Условия Ренкина—Гюгонио и балансовые законы для δ-ударных волн*

В. М. ШЕЛКОВИЧ
Санкт-Петербургский
архитектурно-строительный университет
e-mail: shelkv@vs1567.spb.edu

УДК 517.9

Ключевые слова: гиперболические системы законов сохранения, условия Ренкина—Гюгонио, δ-ударные волны, балансовые законы переноса.

Аннотация

Для двух классов (одномерных) гиперболических систем законов сохранения вводятся новые определения решений типа δ-ударных волн. Получены соответствующие условия Ренкина—Гюгонио для δ-ударных волн и дана их геометрическая и физическая интерпретация. Выведены балансовые законы переноса для «площади», массы и момента количества движения δ-ударных волн.

Abstract

V. M. Shelkovich, The Rankine–Hugoniot conditions and balance laws for δ-shocks, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 6, pp. 213—229.

New definitions of δ-shock wave-type solutions are introduced for two (one-dimensional) types of hyperbolic systems of conservation laws. Corresponding Rankine–Hugoniot conditions for δ-shocks are derived, and their geometrical interpretation is given. Balance laws connected with "area," mass, and momentum transportation for δ-shocks are derived.

1. Введение

1.1. Сингулярные решения систем законов сохранения

Рассмотрим два типа гиперболических систем законов сохранения

$$u_t + \big(F(u,v)\big)_x = 0, \quad v_t + \big(G(u,v)\big)_x = 0 \tag{1.1}$$

и

$$v_t + \big(G(u,v)\big)_x = 0, \quad (uv)_t + \big(H(u,v)\big)_x = 0, \tag{1.2}$$

где $F(u,v)$, $G(u,v)$, $H(u,v)$ — гладкие функции, *линейные* по v, $u = u(x,t)$, $v = v(x,t) \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

*Статья написана при частичной поддержке РФФИ, грант 02-01-00483, и Немецкого научно-исследовательского сообщества, проект 436 RUS 113/593/3.

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 6, с. 213—229.

Как известно, такие системы законов сохранения даже в случае гладких (и тем более в случае разрывных) начальных данных $\big(u^0(x), v^0(x)\big)$ могут иметь разрывные решения. В этом случае (например, для системы (1.1)) мы говорим, что пара функций $\big(u(x,t), v(x,t)\big) \in L^\infty\big(\mathbb{R}\times(0,\infty);\mathbb{R}^2\big)$ является интегральным решением задачи Коши (1.1) $\big(u^0(x), v^0(x)\big)$, если для всех основных функций $\varphi(x,t) \in \mathcal{D}\big(\mathbb{R}\times[0,\infty)\big)$ имеют место интегральные тождества

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty\!\!\int (u\varphi_t + F(u,v)\varphi_x)\,dx\,dt + \int u^0(x)\varphi(x,0)\,dx = 0,\\ &\int_0^\infty\!\!\int (v\varphi_t + G(u,v)\varphi_x)\,dx\,dt + \int v^0(x)\varphi(x,0)\,dx = 0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где через $\int \cdot\, dx$ обозначен несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdot\, dx$. Определение интегрального решения для системы (1.2) вводится аналогичным образом.

Как известно [3, 6, 10—18, 22—27], существуют такие «неклассические» ситуации, когда задача Римана для гиперболической (2×2)-системы не имеет L^∞-решений, кроме как для некоторых частных случаев начальных данных. В отличие от «стандартных» ситуаций, в этих случаях вторая *линейная* компонента решения v может содержать дельта-меры, тогда как первая компонента решения u имеет ограниченную вариацию, что и приводит к необходимости введения нового типа обобщённых решений, называемых δ-ударными волнами.

