

Элементарные ротации операторов в правильных банаховых пространствах

Д. Л. ТЫШКЕВИЧ

Таврический национальный университет
им. В. И. Вернадского
e-mail: dtyshk@inbox.ru

УДК 517.983

Ключевые слова: пространство с внутренним произведением, банахово пространство, разложение Богнара—Крамли, элементарная ротация, оператор Жюлиа.

Аннотация

В работе доказано существование элементарной ротации (оператора Жюлиа) линейного непрерывного сопрягаемого оператора в правильном банаховом пространстве с внутренним произведением. Доказательство основано на общей теореме автора о существовании элементарной ротации линейного оператора в категории с квадратичным расщеплением. Данный результат является обобщением известного результата о существовании элементарной ротации линейного непрерывного оператора в пространстве Крейна и может представлять интерес при построении изометрических и унитарных дилатаций, а также характеристических функций непрерывных линейных операторов, действующих в правильных банаховых пространствах с внутренним произведением.

Abstract

D. L. Tyshkevich, Elementary rotations of operators in regular Banach spaces, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 6, pp. 175—192.

In this paper we prove the existence of an elementary rotation (a Julia operator) for any continuous linear adjointable operator in a regular Banach space with inner product. The proof is based on a more general theorem of the same author about the existence of an elementary rotation for any linear operator in a category with quadratic splitting. This result is a generalization of a well-known result about the existence of an elementary rotation for any continuous linear operator in a Krein space. The result can be useful for constructing isometric and unitary dilations as well as characteristic functions of continuous linear operators acting in regular Banach spaces with inner product.

Введение

В теории линейных операторов, действующих в пространствах Крейна, широкое развитие получили методы изучения операторов при помощи их расширений особого типа (с выходом из основного пространства), так называемых *элементарных ротаций*. Элементарная ротация — это унитарный оператор (в смысле индефинитной метрики), дополнительно удовлетворяющий определённым условиям и содержащий исходный оператор в качестве компоненты. Элементарная

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 6, с. 175—192.

© 2006 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

ротация существует для любого непрерывного оператора и является важнейшим инструментом при исследовании таких базовых вопросов современной теории операторов в пространствах Крейна, как вопрос существования сжимающих, изометрических и унитарных расширений операторов, теория дилатаций, лифтинг коммутанта, теория унитарных узлов и др. Интересные и важные приложения находит понятие элементарной ротации в теории аналитических функций (в том числе и функций со значениями в векторных пространствах), здесь можно указать на такие разделы, как теория унивалентных функций, теория интерполляции в различных классах аналитических функций, теория воспроизводящих ядер, алгоритм Шура. Подробную информацию по данному кругу вопросов и многочисленные ссылки можно найти в курсе лекций [16] (см. также домашнюю страницу [22] в сети Интернет одного из авторов [16]).

Как показывает конструктивный анализ результатов, получаемых при помощи элементарной ротации (как, собственно, и анализ средств построения самой элементарной ротации), основную роль в соответствующих построениях играют не столько конкретные свойства и специфика пространств Крейна, сколько определённые общие аспекты теории пространств с индефинитной метрикой, носящие *категориальный* характер. К таким аспектам можно отнести, например, непрерывность оператора в слабой топологии, равносильную в случае пространств Крейна непрерывности в сильной топологии, существование у непрерывного оператора непрерывного сопряжённого, существование разложения Богнара—Крамли любых самосопряжённых операторов *в более общих* пространствах, чем пространства Крейна и т. д.

Всё это определяет *постановку следующей проблемы*: выяснить основные конструктивные моменты построения элементарной ротации оператора в классе пространств Крейна и определить наиболее общие и естественные классы пространств и операторов, на которые эти конструктивные моменты распространяются. В [8] были определены основные категории пространств с внутренним произведением (ПВП) и изучены некоторые их свойства. В частности, были введены понятия *матричной категории* и *категории с квадратичным расщеплением*, а также рассмотрены примеры, иллюстрирующие естественность введённых определений. В данной работе мы приводим некоторые необходимые определения и результаты из [8].

Анализ последних достижений и публикаций (в том числе электронных), посвящённых теории категорий (см. [14]) и теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой (мы здесь опираемся главным образом на большой перечень работ из [16], списки публикаций на домашних страницах ведущих специалистов в этой области [15, 17, 22], а также на электронный архив [18]) позволяет сделать вывод, что задача, о которой говорилось выше, является *новой*; её перспективы связаны с приложениями теории *общих* пространств с индефинитной метрикой, намеченными ещё в [2, 13] и рассматриваемыми в последнее время (см., например, работу [21] и библиографию в ней).

Целью данной работы и дальнейших работ, которые предполагается провести по данному кругу вопросов, является построение и анализ категорий

пространств с внутренним произведением (в общем случае индефинитным), в которых осуществимо построение специальных классов матричных операторов, в частности элементарных ротаций (при естественном обобщении этого понятия на общий случай).

Данная работа посвящена исследованию некоторых свойств правильных банаховых пространств (п. б. п.) и операторов в них. А именно, мы показываем, что категория всех правильных банаховых пространств является категорией с квадратичным расщеплением (теорема 7). Последнее в силу результатов [8] означает существование элементарной ротации у любого линейного непрерывного оператора в п. б. п. (следствие 3).

Отметим вкратце некоторые особенности п. б. п. Интерес к изучению п. б. п. может быть обусловлен тем, что по своим свойствам п. б. п. весьма близки к гильбертовым пространствам. В частности, существует довольно развитая спектральная теория так называемых *дефинизируемых* операторов в п. б. п. (см. [10]), имеющая тесные связи с теорией спектральных по Данфорду операторов [5].

С другой стороны (см. следствия 1, 2), если исходное п. б. п. не является гильбертовым, то совокупность всех линейных ограниченных операторов, действующих в п. б. п. с канонической нормой, образует B^* -алгебру (в терминологии [9]), или *симметрическое кольцо* (в терминологии [6]), не являющуюся C^* -алгеброй (см. [9]), или *вполне симметрическим кольцом* (согласно [6]), что может послужить интересам и теории представлений.

1. Вспомогательные определения и результаты

1.1. Пространства с внутренним произведением

Мы вкратце приведём необходимые нам в дальнейшем сведения из теории общих ПВП. Более подробно с данной теорией можно ознакомиться по монографиям [1, 13]. Всё это касается и последующих разделов.

Пусть $\mathfrak{X}$ — комплексное линейное пространство. Отображение $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{X}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ называется *эрмитово-полуторалинейной формой* или *внутренним произведением* на $\mathfrak{X}$, если для любых $x, y, z \in \mathfrak{X}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} [y, x] &= \overline{[x, y]}, \\ [\alpha x, y] &= \alpha [x, y], \\ [x + y, z] &= [x, z] + [y, z]. \end{aligned}$$

$\mathfrak{X}$ в этом случае называется *пространством с внутренним произведением* (ПВП).

Пусть $\mathfrak{N}$ — произвольное подмножество пространства $\mathfrak{X}$. Множество

$$\mathfrak{N}^{[\perp]} := \{x \in \mathfrak{X} \mid \forall y \in \mathfrak{N} [x, y] = 0\}$$

называется *ортогональным дополнением* множества $\mathfrak{N}$. Для любого $\mathfrak{N}$ множество $\mathfrak{N}^{[\perp]}$ всегда является линеалом (т. е. линейно замкнутым множеством).

Говорят, что непустые множества $\mathfrak{N}, \mathfrak{M}$ из $\mathfrak{X}$ *ортогональны*, и записывают $\mathfrak{N} [\perp] \mathfrak{M}$, если $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}^{[\perp]}$ (или, что равносильно, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}^{[\perp]}$). Для любого подмножества $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{X}$ справедливо $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}^{[\perp][\perp]}$. Сумма $\mathfrak{N} + \mathfrak{M}$ называется *ортогональной*, если $\mathfrak{N} [\perp] \mathfrak{M}$. Ортогональная сумма множеств $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ обозначается $\mathfrak{N} [+] \mathfrak{M}$.

Подпространство $\mathfrak{X}_0 := \mathfrak{X} \cap \mathfrak{X}^{[\perp]}$ называется *изотропным* подпространством ПВП $\mathfrak{X}$. ПВП $\mathfrak{X}$ называется *невырожденным*, если $\mathfrak{X}_0 = \{0\}$. Имеет место следующее утверждение (см. [1, гл. 1, § 1], [13, гл. 1, лемма 5.2, следствие 5.3]).

