\| \frac{\partial}{\partial t} F_{\varepsilon_n}(t,\lambda)|_{\mathbb{R}_+\times[-l,l]} \Bigg\|_{L_1([-l,l])} \leqslant c(l).$$

Следовательно, для любых $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$, таких что $|t_2 - t_1| \leqslant \sigma$, при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\|F_{e_n}(t_2,\lambda) - F_{\varepsilon_n}(t_1,\lambda)\|_{L_1([-l,l])} \leqslant c(l)\sigma. \tag{7}$$

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ выберем на промежутке $[0,+\infty)$ точки $t_j^{(m)} = 2^{-m} j$, $j, m \in \mathbb{N}$, тогда $t_j^{(m)} \in \mathbb{Q}$ и $t_j^{(m)} - t_{j-1}^{(m)} = 2^{-m}$, $j \in \mathbb{N}$.

Пусть $p^{(m)}(t,\lambda) \in C(\mathbb{R}_+, L_{1,\mathrm{loc}})$ — кусочно-линейное на $\mathbb{R}_+$, линейное на промежутках $\big(t_{j-1}^{(m)}, t_j^{(m)}\big)$, $j = 1, \ldots, N$, отображение полуоси $\mathbb{R}_+$ в линейное топологическое пространство $L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, такое что

$$p^{(m)}\big(t_j^{(m)},\lambda\big) = F\big(t_j^{(m)},\lambda\big), \quad j \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

**Предложение 1.** *Последовательность* $\{p^{(m)}(t,\lambda)\}$ *фундаментальна в пространстве* $C_{\mathrm{loc}}$.

**Доказательство.** Фиксируем некоторые $T, l > 0$. Тогда последовательность $p^{(m)}(t,\lambda)|_{K(T,l)}$ фундаментальна в $C\big([0,T], L_1([-l,l])\big)$, поскольку согласно (7) и (8) справедливо неравенство

$$\sup_{t\in[0,T]} \|p^{(m+q)}(t,\lambda) - p^{(m)}(t,\lambda)\|_{L_1([-l,l])} \leqslant 2^{-m} c(l). \tag{9}$$

Предложение доказано. □

Из леммы 1 и предложения 1 вытекает, что существует такое $F(t,\lambda) \in C_{\mathrm{loc}}$, что последовательность $p^{(m)}(t,\lambda)$ сходится к $F(t,\lambda)$ в пространстве $C_{\mathrm{loc}}$ при $m \to \infty$.

Подчеркнём, что последовательность функций $p^{(m)}(t,\lambda)$ и, следовательно, её предел не зависят от параметров $T$ и $l$. От параметра $l$ зависит лишь константа в оценке фундаментальности (9).

Покажем, что последовательность $F_{\varepsilon_{n_p}^{(p)}}(t,\lambda)$ сходится при $p \to \infty$ к функции $F(t,\lambda)$ в пространстве $C\big(\mathbb{R}_+, L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})\big)$.

Выберем некоторые $T, l > 0$ и оценим норму разности:

$$\|p^{(m)}(t,\lambda) - F_{\varepsilon_{n_p}^{(p)}}(t,\lambda)\| \leqslant \|p^{(m)}(t,\lambda) - p^{(m)}(t_j^{(m)},\lambda)\| + \\ + \|p^{(m)}(t_j^{(m)},\lambda) - F_{\varepsilon_{n_p}^{(p)}}(t_j^{(m)},\lambda)\| + \|F_{\varepsilon_{n_p}^{(p)}}(t_j^{(m)},\lambda) - F_{\varepsilon_{n_p}^{(p)}}(t,\lambda)\|,$$

где $t_j^m$ — ближайшее к $t$ из чисел $t_i^{(m)}$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда в силу неравенства (7) первое и третье слагаемые не превосходят $2^{-m}c(l)$, а для второго слагаемого согласно (8) и (6) имеем

$$\|p^{(m)}(t_j^{(m)},\lambda) - F_{\varepsilon_{n_p}^{(p)}}(t_j^{(m)},\lambda)\| = \|F(t_j^{(m)},\lambda) - F_{\varepsilon_{n_p}^{(p)}}(t_j^{(m)},\lambda)\| \leqslant \sigma$$

для любого $p \geqslant p_0$.

