Мера Пуассона—Маслова и формулы Фейнмана для решения уравнения Дирака

Н. Н. ШАМАРОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: nshamarov@yandex.ru

УДК 517.9

Ключевые слова: уравнение Дирака для электрона, интегралы Фейнмана, переходные амплитуды, некоммутативные меры Пуассона—Маслова, хронологические интегралы.

Аннотация

Метод, использованный В. П. Масловым для представления решения начальной задачи для классического уравнения Шрёдингера и допускающий применение к уравнению Дирака, включает в качестве основного шага построение цилиндрической счётно-аддитивной меры (являющейся аналогом пуассоновского распределения) на некотором пространстве функций (= траекторий в импульсном пространстве), преобразование Фурье которой совпадает с множителем в формуле для представления решения уравнения Шрёдингера интегралом по так называемой цилиндрической (псевдо)мере Фейнмана (в пространстве траекторий в конфигурационном пространстве классической системы). С другой стороны, в формуле Маслова для решения уравнения Шрёдингера экспоненциальный множитель является (с точностью до сдвига) преобразованием Фурье псевдомеры Фейнмана. В случае уравнения Дирака исторически первыми появились формулы для импульсного представления, использующие счётно-аддитивные функциональные распределения типа меры Пуассона—Маслова, но с некоммутирующими (матричными) значениями. В статье найдены обобщённые меры, преобразование Фурье которых совпадает с аналогом экспоненциального подынтегрального множителя в формуле типа Маслова для уравнения Дирака и интегралы по которым дают решения задачи Коши для этого уравнения в конфигурационном пространстве.

Abstract

N. N. Shamarov, The Maslov–Poisson measure and Feynman formulas for the solution of the Dirac equation, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 6, pp. 193—211.

As the main step, the method used by V. P. Maslov for representing a solution of the initial-value problem for the classical Schrödinger equation and admitting an application to the Dirac equation includes the construction of a cylindrical countably-additive measure (which is an analog of the Poisson distribution) on a certain space of functions (= trajectories in the impulse space) whose Fourier transform coincides with the factor in the formula representing the solution of the Schrödinger equation by the integral in the so-called cylindrical Feynman (pseudo)measure (in the trajectory space in the configurational space for the classical system). On the other hand, in the Maslov formula for the solution of the Schrödinger equation, the exponential factor is (with accuracy up to a shift)

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 6, с. 193—211.

the Fourier transform of the Feynman pseudomeasure. In the case of the Dirac equation, historically, for the first time, there arise the formulas for the impulse representation that use countably-additive functional distributions of the Poisson–Maslov measure type but with noncommuting (matrix) values. The paper finds generalized measures whose Fourier transforms coincide with an analog of the exponential factor under the integral sign in the Maslov-type formula for the Dirac equation and the integrals with respect to which yield solutions of the Cauchy problem for this equation in the configurational space.

1. Теорема о связи между представлениями типа Маслова и типа Фейнмана решений уравнения типа Шрёдингера (счётно-аддитивные меры)

Приводимая в этом разделе теорема не охватывает классическое уравнение Шрёдингера, но на уровне формул отражает, в простейшем случае, связь между представлениями типа Маслова и типа Фейнмана для решений задач Коши эволюционного уравнения специального класса, содержащего — при надлежащем расширении — уравнения Шрёдингера и Дирака. (В [5] можно найти формулы, выражающие аналогичную связь в случае одной пространственной координаты для специальных стохастических уравнений типа Шрёдингера, названных там уравнениями Шрёдингера—Белавкина.) В следующем разделе эта связь, кратко описанная в аннотации, будет, с необходимыми изменениями, распространена на уравнения Шрёдингера и Дирака с матричнозначными потенциалами класса S (бесконечно гладкими и быстро убывающими).

Далее $d \in \mathbb{N} \equiv \{1, 2, 3, \ldots\}$ — фиксированное натуральное число, $\mathbb{R}^d$ — стандартное d-мерное евклидово координатное вещественное векторное пространство со скалярным произведением $(x, y)_{\mathbb{R}^d}$ $(x, y \in \mathbb{R}^d)$, $B_{\mathbb{R}^d}$ — сигма-алгебра борелевских подмножеств в $\mathbb{R}^d$, S — пространство Шварца всех тех бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций, определённых на $\mathbb{R}^d$, каждая из которых, как и каждая её частная производная произвольного порядка, убывает на бесконечности быстрее любой отрицательной степени (нормы) аргумента, L_2 — гильбертово пространство (классов) борелевских функций на $\mathbb{R}^d$ с комплексными значениями и с интегрируемым квадратом модуля.

Для $\mu, \nu \in S$ пусть $\tilde{\nu}\,\cdot$ — ограниченный оператор $L_2 \ni f \mapsto \tilde{\nu} \cdot f \in L_2$ поточечного умножения на преобразование Фурье

$$\tilde{\nu} \colon \mathbb{R}^d \ni x \mapsto \int e^{i(x,y)_{\mathbb{R}^d}} \nu(y)\, dy$$

функции ν (здесь и далее интеграл без индекса понимается как интеграл по всей области определения подынтегральной функции). Пусть $\mu*$ — оператор свёртки, $L_2 \ni f \mapsto \mu * f \in L_2$,

$$(\mu * f)(x) = \int \mu(y) f(x - y)\, dy$$

на L_2; этот оператор, унитарно (например, с помощью унитарного преобразования Фурье $L_2 \ni f \mapsto (2\pi)^{-d/2}\tilde{f} \in L_2$) эквивалентный оператору умножения на ограниченную функцию $\tilde{\mu}$, очевидно, также ограничен в L_2. При этом $\mu * f$ — (равномерно) непрерывная функция, стремящаяся к нулю на бесконечности (проверка стандартная).

Сумма ограниченных операторов $(\mu\, *\,) + (\tilde{\nu}\,\cdot\,)$ определяет однопараметрическую операторную группу $\{e^{t(\mu*+\tilde{\nu}\cdot)}\colon t \in \mathbb{R}\}$ в L_2, такую что при $t > 0$ и $f \in L_2$ элемент $\varphi(t) = e^{t(\mu*+\tilde{\nu}\cdot)} f \in L_2$ даёт решение задачи Коши относительно функции $\varphi\colon [0;\infty) \to L_2$ с уравнением

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = (\mu *\, + \tilde{\nu}\,\cdot)\varphi(t) \tag{1.1}$$

и начальным условием $\varphi(0) = f$. Задача данного раздела — представить при всяком начальном условии f из класса S элемент $\varphi(t) \in L_2$ и его преобразование Фурье с помощью функциональных интегралов (по счётно-аддитивным мерам), связанных между собой специальным образом, аналогичным описанному в аннотации.