Предложение 1. Пусть $\tilde{\mathfrak{X}} := \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_0$. На фактор-пространстве $\tilde{\mathfrak{X}}$ корректно определено внутреннее произведение

$$[\zeta, \eta]_{\tilde{\mathfrak{X}}} := [x, y]_{\mathfrak{X}},$$

где $\zeta, \eta \in \tilde{\mathfrak{X}}$, а $x \in \zeta, y \in \eta$ — некоторые представители. Пространство $\tilde{\mathfrak{X}}$ с внутренним произведением $[\cdot, \cdot]_{\tilde{\mathfrak{X}}}$ невырожденно.

Семейство полунорм $\{p_y\}_{y \in \mathfrak{X}}, p_y(x) := |[x, y]|, x \in \mathfrak{X}$, определяет на $\mathfrak{X}$ слабую топологию $\tau_{\mathfrak{X}}^0$, которая наделяет $\mathfrak{X}$ структурой локально выпуклого пространства. Слабая топология $\tau_{\mathfrak{X}}^0$ является хаусдорфовой тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X}$ невырожденно (см. [13, гл. 3]).

Локально выпуклая топология τ в ПВП $\mathfrak{X}$ называется *частичной мажорантой*, если для любого $y \in \mathfrak{X}$ функционал $\varphi_y, \varphi_y(x) := [x, y]$, τ -непрерывен. Слабая топология $\tau_{\mathfrak{X}}^0$ является частичной мажорантой; локально выпуклая топология τ является частичной мажорантой тогда и только тогда, когда $\tau_{\mathfrak{X}}^0 \leq \tau$ [13, гл. 3, теорема 2.1]. Топология τ в ПВП $\mathfrak{X}$ называется *допустимой*, если τ — частичная мажоранта и для любого τ -непрерывного функционала φ существует такой вектор $y \in \mathfrak{X}$, что $\varphi(x) := [x, y]$.

Предложение 2. Справедливы следующие утверждения.

1. Слабая топология $\tau_{\mathfrak{X}}^0$ является допустимой [13, гл. 3, теорема 5.1].
2. Если τ — допустимая топология в $\mathfrak{X}$, то для произвольного линеала $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{X}$ справедливо $\text{Clos}_{\tau} \mathfrak{L} = \mathfrak{L}^{[\perp][\perp]}$ [13, гл. 3, теорема 6.1].
3. Пусть τ — допустимая топология и $\mathfrak{L}$ — линеал в невырожденном пространстве $\mathfrak{X}$. Равенство $\mathfrak{L}^{[\perp]} = \{0\}$ имеет место тогда и только тогда, когда $\text{Clos}_{\tau} \mathfrak{L} = \mathfrak{X}$ [13, гл. 3, следствие 6.4].

Замечание. В силу пункта 2 предложения 1 замыкания линеалов в любой допустимой топологии совпадают, поэтому при записи оператора замыкания Clos мы часто будем опускать нижний индекс, соответствующий топологии.

1.2. Операторы в пространствах с внутренним произведением

Всюду в этой работе под словом «оператор» будем понимать *всюду определённый* линейный оператор; через $l(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ будет обозначаться множество всех

операторов, действующих из линейного пространства $\mathfrak{X}$ в линейное пространство $\mathfrak{Y}$ ($l(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ для краткости будет обозначаться через $l(\mathfrak{X})$).

Пусть $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ — ПВП. Оператор $T \in l(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ называется *сопрягаемым* (см. [7, 13]), если существует такой оператор $T' \in l(\mathfrak{Y}, \mathfrak{X})$, что

$$[Tx, y] = [x, T'y] \quad (x \in \mathfrak{X}, y \in \mathfrak{Y}).$$

Если $\mathfrak{X}$ — невырожденное ПВП, то T' определяется однозначно. В этом случае мы будем обозначать этот оператор через $T^\sharp$; $T^\sharp$ называется *сопряжённым* к оператору T . Если $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ — невырожденные ПВП, то для произвольного $T \in \text{adj}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$

$$\ker T^\sharp = R(T)^{[\perp]}. \quad (1)$$

Из (1) и пункта 3 предложения 2 следует, что

$$\text{Clos } R(T) = \mathfrak{Y} \iff \ker T^\sharp = \{0\}. \quad (2)$$

Множество всех сопрягаемых операторов из $l(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ обозначим через $\text{adj}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. Множество $\text{adj}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ является линейным пространством. Если $A \in \text{adj}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, $B \in \text{adj}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$, то $BA \in \text{adj}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$, причём если $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ невырождены, то $(BA)^\sharp = A^\sharp B^\sharp$. Отсюда, в частности, следует, что $\text{adj}(\mathfrak{X})$ при невырожденном $\mathfrak{X}$ является (комплексной) линейной алгеброй с инволюцией, порождаемой сопряжением операторов.

Оператор $U \in l(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ ($\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ не обязательно невырождены) называется *унитарным*, если U — биекция и для любых $x_1, x_2 \in \mathfrak{X}$ справедливо $[Ux_1, Ux_2]_{\mathfrak{Y}} = [x_1, x_2]_{\mathfrak{X}}$ (т. е. U — *изометрическая* биекция). Оператор $A \in \text{adj}(\mathfrak{X})$, где $\mathfrak{X}$ невырожденно, называется *самосопряжённым*, если $A^\sharp = A$.

Известен следующий результат [20, предложение 3.3].

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ — невырожденные ПВП, $\tau_{\mathfrak{X}}, \tau_{\mathfrak{Y}}$ — некоторые допустимые топологии соответственно в $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$. Тогда любой $(\tau_{\mathfrak{X}}, \tau_{\mathfrak{Y}})$ -непрерывный оператор T является сопрягаемым, причём оператор $T^\sharp$ $(\tau_{\mathfrak{Y}}^0, \tau_{\mathfrak{X}}^0)$ -непрерывен.

Обратно, нетрудно показать, что произвольный оператор из $\text{adj}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ (при этом $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ уже не обязательно невырождены) является $(\tau_{\mathfrak{X}}^0, \tau_{\mathfrak{Y}}^0)$ -непрерывным.

Множество всех $(\tau_{\mathfrak{X}}^0, \tau_{\mathfrak{Y}}^0)$ -непрерывных операторов из $l(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ обозначим через $\text{lc}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$.

1.3. Внешняя ортогональная сумма пространств с внутренним произведением

Пусть $\{\mathfrak{X}_k\}_{k \in \overline{1, n}}$ ($n \in \mathbb{N}$) — семейство ПВП. *Внешней ортогональной суммой* пространств $\mathfrak{X}_k$ будем называть внешнюю сумму этих пространств (т. е. декартово произведение $\prod_{k \in \overline{1, n}} \mathfrak{X}_k$ с покомпонентным сложением и умножением

на скаляр), наделённую внутренним произведением

$$[x, y] := \sum_{k \in \overline{1, n}} [x_k, y_k]_{\mathfrak{X}_k}, \quad x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle, \quad y = \langle y_1, \dots, y_n \rangle.$$

Внешнюю ортогональную сумму будем обозначать через $\overset{e}{[+]}_{k \in \overline{1, n}} \mathfrak{X}_k$. Легко убедиться, что ПВП $\overset{e}{[+]}_{k \in \overline{1, n}} \mathfrak{X}_k$ является невырожденным тогда и только тогда, когда каждое $\mathfrak{X}_k$ невырождено. Оператор

$$\pi_{\mathfrak{X}_i} : \overset{e}{[+]}_{k \in \overline{1, n}} \mathfrak{X}_k \rightarrow \mathfrak{X}_i, \quad \pi_{\mathfrak{X}_i} \langle x_1, \dots, x_n \rangle := x_i \quad (i \in \overline{1, n}),$$

называется *проектированием* на $\mathfrak{X}_i$, а оператор

$$\nu_{\mathfrak{X}_i} : \mathfrak{X}_i \rightarrow \overset{e}{[+]}_{k \in \overline{1, n}} \mathfrak{X}_k, \quad \nu_{\mathfrak{X}_i} x := \langle 0, \dots, 0, x, 0, \dots, 0 \rangle \quad (i \in \overline{1, n}),$$

вложением $\mathfrak{X}_i$ в $\overset{e}{[+]}_{k \in \overline{1, n}} \mathfrak{X}_k$. Справедливо следующее простое утверждение.