Таким образом,

$$\|p^{(m)}(t,\lambda) - F_{\varepsilon_{n_p}^{(p)}}(t,\lambda)\| \leqslant 2^{-m+1}c(l) + \sigma$$

для любого $p \geqslant p_0$. Поэтому

$$\|F(t,\lambda) - F_{\varepsilon_{n_p}^{(p)}}(t,\lambda)\|_{C([0,T],L_1([-l,l]))} \leqslant \|F(t,\lambda) - p^{(m)}(t,\lambda)\|_{C([0,T],L_1([-l,l]))} + \\ + \|p^{(m)}(t,\lambda) - F_{\varepsilon_{n_p}^{(p)}}(t,\lambda)\|_{C([0,T],L_1([-l,l]))} \leqslant \\ \leqslant \|F(t,\lambda) - p^{(m)}(t,\lambda)\|_{C([0,T],L_1([-l,l]))} + 2^{-m+1}c(l) + \sigma.$$

Переходя в последней оценке к пределу при $m \to \infty$, заключаем, что для любого $\sigma > 0$ и любых $T, l > 0$ существует такое $p_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $p > p_0$ справедливо неравенство

$$\|F(t,\lambda) - F_{\varepsilon_{n_p}^{(p)}}(t,\lambda)\|_{C([0,T],L_1([-l,l]))} \leqslant \sigma.$$

Теорема 4 доказана. □

**Лемма 2.** *Пусть $u, v \in H$ и $\mathbf{E}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, — ортогональное разложение единицы в гильбертовом пространстве $H$. Тогда для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство*

$$|(u, \mathbf{E}(\lambda)u) - (v, \mathbf{E}(\lambda)v)| \leqslant \|u - v\|_H(\|u\|_H + \|v\|_H).$$

**Доказательство.** Из непосредственных вычислений и неравенства Коши—Буняковского следует цепочка оценок

$$|(u, \mathbf{E}u) - (v, \mathbf{E}v)| = |\mathrm{Re}\{(u - v, \mathbf{E}(u + v))\}| \leqslant \\ \leqslant |(u - v, \mathbf{E}(u + v))| \leqslant \|u - v\|_H \|\mathbf{E}(u + v)\|_H \leqslant \|u - v\|_H(\|u\|_H + \|v\|_H).$$

Лемма 2 доказана. □

**Следствие 1.** *Пусть $u_0, v_0 \in \bigcap\limits_{\varepsilon \in [0,1]} D(\mathbf{L}_\varepsilon)$ и бесконечно малая последовательность $\varepsilon_m$ такова, что существуют неотрицательные монотонные при каждом $t > 0$ функции $F(t,\lambda)$ и $G(t,\lambda)$, ограниченные сверху единицей, обладающие* *сформулированными в теореме 4 свойствами и такие, что последовательности функций* $\{F_{\varepsilon_k}(t,\lambda)\}$ *и* $\{G_{\varepsilon_k}(t,\lambda)\}$ *сходятся в пространстве* $C_{\rm loc}$ *к функциям* $F(t,\lambda)$ *и* $G(t,\lambda)$ *соответственно. Тогда для любых* $T, l > 0$ *справедливо неравенство*

$$\|F(t,\lambda) - G(t,\lambda)\|_{C([0,T],L_1(K_{T,l}))} \leqslant C\|u_0 - v_0\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

**Доказательство.** Фиксируем некоторое $\sigma > 0$. Тогда для любых $T > 0$, $l > 0$ и любого $k \in \mathbb{N}$ выполняется условие

$$\begin{aligned}\|F(t,\lambda) - G(t,\lambda)\|_{C([0,T],L_1([-l,l]))} &\leqslant \|F(t,\lambda) - F_{\varepsilon_k}(t,\lambda)\|_{C([0,T],L_1([-l,l]))} + \\ &+ \|G(t,\lambda) - G_{\varepsilon_k}(t,\lambda)\|_{C([0,T],L_1([-l,l]))} + \|F_{\varepsilon_k}(t,\lambda) - G_{\varepsilon_k}(t,\lambda)\|_{C([0,T],L_1([-l,l]))}\end{aligned}$$

и согласно теореме 4 найдётся такое $k_0 = k_0(T,l,\sigma) \in \mathbb{N}$, что

$$\|F(t,\lambda) - F_{\varepsilon_k}(t,\lambda)\|_{C([0,T],L_1([-l,l]))} + \|G(t,\lambda) - G_{\varepsilon_k}(t,\lambda)\|_{C([0,T],L_1(-l,l))} \leqslant \sigma$$

для всех $k \geqslant k_0$. Для третьего слагаемого, согласно лемме 2, справедлива оценка

$$\begin{aligned}&\|F_{\varepsilon_k}(t,\lambda) - G_{\varepsilon_k}(t,\lambda)\|_{C([0,T],L_1([-l,l]))} = \\ &= \sup_{[0,T]}\big(u_{\varepsilon_k}(t), \big(\mathbf{E}(l) - \mathbf{E}(-l)\big)u_{\varepsilon_k}(t)\big) - \big(v_{\varepsilon_k}(t), \big(\mathbf{E}(l) - \mathbf{E}(-l)\big)v_{\varepsilon_k}(t)\big) \leqslant \\ &\leqslant \|\mathbf{U}_{\mathbf{L}_{\varepsilon_k}}(u_0 - v_0)\|_{L_2}\|\mathbf{U}_{\mathbf{L}_{\varepsilon_k}}(u_0 + v_0)\|_{L_2} \leqslant 2\|u_0 - v_0\|_{L_2}.\end{aligned}$$