Поскольку S замкнуто относительно свёртки и для всяких $\mu, \nu \in S$ справедливо неравенство

$$|(\mu * \nu)(x)| \leqslant \max|\mu| \cdot \int |\nu(x)|\, dx, \tag{1.*}$$

для всякой $f \in S$ определена «свёрточная экспонента» e^{*f} как комплекснозначная борелевская мера

$$B_{\mathbb{R}^d} \ni A \mapsto 1_{A\subset\mathbb{R}^d}(0) + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \int\limits_A f^{*k}(x)\, dx$$

(равномерная по A сходимость ряда влечёт счётную аддитивность этой меры), где символ $1_{A\subset B}$ означает для множеств B и $A \subset B$ функцию на B, равную 0 на $B \setminus A$ и равную 1 на A (далее символы $\subset \mathbb{R}^d$ для краткости опускаются), и где свёрточные степени f^{*k} могут быть определены рекурсивно:

$$f^{*1} = f, \quad f^{*(k+1)} = (f^{*k}) * f \in S \quad (f \in S,\ k \in \mathbb{N}).$$

Легко доказать, что, какова бы ни была счётно-аддитивная комплекснозначная борелевская мера $m\colon B_{\mathbb{R}^d} \to \mathbb{C}$, для любого множества $A \in B_{\mathbb{R}^d}$ отображение $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto m(A + x)$ борелевское. Тогда, при $\mu \in S$ полагая $\mu_0(x, A) = 1_A(x) \equiv \equiv 1_{A-x}(0)$ и вообще при $t > 0$ $\mu_t(x, A) = e^{*(t\mu)}(A - x)$, для каждого $\tau > 0$ и каждого $q \in \mathbb{R}^d$ можем определить (цилиндрическую) меру $M_q = M_{\mu;q,\tau}$ на множествах «траекторий» (цилиндрах) вида

$$C_{A_0;t_1,A_1;\ldots;t_{n-1},A_{n-1}} = \\ = \{\xi\colon [0,\tau] \to \mathbb{R}^d;\ \xi(0) \in A_0,\ \xi(t_1) \in A_1, \ldots,\ \xi(t_{n-1}) \in A_{n-1}\},$$

где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant \tau$, $A_k \in B_{\mathbb{R}^d}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$, равенством

$$M_q(C_{A_0;t_1,A_1;\ldots;t_{n-1},A_{n-1}}) = \\ = \int\limits_{A_{n-1}} \mu_{\tau-t_{n-1}}(q,dx_{n-1})\cdots\int\limits_{A_1}\mu_{t_2-t_1}(x_2,dx_1)\cdot\int\limits_{A_0}\mu_{t_1-t_0}(x_1,dx_0).$$

В силу легко проверяемого (например, переходом к преобразованиям Фурье) равенства

$$\int \mu_t(y,A)\mu_r(x,dy) = \mu_{t+r}(x,A) \quad (t,r \geqslant 0)$$

это определение корректно. Оценки (1.$*$) и

$$\|\mu_t\| \leqslant \exp\biggl(t\int|\mu(x)|\,dx\biggr),$$

где $t \geqslant 0$ и $\|\mu_t\| = \sup\{\|\mu_t(x,\cdot)\|\colon x \in \mathbb{R}^d\}$ (под нормой меры понимается её полная вариация), влекут конечность вариации этой меры, а теорема типа Колмогорова для согласованных (знакопеременных) распределений [6] — её счётную аддитивность. В [14] доказано (с применением несколько иных рассуждений, чем в оригинальном результате Маслова—Чеботарёва [4, с. 187, 188]), что такая цилиндрическая мера может считаться сосредоточенной на пространстве C_τ кусочно-постоянных непрерывных справа функций, имеющих лишь конечное число точек разрыва, т. е. что пространство таких функций имеет полную меру-вариацию

$$|M_q|\colon C_{A_0;t_1,A_1;\ldots;t_n,A_n} \mapsto \|M_q\cdot 1_{C_{A_0;t_1,A_1;\ldots;t_n,A_n}}\|$$

в пространстве всех отображений отрезка $[0,\tau]$ в $\mathbb{R}^d$. Далее мы так и будем считать. Именно эта счётно-аддитивная мера, продолженная стандартным способом с алгебры цилиндров вида $C_{A_0;t_1,A_1;\ldots;t_n,A_n}\cap S$ на порождаемую ею сигма-алгебру, обозначаемая далее $\mathcal{M}_q$, или, более подробно, $\mathcal{M}_{\mu;q,\tau}$, и будет нами использована для функционального интеграла, представляющего решения задачи Коши (1.1) для начальных условий $\varphi(0) = f \in S$.

Мера $\mathcal{M}_q$ сосредоточена на траекториях, равных q в точке τ. Обозначим $\mathcal{N}_0$ меру, сосредоточенную на обращающихся в нуль в точке τ элементах функционального пространства C_τ, построенную исходя из функции $\nu \in S$ так же, как $\mathcal{M}_0$ была построена исходя из функции μ, т. е. $\mathcal{N}_0 = \mathcal{M}_{\nu;0,\tau}$. Пусть C'_τ — множество обобщённых производных от элементов из C_0. Тогда

$$\begin{aligned} C'_\tau &= \text{пространство линейных комбинации дираковских дельта-функционалов} \\ &\quad \text{вида } \delta_t\colon C_0 \ni \xi \mapsto \xi(t) \in \mathbb{R}^d \text{ с коэффициентами из } \mathbb{R}^d = \\ &= \text{пространство сумм вида } \sum_{k=1}^n y_k\delta_{t_k}, \text{ где } n\in\mathbb{N},\ y_k\in\mathbb{R}^d\ (k=1,2,\ldots,n) \\ &\quad \text{и } 0<t_1<t_2<\ldots<t_n\leqslant\tau. \end{aligned}$$

С каждой такой суммой

$$\ell = \sum_{k=1}^{n} y_k \delta_{t_k} \in C'_\tau$$

отождествим функционал на C_τ, задаваемый формулой

$$\ell(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \big(y_k, \xi(t_k)\big)_{\mathbb{R}^d}.$$

Для всякого такого функционала ℓ, учитывая его измеримость относительно $\mathcal{N}_0$, определим (значение преобразования Фурье меры $\mathcal{N}_0$ на элементе ℓ)

$$\tilde{\mathcal{N}_0}(\ell) = \int\limits_{C_\tau} e^{i\ell(\xi)} \mathcal{N}_0(d\xi).$$

Теорема 1. *Пусть начальное условие $f = \varphi(0)$ задачи Коши для уравнения (1.1) принадлежит пространству S. Тогда при каждом $t > 0$ элемент $\varphi(t) \in$ $\in L_2$ имеет непрерывную ограниченную модификацию, значение которой в каждой точке $q \in \mathbb{R}^d$, обозначаемое далее символом $\varphi(t,q)$, может быть определено формулой*

$$\varphi(t,q) = \int\limits_{C_\tau} \tilde{\mathcal{N}_0}(-\xi') \cdot \varphi\big(0, \xi(0)\big) \cdot \mathcal{M}_q(d\xi),$$

где для всякого $\xi \in C_\tau$ $\xi' \in C'_\tau$ является (обобщённой) производной от ξ.