Предложение 3. Операторы $\pi_{\mathfrak{X}_i}$, $\nu_{\mathfrak{X}_i}$ сопрягаемы и в случае невырожденности пространств $\mathfrak{X}_k$ ($k \in \overline{1, n}$) связаны соотношением

$$\pi_{\mathfrak{X}_k}^\# = \nu_{\mathfrak{X}_k} \quad (k \in \overline{1, n}).$$

2. Правильные банаховы пространства

2.1. Определения

Всюду в данной работе под $S_{\mathfrak{X}}(x_0, r)$ и $B_{\mathfrak{X}}(x_0, r)$ ($x_0 \in \mathfrak{X}$, $r > 0$) понимаются соответственно сфера и замкнутый шар радиуса r с центром в x_0 в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$. Если $x_0 = 0$, то будем использовать более короткие обозначения $S_{\mathfrak{X}}(r)$ и $B_{\mathfrak{X}}(r)$.

Топология τ на ПВП $\mathfrak{X}$ называется *мажорантой* внутреннего произведения $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{X}}$, если

- 1) τ локально выпуклая;
- 2) внутреннее произведение $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{X}}$ τ -непрерывно по совокупности переменных (см. [13, гл. 4, раздел 1]).

Необходимым и достаточным условием существования мажоранты является существование *метризуемой* частичной мажоранты [13, гл. 4, теорема 2.1]. Существуют пространства с внутренним произведением, не допускающим мажоранты [13, гл. 4, пример 2.2]. Элементарно выводится следующее утверждение.

Предложение 4. Норма $\|\cdot\|$ в ПВП $\mathfrak{X}$ порождает мажоранту τ тогда и только тогда, когда существует такое $b > 0$, что для всех $x, y \in \mathfrak{X}$

$$|[x, y]_{\mathfrak{X}}| \leq b \|x\| \|y\|.$$

Если $\|\cdot\|$ порождает мажоранту, то обозначим

$$b_{\mathfrak{X}} := \inf \{ b > 0 \mid \forall x, y \in \mathfrak{X} \quad |[x, y]_{\mathfrak{X}}| \leq b \|x\| \|y\| \}.$$

Пусть мажоранта τ порождается нормой $\|\cdot\|$. Положим

$$\sigma_{\mathfrak{X}}(r, x) := \sup\{|[x, y]_{\mathfrak{X}}| \mid y \in S_{\mathfrak{X}}(r)\}.$$

Выражение $\sigma_{\mathfrak{X}}(1, x)$ будем обозначать просто через $\sigma_{\mathfrak{X}}(x)$.

Предложение 5. *Имеют место следующие свойства ($r > 0$, $x \in \mathfrak{X}$).*

1. $\sigma_{\mathfrak{X}}(r, x) = \sup\{|[x, y]_{\mathfrak{X}}| \mid y \in B_{\mathfrak{X}}(r)\}$.
2. $\sigma_{\mathfrak{X}}(r, x) = r\sigma_{\mathfrak{X}}(x)$.
3. $\sigma_{\mathfrak{X}}(\cdot)$ является нормой на $\mathfrak{X}$.

Норма $\sigma_{\mathfrak{X}}(\cdot)$ называется *полярной* нормы $\|\cdot\|$. Норма $\|\cdot\|$ называется *самополярной*, если $\sigma_{\mathfrak{X}}(x) = \|x\|$ для всех $x \in \mathfrak{X}$. Топология τ в этом случае также называется самополярной (см. [13, гл. 3]). Известен следующий результат [13, гл. 4, лемма 4.1].

Теорема 2. *Пусть τ — мажоранта в ПВП $\mathfrak{X}$, порождённая некоторой нормой. Тогда существует самополярная мажоранта $\tau' \leq \tau$, порождённая некоторой самополярной нормой.*

Банахово пространство называется *правильным* [10, 11], если $\|\cdot\|_{\mathfrak{X}}$ определяет мажоранту на $\mathfrak{X}$ и норма $\|\cdot\|_{\mathfrak{X}}$ подчинена своей поляре, т. е. существует такое $c > 0$, что

$$\sigma_{\mathfrak{X}}(x) \geq c\|x\|_{\mathfrak{X}} \quad (x \in \mathfrak{X}).$$

Введём в этом случае обозначение

$$c_{\mathfrak{X}} := \sup\{c > 0 \mid \forall x \in \mathfrak{X} \sigma_{\mathfrak{X}}(x) \geq c\|x\|_{\mathfrak{X}}\}.$$

Самополярная норма в п. б. п. также называется *канонической*. Очевидно, что

$$c_{\mathfrak{X}} \leq b_{\mathfrak{X}}.$$

Таким образом, норма является канонической тогда и только тогда, когда $c_{\mathfrak{X}} = b_{\mathfrak{X}} = 1$.

2.2. О сильной топологии в правильном банаховом пространстве

Здесь мы покажем, что сильная топология в п. б. п. обладает очень важным свойством: она порождает то же множество непрерывных линейных функционалов, что и слабая топология $\tau_{\mathfrak{X}}^0$. Этот факт сближает п. б. п. с гильбертовыми пространствами.

Лемма 1. *Пусть $\tau_{\mathfrak{X}}^s$ — сильная топология в п. б. п. $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{L}$ — линейал в $\mathfrak{X}$. Если $\text{Clos}_{\tau_{\mathfrak{X}}^0} \mathfrak{L} = \mathfrak{X}$, то и $\text{Clos}_{\tau_{\mathfrak{X}}^s} \mathfrak{L} = \mathfrak{X}$.*

Доказательство. Допустим противное: для некоторого x_0 из $\mathfrak{X}$

$$x_0 \notin \text{Clos}_{\tau_{\mathfrak{X}}^s} \mathfrak{L}. \quad (3)$$

Тогда существует некоторый шар $B_{\mathfrak{X}}(x_0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, лежащий вне $\mathfrak{L}$:

$$B_{\mathfrak{X}}(x_0, \varepsilon) \cap \text{Clos}_{\tau_{\mathfrak{X}}^s} \mathfrak{L} = \emptyset. \quad (4)$$

Рассмотрим функционал

$$\iota(x, y) := \inf\{|[x - l, y]_{\mathfrak{X}}| \mid l \in \mathfrak{L}\}.$$

Из условия $\tau_{\mathfrak{X}}^0$ -плотности линеала $\mathfrak{L}$ следует, что

$$\iota - \text{нулевой функционал}. \quad (5)$$

С другой стороны, неотрицательный функционал q ,

$$q(x) := \inf\{\|x - l\|_{\mathfrak{X}} \mid l \in \mathfrak{L}\},$$

не является нулевым согласно (4), так как $q(x_0) \geq \varepsilon$. Тогда по (5) допущение (3) приводит к противоречию:

$$\begin{aligned} 0 \leq q(x) &= \inf\{\|x - l\|_{\mathfrak{X}} \mid l \in \mathfrak{L}\} \leq \\ &\leq c_{\mathfrak{X}}^{-1} \inf\{\sup\{|[x - l, y]_{\mathfrak{X}}| \mid y \in S_{\mathfrak{X}}(1)\} \mid l \in \mathfrak{L}\} \leq \\ &\leq c_{\mathfrak{X}}^{-1} \sup\{\inf\{|[x - l, y]_{\mathfrak{X}}| \mid l \in \mathfrak{L}\} \mid y \in S_{\mathfrak{X}}(1)\} = \\ &= c_{\mathfrak{X}}^{-1} \sup\{\iota(x, y) \mid y \in S_{\mathfrak{X}}(1)\} = 0 \end{aligned}$$

($x \in \mathfrak{X}$). □

Теорема 3. *Сильная топология п. б. п. является допустимой.*

Доказательство. Пусть φ — ненулевой функционал, непрерывный в сильной топологии пространства $\mathfrak{X}$ (т. е. $\varphi \in \mathfrak{X}^*$). Тогда, как известно, $\ker \varphi$ — $\tau_{\mathfrak{X}}^s$ -замкнутый линеал, и для некоторого $e \in \mathfrak{X}$

$$\mathfrak{X} = \ker \varphi \dot{+} \text{Lin}\{e\} \quad (6)$$

(Lin — линейная оболочка). Покажем, что ядро $\ker \varphi$ — невырожденный линеал. Рассмотрим предварительно множество

$$M_e(r) := \{|\alpha|r \mid (\alpha \in \mathbb{C}) \wedge (x \in \mathfrak{X}) \wedge (x + \alpha e \in B_{\mathfrak{X}}(1))\}, \quad r \in \mathbb{R}_+.$$

Легко видеть, что $M_e(r) = \mathbb{R}_+$ (множество всех положительных вещественных чисел). Действительно, пусть $r' \in \mathbb{R}_+$. Тогда, полагая $x := -\frac{r'}{r}e$, получим $x + \frac{r'}{r}e = 0 \in B_{\mathfrak{X}}(1)$, т. е. $r' = |\frac{r'}{r}|r \in M_e(r)$.