Следовательно, в силу произвольности $\sigma > 0$ для любого компакта $K_{T,l}$, $T, l > 0$, справедливо неравенство

$$\|F(t,\lambda) - G(t,\lambda)\|_{C([0,T],L_1([-l,l])} \leqslant 2\|u_0 - v_0\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Следствие 1 доказано. □

**Теорема 5.** *Пусть* $\{\varepsilon_n\}$ *— некоторая бесконечно малая последовательность. Тогда для любого разложения единицы* $\mathbf{E}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *в гильбертовом пространстве* $H$ *существует такая подпоследовательность* $\varepsilon_{n_k}$, *что для любой начальной функции* $u_0 \in L_2(\mathbb{R})$ *существует неотрицательная монотонно возрастающая при каждом* $t > 0$ *функция* $G(t,\lambda) \in C\big(\mathbb{R}_+, L_{1,\rm loc}(\mathbb{R})\big)$, *такая что последовательность* $G_{\varepsilon_n}(t,\lambda)$ *сходится в* $C\big(\mathbb{R}_+, L_{1,\rm loc}(\mathbb{R})\big)$ *к функции* $G(t,\lambda)$.

**Доказательство.** Пусть $\mathbf{E}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, — некоторое ортогональное разложение единицы в гильбертовом пространстве $H = L_2(\mathbb{R})$, $u_{0l}$, $l \in \mathbb{N}$, — некоторый ортонормированный базис в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Рассмотрим следующее счётное семейство функций в пространстве $C_{\rm loc}$:

$$G^{ji}_{e_n}(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{x} (\mathbf{U}_{\mathbf{L}_{\varepsilon_n}}(t)u_{0j}, d\mathbf{E}(\xi)\mathbf{U}_{\mathbf{L}_\varepsilon}(t)u_{0i}), \quad i,j \in \mathbb{N}.$$

Как и в доказательстве теоремы 4, используя *процедуру выделения диагональной подпоследовательности*, можно показать, что найдутся такая подпоследовательность $\varepsilon_{n_k}$ последовательности $\varepsilon_n$ и такое семейство функций

$G^{ji}(t,x) \in C_{\rm loc}$, $i,j \in \mathbb{N}$, что для любых $j,i \in \mathbb{N}$ последовательность функций $G^{ji}_{\varepsilon_n}(t,x)$ сходится к функции $G^{ji}(t,x)$ при $n \to \infty$ в пространстве $C_{\rm loc}$.

Итак, для разложения единицы $\mathbf{E}(\lambda)$ и ортонормированный базиса $u_{0l}$ выберем указанную последовательность $\varepsilon_{n_k}$. Тогда для любого элемента $u_0(x) \in \in L_2(\mathbb{R})$ и для любого $\sigma > 0$ найдётся такой набор чисел $\alpha_1,\dots,\alpha_N$, что $\|u_0 - v_0\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \sigma/4$, где $v_0(x) = \sum\limits_{l=1}^{N} \alpha_l u_{0l}$; $\sum\limits_{l=1}^{N} |\alpha_j|^2 \leqslant \|u_0\|$. Положим $u_k(t) = = \mathbf{U}_{\mathbf{L}_{e_{n_k}}}(t)u_0$ и $v_k(t) = \mathbf{U}_{\mathbf{L}_{e_{n_k}}}(t)v_0$.

Пусть

$$G^{w}_{\varepsilon_m}(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{x} (\mathbf{U}_{\mathbf{L}_{\varepsilon_m}}(t)w, d\mathbf{E}(\xi)\mathbf{U}_{\mathbf{L}_{\varepsilon_m}}(t)w),$$

где $w = u, v$. Тогда согласно лемме 2 для любого $m \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\|G^{u}_{\varepsilon_m}(t,x) - G^{v}_{\varepsilon_m}\|_{C([0,T],[-l,l])} \leqslant \|u_{\varepsilon_m}(t) - v_{\varepsilon_m}(t)\|_{L_2(\mathbb{R})}\|u_{\varepsilon_m} + v_{\varepsilon_m}\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \frac{\sigma}{2}. \quad (10)$$

Таким образом, для любых $T,l > 0$ и для любого $\sigma > 0$ найдётся такое число $N$ и набор чисел $\alpha_1,\dots,\alpha_N$, что имеет место неравенство (10).