Доказательство. Воспользуемся классической формулой Троттера—Ли для ограниченных операторов:

$$e^{t\cdot(\mu * + \tilde{\nu}\cdot)} = \lim_{N\to\infty} \big(e^{((t/N)\mu)*} e^{((t/N)\tilde{\nu})\cdot}\big)^N.$$

Таким образом,

$$\varphi(\tau) = e^{\tau\cdot(\mu * + \nu\cdot)} f = \lim_{N\to\infty} \big(e^{((\tau/N)\mu)*} e^{((\tau/N)\tilde{\nu})\cdot}\big)^N f,$$

причём в силу приведённых выше определений и равенств

$$e^{((t/N)\tilde{\nu})\cdot} = e^{((t/N)\tilde{\nu})}\,\cdot,$$

$$\big(e^{((t/N)\mu)*} f\big)(x) = \big(e^{*((t/N)\mu)} * f\big)(x) \equiv \int \mu_t(x, dy) \cdot f(y) \quad (f \in S),$$

находим для всякого $q \in \mathbb{R}^d$, что

$$\Big(\big(e^{((\tau/N)\mu)*} e^{((\tau/N)\tilde{\nu})\cdot}\big)^N f\Big)(q) =$$
$$= \int \mu_{\tau/N}(q, dy_{n-1}) \cdot e^{(\tau/N)\tilde{\nu}(y_{n-1})} \cdot \int \mu_{\tau/N}(y_{n-1}, dy_{n-2}) \cdot e^{(\tau/N)\tilde{\nu}(y_{n-2})} \dots$$
$$\dots \int \mu_{\tau/N}(y_2, dy_1) \cdot e^{(\tau/N)\tilde{\nu}(y_1)} \cdot \int \mu_{\tau/N}(y_1, dy_0) \cdot e^{(\tau/N)\tilde{\nu}(y_0)} \cdot f(y_0) =$$

$$= \int\limits_{C_\tau} \exp\biggl(\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\nu}\Bigl(\xi\left(k\frac{\tau}{N}\right)\Bigr)\left(\frac{\tau}{N}\right)\biggr) \cdot f\bigl(\xi(0)\bigr)\mathcal{M}_q(d\xi) \to$$

$$\to \int\limits_{C_\tau} \exp\biggl(\int\limits_0^\tau \tilde{\nu}\bigl(\xi(t)\bigr)\,dt\biggr) \cdot f\bigl(\xi(0)\bigr)\mathcal{M}_q(d\xi) \quad (N \to \infty). \tag{1.2}$$

Здесь использованы обращение формулы замены переменной в интеграле Лебега для отображения

$$C_\tau \ni \xi \mapsto \bigl(y_0(\xi), y_1(\xi), \ldots, y_{N-1}(\xi)\bigr),$$

где $y_k = y_k(\xi) = \xi(k\tau/N) \in \mathbb{R}^d$ для $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, и теорема Лебега о мажорируемой сходимости, применённая к сходящейся на каждом $\xi \in C_\tau$ и равномерно ограниченной по N последовательности

$$\exp\biggl(\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\nu}\Bigl(\xi\left(k\frac{\tau}{N}\right)\Bigr)\left(\frac{\tau}{N}\right)\biggr) \cdot f\bigl(\xi(0)\bigr) \quad \biggl(\to \exp\biggl(\int\limits_0^\tau \tilde{\nu}\bigl(\xi(t)\bigr)\,dt\biggr) \cdot f\bigl(\xi(0)\bigr)\biggr).$$

Теперь проверим, что последняя сходимость интегралов, имеющая место при каждом значении переменной $q \in \mathbb{R}^d$, которую сейчас рассмотрим как параметр в интегралах, является локально равномерной по $q \in \mathbb{R}^d$ сходимостью непрерывных (и даже гладких) функций переменной q. Действительно, в [14] доказано, что меры $\mathcal{M}_q$ радоновские относительно семейства таких компактов в топологии, порождённой на C_τ поточечной сходимостью, которые измеримы относительно (цилиндрической) сигма-алгебры $\mathcal{C}$ определения мер $\mathcal{M}_q$, и состоят из множеств функций с ограниченным (равномерно по каждому такому компакту) числом разрывов. Кроме того, мы сейчас покажем, что множества функций из C_τ, значения которых являются равномерно ограниченными, измеримы относительно $\mathcal{C}$, причём эта ограниченность локально равномерна по $q \in \mathbb{R}^d$ в следующем смысле: для любого $\varepsilon > 0$ и любого $c > 0$ найдётся такое $C > 0$, что

$$\sup\{\mathcal{M}_q(C_\tau \setminus \{\xi \in C_\tau \colon |\xi| \leqslant C\}) \colon \|q\| \leqslant c\} < \varepsilon. \tag{1.3}$$

Учитывая упомянутую выше радоновость, последнее неравенство и равномерную (по $\xi \in C_\tau$) ограниченность предельного и допредельных подынтегральных выражений в (1.2), локально равномерную по q сходимость допредельных интегралов в (1.2) достаточно проверять на множествах вида

$$\tilde{C} = \{\xi \in C_\tau \colon |\xi| \leqslant C,\ \xi \text{ имеет не более } k \text{ точек разрыва}\}.$$

На таких множествах, очевидно, с ростом N подынтегральные допредельные выражения сходятся к предельному равномерно по $\xi \in \tilde{C}$. Тогда с учётом совпадения полных вариаций мер $\mathcal{M}$ и интегралы сходятся равномерно по $q \in \{x \in \mathbb{R}^d \colon \|x\|_{\mathbb{R}^d} < c\}$ (это ограничение на q следует из (1.3)).

Таким образом, локально равномерные пределы интегралов — непрерывные функции параметра $q \in \mathbb{R}^d$, а в силу формулы Троттера те же интегралы как функции q сходятся к

$$\int\limits_{C_\tau} \exp\biggl(\int\limits_0^\tau \tilde\nu\bigl(\xi(t)\bigr)\,dt\biggr)\cdot f\bigl(\xi(0)\bigr)\mathcal{M}_q(d\xi)$$

в L_2. Выбирая почти всюду по q сходящуюся подпоследовательность допредельных интегралов, получим, что непрерывная (и в силу $\|\mathcal{M}_q\| = \|\mathcal{M}_0\|$ и ограниченности подынтегральных множителей ограниченная) функция

$$\mathbb{R}^d \ni q \mapsto \int\limits_{C_\tau} \exp\biggl(\int\limits_0^\tau \tilde\nu\bigl(\xi(t)\bigr)\,dt\biggr)\cdot f\bigl(\xi(0)\bigr)\mathcal{M}_q(d\xi)$$

представляет элемент $\varphi(t) \in L_2$. Значение этой непрерывной функции в точке x будем обозначать $\varphi(t,x)$. Имея в виду равенство $\mathcal{M}_q\bigl(d\xi(\cdot)\bigr) = \mathcal{M}(d(\xi(\cdot) - q)$, получим для решения нашей задачи Коши представления

$$\varphi(t,q) = \int\limits_{C_\tau} \exp\biggl(\int\limits_0^\tau \tilde\nu\bigl(\xi(t)\bigr)\,dt\biggr)\cdot f\bigl(\xi(0)\bigr)\mathcal{M}_q(d\xi) = \\ = \int\limits_{C_\tau} \exp\biggl(\int\limits_0^\tau \tilde\nu\bigl(q+\xi(t)\bigr)\,dt\biggr)\cdot f\bigl(q+\xi(0)\bigr)\mathcal{M}_0(d\xi).$$

Отметим, что подынтегральная мера зависит только от «коэффициента» μ уравнения (1.1), а подынтегральная экспонента — от коэффициента $\tilde\nu$.