Итак, допустим, что

$$\ker \varphi - \text{вырожденный линеал} \quad (7)$$

и x_0 — ненулевой изотропный вектор в $\ker \varphi$. Тогда $[x_0, e]_{\mathfrak{X}} \neq 0$, поскольку равенство нулю в силу (6) противоречило бы невырожденности $\mathfrak{X}$. Предположение (7) приводит к противоречию:

$$\begin{aligned} b_{\mathfrak{X}}\|x_0\| &\geq \sup\{|[x_0, x + \alpha e]_{\mathfrak{X}}| \mid (\alpha \in \mathbb{C}) \wedge (x \in \mathfrak{X}) \wedge (x + \alpha e \in B_{\mathfrak{X}}(1))\} = \\ &= \sup\{|\alpha| |[x_0, e]_{\mathfrak{X}}| \mid (\alpha \in \mathbb{C}) \wedge (x \in \mathfrak{X}) \wedge (x + \alpha e \in B_{\mathfrak{X}}(1))\} = \sup M_e(|[x_0, e]_{\mathfrak{X}}|). \end{aligned}$$

Из равенства (6), невырожденности $\ker \varphi$ и леммы 1 следует, что $(\ker \varphi)^{[\perp]} \neq \{0\}$. Действительно, в противном случае согласно пункту 3 предложения 2 $\text{Clos}_{\tau_{\mathfrak{X}}^0} \ker \varphi = \mathfrak{X}$, а это влечёт $\text{Clos}_{\tau_{\mathfrak{X}}^s} \ker \varphi = \mathfrak{X}$, что противоречит (6).

Пусть $g \in (\ker \varphi)^{[\perp]} \setminus \{0\}$. Тогда из (6) следует равенство

$$\mathfrak{X} = \ker \varphi [\dot{+}] \text{Lin}\{g\}. \quad (8)$$

В силу (8) $[g, g] \neq 0$ (иначе g был бы ненулевым изотропным вектором $\mathfrak{X}$), а так как φ — ненулевой функционал, то и $\varphi(g) \neq 0$. Поэтому можно выбрать такое комплексное число β , что $|\beta| = \frac{|\varphi(g)|}{|[g, g]|}$, $\exp(i \arg \beta) = \frac{[g, g]}{|[g, g]|} \frac{\varphi(g)}{|\varphi(g)|}$. Очевидно, $|\beta|^2 [g, g] = \beta \varphi(g)$. Полагая $y_0 := \beta g$, получим

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(x_0 + \alpha y_0) = \alpha \varphi(y_0) = \alpha \beta \varphi(g) = \alpha |\beta|^2 [g, g] = \\ &= [x_0 + \alpha \beta g, \beta g] = [x_0 + \alpha y_0, y_0] = [x, y_0], \end{aligned}$$

где $x = x_0 + \alpha y_0$ — разложение вектора x относительно (8).

Если x — нулевой функционал, то, очевидно, $\varphi(x) = [x, 0]$ ($x \in \mathfrak{X}$). $\square$

2.3. Об одном классе правильных банаховых пространств

Пусть $\mathfrak{Y}$ — произвольное комплексное линейное пространство. Определим комплексное линейное пространство $\tilde{\mathfrak{Y}}$ следующим образом: как множества $\mathfrak{Y}$ и $\tilde{\mathfrak{Y}}$ совпадают, сложение векторов на $\tilde{\mathfrak{Y}}$ то же, что и на $\mathfrak{Y}$, а умножение на скаляр задаётся правилом

$$\lambda \cdot y := \bar{\lambda} \cdot y \quad (y \in \mathfrak{Y}).$$

Очевидно, $\mathfrak{Y} = \tilde{\mathfrak{Y}}$ (данное равенство следует понимать как равенство алгебраических систем); если $\mathfrak{Y}$ — нормированное пространство, то $\tilde{\mathfrak{Y}}$ также будет нормированным пространством с нормой

$$\|y\|_{\tilde{\mathfrak{Y}}} := \|y\|_{\mathfrak{Y}} \quad (y \in \mathfrak{Y}),$$

причём $\tilde{\mathfrak{Y}}$ полно тогда и только тогда, когда полно $\mathfrak{Y}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — банахово пространство, $\mathfrak{X}^*$ — сопряжённое пространство и $\mathfrak{G} := \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}^*$ — прямая сумма банаховых пространств $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}^*$ с нормой

$$\|\langle x, f \rangle\|_{\mathfrak{G}} := \|x\|_{\mathfrak{X}} + \|f\|_{\mathfrak{X}^*} \quad (x \in \mathfrak{X}, f \in \mathfrak{X}^*).$$

Очевидно, $\mathfrak{G}$ является полным пространством относительно $\|\cdot\|_{\mathfrak{G}}$.

Введём на $\mathfrak{G}$ внутреннее произведение

$$[\langle x, f \rangle, \langle y, g \rangle]_{\mathfrak{G}} := i(g(x) - \overline{f(y)})$$

(прямой проверкой нетрудно убедиться, что форма $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{G}}$ действительно удовлетворяет всем аксиомам внутреннего произведения). Норма $\|\cdot\|_{\mathfrak{G}}$ является мажорантой внутреннего произведения $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{G}}$:

$$\begin{aligned} |[\langle x, f \rangle, \langle y, g \rangle]_{\mathfrak{G}}| &\leq |g(x)| + |f(y)| \leq \|g\|_{\mathfrak{X}^*} \|x\|_{\mathfrak{X}} + \|f\|_{\mathfrak{X}^*} \|y\|_{\mathfrak{X}} \leq \\ &\leq (\|x\|_{\mathfrak{X}} + \|f\|_{\mathfrak{X}^*})(\|y\|_{\mathfrak{X}} + \|g\|_{\mathfrak{X}^*}) = \|\langle x, f \rangle\|_{\mathfrak{G}} \cdot \|\langle y, g \rangle\|_{\mathfrak{G}}. \end{aligned} \quad (9)$$

По классическому следствию из теоремы Хана—Банаха для каждого $x \in \mathfrak{X}$ существует такой функционал $g_x \in S_{\mathfrak{X}^*}(1)$, что $g_x(x) = \|x\|_{\mathfrak{X}}$. Кроме того, для любого функционала $f \in \mathfrak{X}^*$ можно подобрать такую последовательность $\{y_f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ из $S_{\mathfrak{X}}(1)$, что $-f(y_f^n) \in \mathbb{R}_+$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_f^n) = -\|f\|_{\mathfrak{X}^*}$. Поэтому с учётом предложения 5 и равенства $\|g_x\|_{\mathfrak{X}^*} + \|y_f^n\|_{\mathfrak{X}} = 2$ (т. е. $\langle y_f^n, g_x \rangle \in S_{\mathfrak{G}}(2)$) придём к цепочке

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathfrak{G}}(\langle x, f \rangle) &= \frac{1}{2} \sigma_{\mathfrak{G}}(2, \langle x, f \rangle) \geq \frac{1}{2} \sup\{|\langle [x, f], \langle y_f^n, g_x \rangle \rangle_{\mathfrak{G}}| \mid n \in \mathbb{N}\} = \\ &= \frac{1}{2} \sup\{g_x(x) - f(y_f^n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \frac{1}{2} (\|x\|_{\mathfrak{X}} + \|f\|_{\mathfrak{X}^*}) = \frac{1}{2} \|\langle x, f \rangle\|_{\mathfrak{G}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Неравенства (9) и (10) означают, что $\mathfrak{G}$ — п. б. п., причём $b_{\mathfrak{G}} \leq 1$, $c_{\mathfrak{G}} \geq \frac{1}{2}$.