Согласно выбору последовательности $\varepsilon_n$, для указанных $\sigma > 0$ и $N$ найдётся такой номер $n_0$, что для всех $n \geqslant n_0$ и всех $i,j \in \{1,\dots,N\}$ справедливы неравенства

$$\|G^{ji}_{\varepsilon_n}(t,x) - G^{ji}(t,x)\|_{C([0,T],L_1([-l,l]))} \leqslant \sigma 2^{-(j+i+2)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\|G^{v}_{m+q}(t,x) - G^{v}_{m}(t,x)\|_{C([0,T],L_1(-l,l))} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{i,j=1}^{N} |\alpha_i|\,|a_j|\,\big\|\big(G^{ji}_{\varepsilon_{m+q}}(t,x) - G^{ji}_{\varepsilon_m}(t,x)\big)\big|_{K(T,l)}\big\|_{C([0,T],L_1(-l,l))} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{i,j=1}^{N} \alpha_i \bar{a}_j \sigma 2^{-(j+i+1)} \leqslant \frac{\sigma}{4}. \end{aligned}$$

Поэтому для любых $m \geqslant n_0$, $q \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} &\big\|\big(G^{u}_{\varepsilon_{m+q}}(t,x) - G^{u}_{\varepsilon_m}(t,x)\big)\big|_{K(T,l)}\big\|_{C([0,T],L_1(-l,l))} \leqslant \\ &\leqslant \|(G^{u}_{\varepsilon_{m+q}}(t,x) - G^{v}_{\varepsilon_{m+q}}(t,x)\|_{C([0,T],L_1(-l,l))} + \\ &+ \|G^{v}_{\varepsilon_{m+q}}(t,x) - G^{v}_{\varepsilon_m}(t,x)\|_{C([0,T],L_1(-l,l))} + \\ &+ \|(G^{v}_{\varepsilon_m}(t,x) - G^{u}_{\varepsilon_m}(t,x)|_{K(T,l)}\|_{C([0,T],L_1(-l,l))} \leqslant \frac{5}{4}\sigma. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность $G^{u}_{\varepsilon_m}(t,x)|_{K(T,l)}$ фундаментальна в $C\big([0,T],L_1(-l,l)\big)$ при любых $T,l > 0$, а последовательность $G^{u}_{\varepsilon_m}(t,x)$ согласно лемме 1 сходится в пространстве $C_{\rm loc}$ к предельной функции $G(t,x) \in C_{\rm loc}$, которая при каждом $t > 0$ является монотонно возрастающей функцией на оси $x \in \mathbb{R}$, принимающей значения в отрезке $[0,1]$. Теорема 5 доказана. $\square$

## Приложения к динамике наблюдаемых

Пусть $\mathbf{E}(\lambda)$ — ортогональное разложение единицы в $H$, а $\mathcal{B}^b_{\mathbf{E}}(H)$ — подалгебра алгебры $\mathcal{B}(H)$ ограниченных операторов, действующих в пространстве $H$ по правилу

$$\mathbf{A}u = \int\limits_{\mathbb{R}} a(\lambda)\, d\mathbf{E}(\lambda)u,$$

где функция $a(\lambda)$ принадлежит классу $C(\mathbb{R})$ и имеет пределы $\lim\limits_{\lambda\to\pm\infty} a(\lambda) = a_\pm$. Пусть $\mathcal{B}^c_{\mathbf{E}}(H)$ — подалгебра алгебры $\mathcal{B}(H)$ ограниченных самосопряжённых операторов, коммутирующих с $\mathbf{E}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, действие которых на произвольную функцию $u \in L_2(\mathbb{R})$ задаётся формулой

$$\mathbf{A}u = \int\limits_{\mathbb{R}} a(\lambda)\, d\mathbf{E}(\lambda)u,$$

где $a(\lambda) \in C(\mathbb{R})$ (см. [10]).

**Теорема 6.** *Пусть $u_0(x) \in L_2(\mathbb{R})$, $\mathbf{E}(\lambda)$ — ортогональное разложение единицы и $\{\varepsilon_k\}$ — последовательность, существование которой утверждает теорема 7. Тогда для любого $A \in \mathcal{B}^b_{\mathbf{E}}$ и любого $T > 0$ последовательность $\big(u_{\varepsilon_k}(t), Au_{\varepsilon_k}(t)\big)$ сходится равномерно на $[0,T]$ к величине*

$$\bar{A}(t) = a_+\big(1 - F(t,+\infty)\big) + a_- F(t,\infty) + \int\limits_{\mathbb{R}} a(\xi) dF(t,\xi),$$

*где $\int\limits_{\mathbb{R}} a(\lambda)\, dF(t,\lambda)$ есть интеграл Стилтьеса от непрерывной функции $a(\lambda)$ по монотонной ограниченной функции $F(t,\lambda)$* (см. [2, гл. 8, § 6]).

Доказательство теоремы 6 для произвольного разложения единицы $\mathbf{E}(\lambda)$ дословно повторяет доказательство соответствующих утверждений для разложения единицы $\mathbf{E}(x)$ в [7].