Покажем, что эта подынтегральная экспонента является преобразованием Фурье меры $\mathcal{N}_0$. Для этого воспользуемся теоремой 3.1 из [14] для преобразования Фурье цилиндрической меры $\mathcal{N}_0$ относительно пространства линейных комбинаций

$$C'_\tau \ni L = \sum_{j=0}^n y_j \cdot \delta_{t_j} : \xi \mapsto \sum_{j=0}^n \bigl(y_j, \xi(t_j)\bigr)_{\mathbb{R}^d}$$

(дельта-«функционалов» вычисления), где $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant \tau$ и векторам $y_j \in \mathbb{R}^d$ поставлены в соответствие функционалы $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto (y_j, x)_{\mathbb{R}^d}$:

$$\tilde{\mathcal{N}_0}(L) \equiv \int\limits_{C_0} e^{iL(\xi)}\mathcal{N}_0(d\xi) = \exp\biggl(\sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1})\tilde\nu\biggl(\sum_{k=j}^n y_k\biggr)\biggr),$$

где использовано равенство $\widetilde{e^{*(t\nu)}} = e^{t\tilde\nu}$ и коммутативность области значений ν. Выбирая ступень Хевисайда θ непрерывной слева, т. е.

$$\theta\colon x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ 1, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

представим показатель последней экспоненты в интегральном виде:

$$\sum_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1})\tilde{\nu}\biggl(\sum_{k=j}^{n} y_k\biggr) = \int\limits_0^\tau \tilde{\nu}\biggl(\sum_{k=1}^{n}\theta(t_k - t)\cdot y_k\biggr)dt.$$

Теперь при

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{n}\bigl(\theta(t_k - t)\bigr)\cdot y_k$$

получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\delta_{t_k}\cdot y_k = -\frac{d}{dt}\xi(t),$$

откуда ясно, что подынтегральная экспонента в пределе в (1.2) совпадает с преобразованием Фурье меры $\mathcal{N}_0$, вычисленным на функционале $-\xi'$. Теорема доказана. $\square$

Следствие 1. *Пусть* $\varphi\colon [0,\infty)\to L_2$ — *решение* (1.1) *с начальным условием* $\varphi(0) = f \in L_2$. *Тогда функция* $\psi\colon [0,\infty)\to L_2$, *где* $\psi(t) = \widetilde{\varphi(t)}$ (L_2*-преобразование Фурье*) *при каждом* $t \geqslant 0$, *является решением задачи Коши с уравнением*

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = \biggl(\frac{1}{2\pi}\nu_-\biggr) * \bigl(\psi(t)\bigr) + \tilde{\mu}\cdot\bigl(\psi(t)\bigr), \tag{1.$\tilde{1}$}$$

где $\nu_-\colon \mathbb{R}^d \ni x \mapsto \nu(-x)\in\mathbb{C}$, *и с начальным условием* $\psi(0) = \tilde{f}\in S$. *Если при этом* $\varphi(0) = f \in S$, *то для любого* $t > 0$ *элемент* $\psi(t)\in L_2$ *имеет непрерывную модификацию* $\mathbb{R}^d \ni p \mapsto \psi(t,p)\in\mathbb{C}$, *задаваемую формулой*

$$\psi(t,p) = \int\limits_{C_\tau}\tilde{\mathcal{M}}_0(-\xi')\cdot\psi\bigl(0,\xi(0)\bigr)\cdot\mathcal{M}_{\frac{1}{2\pi}\nu_-;p;\tau}(d\xi). \tag{1.$\tilde{2}$}$$

Доказательство. В силу непрерывности и обратимости преобразования Фурье и непрерывности по t полугруппы $[0;\infty)\ni t\mapsto e^{t(\mu*+\nu\cdot)}$ проверке подлежат только равенства (в L_2)

$$\widetilde{\mu * g} = \tilde{\mu}\cdot\tilde{g}$$

и

$$\widetilde{\tilde{\nu} * g} = \biggl(\frac{1}{2\pi}\nu_-\biggr)\cdot\tilde{g}$$

($\mu\in S$, $g\in L_2$). Но данные равенства хорошо известны для $g\in S$ и в силу непрерывности в L_2 участвующих в формуле операторов (преобразования Фурье, свёртки с элементом из S и умножения на элемент из S) распространяются и на остальные элементы L_2 в силу плотности подпространства $S\subset L_2$. Остальное следует из формулировки теоремы 1. $\square$

Замечание 1. Таким образом, подынтегральная экспонента в формуле (1.$\tilde{2}$) (аналогичной формуле Маслова для преобразования Фурье решения уравнения

Шрёдингера из [4]) является преобразованием Фурье меры интегрирования из формулы (1.2) (аналогичной формуле Фейнмана для решения того же уравнения Шрёдингера), взятой для $q = 0$, и, с точностью до постоянных множителей, наоборот. Эта связь между исходным (1.1) и преобразованным ($1.\tilde{1}$) уравнениями в следующем разделе будет, с соответствующими изменениями, распространена на уравнения Дирака и на уравнения типа Шрёдингера с матричными потенциалами класса S.

Некоторые обозначения в следующей части текста будут иметь смысл, несколько отличающийся от использованного выше.

2. Формулы Фейнмана

Формулами Фейнмана (в широком смысле) называются [5] формулы, представляющие искомые функции (часто это решения задач Коши для уравнений с частными производными) в виде такого предела конечнократных интегралов, при котором неограниченно растёт размерность области интегрирования. Иногда — как, например, в предыдущем разделе в формуле (1.2) — этот предел можно интерпретировать как интеграл по некоторой мере в функциональном пространстве. Однако в первой такой формуле — формуле Фейнмана для решения задачи Коши для классического уравнения Шрёдингера (записанного в «конфигурационном», или «координатном», пространстве, в отличие от «импульсного», сопряжённого к конфигурационному, и «фазового», равного произведению конфигурационного пространства на импульсное) — подразумевалась трансляционно-инвариантная мера интегрирования на бесконечномерном пространстве. Такая мера, однако, не имела достаточно хороших свойств для развития соответствующего интегрального исчисления. Затем рядом авторов была найдена интерпретация формулы Фейнмана, использующая комплексный аналог гауссовской меры на бесконечномерном пространстве. Это функциональное распределение, не будучи счётно-аддитивным, имеет, по крайней мере, хорошо определённые конечномерные образы и преобразование Фурье (хотя и в рамках теории обобщённых функций, поскольку полная вариация конечномерных распределений бесконечна) и, являясь к тому же аналитическим продолжением семейства хорошо изученных гауссовских мер по тому или иному параметру, позволяет развить исчисление и доказывать теоремы.

Как показал В. П. Маслов [4], для достаточно хороших потенциалов, допустив комплексные значения переходных мер, возможно построить такой аналог марковского (пуассоновского) процесса (с кусочно-постоянными траекториями (А. М. Чеботарёв)), что соответствующее функциональное распределение на пространстве траекторий будет той счётно-аддитивной, хотя и комплекснозначной, мерой, интегралом по которой возможно представить преобразование Фурье решения классического уравнения Шрёдингера.

Класс потенциалов, для которых справедлива формула Маслова, был в [14] расширен до класса преобразований Фурье произвольных счётно-аддитивных комплекснозначных мер (на импульсном пространстве). Это удалось сделать, расширив аналогию между мерой Маслова и распределением однородных по времени и пространству марковских процессов. Именно, были найдены конечномерные распределения меры Маслова, и оказалось, что они задаются конечнократными интегралами (свёртками некоторых переходных мер) аналогично тому, как конечномерные распределения марковских процессов задаются конечнократными интегралами (свёртками) от произведений (плотностей) переходных вероятностей.