Замечание. Нетрудно видеть, что все рассуждения, проведённые выше, остаются в силе, если определить $\mathfrak{G} := \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$, где $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}^*$ — подпространство, удовлетворяющее условию

$$\exists r > 0 \forall x \in \mathfrak{X} \sup\{|g(x)| \mid g \in S_{\mathfrak{X}^*}(1)\} \geq r \|x\|_{\mathfrak{X}}. \quad (11)$$

Например, если $\mathfrak{X} = l_1$, то, как известно, $\mathfrak{X}^*$ изометрически изоморфно пространству m всех ограниченных последовательностей. В данном случае, как показывают элементарные рассуждения с финитными последовательностями, в качестве пространства $\mathfrak{Y}$, удовлетворяющего условию (11), можно выбрать образ пространства c_0 при изометрическом изоморфизме m и $\mathfrak{X}^*$.

2.4. Некоторые свойства правильных банаховых пространств и операторов в них

Здесь мы рассматриваем некоторые свойства п. б. п. и операторов в них, позволяющие определить основные черты класса п. б. п. с позиции простых категориальных соображений. Эти свойства присущи не только классу п. б. п., но и другим классам ПВП, что позволяет определить основные типы категорий, естественно объединяющих в себе основные черты многих классов ПВП.

Предложение 6. Пусть $\{\mathfrak{X}_k\}_{k \in \overline{1, n}}$ ($n \in \mathbb{N}$) — п. б. п. Тогда на $\mathfrak{X} := \overset{e}{[+]}_{k \in \overline{1, n}} \mathfrak{X}_k$ можно ввести структуру п. б. п.

Доказательство. Определим на $\mathfrak{X}$ норму

$$\|x\|_{\mathfrak{X}} := \max\{\|x_k\|_{\mathfrak{X}_k} \mid k \in \overline{1, n}\}, \quad x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \mathfrak{X}. \quad (12)$$

Очевидно, $\mathfrak{X}$ — банахово пространство относительно введённой нормы. Тогда

$$\begin{aligned} |[x, y]_{\mathfrak{X}}| &= \left| \sum_{k \in \overline{1, n}} [x_k, y_k]_{\mathfrak{X}_k} \right| \leq \sum_{k \in \overline{1, n}} |[x_k, y_k]_{\mathfrak{X}_k}| \leq \\ &\leq \sum_{k \in \overline{1, n}} b_{\mathfrak{X}_k} \|x_k\|_{\mathfrak{X}_k} \|y_k\|_{\mathfrak{X}_k} \leq nb \|x\|_{\mathfrak{X}} \|y\|_{\mathfrak{X}}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $b := \max\{b_{\mathfrak{X}_k} \mid k \in \overline{1, n}\}$. Далее, пусть $\nu_{\mathfrak{X}_k}: \mathfrak{X}_k \rightarrow \mathfrak{X}$ — естественное вложение ($k \in \overline{1, n}$). Тогда очевидно, что $\|\nu_{\mathfrak{X}_k} y\|_{\mathfrak{X}} = \|y\|_{\mathfrak{X}_k}$ ($y \in \mathfrak{X}_k$), откуда $\nu_{\mathfrak{X}_k} S_{\mathfrak{X}_k}(1) \subseteq S_{\mathfrak{X}}(1)$. Поэтому, учитывая равенство $[x, \nu_{\mathfrak{X}_k} y]_{\mathfrak{X}} = [x_k, y]_{\mathfrak{X}_k}$, получим цепочку

$$\sigma_{\mathfrak{X}}(x) \geq \sup\{|[x, \nu_{\mathfrak{X}_k} y]_{\mathfrak{X}}| \mid y \in S_{\mathfrak{X}_k}(1)\} = \sigma_{\mathfrak{X}_k}(x_k) \geq c_{\mathfrak{X}_k} \|x_k\|_{\mathfrak{X}_k} \quad (k \in \overline{1, n}).$$

Таким образом,

$$\sigma_{\mathfrak{X}}(x) \geq c \|x_k\|_{\mathfrak{X}_k} \quad (k \in \overline{1, n}), \quad (14)$$

где $c := \min\{c_{\mathfrak{X}_k} \mid k \in \overline{1, n}\}$. Из (14) следует неравенство

$$\sigma_{\mathfrak{X}}(x) \geq c \|x\|_{\mathfrak{X}}. \quad (15)$$

Неравенства (13), (15) означают, что $\mathfrak{X}$ является п. б. п., причём выполняются оценки

$$c_{\mathfrak{X}} \geq \min\{c_{\mathfrak{X}_k} \mid k \in \overline{1, n}\}, \quad b_{\mathfrak{X}} \leq n \max\{b_{\mathfrak{X}_k} \mid k \in \overline{1, n}\}. \quad \square$$

Предложение 7. Пусть $\mathfrak{X}$ — п. б. п., $\mathfrak{Y}$ — некоторое ПВП, $U \in l(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ — унитарный оператор. Тогда на $\mathfrak{Y}$ можно ввести структуру п. б. п. При этом U является непрерывным оператором относительно соответствующих сильных топологий.

Доказательство. Положим $\|y\|_{\mathfrak{Y}} := \|U^{-1}y\|_{\mathfrak{X}}$, $y \in \mathfrak{Y}$. Элементарная проверка показывает, что отображение $\|\cdot\|_{\mathfrak{Y}}$ является нормой. Справедливы неравенства (заметим, что $g \in S_{\mathfrak{Y}}(1)$ тогда и только тогда, когда $U^{-1}g \in S_{\mathfrak{X}}(1)$)

$$\begin{aligned} |[y_1, y_2]_{\mathfrak{Y}}| &= |[U^{-1}y_1, U^{-1}y_2]_{\mathfrak{X}}| \leq b_{\mathfrak{X}} \|U^{-1}y_1\|_{\mathfrak{X}} \|U^{-1}y_2\|_{\mathfrak{X}} = b_{\mathfrak{X}} \|y_1\|_{\mathfrak{Y}} \|y_2\|_{\mathfrak{Y}}, \\ \sigma_{\mathfrak{Y}}(y) &= \sup\{|[U^{-1}y, U^{-1}g]_{\mathfrak{X}}| \mid U^{-1}g \in S_{\mathfrak{X}}(1)\} \geq c_{\mathfrak{X}} \|U^{-1}y\|_{\mathfrak{X}} = c_{\mathfrak{X}} \|y\|_{\mathfrak{Y}}. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства осталось показать, что $\mathfrak{Y}$ полно относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathfrak{Y}}$. Пусть $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — фундаментальная последовательность относительно $\|\cdot\|_{\mathfrak{Y}}$. Тогда, очевидно, $\{U^{-1}y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ фундаментальна относительно $\|\cdot\|_{\mathfrak{X}}$. Пусть $x_0 := \lim_{n \rightarrow \infty} U^{-1}y_n$. Положим $y_0 := Ux_0$. Тогда

$$\|y_n - y_0\|_{\mathfrak{Y}} = \|U^{-1}(y_n - y_0)\|_{\mathfrak{X}} = \|U^{-1}y_n - x_0\|_{\mathfrak{X}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Кроме того, равенство $\|Ux\|_{\mathfrak{Y}} = \|x\|_{\mathfrak{X}}$ ($x \in \mathfrak{X}$) показывает, что U — унитарный оператор и относительно норм, следовательно, U сильно непрерывен. $\square$

Предложение 8. Пусть $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ — п. б. п., $T \in B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ ($B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ — множество всех ограниченных операторов, действующих из $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$). Тогда T сопрягаем и $T^{\sharp} \in B(\mathfrak{Y}, \mathfrak{X})$. При этом

$$\|T^{\sharp}\| \leq \frac{b_{\mathfrak{Y}}}{c_{\mathfrak{X}}} \|T\|. \quad (16)$$

Доказательство. В силу теорем 1, 3 оператор T сопрягаем. Для $x \in S_{\mathfrak{X}}(1)$

$$|[y, Tx]_{\mathfrak{Y}}| \leq b_{\mathfrak{Y}} \|y\|_{\mathfrak{Y}} \|Tx\|_{\mathfrak{Y}} \leq b_{\mathfrak{Y}} \|y\|_{\mathfrak{Y}} \|T\|. \quad (17)$$

Кроме того,

$$\sigma_{\mathfrak{X}}(T^{\sharp}y) \geq c_{\mathfrak{X}}\|T^{\sharp}y\|. \quad (18)$$

Из (17) и (18) получаем

$$c_{\mathfrak{X}}\|T^{\sharp}y\|_{\mathfrak{X}} \leq \sigma_{\mathfrak{X}}(T^{\sharp}y) = \sup\{|[y, Tx]_{\mathfrak{Y}}| \mid x \in S_{\mathfrak{X}}(1)\} \leq b_{\mathfrak{Y}}\|y\|_{\mathfrak{Y}}\|T\|,$$

откуда следует сильная непрерывность T и неравенство (16). $\square$

Следствие 1. Если нормы $\|\cdot\|_{\mathfrak{X}}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{Y}}$ являются каноническими, то $\|T^{\sharp}\| = \|T\|$.