Возникает вопрос: не существует ли такой бесконечно малой последовательности $\{\varepsilon_n\}$, что для любого оператора $A \in \mathcal{B}(H)$ последовательность средних значений $(u_{\varepsilon_n}, Au_{\varepsilon_n})$ сходится? Ответ отрицателен.

**Теорема 7.** *Если $\mathbf{P}_{H_1}u_0(x) \neq 0$ и $t > t^*$* (см. следствие 1), *то для любой бесконечно малой последовательности $\varepsilon_n$ можно указать такой ограниченный самосопряжённый оператор $\mathbf{A} \in \mathcal{B}(H)$, что последовательность $\big(u_{\varepsilon_n}(t), \mathbf{A}u_{\varepsilon_n}(t)\big)$ расходится.*

**Замечание.** Утверждение теоремы 7 может быть выведено как следствие теоремы 1 работы [11]. Однако для полноты изложения и для получения следствий из теоремы 7 мы приведём ниже доказательство, основанное на ином, чем в [11], подходе.

**Доказательство.** Пусть $\mathbf{P}_{H_1}u_0 \neq 0$ и $t > t^*$. Тогда согласно следствию 1 для любой последовательности $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, последовательность решений соответствующих регуляризованных задач $\{u_{\varepsilon_n}(t,x)\}$ сходится слабо в $L_2(\mathbb{R})$ к функции $u_*(t,x)$ и расходится в норме пространства $L_2(\mathbb{R})$. При этом любая подпоследовательность последовательности $\{u_{\varepsilon_n}(t,x)\}$ также расходится в $L_2(\mathbb{R})$. Значит, последовательность $\{u_{\varepsilon_n}(t,x)\}$ не компактна в $L_2(\mathbb{R})$ и, следовательно, существует такое $\sigma>0$, что для любого конечного набора элементов $x_1,\dots,x_N$ $\sigma$-сеть $\bigcup\limits_{j=1}^{N} O_\sigma(x_j)$ не покрывает всех элементов последовательности $\{u_{\varepsilon_n}(t,x)\}$, т. е. существует такое $m\in\mathbb{N}$, что $u_{\varepsilon_m}(t,x)\notin\bigcup\limits_{j=1}^{N} O_\sigma(x_j)$. Здесь

$$O_\sigma(M)=\{x\in L_2(\mathbb{R})\colon \rho_{L_2}(x,M)<\sigma\},$$

где $\rho_{L_2}$ — метрика пространства $L_2(\mathbb{R})$, $M$ — некоторое множество пространства $L_2(\mathbb{R})$.

Тогда справедливо утверждение: существует такое $\sigma>0$, что для любого $n\in\mathbb{N}$ найдётся такое $m>n$, что $u_{\varepsilon_m}(t,x)\notin T(n,\sigma)$, где

$$T(n,\sigma)=\bigl\{x\in L_2(\mathbb{R})\colon x\in O_\sigma\bigl(\mathrm{lin}(u_*,u_1,\dots,u_n)\bigr);\ |\|x\|-1|<\sigma\bigr\}.$$

Действительно, если для любого $\sigma>0$ существует такое $n\in\mathbb{N}$, что для любого $m>n$ выполняется $u_{\varepsilon_m}(t,x)\notin T(n,\sigma)$, то последовательность $\{u_n\}$ можно покрыть конечной $\sigma$-сетью, что противоречит её некомпактности.

Выделим из последовательности $\{u_n\}$ линейно независимую систему векторов $f_k$ по следующему правилу.

Пусть $f_1=u_*(t)$, тогда существует такое $m_1\geqslant 1$, что $u_{\varepsilon_{m_1}}(t,x)\notin T(1,\sigma)$. Положим $f_1=u_{m_1}$. Тогда существует такое $m_2>m_1$, что $u_{\varepsilon_{m_2}}(t,x)\notin T(m_1,\sigma)$. Положим $f_2=u_{m_2}$, и т. д. Тогда по индукции существует такая последовательность $f_k\in L_2$ — подпоследовательность $\{u_n\}$, — что для любого $k\in\mathbb{N}$

$$f_{k+1}\notin V(k,\sigma)\equiv\bigl\{x\in L_2(\mathbb{R})\colon x\in O_\sigma\bigl(\mathrm{lin}(u_*,f_1,\dots,f_n)\bigr);\ |\,\|x\|-1|<\sigma\bigr\}. \tag{11}$$

Семейство элементов $\{f_k\}$ подвергнем стандартной процедуре ортогонализации. Положим

$$g_1=f_1,\quad g_2=(I-P_1)f_2,\dots,\quad g_{k+1}=(I-P_k)f_{k+1},\dots,$$

где $P_k$ — ортогональный проектор на линейную оболочку $\mathrm{lin}\{f_1,f_2,\dots,f_k\}$. Тогда в силу (11) для любого $k\in\mathbb{N}$ справедлива оценка $\|g_k\|_{L_2(\mathbb{R})}\geqslant\sigma$.