Более того, оказалось возможным, как будет вкратце показано далее (подробные доказательства см. в [10]), распространить этот метод построения меры Маслова и на случаи, когда потенциал в уравнении Шрёдингера принимает матричные (некоммутирующие) значения, и на случаи, когда оператор Лапласа заменяется на произвольный самосопряжённый оператор с постоянными коэффициентами при частных производных. Таким образом, новый метод построения пуассоновской меры Маслова позволяет исследовать единым образом преобразования Фурье решений задач Коши для эволюционных уравнений Шрёдингера и Дирака с достаточно хорошими потенциалами (именно, являющимися преобразованиями Фурье матричнозначных мер, заданных на импульсном пространстве). Формула Троттера позволяет писать для этих преобразований Фурье формулы Фейнмана, т. е. аппроксимации с использованием конечнократных интегралов.

Однако в случае уравнения Шрёдингера известны конечнократные интегралы, пределы которых дают не только преобразование Фурье решений (функцию на импульсном пространстве), но и само решение (как функции точки конфигурационного пространства). В данной статье метод матричнозначных переходных мер, давший для уравнений Шрёдингера и Дирака решения в импульсном пространстве, применяется для нахождения формул Фейнмана для решения уравнения Дирака на пространстве траекторий в конфигурационном пространстве; указаны конечномерные распределения этой меры, а также найдены явные формулы преобразования Фурье этой квазимеры.

Отметим связь между формулами Фейнмана и Маслова: преобразование Фурье (центрированной) меры Фейнмана является экспоненциальным подынтегральным множителем в формуле Маслова для представления решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера посредством функционального интеграла по траекториям в импульсном пространстве. Аналогично преобразование Фурье («центрированной») меры Маслова является экспоненциальным подынтегральным множителем (представляющим собой вклад потенциала) в формуле Фейнмана для представления решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера посредством функционального интеграла по траекториям в координатном (= конфигурационном) пространстве.

Далее проследим аналогичную симметричность, отражённую в простейшем случае в следствии 1, также и в конфигурационных и импульсных представлениях решений задач Коши для уравнения Дирака.

Уравнения Дирака и Шрёдингера имеют эволюционный вид

$$f_t' = (\mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_0) f_t, \quad t \geqslant 0, \tag{2.1}$$

где $f_t(x)$ играет роль искомой функции $\psi(t,x)$, и в случае, когда потенциалы являются преобразованиями Фурье счётно-аддитивных матричнозначных мер, выполнены следующие условия:

1) $\mathbf{B}_0$ является всюду определённым ограниченным оператором в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^s) \equiv L_2$ $(d, s = 1, 2, \ldots)$, а именно оператором $(\mathbf{B}_0\ \varphi)(x) = V(x)\varphi(x)$ $(\varphi \in L_2,\ x \in \mathbb{R}^d)$ умножения на ограниченную непрерывную функцию $V\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{A}_0$, где $\mathbb{A}_0$ — подалгебра в алгебре $\mathbb{A} = \mathrm{Matr}(s \times s, \mathbb{C})$ всех комплексных матриц размера $s \times s$, $\mathbb{A}_0$ содержит единичную матрицу $1_{\mathbb{A}}$ (нулевую обозначаем аналогично $0_{\mathbb{A}}$) и наделена операторной (относительно действия в эрмитовом пространстве $\mathbb{C}^s$) банаховой нормой $\mathbb{A}_0 \ni a \mapsto |a|_0 \in \mathbb{R}$, так что $|ab|_0 \leqslant |a|_0 \cdot |b|_0$, и V является преобразованием Фурье некоторой счётно-аддитивной меры ν (обозначается $V = \tilde{\nu}$), определённой на сигма-алгебре $\mathcal{B}_d = B_{\mathbb{R}^d}$ всех борелевских подмножеств в $\mathbb{R}^d$ и принимающей значения в $\mathbb{A}_0$, т. е.

$$V\colon \mathbb{R}^d \ni x \mapsto \tilde{\nu}(x) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i\,x\cdot p} \nu(dp) \quad (\in \mathbb{A}_0) \text{ —}$$

преобразование Фурье меры ν, и интеграл от комплексной функции по матричнозначной мере вычисляется покомпонентно; таким образом, функция V является непрерывной и ограниченной, например (полной) вариацией [12] своего Фурье-прообраза, меры ν:

$$\|\nu\| = \sup\Biggl\{\sum_{j=1}^{n} |\nu(A_j)|_0 \colon n \in \mathbb{N},\ A_j \in \mathcal{B}_d;\ j \neq k \implies A_j \cap A_k = \varnothing\Biggr\};$$

2) $\mathbf{A}_0$ является антисамосопряжённым (косоэрмитовым) дифференциальным оператором в L_2 с постоянными коэффициентами, являющимися элементами $\mathbb{A}_0$; иными словами, $\mathbf{A}_0$ является полиномом вида $i \cdot P(-i\partial_1, \ldots, -i\partial_s)$ (от самосопряжённых в L_2 коммутирующих на плотном подпространстве операторов $\mathfrak{p}_k = -i\partial_k$, $k = 1, \ldots, s$), где P — полином от тех же операторов с коэффициентами, являющимися эрмитово-самосопряжёнными матрицами из $\mathbb{A}_0 \subset \mathbb{A}$.

Далее,

$$f\colon [0, \infty) \to L_2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^s) \equiv L_2$$

и

$$f_t' \equiv f'(t) \equiv \lim_{\tau \downarrow 0} \tau^{-1} \cdot \bigl(f(t+\tau) - f(\tau)\bigr) \in L_2.$$

Предложение. *Существует полугруппа ограниченных в* L_2 *(разрешающих для* (2.1)*) операторов* $\hat{G}_0^t = e^{t(\mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_0)}$ *с генератором* $\mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_0$.

Доказательство. Как известно, сумма генератора (строго непрерывной) полугруппы (которым является $\mathbf{A}_0$, генерируя унитарную полугруппу сжатий) и ограниченного оператора ($\mathbf{B}_0$) — снова генератор непрерывной полугруппы.

В случае уравнения Дирака дифференциальный оператор

$$\mathbf{A}_0 = ica_0 + i\sum_{j=1}^{d} a_k \mathfrak{p}_k$$

имеет вид суммы нескольких слагаемых, одно из которых является умножением на постоянную антисамосопряжённую матрицу, а каждое из остальных является произведением трёх множителей: мнимой единицы и двух коммутирующих самосопряжённых операторов, оператора $\mathfrak{p}_k = -i\partial_k$ взятия первой частной производной с мнимым коэффициентом и оператора умножения на постоянную самосопряжённую унитарную матрицу a_k размера $s \times s$. □

Предложение (теорема Чернова). *Пусть A — генератор строго непрерывной полугруппы операторов в банаховом пространстве B и D — плотное в норме графика подпространство в области определения D_A (замкнутого) оператора A. Пусть $\{Q(t);\ t > 0\}$ — однопараметрическое семейство операторов в B, такое что $\|Q(t)\| \leqslant e^{a_0 t}$ для некоторого $a_0 > 0$, причём для всяких $a > 0$ и $g \in D$ существует предел*

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{Q(t) - I}{t} g = Ag.$$

Тогда для всех $f \in B$ выполнено

$$Q\left(\frac{t}{N}\right)^N f \to e^{tA} f$$

при $N \to \infty$.