Следствие 2. Если $\mathfrak{X}$ — п. б. п. с канонической нормой $\|\cdot\|_{\mathfrak{X}}$, то $B(\mathfrak{X})$ — B^* -алгебра (с единицей).

Предложение 9. Пусть $\{\mathfrak{X}_k\}_{k \in \overline{1, n}}$ ($n \in \mathbb{N}$) — п. б. п., на $\mathfrak{X} := \bigoplus_{k \in \overline{1, n}} \mathfrak{X}_k$ задана структура п. б. п. из предложения 6. Тогда $\nu_{\mathfrak{X}_k} \in B(\mathfrak{X}_k, \mathfrak{X})$.

Доказательство. Пусть $x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \in S_{\mathfrak{X}}(1)$, $y \in \mathfrak{X}_k$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{X}}$ — норма (12). Тогда

$$|[\nu_{\mathfrak{X}_k}y, x]_{\mathfrak{X}}| = |[y, x_k]_{\mathfrak{X}_k}| \leq b_{\mathfrak{X}_k}\|y\|_{\mathfrak{X}_k}\|x\|_{\mathfrak{X}_k} \leq b_{\mathfrak{X}_k}\|y\|_{\mathfrak{X}_k},$$

откуда

$$b_{\mathfrak{X}_k}\|y\|_{\mathfrak{X}_k} \geq \sigma_{\mathfrak{X}}(\nu_{\mathfrak{X}_k}y) \geq c_{\mathfrak{X}}\|\nu_{\mathfrak{X}_k}y\|_{\mathfrak{X}}.$$

Таким образом,

$$\|\nu_{\mathfrak{X}_k}\| \leq \frac{b_{\mathfrak{X}_k}}{c_{\mathfrak{X}}}. \quad \square$$

3. Категории пространств с внутренним произведением

3.1. Некоторые определения и примеры

Здесь мы вкратце рассмотрим необходимые нам определения из теории категорий. Для более полного ознакомления следует обратиться к ставшей классической литературе [3, 4, 19] (см. также [14]).

Напомним, что тройка $\mathcal{K} = \langle \mathfrak{O}, \mathfrak{A}, \circ \rangle$, где $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{A}$ — некоторые совокупности предметов (классы или множества), $\circ$ — (частичная) бинарная операция на $\mathfrak{A}$, называется *категорией*, если определены функции $\eta: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{O}^2$, $\eta(f) = \langle \text{dom } f, \text{cod } f \rangle$, $f \in \mathfrak{A}$, и $\mathbb{I}: \mathfrak{O} \rightarrow \mathfrak{A}$ (будем обозначать $1_a := \mathbb{I}(a)$, $a \in \mathfrak{O}$), причём выполняются следующие условия:

- 1) предмет $g \circ f$ определён тогда и только тогда, когда $\text{cod } f = \text{dom } g$;
- 2) $\circ$ — ассоциативная операция;
- 3) для любого b из $\mathfrak{O}$ и для любых f, g из $\mathfrak{A}$, таких что $\text{cod } f = \text{dom } g = b$,

$$1_b \circ f = f, \quad g \circ 1_b = g.$$

Предметы совокупностей $\mathfrak{O}$ и $\mathfrak{A}$ называются соответственно *объектами* и *стрелками* (либо *морфизмами*; здесь мы придерживаемся терминологии [4, 19]) категории $\mathcal{K}$. Объекты $\text{dom } f$ и $\text{cod } f$ называются соответственно *началом* и *концом* стрелки f . Стрелка $g \circ f$ называется *композицией* стрелок f и g , а 1_b — *единичной* стрелкой объекта b .

Классы $\mathfrak{O}$ и $\mathfrak{A}$ относительно категории $\mathcal{K}$ мы будем обозначать через $\text{Obj}(\mathcal{K})$ и $\text{Ar}(\mathcal{K})$ соответственно. Пусть $a, b \in \text{Obj}(\mathcal{K})$. Через $\mathcal{K}(a, b)$ будет обозначаться совокупность всех стрелок категории $\mathcal{K}$ с началом a и концом b . Для краткости $\mathcal{K}(a, a)$ будем обозначать через $\mathcal{K}(a)$.

Категория $\mathcal{C}$ называется *подкатегорией* категории $\mathcal{K}$, если

- 1) $\text{Obj}(\mathcal{C}) \subseteq \text{Obj}(\mathcal{K})$,
- 2) для любых объектов a, b категории $\mathcal{C}$ справедливо $\mathcal{C}(a, b) \subseteq \mathcal{K}(a, b)$.

При этом пишут $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$.

Приведём здесь вкратце описание категорий, введённых в [8].

IPS (inner product spaces, ПВП). $\text{Obj}(\mathbf{IPS})$ — класс всех ПВП. $\text{Ar}(\mathbf{IPS})$ — класс всех операторов, действующих в ПВП, непрерывных в слабой топологии, т. е. для $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \text{Obj}(\mathbf{IPS})$ $\mathbf{IPS}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) := \text{lc}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$.

Adj (adjointable operators, сопрягаемые операторы). $\text{Obj}(\mathbf{Adj})$ — класс всех ПВП. Для $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \text{Obj}(\mathbf{Adj})$ $\mathbf{Adj}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) := \text{adj}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, т. е. стрелками **Adj** являются сопрягаемые операторы в ПВП.

NDCont (nondegenerated spaces, continuous operators, невырожденные пространства, непрерывные операторы). $\text{Obj}(\mathbf{NDCont})$ — класс всех невырожденных ПВП. Стрелки те же, что и у **Adj**.

RegB (regular Banach spaces, правильные банаховы пространства). $\text{Obj}(\mathbf{RegB})$ — класс всех правильных банаховых пространств. Для $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \text{Obj}(\mathbf{RegB})$ $\mathbf{RegB}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) := B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$.

Kr (Krein spaces, пространства Крейна). $\text{Obj}(\mathbf{Kr})$ — класс всех пространств Крейна. Для $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \text{Obj}(\mathbf{Kr})$ $\mathbf{Kr}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) := B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$.

Hilb (Hilbert spaces, гильбертовы пространства). $\text{Obj}(\mathbf{Hilb})$ — класс всех гильбертовых пространств. Для $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \text{Obj}(\mathbf{Hilb})$ $\mathbf{Hilb}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) := B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$.

3.2. Матричные категории

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторая подкатегория **NDCont**. Категорию $\mathcal{K}$ назовём *матричной*, если она удовлетворяет следующим аксиомам (мы отождествляем все нулевые подпространства в классе всех линейных пространств).

(о.1) $\{0\} \in \text{Obj}(\mathcal{K})$ (нулевое пространство должно быть объектом матричной категории).

(о.2) Для произвольной совокупности $\{\mathfrak{X}_k\}_{k \in \overline{1, n}}$ ($n \in \mathbb{N}$) из $\text{Obj}(\mathcal{K})$ $\left[\begin{smallmatrix} \text{e} \\ + \\ k \in \overline{1, n} \end{smallmatrix} \right] \mathfrak{X}_k \in \text{Obj}(\mathcal{K})$ (т. е. категория $\mathcal{K}$ замкнута относительно образования внешних ортогональных сумм).