Положим $h_k=(\|g_k\|)^{-1}g_k$, $k\in\mathbb{N}$. Тогда $\{h_k\}$ — ортонормированная система векторов. Заметим, что согласно построению ортогональной системы $\{g_k\}$

$$(f_j,h_k)=0\quad\forall j<k;$$

согласно оценке (11) справедливо неравенство

$$(f_k,h_k)\geqslant\sigma; \tag{12}$$

согласно теореме 2 последовательность $\{f_j\}$ слабо в $L_2(\mathbb{R})$ сходится к $u^*$, поэтому

$$\lim_{j\to\infty}(f_j,h_k)=0\quad\forall k\in\mathbb{N}. \tag{13}$$

Рассмотрим ограниченный самосопряжённый оператор $\mathbf{Q} \in L_2(\mathbb{R})$ в пространстве $L_2$, действие которого на любой вектор $\psi \in L_2$ задаётся соотношением

$$\mathbf{Q}\psi = \sum_{j=1}^{\infty} a_j (h_j, \psi) h_j,$$

где $\{a_j\}$ — некоторая ограниченная последовательность действительных чисел. Докажем, что существует такая последовательность чисел $\{a_j\}$, принимающих значения $\{-1, 0, 1\}$, что последовательность $(f_k, \mathbf{Q}f_k)$, а следовательно, и последовательность $\big(u_{\varepsilon_n}(t), \mathbf{Q}u_{\varepsilon_n}(t)\big)$ расходятся.

Для произвольных натуральных чисел $m$, $p$ рассмотрим величину

$$\|(f_k, \mathbf{Q}f_k) - (f_{k+p}, \mathbf{Q}f_{k+p})\| = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j |(h_j, f_k)|^2 - \sum_{j=1}^{\infty} a_j |(h_j, f_{k+p})|^2 \right\|,$$

равную согласно замечаниям

$$\left\| \sum_{j=1}^{k} a_j |(h_j, f_k)|^2 - \sum_{j=1}^{k+p} a_j |(h_j, f_{k+p})|^2 \right\|.$$

Пусть $a_1 = 1$, тогда согласно (13) существует такое $p_2 > 1$, что $(h_1, f_{p_2}) \leqslant \sigma/2^2$. Положим $a_j = 0$, $j = 2, 3, \ldots, p_2 - 1$; $a_{p_2} = -1$. Тогда существует такое $p_3 > p_2$, что $(h_i, f_{p_3}) \leqslant \sigma/2^3$, $i = 1, 2, \ldots, p_2$. Положим $a_j = 0$, $j = p_2 + 1, \ldots, p_3 - 1$; $a_{p_3} = 1$. По индукции существует строго монотонная последовательность натуральных чисел $\{p_l\}$, такая что $(h_i, f_{p_l}) \leqslant \sigma/2^l$, $i = 1, 2, \ldots, p_{l-1}$, для любого $l = 4, 5, \ldots$. Положим $a_j = 0$, $j \neq p_l$, и $a_{p_l} = (-1)^{l-1}$.

Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ можно указать такое $p_n > n$, что

$$(f_{p_n}, \mathbf{Q}f_{p_n}) = \sum_{j=1}^{p_n} a_j |(h_j, f_{p_n})|^2 = (-1)^{n-1} |(f_{p_n}, h_{p_n})|^2 + \alpha_n,$$

где

$$|\alpha_n| \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \delta^2 2^{-n} \to 0$$

при $n \to \infty$. В силу (12) последовательность $\{(f_{n_p}, \mathbf{Q}f_{n_p})\}$ расходится.

Следовательно, для любой бесконечно малой последовательности $\{\varepsilon_n\}$ можно указать такой ограниченный самосопряжённый оператор $\mathbf{Q}$, что последовательность $\big(u_{\varepsilon_n}(t), \mathbf{Q}u_{\varepsilon_n}(t)\big)$ расходится. Теорема 7 доказана. □

**Следствие 2.** *Если последовательность регуляризованных решений $u_n(t)$ сходится слабо в $H$ при $n \to \infty$, то существует такое разложение единицы $\mathbf{E}(\lambda)$, что для предела $F(\lambda)$ любой сходящейся в пространстве $L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ подпоследовательности $F_n(\lambda)$ справедливо неравенство $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\big(F(\lambda) - F(-\lambda)\big) < 1$.*