Предложение. *Для каждого $g \in L_2$*

$$e^{t(\mathbf{A}_0+\mathbf{B}_0)} g = \lim_{N\to\infty} \left(e^{i(ct/N)a_0} e^{i(t/N)a_1\mathfrak{p}_1} \dots e^{i(t/N)a_d\mathfrak{p}_d} e^{(t/N)\mathbf{B}_0}\right)^N g.$$

Доказательство. Достаточно проверить условия выполнимости теоремы Чернова, а именно что операторнозначная функция $F\colon [0,\infty) \to L(L_2)$, определённая формулой

$$F(t) = e^{icta_0} e^{ita_1\mathfrak{p}_1} \dots e^{ita_d\mathfrak{p}_d} e^{t\mathbf{B}_0},$$

обладает следующими свойствами:

1) $\|F(t)\| \leqslant e^{at}$ для некоторого $a > 0$ при всех $t \geqslant 0$;
2) $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(t)g = (\mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_0)g$ для всех g из плотного подмножества D области определения оператора $\mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_0$, для которого график сужения этого оператора на него плотен в графике самого оператора $\mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_0$.

Первое свойство очевидно в силу ограниченности $\mathbf{B}_0$; в качестве D подходит, например, пространство всех тех функций из L_2, для которых носитель преобразования Фурье ограничен (как существенный носитель локально суммируемой функции). □

Из последнего предложения следует, что содержащуюся в нём формулу мы сможем интерпретировать как формулу Фейнмана (в широком смысле), к чему мы и стремимся, если всякий унитарный оператор вида $e^{i\beta\mathfrak{p}_k}$, где β — самосопряжённая (постоянная) матрица размера $s \times s$ над $\mathbb{C}$, сумеем представить в интегральном виде. Такой оператор действует в пространстве L_2 $\mathbb{C}^s$-значных функций f (определённых на $\mathbb{R}^d$) следующим образом. Выберем собственный ортонормированный базис $\{b_j : j = 1, 2, \dots, s\}$ матрицы β, отвечающий упорядоченному набору её вещественных собственных чисел $\{\lambda_j : j = 1, 2, \dots, s\}$. Положим $f_j(x) = (f(x), e_j)_{\mathbb{C}^s}$. Тогда наш оператор будет на каждую компоненту f_j в этом базисе действовать отдельно, а именно сдвигом $f_j(\cdot) \mapsto f_j(\cdot + \lambda_j e_k)$ этой компоненты вдоль k-го стандартного базисного вектора e_k (в пространстве $\mathbb{R}^d$ области определения функции f на вектор $-\lambda_k e_k$).

Далее дадим интегральное представление этого оператора с помощью переходных ($\mathbb{A}$-значных) мер. Затем составим из таких интегральных операторов переходные меры, которые породят обобщённую цилиндрическую (квази)меру, аналогичную мере $\mathcal{M}_q$ из предыдущего раздела, найдём преобразования Фурье этой последней меры и представим хронологическим интегралом по ней решение (2.1) при подходящих начальных условиях. Кроме того, найдём аналогичное представление для преобразования Фурье решений уравнения (2.1) и сравним с подынтегральным экспоненциальным множителем этого представления преобразование Фурье упомянутой обобщённой (квази)меры.

Определение. Назовём $\mathbb{R}^n$-значной переходной амплитудой на $\mathbb{R}^d$ (коротко $(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)$-ПА) всякую функцию $f\colon \mathbb{R}^d \times \mathcal{B}_d \to \mathbb{R}^n$, для которой выполнены следующие свойства:

1) $f(\mathbb{R}^d \times \mathcal{B}_d)$ — ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^n$;
2) для каждого $x \in \mathbb{R}^d$ отображение $\mathcal{B}_d \ni Y \mapsto f(x, Y) \in \mathbb{R}^n$ счётно-аддитивно (т. е. является $(\mathcal{B}_d, \mathbb{R}^n)_c$-мерой);
3) для каждого $Y \in \mathcal{B}_d$ отображение $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto f(x, Y) \in \mathbb{R}^n$ является борелевским (измеримым относительно борелевских σ-алгебр в $\mathbb{R}^n$ и в $\mathbb{R}^d$).

Свёртка двух $\mathbb{A}_0$-значных переходных амплитуд p и q — это отображение

$$\mathbb{R}^d \times \mathcal{B}_d \ni (x, Y) \mapsto (p * q)(x, Y) = \int\limits_{z \in S} p(x, dz) q(z, Y)$$

(интеграл вычисляется покомпонентно).

Векторное пространство всех $(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)$-ПА обозначим $\mathfrak{A}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)$.

Пример 1. Функция, заданная на произведении $\mathbb{R}^d \times \mathcal{B}_d$ формулой

$$\delta(x, Y) = 1_Y(x) = \delta_x(Y) = \begin{cases} 1_{\mathbb{A}}, & x \in Y, \\ 0_{\mathbb{A}}, & x \notin Y, \end{cases}$$

является $(\mathcal{B}_d, \mathbb{A}_0)$-ПА. Ниже будем называть её «дельта-ПА».

Пример 2. Пусть μ — $(\mathcal{B}_d, \mathbb{A}_0)$-мера. Тогда функция $f_\mu\colon \mathbb{R}^d \times \mathcal{B}_d \to \mathbb{A}_0$, заданная формулой $f_\mu(x, Y) = \mu(Y - x)$, является $(\mathbb{R}^d, \mathbb{A}_0)$-ПА. Например, $f_{\delta_0} = \delta$.

Замечание 2. Пусть даны натуральные числа k, m, n, $b\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — билинейный оператор между конечномерными пространствами и $\varphi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ — ограниченная борелевская функция. Тогда для всякой функции $f \in \mathfrak{A}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$ отображение

$$\mathbb{R}^d \times \mathcal{B}_d \ni (x, Y) \mapsto \int\limits_Y b\bigl(\varphi(y), f(x, dy)\bigr)$$

является $(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)$-ПА.

Определение. Пусть $f\colon \mathbb{R}^d \times B_{\mathbb{R}^d} \to \mathbb{A}$ является $(\mathbb{R}^d, \mathbb{A}_0)$-ПА, пусть $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{A}_0$ и $h\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^s$ — непрерывные финитные функции. Свёртками $f * g$, $g * f$ и $f * h$ называются (измеримые ограниченные) функции

$$\mathbb{R}^d \ni x \mapsto \int f(x, dy) g(y) \equiv (f * g)(x) \in \mathbb{A},$$

$$\mathbb{R}^d \ni x \mapsto \int g(y) f(x, dy) \equiv (g * f)(x) \in \mathbb{A},$$

$$\mathbb{R}^d \ni x \mapsto \int f(x, dy) h(y) \equiv (f * h)(x) \in \mathbb{C}^s,$$

где интегралы понимаются покомпонентно.

Для описанных типов g и h операторами с интегральным ядром f называются отображения $f*\colon g \mapsto f * g$, $*f\colon g \mapsto g * f$ и $f*\colon h \mapsto f * h$, а также продолжения таких отображений по непрерывности на более широкие функциональные пространства. Оператор $f*$ (свёртки) с интегральным ядром f, являющимся $(\mathbb{R}^d, \mathbb{A}_0)$-ПА, будет также обозначаться O_f

Отметим, что дельта-ПА, взятая в качестве интегрального ядра, порождает тождественные операторы в пространствах $L_p(\mathbb{R}^d; \mathbb{A})$ и $L_p(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^s)$, хотя явная формула $g(x) = \int \delta_x(dy) g(y)$ не имеет прямого смысла для разрывных элементов g, не обладающих значениями в точках этих пространств.