- (о.3) Для любого $\mathfrak{X} \in \text{Obj}(\mathcal{K})$ и любого ПВП $\mathfrak{Y}$, такого что существует унитарный оператор $U \in \text{I}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, верно $\mathfrak{Y} \in \text{Obj}(\mathcal{K})$ и $U \in \mathcal{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ (в данной аксиоме постулируется «исключительная способность» унитарных операторов индуцировать объекты и стрелки).
- (а.1) Для любых $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \text{Obj}(\mathcal{K})$ $\mathcal{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ — линейное пространство.
- (а.2) Для любых $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \text{Obj}(\mathcal{K})$ и любого $T \in \mathcal{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ $T^\sharp \in \mathcal{K}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{X})$ (категория $\mathcal{K}$ замкнута относительно сопряжения операторов—стрелок $\mathcal{K}$).
- (а.3) Для любой системы $\{\mathfrak{X}_k\}_{k \in \overline{1, n}}$ объектов $\mathcal{K}$ любое естественное вложение $\nu_{\mathfrak{X}_k} : \mathfrak{X}_k \rightarrow \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X} = \bigoplus_{k \in \overline{1, n}} \mathfrak{X}_k$, — стрелка $\mathcal{K}$.

Здесь мы приведём без доказательства утверждение, иллюстрирующее содержательность введенных выше аксиом. Полное доказательство будет проведено ниже для категории **RegB** (заметим, что для категорий **Kr** и **Hilb** аксиомы (о.1)—(о.3), (а.1)—(а.3) являются категорной переформулировкой хорошо известных фактов).

Теорема 4. Категории **NDCont**, **RegB**, **Kr**, **Hilb** являются матричными категориями.

Замечание. Из аксиом (а.1) и (а.2) следует, что для любого объекта $\mathfrak{X}$ категории $\mathcal{K}$ $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$ — комплексная алгебра с инволюцией, порождаемой сопряжением операторов.

Замечание. Из аксиом (о.1), (о.2), (а.2) и предложения 3 следует, что любой матричный оператор, построенный из стрелок матричной категории, является стрелкой той же категории, т. е. любая матричная категория замкнута относительно образования матричных операторов.

3.3. Разложение Богнара—Крамли

Пусть A — самосопряжённый оператор в невырожденном ПВП $\mathfrak{X}$.

Определение 1. Разложением Богнара—Крамли оператора A назовём представление оператора A в форме

$$C^\sharp C = A, \quad (19)$$

где $C \in \text{adj}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, а $\mathfrak{Y}$ — некоторое невырожденное ПВП (ср. [12, 13, 16]). Оператор C назовём *квадратичным расщеплением* самосопряжённого оператора A .

Разложение Богнара—Крамли является эффективным обобщением *полярного представления* самосопряжённого оператора в гильбертовом пространстве (т. е. представления самосопряжённого оператора A в виде $A = J_A |A| = |A| J_A$, где J_A — гильбертово унитарный и самосопряжённый оператор, *знак* A , $|A| := \sqrt{A^2}$ — *модуль* оператора A) и тесно связано с существованием самополярных (канонических) норм (см. далее доказательство теоремы 6). Отметим, что по своей теоретической глубине эти вопросы равносильны спектральной теории

самосопряжённых операторов, так как известно, что спектральную функцию легко построить, используя конструкцию модуля самосопряжённого оператора (ср. [2, с. 119, замечание 2]).

Основной мотивировкой для наших дальнейших определений (а именно для определения категории с квадратичным расщеплением) служит следующий факт. Если ПВП $\mathfrak{X}$ является пространством определённого типа (например, невырожденным ПВП, правильным банаховым пространством или пространством Крейна), то оператор C в разложении (19) можно подобрать таким образом, чтобы $\mathfrak{Y}$ было пространством того же типа.

Для пространств Крейна ранние версии соответствующего результата были получены в [12] (см. также [13, 16]). В наиболее общем виде результат выглядит следующим образом.

Теорема 5. Пусть A — непрерывный самосопряжённый оператор в пространстве Крейна $\mathfrak{X}$. Существуют пространство Крейна $\mathfrak{Y}$ и такой непрерывный оператор C , что выполняется равенство (19), причём $\ker C^\# = \{0\}$. (Последнее равенство в силу (2) и предложения 2 равносильно равенству $\text{Clos } R(C) = \mathfrak{Y}$).

Ниже мы показываем, что соответствующий результат остаётся в силе и для п. б. п.

3.4. Разложение Богнара—Крамли в правильных банаховых пространствах

Пусть A — самосопряжённый оператор в п. б. п. $\mathfrak{X}$. Без ограничения общности можно считать, что $\|A\| \leq 1$. Действительно, если $\|A\| > 1$, то положим $\tilde{A} := aA$, где $a = \|A\|^{-1}$. Тогда $\|\tilde{A}\| = 1$, и если $\tilde{C} \in B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ — квадратичное расщепление $\tilde{A}$, то $C := a^{-\frac{1}{2}}\tilde{C} \in B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ — квадратичное расщепление A .

Нетрудно заметить, что $\ker A$ — изотропное подпространство ПВП $\mathfrak{X}$ относительно внутреннего произведения $[A\cdot, \cdot]_{\mathfrak{X}}$. Применяя предложение 1, получим следующий результат.

Лемма 2. Пусть $[\cdot, \cdot]_A$ — внутреннее произведение на фактор-пространстве $\tilde{\mathfrak{X}} := \mathfrak{X} / \ker A$, порождённое внутренним произведением $[A\cdot, \cdot]_{\mathfrak{X}}$. Тогда норма $\|\cdot\|_{\tilde{\mathfrak{X}}}$ порождает мажоранту на $\tilde{\mathfrak{X}}$.

Доказательство. Пусть $\zeta, \eta \in \tilde{\mathfrak{X}}$, x и y — произвольные фиксированные векторы из классов ζ и η соответственно. Тогда

$$|[\zeta, \eta]_A| = |[Ax, y]_{\mathfrak{X}}| \leq \|Ax\|_{\mathfrak{X}} \|y\|_{\mathfrak{X}} \leq \|x\|_{\mathfrak{X}} \|y\|_{\mathfrak{X}}.$$

Так как x и y — произвольные векторы, то в силу последней цепочки

$$|[\zeta, \eta]_A| \leq \inf\{\|x\|_{\mathfrak{X}} \mid x \in \zeta\} \inf\{\|y\|_{\mathfrak{X}} \mid y \in \eta\} = \|\zeta\|_{\tilde{\mathfrak{X}}} \|\eta\|_{\tilde{\mathfrak{X}}}. \quad \square$$

Теорема 6. Пусть $\mathfrak{X}$ — п. б. п., $A \in B(\mathfrak{X})$ — самосопряжённый оператор. Существуют п. б. п. $\mathfrak{Y}$ и $C \in B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ — квадратичное расщепление A , такие что

$$\text{Clos } R(C) = \mathfrak{Y}. \quad (20)$$

Доказательство. Пусть $\tilde{\mathfrak{X}}$ — фактор-пространство из леммы 2. Так как $\tilde{\mathfrak{X}}$ — невырожденное пространство относительно $[\cdot, \cdot]_A$ с мажорантой, порождённой нормой $\|\cdot\|_{\tilde{\mathfrak{X}}}$, то по теореме 2 существует самополярная мажоранта на $\tilde{\mathfrak{X}}$, порождённая некоторой самополярной нормой $\|\cdot\|'$, при этом (в силу подчинения соответствующих топологий)

$$\exists r > 0 \forall \eta \in \tilde{\mathfrak{X}} \|\eta\|' \leq r \|\eta\|_{\tilde{\mathfrak{X}}}. \quad (21)$$

Пусть $\mathfrak{Y}$ — пополнение $\tilde{\mathfrak{X}}$ по норме $\|\cdot\|'$, $\|\cdot\|_{\mathfrak{Y}}$ — продолжение нормы $\|\cdot\|'$ на $\mathfrak{Y}$, $\varphi: \tilde{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathfrak{Y}$ — соответствующее плотное изометрическое вложение. Внутреннее произведение $[\cdot, \cdot]_A$ непрерывно относительно $\|\cdot\|'$ по совокупности переменных (так как норма $\|\cdot\|'$ самополярна), поэтому $[\cdot, \cdot]_A$ допускает продолжение на $\mathfrak{Y}$, которое также будет непрерывным по совокупности переменных относительно $\|\cdot\|_{\mathfrak{Y}}$. Соответствующее продолжение внутреннего произведения обозначим через $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{Y}}$. Сказанное означает, что топология, порождённая нормой $\|\cdot\|_{\mathfrak{Y}}$, является мажорантой внутреннего произведения $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{Y}}$. При этом, так как норма $\|\cdot\|'$ самополярна относительно $[\cdot, \cdot]_A$, норма $\|\cdot\|_{\mathfrak{Y}}$ будет канонической относительно $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{Y}}$.