Так, для некоторых частных случаев систем (1.1) или (1.2) задача Коши с кусочно-постоянными начальными значениями

$$u^0(x) = u_0 + u_1 H(-x), \quad v^0(x) = v_0 + v_1 H(-x), \tag{1.4}$$

где u_0, u_1, v_0, v_1 — константы, $H(\xi)$ — функция Хевисайда, может допускать обобщённое решение в виде δ-ударной волны:

$$\begin{aligned} &u(x,t) = u_0 + u_1 H(-x+ct),\\ &v(x,t) = v_0 + v_1 H(-x+ct) + e(t)\delta(-x+ct), \end{aligned} \tag{1.5}$$

где $e(t)$ — гладкая функция, $e(0)=0$, $\delta(\xi)$ — дельта-функция Дирака.

Теория δ-ударных волн в настоящее время интенсивно развивается. Особое внимание уделяется системе «газовой динамики без давления» [16, 24, 26]. Это связано с тем, что система «газовой динамики без давления» используется как модель для описания формирования крупномасштабной структуры вселенной [21, 28], а также для описания движения совокупности свободных частиц, которые слипаются при соударениях.

Известно несколько подходов к построению решений типа δ-ударных волн. В этой области имеется много сложных нерешённых проблем. Одна из проблем, возникающая при определении таких решений, состоит в том, что, так или иначе, необходимо определять *сингулярную суперпозицию* распределений (например, произведение функции Хевисайда и δ-функции). Другая проблема состоит в необходимости определить, в каком смысле обобщённое решение типа (1.5) удовлетворяет нелинейным системам (1.1), (1.2). Перечислим некоторые возможности.

В [14] для получения решения в виде δ-ударной волны для системы

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0, \quad v_t + (uv)_x = 0$$

(здесь $F(u,v) = u^2/2$, $G(u,v) = vu$) с начальными данными (1.4) используется параболическая регуляризация системы

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = \varepsilon u_{xx}, \quad v_t + (uv)_x = \varepsilon v_{xx}.$$

В этом случае решение типа δ-ударной исходной задачи определяется как слабый предел решения регуляризованной задачи $\big(u(x,t,\varepsilon), v(x,t,\varepsilon)\big)$ при $\varepsilon \to +0$.

В [15] для нахождения решения в виде δ-ударной волны для системы

$$u_t + \big(f(u)\big)_x = 0, \quad v_t + \big(g(u)v\big)_x = 0$$

(здесь $F(u,v) = f(u)$, $G(u,v) = vg(u)$) эта система сводится к системе уравнений Гамильтона—Якоби, а затем используется формула Лакса. В [13] решение в виде δ-ударной волны для этой системы строится как предел по вязкости самоподобного решения регуляризованной вязкостью системы. В [18] для частного случая $g(u) = f'(u)$ этой же системы при определении решения типа δ-ударной волны проблема произведения распределений решается с использованием усреднённой суперпозиции А. Вольперта [1].

В [17] было построено аппроксимативное решение типа δ-ударной волны для известной системы Кейфиц—Кранцера

$$u_t + (u^2 - v)_x = 0, \quad v_t + \left(\frac{1}{3}u^3 - u\right)_x = 0 \tag{1.6}$$

(здесь $F(u,v) = u^2 - v$, $G(u,v) = u^3 - u$) с начальными данными (1.4). Для этого использовались подход теории Коломбо и регуляризация Дафермоса—Ди Перны.

Имеется подход [6, 25, 27], в котором решения типа δ-ударной волны определяются следующим образом. Пусть $BM(\mathbb{R})$ — пространство ограниченных мер Бореля. Пару (u,v), где $u(x,t) \in L^\infty\big([0,\infty), L^\infty(\mathbb{R})\big)$, $v(x,t) \in C\big([0,\infty), BM(\mathbb{R})\big)$ и u измерима по отношению к v для почти всех $t \geqslant 0$, будем называть *мерозначным решением* задачи Коши для системы

$$v_t + \big(vf(u)\big)_x = 0, \quad (vu)_t + \big(vuf(u)\big)_x = 0 \tag{1.7}$$

(здесь $G(u,v) = vf(u)$, $H(u,v) = vuf(u)$) с начальными данными (1.4), если для всех $\varphi(x,t) \in \mathcal{D}\big(\mathbb{R} \times [0,\infty)\big)$ имеют место интегральные тождества

$$\iint_0^\infty \bigl(\varphi_t + f(u)\varphi_x\bigr)\,v(dx,t) = 0,$$
$$\iint_0^\infty u\bigl(\varphi_t + f(u)\varphi_x\bigr)\,v(dx,t) = 0. \tag{1.8}$$