Пример 3. Амплитуда, задающая оператор $e^{i\beta \cdot \mathfrak{p}_k}$, может быть составлена так. Пусть $\beta = C_\beta \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_1) C_\beta^{-1}$, где C — унитарная матрица перехода к собственному базису матрицы β и $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_1)$ — соответствующая диагональная матрица. Тогда для непрерывной функции $\varphi \in L_2$ прямые вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} e^{i\beta \cdot \mathfrak{p}_k} \varphi = e^{i C_\beta \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_s) C_\beta^{-1} \cdot \mathfrak{p}_k} \varphi = (C_\beta \operatorname{diag}(e^{i\lambda_1 \mathfrak{p}_k}, \ldots, e^{i\lambda_s \mathfrak{p}_k}) C_\beta^{-1}) \varphi = \\ = \bigl((C_\beta \cdot \delta) * \operatorname{diag}(\delta_{-\lambda_1 e_k}, \ldots, \delta_{-\lambda_s e_k}) * (C_\beta^{-1} \cdot \delta)\bigr) * \varphi. \end{aligned}$$

В последнем выражении на φ действует свёрткой произведение ПА специального вида: дающие умножения на матрицы перехода и — диагональная — двигающая различные компоненты на разные векторы. Поскольку свёртка двух ПА снова ПА, мы представили оператор $e^{i\beta \cdot \mathfrak{p}_k}$ в требуемом интегральном виде.

Теперь унитарное преобразование Фурье и теорема Чернова приводят нас к оператору, задаваемому унитарной экспонентой

$$U^t = e^{it(ca_0 + a_1 \mathfrak{p}_1 + \ldots + a_d \mathfrak{p}_d)} \quad (t \geqslant 0)$$

и представимому в виде

$$L_2 \ni \varphi \mapsto U^t\varphi = \lim_{N\to\infty}\bigl(e^{i(t/N)ca_0}e^{i(t/N)a_1\mathfrak{p}_1}\dots e^{i(t/N)a_d\mathfrak{p}_d}\bigr)^N.$$

Отметим, что для $q \in \mathbb{R}^d$ в предыдущем разделе значение меры $\mathcal{M}_q$ на фиксированном цилиндрическом множестве $C \subset C_\tau$ — функция параметра q. Можно считать поэтому, что задана мера $C \mapsto \{\mathbb{R}^d \ni q \mapsto M_q(C)\}$ со значениями в комплексном пространстве функций, определённых на $\mathbb{R}^d$. Если же рассматривать интеграл по такой мере от переменной цилиндрической функции $C_\tau \ni \xi \mapsto f\bigl(\xi(0)\bigr)$, $f \in S$, то получим операторнозначную меру

$$M\colon C \mapsto \Bigl\{f \mapsto \Bigl\{q \mapsto \int 1_C(\xi) f\bigl(\xi(0)\bigr) M_q(d\xi)\Bigr\}\Bigr\}.$$

При этом оператор $M(C_\tau)$ совпадает с экспонентой $e^{\tau\mu *}$.

Аналогично зададим для дальнейшего семейство операторнозначных цилиндрических квазимер $\{\mathcal{M}^\tau\}$ на некоторых цилиндрических множествах формулой

$$\mathcal{M}^\tau(C_{A_0;t_1,A_1;\dots;t_{n-1},A_{n-1}})\colon$$
$$L_2 \ni f \mapsto \Bigl(U^{\tau-t_{n-1}}\Bigl(1_{A_{n-1}}\cdot\Bigl(\dots\Bigl(U^{t_2-t_1}\bigl(1_{A_1}\cdot(U^{t_1-t_0}1_{A_0}\cdot f)\bigr)\Bigr)\dots\Bigr)\Bigr)\Bigr)$$

при $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant \tau$ и борелевских множеств $A_j \subset \mathbb{R}^d$. Нетрудно убедиться, что при фиксированных $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant \tau$ и заданном $R > 0$ сужение этой меры на полуалгебру только таких цилиндров вида $C_{A_0;t_1,A_1;\dots;t_{n-1},A_{n-1}}$, для которых каждое борелевское множество A_j содержится в центральном шаре радиуса R пространства $\mathbb{R}^d$, счётно-аддитивно в силу абсолютной непрерывности этой меры относительно меры Лебега как отношения между мерами, зависящим от произведений $A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_n$.

Хронологический интеграл по такой мере от комплекснозначной или $\mathbb{A}$-значной хронологической экспоненты вида

$$\xi \mapsto \exp\biggl(\int_0^\tau \tilde{\nu}\bigl(\xi(t)\bigr)\,dt\biggr) —$$

это по определению оператор вида

$$\lim_{N\to\infty}\bigl(U^{\tau/N}\cdot\bigl(e^{(\tau/N)\tilde{\nu}}\,\cdot\,\bigr)\bigr)^N,$$

где $e^{\cdots}\,\cdot$ — оператор умножения на $e^{\cdots}$. Отметим, что некоторое усовершенствование теоремы Чернова, приведённое, например, в [15], позволяет в предыдущей формуле использовать не только равномерные разбиения отрезка $[0,\tau]$.

Таким образом, разрешающий оператор задач Коши для уравнения (2.1) является хронологическим интегралом от хронологической экспоненты указанного вида. Интегральное представление по мере типа Фейнмана получено.

Отметим, что хронологическая экспонента

$$\exp\biggl(\int_0^\tau \tilde{\nu}\bigl(\xi(t)\bigr)\,dt\biggr),$$

вычисленная на траектории $\xi \in C_\tau$, является, в свою очередь, преобразованием Фурье в точке $-\xi'$ от счётно-аддитивной квазимеры $\mathcal{N}_0$, определяемой формулой

$$\mathcal{N}_0(C_{A_0;t_1,A_1;\dots;t_{n-1},A_{n-1}}) = \\ = \int_{A_{n-1}} f_{e^{*(\tau-t_{n-1})\nu}}(q;dy_{n-1})\dots\int_{A_1} f_{e^{*(t_2-t_1)\nu}}(y_2;dy_1)\int_{A_0} f_{e^{*(t_1-t_0)\nu}}(y_1,dy_0)$$

(см. [3]).

Пусть $\hat{G}^t$ — унитарный Фурье-образ оператора $\hat{G}_0^t$, т. е.

$$\hat{G}^t = F\cdot\hat{G}_0^t\cdot F^{-1},$$

где F — (унитарный) оператор преобразования Фурье в L_2. Например, для суммируемой $\varphi \in L_2\cap L_1$

$$(F\varphi)(x) = (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(p)e^{ip\cdot x}\,dp.$$

Далее будет показано, что $\hat{G}^t$ является оператором типа интегрального, ядро которого (переходная матричнозначная мера) может зависеть от измеримого множества как в конечномерном, так и в бесконечномерном (функциональном) пространстве.