Пусть $\varepsilon: \mathfrak{X} \rightarrow \tilde{\mathfrak{X}}$ — естественный гомоморфизм. Положим $C := \varphi\varepsilon$. Тогда

$$[Cx_1, Cx_2]_{\mathfrak{Y}} = [\varphi\varepsilon x_1, \varphi\varepsilon x_2]_{\mathfrak{Y}} = [\varepsilon x_1, \varepsilon x_2]_A = [Ax_1, x_2]_{\mathfrak{X}}. \quad (22)$$

Из (21) и того, что $x \in \varepsilon x$, следует цепочка

$$\|Cx\|_{\mathfrak{Y}} = \|\varphi\varepsilon x\|_{\mathfrak{Y}} = \|\varepsilon x\|' \leq r \|\varepsilon x\|_{\tilde{\mathfrak{X}}} = r \inf\{\|y\|_{\mathfrak{X}} \mid y \in \varepsilon x\} \leq r \|x\|_{\mathfrak{X}} \quad (x \in \mathfrak{X}).$$

Следовательно, $C \in B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ и по предложению 8 $C^{\sharp} \in B(\mathfrak{Y}, \mathfrak{X})$, что вместе с соотношением (22) означает, что C — искомое квадратичное расщепление A .

Из сюръективности ε и плотности вложения φ следует (20). $\square$

Приведённые рассуждения и результаты (в частности, теоремы 5 и 6) положены нами в основу следующего определения.

3.5. Категории с квадратичным расщеплением

Пусть $\mathcal{K}$ — матричная категория. Будем называть $\mathcal{K}$ *категорией с квадратичным расщеплением*, если дополнительно выполняется следующая аксиома.

(a.4) Для любого $\mathfrak{X} \in \text{Obj}(\mathcal{K})$ и для любого самосопряжённого оператора $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{X})$ существуют $\mathfrak{Y} \in \text{Obj}(\mathcal{K})$ и $C \in \mathcal{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ — квадратичное расщепление A , такие что $\text{Clos R}(C) = \mathfrak{Y}$ (т. е. в $\mathcal{K}$ любой самосопряжённый оператор допускает квадратичное расщепление с плотным образом; см. также (2)).

Следствием проведённых рассуждений является следующий результат.

Теорема 7. RegV является категорией с квадратичным расщеплением.

Доказательство. Аксиомы (o.1) и (a.1) тривиальны для категории RegV . Выполнение аксиом (o.2), (o.3), (a.2), (a.3) обеспечивается предложениями 6—9. Выполнение аксиомы (a.4) обеспечивает теорема 6. $\square$

4. Элементарная ротация оператора

Следующее определение является распространением известного определения (см. [16]) на случай матричных категорий.

Пусть $\mathcal{K}$ — матричная категория, $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2 \in \text{Obj}(\mathcal{K})$.

Определение 2. *Элементарной ротацией* оператора $T \in \mathcal{K}(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2)$ назовём оператор $U \in \mathcal{K}(\mathfrak{N}_1 \overset{e}{+} \mathfrak{X}_1, \mathfrak{N}_2 \overset{e}{+} \mathfrak{X}_2)$, представимый матрицей

$$U = \begin{bmatrix} T & A \\ C & B \end{bmatrix} \quad (23)$$

и удовлетворяющий условиям

- 1) U — унитарный оператор;
- 2) $\text{Clos } R(A^\sharp) = \mathfrak{X}_1$, $\text{Clos } R(C) = \mathfrak{X}_2$.

В силу соотношения (2) условия 2) в определении 2 равносильны условиям $\ker A = \{0\}$, $\ker C^\sharp = \{0\}$.

Нами был доказан следующий результат [8, теорема 3] для произвольной категории с квадратичным расщеплением.

Теорема 8. Пусть $\mathcal{K}$ — категория с квадратичным расщеплением. Для любого оператора $T \in \text{Ar}(\mathcal{K})$ существует $U \in \text{Ar}(\mathcal{K})$ — элементарная ротация T .

Следствие 3. Для произвольного оператора $T \in B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, где $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ — п. б. п., существует элементарная ротация из некоторого п. б. п.

Заключение

Основными результатами данной статьи являются теорема 6 и следствие 3. В связи с рассмотренными в данной работе построениями представляется перспективным

- а) дальнейшее исследование категорий ПВП, рассмотренных в разделе 3;
- б) распространение соответствующих результатов, полученных с помощью разложения Богнара—Крамли и элементарной ротации для операторов из пространств Крейна (см. [16]), на категории с квадратичным расщеплением.

В заключение автор хотел бы выразить благодарность за обсуждение некоторых положений статьи И. В. Орлову, с которым, в частности, обсуждалась идея построения ПВП по двойственности (см. подраздел 2.3). Отметим, что родственные идеи рассматривались и ранее в различных работах (см., например, [2, 10, 11]).

Литература

- [1] Азизов Т. Я., Йохвидов И. С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Наука, 1986.

- [2] Ароншайн Р. Квадратичные формы на векторных пространствах // Математика (сб. переводов). — 1964. — Т. 8, № 5. — С. 105—168.
- [3] Букур И., Деляну А. Введение в теорию категорий и функторов. — М.: Мир, 1972.
- [4] Голдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики. — М.: Мир, 1983.
- [5] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Спектральные операторы. — М.: Мир, 1974.
- [6] Наймарк М. А. Нормированные кольца. — М.: Наука, 1968.
- [7] Тышкевич Д. Л. О классах сопрягаемых операторов в общих пространствах с индефинитной метрикой // Учёные записки Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. — 2002. — Т. 15 (54), № 2. — С. 95—98.
- [8] Тышкевич Д. Л. Элементарные ротации операторов в категориях с квадратичным расщеплением // Таврический вестн. математики и информатики. — 2004. — № 1. — С. 112—124.
- [9] Хоружий С. С. Введение в алгебраическую квантовую теорию поля. — М.: Наука, 1986.
- [10] Штраус В. А. Некоторые вопросы геометрии и спектральной теории операторов в банаховых пространствах с эрмитовой формой: Дис... канд. физ.-мат. наук. — Воронеж, 1972.
- [11] Штраус В. А. Модельное представление и функциональное исчисление операторов в пространствах с индефинитной метрикой: Дис... докт. физ.-мат. наук (вариант). — Челябинск, 1993.
- [12] Bogнар J., Kramli A. Operators of the form C^*C in indefinite inner product spaces // Acta Sci. Math. (Szeged). — 1968. — Vol. 29. — P. 19—29.
- [13] Bogнар J. Indefinite Inner Product Spaces. — Berlin: Springer, 1974.
- [14] Categories Home Page. <http://www.mta.ca/~cat-dist/>.
- [15] Constantinescu T. <http://www.utdallas.edu/~tiberiu/>.
- [16] Dritschel M. A., Rovnyak J. Operators on indefinite inner product spaces, Lectures on operator theory and its applications (Waterloo, ON, 1994).— Fields Institute Monographs, Amer. Math. Soc., Providence, RI,—1996.—Vol.3—P. 141—232
- [17] Dritshel M. A. <http://www.math.purdue.edu/~mad/>.
- [18] E-print service. <http://arxiv.org/>.
- [19] MacLane S. Categories for the Working Mathematician. — Springer, 1971. — (Grad. Texts Math.; Vol. 5).
- [20] McEnnis B. W. Shifts on indefinite inner product spaces // Pacific J. Math. — 1979. — Vol. 81, no. 1. — P. 113—130.
- [21] Mnatsakanova M., Morchio G., Strocchi F., Vernov Yu. S. Irreducible representations of the Heisenberg algebra in Krein spaces. — Preprint IFUP-TH 70/95. — Pisa, 1995.
- [22] Rovnyak J. <http://www.people.virginia.edu/~jlr5m/>.