С использованием определения (1.8) были получены формулы, задающие решение типа δ-ударной волны в форме

$$\bigl(u(x,t), v(x,t)\bigr) = \begin{cases} (u^-, v^-), & x < \phi(t), \\ \Bigl(u_\delta, w(t)\delta\bigl(x-\phi(t)\bigr)\Bigr), & x = \phi(t), \\ (u^+, v^+), & x > \phi(t). \end{cases} \tag{1.9}$$

Здесь u^-, u^+ и u_δ — скорости перед разрывом, после разрыва и на линии разрыва соответственно, $\phi(t) = \sigma_\delta t$ — уравнение линии разрыва.

В рамках упомянутого подхода решения типа δ-ударной волны были построены в [25] для системы

$$u_t + (u^2)_x = 0, \quad v_t + (uv)_x = 0$$

(здесь $F(u,v) = u^2$, $G(u,v) = vu$), в [6] — для системы «газовой динамики без давления»

$$v_t + (vu)_x = 0, \quad (vu)_t + (vu^2)_x = 0 \tag{1.10}$$

(здесь $G(u,v) = uv$, $H(u,v) = vu^2$, $v \geqslant 0$ — плотность, u — скорость), в [27] — для системы (1.7). При этом использовались начальные данные (1.4).

В серии работ [3, 7—12, 22, 23] был разработан новый асимптотический метод исследования динамики распространения и взаимодействия различного рода сингулярностей квазилинейных дифференциальных уравнений и гиперболических систем законов сохранения, названный *методом слабых асимптотик*. Главную роль в этом методе играет определение *слабого асимптотического решения* задачи Коши, которое допускает предельный переход в *слабом смысле* при $\varepsilon \to 0$, где ε — параметр регуляризации. В частности, в методе используются идеи В. П. Маслова о том, что условия Ренкина—Гюгонио можно получать непосредственно из дифференциального уравнения, рассматриваемого в слабом смысле. При построении *асимптотического решения* задачи Коши используются *алгебры особенностей* В. П. Маслова [2, 4, 20]. В рамках метода слабых асимптотик в [3, 11, 12] для систем (1.1) и (1.2) были введены новые определения решения типа δ-ударной волны в виде интегральных тождеств (2.2) и (2.9) соответственно. Эти определения являются естественными обобщениями определения L^∞-обобщённого решения (1.3). Они были получены с помощью анализа слабых асимптотических решений типа δ-ударных волн. В [3, 10—12, 22, 23] было дано описание динамики распространения и взаимодействия δ-ударных волн. Упомянем, что в рамках метода слабых асимптотик в [22] впервые была решена важная открытая проблема построения точных решений типа δ-ударных волн для системы Кейфиц—Кранцера (1.6) и её обобщения.

Для δ-ударных волн условиями устойчивости служат условия «сверхсжатия» [13, 17, 25] (см. [19])

$$\lambda_1(u_+, v_+) \leqslant \sigma_\delta \leqslant \lambda_1(u_-, v_-), \quad \lambda_2(u_+, v_+) \leqslant \sigma_\delta \leqslant \lambda_2(u_-, v_-), \tag{1.11}$$

где $\lambda_1(u, v)$ и $\lambda_2(u, v)$ — собственные значения характеристической матрицы гиперболической системы законов сохранения, σ_δ — скорость распространения δ-ударных волн, u_-, v_- и u_+, v_+ — соответственно левое и правое значения u и v на линии разрыва. Условия (1.11) означают, что все характеристики сходятся с двух сторон на линию разрыва.