**Доказательство.** Выберем в пространстве $H$ ортонормированный базис $\{e_n\}$, включающий в себя как подсистему ортонормированную систему $\{h_k\}$, построенную в теореме 7. Рассмотрим разложение единицы

$$\mathbf{E}(\lambda) = \sum_{j=1}^{[\lambda]} \mathbf{P}_{e_j}.$$

Положим $F_i(\lambda) = \big(u_i(t), \mathbf{E}(\lambda) u_i(t)\big)$. Пусть $n_k$ — такая последовательность номеров, что $e_{n_k} = h_k$. Тогда согласно неравенству (11) для любого $\lambda_0 > 0$ существует такой номер $k_0$, что для всех $k > k_0$ справедливо $F_{n_k}(\lambda_0) < 1-\sigma$. Тогда для верхнего предела $\bar{F}(\lambda)$ последовательности $F_{n_k}(\lambda)$ справедливо утверждение: для любого $\lambda > 0$ справедливо неравенство $\bar{F}(\lambda) \leqslant 1-\sigma$ (поскольку предположение, что существует такое $\lambda_0 > 0$, что $\bar{F}(\lambda_0) > 1-\sigma$, приводит к противоречию). Следствие 2 доказано. □

**Следствие 3.** *Пусть $u_0(x) \in L_2(\mathbb{R})$, $\mathbf{E}(\lambda)$ — ортогональное разложение единицы и $\{\varepsilon_k\}$ — такая бесконечно малая последовательность, что последовательность функций $F_k(t,\lambda)$ сходится к функции $F(t,\lambda)$ в $C_{\mathrm{loc}}$. Тогда последовательность $\big(u_{\varepsilon_k}(t), \mathbf{A} u_{\varepsilon_k}(t)\big)$ сходится при любом $\mathbf{A} \in \mathcal{B}^c_{\mathbf{E}}$ тогда и только тогда, когда $F_+(t) - F_-(t) = 1$.*

**Доказательство.** Докажем достаточность. Фиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Из сходимости последовательности $F_k(t,\lambda)$ в пространстве $C_{\mathrm{loc}}$ и условия $F_+(t) - F_-(t) = 1$ для предельной функции следует существование такого $L \geqslant 0$, что для всех $k \in \mathbb{N}$ справедливы оценки

$$\bigg| \int\limits_{|\lambda|>L} dF_k(T,\lambda) \bigg| < \varepsilon$$

и оценка

$$\bigg| \int\limits_{|\lambda|>L} dF(T,\lambda) \bigg| < \varepsilon.$$

Тогда для любой функции $a(\lambda) \in C(\mathbb{R})$ с конечной нормой $A$ верно неравенство

$$\bigg| \int\limits_{|\lambda|>L} a(\lambda)\, dF(t,\lambda) \bigg| < A\varepsilon.$$

Следовательно, существует такое $\alpha(\lambda) \in C^b(\mathbb{R})$, что

$$\bigg| \int\limits_{\mathbb{R}} \big(a(\lambda) - \alpha(\lambda)\big)\, dF(t,\lambda) \bigg| < 2A\varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, достаточность следует из теоремы 6.

Докажем необходимость. Пусть существует такое $\tau \geqslant 0$ и такое $\delta > 0$, что $F_+(\tau) - F_-(\tau) = 1 - \delta$. Тогда существует такой отрезок $[-L, L]$, что

$$F(\tau, L) - F(\tau, -L) \geqslant 1 - \frac{9}{8}\delta,$$

причём последовательность сужений $\{F_n(\tau,\lambda)|_{[-L,L]}\}$ сходится к $F(\tau,\lambda)|_{[-L,L]}$ в пространстве $L_1([-L,L])$. Тогда можно указать такие монотонно возрастающие последовательности чисел $n_k \in \mathbb{N}$ и $L_k \in (L,+\infty)$, что

$$\int\limits_{|\lambda|\in[L_k+1,L_{k+1}]} dF_{n_k}(\tau,\lambda) > \frac{7\delta}{8}$$

и

$$\int\limits_{|\lambda|\leqslant L} dF_{n_k}(\tau,\lambda) > 1-\frac{5\delta}{4}.$$

Пусть $a(\lambda)$ — такая непрерывная кусочно-линейная функция, монотонная на интервалах $(L_k, L_k+1)$, что $a(\lambda)=(-1)^k$ при $\lambda\in[L_k+1,L_{k+1}]$. Тогда последовательность $\left\{\int\limits_{\mathbb{R}} a(l)dF_{n_k}(\lambda)\right\}$ не фундаментальна. Следствие 3 доказано. $\square$

**Пример.** Пусть $\{u_n(x)\}$ — ортогональная последовательность функций из пространства $L_2(\mathbb{R})$, носители которых содержатся на отрезке $[0,1]$, а сужения $\{u_n(x)|_{[0,1]}\}$ образуют базис в $L_2([0,1])$. Тогда $u_n(x)$ слабо в $L_2(\mathbb{R})$ сходятся к нулю. Поэтому существуют такое разложение единицы $E(\mu)$ и такая подпоследовательность $\{u_{n_m}\}$, что для любого частичного предела $F(\mu)$ последовательности $\{F_{n_m}(\mu)\}$ справедливо неравенство $\Delta F<1$. Но поскольку носители всех мер с функциями распределения $F_n(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}|u_n(s)|^2\,ds$, соответствующие ортогональному разложению единицы $E(x)$, имеют общий компактный носитель $[0,1]$, то и для любого частичного предела $F(x)$ последовательности $F_n(x)$ справедливо равенство $\Delta F = F(1)-F(0)=1$. Пример показывает, что для последовательности элементов пространства $H$, сходящейся лишь слабо, могут существовать разложения единицы пространства $H$ двух классов: такие, для которых существуют предельные меры с вариацией на всём координатном пространстве $\mathbb{R}$, меньшей 1, и такие, для которых любая предельная мера имеет на $\mathbb{R}$ вариацию, равную 1.