Предложение. *Следующая задача Коши равносильна задаче Коши с уравнением* (2.1):

$$g_t' = (\mathbf{A}+\mathbf{B})g_t \equiv i\cdot P\cdot g_t + \nu * g_t, \quad g_0 = (2\pi)^{d/2}F(f_0),$$

где $g\colon [0,\infty)\ni t\mapsto g_t\in L_2$ — искомая функция, P — полином на $\mathbb{R}^d$ с эрмитово-самосопряжёнными коэффициентами из алгебры $\mathbb{A}_0$ и для всякой финитной непрерывной функции $\varphi\colon \mathbb{R}^d\to\mathbb{C}^s$ значение свёртки $\nu*\varphi\colon\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}^s$ в точке $p\in\mathbb{R}^d$ задаётся равенством

$$(\nu*\varphi)(p) = \int_{\mathbb{R}^d}\nu(dx)\varphi(p-x).$$

Отметим, что оператор $\mathbf{A}$ умножения на iP антисамосопряжён на своей естественной области определения ($(i\mathbf{A})^* = i\mathbf{A}$), а оператор $\mathbf{B}$ свёртки с φ ограничен в L_2. Кроме того, существуют представления для ограниченных полугрупп с генераторами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, унитарные операторы $e^{t\mathbf{A}}$ — это просто операторы умножения на матричную функцию, $(e^{t\mathbf{A}}\varphi)(p) = e^{itP(p)}\varphi(p)$, а для ограниченного оператора

$\mathbf{B}$ сходится в операторной норме ряд Маклорена

$$e^{t\mathbf{B}} = \mathbf{1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!}\mathbf{B}^j,$$

причём, благодаря свойствам свёртки, для каждой функции $\varphi \in L_2^c$ имеется представление $e^{t\mathbf{B}}\varphi = \mu^t * \varphi$, где, как легко проверить, для каждого $t \geqslant 0$ мера μ^t представляется сходящимся по норме вариации рядом

$$\mu^t = \delta_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \cdot \nu^{*j}$$

и где свёрточные степени определяются индуктивно:

$$\nu^{*0}(Y) = \delta_0(Y) := \begin{cases} 1_{\mathbb{A}}, & 0 \in Y, \\ 0_{\mathbb{A}}, & 0 \notin Y \end{cases} \quad (Y \in B_{\mathbb{R}^d})$$

и

$$\nu^{*(n+1)} = \nu * (\nu^{*n}) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Получаем следующее предложение.

Предложение (формулы Троттера и Фейнмана для хронологических интегралов по мере Маслова). *Для всякого* $\varphi \in L_2$

$$\hat{G}^t\varphi = e^{t(\mathbf{A}+\mathbf{B})}\varphi = \lim_{n\to\infty}\left(e^{(t/n)\mathbf{B}}e^{(t/n)\mathbf{A}}\right)^n\varphi =$$
$$= \lim_{n\to\infty} f_{\mu^{t/n}} * (e^{iPt/n}\cdot\delta) * f_{\mu^{t/n}} * (e^{iPt/n}\cdot\delta) * \ldots f_{\mu^{t/n}} * (e^{iPt/n}\cdot\delta) * \varphi.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2 (об интегральном представлении преобразования Фурье решения уравнения Дирака (2.1)). *При* $t \geqslant 0$ *существуют* $(\mathbb{R}^d, \mathbb{A}_0)$*-ПА* $\{G^t\}$*, такие что* $\hat{G}^t = O_{G^t}$ $(t \geqslant 0)$*. При этом если мера* ν *задаётся плотностью класса* S*, то формула для импульсного представления решения уравнения Дирака в терминах хронологического интеграла* $(\mathrm{T}\text{-}\int)$ *имеет вид*

$$(G^t f)(p) = \mathrm{T}\text{-}\!\!\int \exp\biggl(i\int_0^\tau P\bigl(\xi(t)\bigr)\,dt\biggr) f\bigl(\xi(0)\bigr)\mathcal{N}_p(d\xi),$$

где мера $\mathcal{N}_q$ *строится исходя из плотности меры* ν *так же, как мера* M_q *построена исходя из функции* μ *в первом разделе.*

Следствие 2 (из теоремы 1 и теоремы Чернова). *Если* $\{t \mapsto f_t\}$ *— решение уравнения Дирака и* $\varphi \in L_2$*, то фейнмановские аппроксимации в конфигурационном пространстве для* $(f_t, \varphi)_{L_2}$ *содержат, кроме операторов умножения на матричнозначные функции, сингулярные (унитарные) операторы сдвигов компонент вектор-функций*

$$(T_k^t f)(x) = \sum_{j=1}^{4} (f(x + \lambda_{k,j}e_k), u_{k,j})u_{k,j}, \quad k = 1, 2, 3,$$

где e_k — стандартный базис в $\mathbb{R}^3$, $u_{k,j}$ — собственные векторы матрицы a_k и $\lambda_{k,j}$ — соответствующие собственные значения.

Следствие 3. *Пусть $\mathcal{M}^\tau$ — операторнозначная цилиндрическая мера, определённая выше. Тогда значение преобразования Фурье на элементе $-\xi'$ равно подынтегральной экспоненте в хронологическом интеграле из теоремы* 1.

Доказательство состоит в повторении для операторнозначного случая выкладок, приведённых в [3] для случая матричнозначной меры. ☐

Литература

[1] Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. Т. 2. — М.: Наука, 1973.

[2] Егикян Р. С., Ктитарев Д. В. Формула Фейнмана в фазовом пространстве для систем псевдодифференциальных уравнений с аналитическими символами // Мат. заметки. — 1992. — Т. 51, № 5. — С. 44—50.

[3] Квантовые случайные процессы и открытые системы: Сб. статей 1982—1984 гг. / Под ред. Холево А. С. — (Математика. Новое в зарубежной науке; Вып. 42). — М., 1988.

[4] Маслов В. П. Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана. — М.: Наука, 1976.

[5] Смолянов О. Г., Трумен А. Уравнения Шрёдингера—Белавкина и ассоциированные с ними уравнения Колмогорова и Линдблада // Теор. и матем. физ. — 1999. — Т. 120, № 2. — С. 193—207.

[6] Смолянов О. Г., Фомин С. В. Меры на линейных топологических пространствах // Успехи мат. наук. — 1976. — Т. 31, № 4. — С. 3—56.

[7] Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. Псевдодифференциальные операторы в суперанализе // Успехи мат. наук. — 1986. — Т. 41, № 4. — С. 164—165.

[8] Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. Континуальные интегралы. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.

[9] Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. Простое доказательство теоремы Тариеладзе о достаточности положительно достаточных топологий // Теория вероятностей и её применения. — 1992. — Т. 37, № 2. — С. 421—424.

[10] Шамаров Н. Н. Функциональный интеграл по счётно-аддитивной мере, представляющий решение уравнения Дирака // Тр. ММО. — 2005. — Т. 66. — С. 263—276.

[11] Davies E. B. One-Parameter Semigroups. — London: Academic Press, 1980.

[12] Diestel J., Uhl J. J., jr. Vector Measures. — Providence: Amer. Math. Soc., 1977.

[13] Robertson A. P., Robertson W. Topological Vector Spaces. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980.

[14] Shamarov N. N. Matrix-valued cylindrical measures of Markov type and their Fourier transforms // Russ. J. Math. Phys. — 2003. — Vol. 10, no. 3. — P. 1—15.

[15] Smolyanov O. G., Weizsäcker H. V., Wittich O. Brownian motion on a manifold as a limit of stepwise conditioned standard Brownian motions // Can. Math. Soc., Conference Proceedings (Conference dedicated to 60th birthday of S. Albeverio). — 2000. — Vol. 29. — P. 589—602.

[16] Watanabe H. Path integral for some systems of partial differential equations // Proc. Japan Acad. Ser. A. — 1984. — Vol. 60. — P. 86—89.

[17] Watanabe H., Ito Y. A construction of the fundamental solution for the relativistic wave equation // Tokyo J. Math. — 1983. — Vol. 7, no. 1. — P. 99—117.