1.2. Основные результаты

В разделе 2 приведены системы интегральных тождеств, которые являются для систем (1.1) и (1.2) определениями решений типа δ-ударных волн (см. определения 2.1, 2.2). Насколько нам известно, все одномерные системы, допускающие решения типа δ-ударных волн, являются частными случаями систем (1.1) и (1.2). С использованием этих определений в теоремах 2.1, 2.2 выводятся условия Ренкина—Гюгонио для δ-ударных волн. В разделе 3 дана геометрическая и физическая интерпретация условий Ренкина—Гюгонио для δ-ударных волн. Получены балансовые законы переноса для площади, массы и момента количества движения (теоремы 3.1, 3.2). Рассмотрен также геометрический аспект образования δ-ударной волны из гладких компактных начальных данных (u^0, v^0). Основные результаты статьи были представлены в препринте [23].

2. Решения типа δ-ударных волн

2.1. Обобщённые решения и условия Ренкина—Гюгонио для δ-ударных волн. Случай системы (1.1)

Пусть $\Gamma = \{\gamma_i : i \in I\}$ — связный граф на верхней полуплоскости $\{(x, t)$: $x \in \mathbb{R},\ t \in [0, \infty)\} \in \mathbb{R}^2$, состоящий из гладких кривых γ_i, $i \in I$, где I — конечное множество. Обозначим через I_0 такое подмножество I, что кривая γ_k при $k \in I_0$ имеет начало на оси x (при $t = 0$), и через $\Gamma_0 = \{x_k^0 : k \in I_0\}$ — множество начальных точек кривых γ_k, $k \in I_0$.

Рассмотрим начальные данные вида

$$(u^0, v^0), \quad v^0(x) = V^0(x) + e^0\delta(\Gamma_0), \tag{2.1}$$

где $u^0, V^0 \in L^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $e^0\delta(\Gamma_0) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{k \in I_0} e_k^0 \delta(x - x_k^0)$, e_k^0 — константы, $k \in I_0$.

Введём определение решения типа δ-ударной волны для системы (1.1).

Определение 2.1 ([3,11,12]). Пара распределений $\big(u(x,t), v(x,t)\big)$ и граф Γ, где $v(x,t)$ представляется в виде

$$v(x,t) = V(x,t) + e(x,t)\delta(\Gamma),$$

$u, V \in L^\infty(\mathbb{R}\times(0,\infty);\mathbb{R})$, $e(x,t)\delta(\Gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i\in I} e_i(x,t)\delta(\gamma_i)$, $e_i(x,t) \in C^1(\Gamma)$, $i \in I$, называется *обобщённым решением типа δ-ударной волны* системы (1.1) с начальными данными (2.1), если для всех основных функций $\varphi(x,t) \in \mathcal{D}\big(\mathbb{R}\times[0,\infty)\big)$ имеют место интегральные тождества

$$\begin{gathered}
\int_0^\infty\!\!\int (u\varphi_t + F(u,V)\varphi_x)\,dx\,dt + \int u^0(x)\varphi(x,0)\,dx = 0,\\
\int_0^\infty\!\!\int (V\varphi_t + G(u,V)\varphi_x)\,dx\,dt + \sum_{i\in I}\int_{\gamma_i} e_i(x,t)\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial\mathbf{l}}\,dl + \\
+ \int V^0(x)\varphi(x,0)\,dx + \sum_{k\in I_0} e_k^0\varphi(x_k^0,0) = 0,
\end{gathered} \tag{2.2}$$

где $\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial\mathbf{l}}$ — тангенциальная производная вдоль дуг графа Γ. Здесь $\int_{\gamma_i} \cdot\, dl$ обозначает криволинейный интеграл по дуге γ_i.