**Замечание.** Так как для любого ограниченного оператора $\mathbf{Q}\in\mathcal{B}(H)$ и любой бесконечно малой последовательности $\{\varepsilon_n\}$ последовательность средних значений $\big(u_{\varepsilon_n}(t),\mathbf{Q}u_{\varepsilon_n}(t)\big)$ оператора $\mathbf{Q}$ на решениях семейства регуляризованных задач $u_{\varepsilon_n}(t)$ является ограниченной, то множество её частичных пределов является ограниченным и, как следует из теоремы 7, состоит из более чем одной точки.

Возникает вопрос: позволяет ли задача Коши (1), (2) задавать динамику значений наблюдаемых $\mathbf{A}\in\mathcal{B}(H)$? Однозначно ли определена такая динамика?

Стремление применить метод исчезающей вязкости к определению динамики значений наблюдаемых для задачи Коши (1), (2) приводит к рассмотрению многозначных отображений. Определим отображение, ставящее в соответствие каждой бесконечно малой последовательности $\{\varepsilon_n\}$, начальному условию $u_0(x)$, числу $t > 0$ и оператору $\mathbf{A} \in \mathcal{B}(H)$ множество всевозможных частичных пределов последовательности средних значений $\big(u_{\varepsilon_n}(t), \mathbf{Q}u_{\varepsilon_n}(t)\big)$ при $n \to \infty$:

$$T\colon E \times H \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{B}(H) \to 2^{\mathbb{C}}\colon \quad (\{\varepsilon_n\}, u_0, t, \mathbf{Q}) \to T(\{\varepsilon_n\}, u_0, t, \mathbf{Q}),$$

где $E$ — множество всех бесконечно малых последовательностей неотрицательных чисел, $T(\{\varepsilon_n\}, u_0, t, \mathbf{Q})$ — множество частичных пределов последовательности $\{(\mathbf{U}_{\mathbf{L}_{\varepsilon_n}}(t)u_0, \mathbf{Q}\mathbf{U}_{\mathbf{L}_{\varepsilon_n}}(t)u_0)\}$, а $2^{\mathbb{C}}$ — метрическое пространство всех подмножеств комплексной плоскости $\mathbb{C}$, наделённое метрикой Хаусдорфа. При этом динамика средних значений теряет свойство однозначности и задаётся многозначным отображением.

## Литература


[1] Жиков В. В. К проблеме предельного перехода в дивергентных неравномерно эллиптических уравнениях // Функц. анализ и его прил. — 2001. — Т. 35, вып. 1. — С. 23—39.

[2] Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974.

[3] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1969.

[4] Олейник О. А. О линейных уравнениях второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Мат. сб. — 1966. — Т. 69 (111), № 1. — С. 111—140.

[5] Рид М., Саймон Б. Современные методы математической физики. Т. 1. — М.: Мир, 1977.

[6] Сакбаев В. Ж. О постановке задачи Коши для уравнения Шрёдингера, вырождающегося на полупространстве // ЖВМ и МФ. — 2002. — Т. 42, № 11. — С. 161—178.

[7] Сакбаев В. Ж. О функционалах на решениях задачи Коши для уравнения Шрёдингера с вырождением на полупрямой // ЖВМ и МФ. — 2004. — Т. 44, № 9. — С. 1654—1673.

[8] Труды С. Н. Кружкова: Сборник статей / Под ред. С. Н. Бахвалова; сост. С. Н. Бахвалов, В. А. Галкин, Ю. А. Дубинский. — М.: Физматлит, 2000. — С. 14—38; 39—45; 99—153; 287—316.

[9] Фикера Г. К единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений второго порядка // Математика. — 1963. — Т. 164. — С. 99—121.

[10] Холево А. С. Вероятностные и статистические аспекты квантовой механики. — М.: Наука, 1982.

[11] Dell'Antonio G. F. On the limits of sequences of normal states // Comm. Pure Appl. Math. — 1967. — Vol. 20. — P. 413—429.

[12] Gerard P. Microlocal defect measures // Comm. Part. Different. Equations. — 1991. — Vol. 16, no. 11. — P. 1761—1794.