Теорема 2.1. *Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}\times(0,\infty)$ — область, разделённая гладкой кривой Γ на две части $\Omega_\mp$, пара $\big(u(x,t), v(x,t)\big)$ и Γ — обобщённое решение типа δ-ударной волны для системы* (1.1), *причём функции $\big(u(x,t), v(x,t)\big)$ являются гладкими в $\Omega_\mp$. Тогда на Γ выполнены условия Ренкина—Гюгонио для δ-ударной волны*

$$[F(u,v)]_\Gamma\nu_1 + [u]_\Gamma\nu_2 = 0, \quad [G(u,v)]_\Gamma\nu_1 + [v]_\Gamma\nu_2 = \frac{\partial e(x,t)|_\Gamma}{\partial\mathbf{l}}, \tag{2.3}$$

где $\mathbf{n} = (\nu_1,\nu_2)$ — единичная нормаль к кривой Γ, направленная из Ω_- в Ω_+,

$$[h(u,v)]|_\Gamma = \big(h(u_-,v_-) - h(u_+,v_+)\big)\big|_\Gamma \text{ —}$$

скачок функции $h\big(u(x,t),v(x,t)\big)$ через линию разрыва Γ, $(u_\mp, v_\mp)$ — левое и правое предельные значения (u,v) на линии разрыва.

Если $\Gamma = \{(x,t)\colon x = \phi(t)\}$, $\Omega_\pm = \big\{(x,t)\colon \pm\big(x-\phi(t)\big) > 0\big\}$, то условия Ренкина—Гюгонио (2.3) *переписываются в виде*

$$\dot\phi(t) = \frac{[F(u,v)]}{[u]}\bigg|_{x=\phi(t)}, \quad \dot e(t) = \left([G(u,v)] - [v]\frac{[F(u,v)]}{[u]}\right)\bigg|_{x=\phi(t)}, \tag{2.4}$$

где $e(t) \stackrel{\text{def}}{=} e(x,t)|_{x=\phi(t)}$, $\dot{(\cdot)} = \frac{d}{dt}(\cdot)$.

Доказательство. Выбирая основные функции $\varphi(x,t)$ с компактным носителем в $\Omega_\pm$, по (2.2) мы найдём, что система (1.1) удовлетворяется в области $\Omega_\pm$.

Выбирая основные функции $\varphi(x,t)$ с носителем в Ω, получим из второго интегрального тождества (2.2), что

$$0=\int_0^\infty\!\!\int \big(V\varphi_t+G(u,V)\varphi_x\big)\,dx\,dt= \\ =\iint_{\Omega_-}\big(V\varphi_t+G(u,V)\varphi_x\big)\,dx\,dt+\iint_{\Omega_+}\big(V\varphi_t+G(u,V)\varphi_x\big)\,dx\,dt.$$

Интегрируя по частям, с учётом (1.1) получим

$$\iint_{\Omega_\pm}\big(V\varphi_t+G(u,V)\varphi_x\big)\,dx\,dt= \\ =-\iint_{\Omega_\pm}\Big(V_t+\big(G(u,V)\big)_x\Big)\varphi\,dx\,dt\mp\int_\Gamma\big(\nu_2v_\pm+\nu_1G(u_\pm,v_\pm)\big)\varphi\,dl= \\ =\mp\int_\Gamma\big(\nu_2v_\pm+\nu_1G(u_\pm,v_\pm)\big)\varphi\,dl.$$

Суммируя два последних соотношения, будем иметь для всех $\varphi(x,t)\in\mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_0^\infty\!\!\int \big(V\varphi_t+G(u,V)\varphi_x\big)\,dx\,dt=\int_\Gamma\big([G(u,v)]\nu_1+[v]\nu_2\big)\varphi(x,t)\,dl. \tag{2.5}$$

Интегрируя по частям, легко получить, что

$$\int_\Gamma e(x,t)\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial\mathbf{l}}\,dl=-\int_\Gamma\frac{\partial e(x,t)}{\partial\mathbf{l}}\varphi(x,t)\,dl, \tag{2.6}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{l}}e(x,t)|_\Gamma=\frac{\partial}{\partial t}e(x,t)|_\Gamma\nu_1-\frac{\partial}{\partial x}e(x,t)|_\Gamma\nu_2,\quad \mathbf{l}=(-\nu_2,\nu_1).$$

Сложив (2.5) и (2.6), получим для всех $\varphi(x,t)\in\mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_\Gamma\left([G(u,v)]\nu_1+[v]\nu_2-\frac{\partial e(x,t)}{\partial\mathbf{l}}\right)\varphi(x,t)\,dl=0,$$

что доказывает второе соотношение (2.3).

Первое соотношение (2.3) докажем, используя (2.5).

Если $\Gamma=\{(x,t)\colon x=\phi(t)\}$, то

$$\mathbf{n}=(\nu_1,\nu_2)=\frac{1}{\sqrt{1+\big(\dot\phi(t)\big)^2}}\big(1,-\dot\phi(t)\big),$$

$$\frac{\partial\varphi(x,t)|_\Gamma}{\partial\mathbf{l}} = \frac{1}{\sqrt{1+\big(\dot\phi(t)\big)^2}}\bigg(\frac{\partial\varphi\big(\phi(t),t\big)}{\partial t} + \dot\phi(t)\frac{\partial\varphi\big(\phi(t),t\big)}{\partial x}\bigg) = \\ = \frac{1}{\sqrt{1+\big(\dot\phi(t)\big)^2}}\frac{d\varphi(\phi(t),t)}{dt}. \quad (2.7)$$

Согласно (2.7) из (2.3) следует (2.4). □

Первое соотношение (2.3) (или (2.4)) является *стандартным* соотношением Ренкина—Гюгонио. Левая часть второго соотношения Ренкина—Гюгонио (2.3) (или (2.4)) — так называемый *дефицит Ренкина—Гюгонио* в v.

2.2. Обобщённые решения и условия Ренкина—Гюгонио для δ-ударных волн. Случай системы (1.2)

Теперь введём определение обобщённого решения для системы (1.2), обобщающее соответствующее определение, введённое впервые в [11] для случая системы «газовой динамики без давления» (1.10). Предположим, что дуги графа $\Gamma = \{\gamma_i : i \in I\}$ имеют вид $\gamma_i = \{(x,t) : x = \phi_i(t)\}$, $i \in I$. В [11] было показано, что задача Коши для такого типа систем является корректно определённой, если к начальным данным (2.1) мы добавим начальные скорости разрывов $\dot\phi_k(0)$, $k \in I_0$. Это связано с тем, что, как видно из (2.10), система условий Ренкина—Гюгонио является системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Как следует из приведённого ниже второго интегрального тождества (2.9), если начальные данные $\big(u^0(x), v^0(x)\big)$ содержат дельта-функции (т. е. $e^0_k \ne 0$, $k \in I_0$), то для единственности решения задачи Коши необходимо задать начальные скорости вдоль траекторий δ-ударных волн. Однако эти начальные скорости не определяется начальными данными $\big(u^0(x), v^0(x)\big)$. Этот вопрос для системы «газовой динамики без давления» (1.10) был подробно исследован в [11]. В частности, было показано, что результаты [11, теорема 4.4, следствие 4.5.] для системы (1.10) соответствуют аналогичным результатам работ [6, 24], если отождествить скорость на линии разрыва $x = \phi(t)$ в (1.9) с фазовой скоростью δ-ударной волны: $u_\delta(t) = \dot\phi(t)$.

Итак, для системы (1.2) вместо начальных данных $\big(u^0(x), v^0(x)\big)$ мы будем использовать начальные данные

$$(u^0, v^0; \dot\phi_k(0),\ k \in I_0), \quad v^0(x) = V^0(x) + e^0\delta(\Gamma_0), \tag{2.8}$$

где $u^0, V^0 \in L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $e^0\delta(\Gamma_0) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{k\in I_0} e^0_k\delta(x - x^0_k)$, e^0_k — константа, $x^0_k = \phi_k(0)$, $\dot\phi_i(0)$ — начальная скорость, $k \in I_0$.

Определение 2.2. Пара распределений $\big(u(x,t), v(x,t)\big)$ и граф Γ из определения 2.1 называется *обобщённым решением типа δ-ударной волны* для системы (1.2) с начальными данными (2.8), если для всех $\varphi(x,t) \in \mathcal{D}\big(\mathbb{R}\times[0,\infty)\big)$ имеют место интегральные тождества

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty\!\!\int (V\varphi_t + G(u,V)\varphi_x)\,dx\,dt + \sum_{i\in I}\int_{\gamma_i} e_i(x,t)\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial\mathbf{l}}\,dl + \\
&\quad + \int V^0(x)\varphi(x,0)\,dx + \sum_{k\in I_0} e_k^0\varphi(x_k^0,0) = 0, \\
&\int_0^\infty\!\!\int (uV\varphi_t + H(u,V)\varphi_x)\,dx\,dt + \sum_{i\in I}\int_{\gamma_i} e_i(x,t)\dot\phi_i(t)\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial\mathbf{l}}\,dl + \\
&\quad + \int u^0(x)V^0(x)\varphi(x,0)\,dx + \sum_{k\in I_0} e_k^0\dot\phi_k(0)\varphi(x_k^0,0) = 0.
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

Теорема 2.2. *Предположим, что $\Omega\subset\mathbb{R}\times(0,\infty)$ — область, разделённая гладкой кривой Γ на две части $\Omega_\mp$, пара $\big(u(x,t),v(x,t)\big)$ и Γ — обобщённое решение типа δ-ударной волны для системы* (1.2), *причём функции $u(x,t)$, $v(x,t)$ являются гладкими в $\Omega_\mp$. Тогда на Γ выполнены условия Ренкина—Гюгонио для δ-ударной волны*

$$
\begin{aligned}
\dot e(t) &= \big([G(u,v)] - [v]\dot\phi(t)\big)\big|_{x=\phi(t)}, \\
\frac{d\big(e(t)\dot\phi(t)\big)}{dt} &= \big([H(u,v)] - [uv]\dot\phi(t)\big)\big|_{x=\phi(t)}.
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

Теорема 2.2 доказывается аналогично теореме 2.1.

Условия Ренкина—Гюгонио (2.10) являются аналогом двух уравнений из системы условий Ренкина—Гюгонио [27, (3.7)].

Системы интегральных тождеств (2.2) и (2.9) являются непосредственными обобщениями обычных интегральных тождеств (1.3). Так, интегральные тождества (2.2) отличаются от интегральных тождеств (1.3) дополнительным слагаемым

$$
\int_\Gamma e(x,t)\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial\mathbf{l}}\,dl = \sum_{i\in I}\int_{\gamma_i} e_i(x,t)\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial\mathbf{l}}\,dl
$$

во втором тождестве. Этот дополнительный член связан с наличием дефицита Ренкина—Гюгонио в v. Интегральные тождества (2.9) отличаются от интегральных тождеств (1.3) дополнительными слагаемыми

$$
\int_\Gamma e(x,t)\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial\mathbf{l}}\,dl, \quad \int_\Gamma e(x,t)\dot\phi(t)\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial\mathbf{l}}\,dl = \sum_{i\in I}\int_{\gamma_i} e_i(x,t)\dot\phi_i(t)\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial\mathbf{l}}\,dl.
$$

3. Геометрический и физический смысл условий Ренкина—Гюгонио для δ-ударных волн

3.1. Геометрический смысл условий Ренкина—Гюгонио

Известно, что если $\big(u(x,t), v(x,t)\big) \in L^\infty(\mathbb{R}\times(0,\infty);\mathbb{R}^2)$ — обобщённое решение, компактное по x, для системы (1.1) или (1.2), то

$$\int u(x,t)\,dx = \int u^0(x)\,dx, \quad \int v(x,t)\,dx = \int v^0(x)\,dx, \qquad t \geqslant 0, \tag{3.1}$$

где $\big(u^0(x), v^0(x)\big)$ — L^∞-начальные данные. Это означает, что полная площадь, полная масса, полный момент количества движения и т. п. не зависят от времени (см. рис. 1).

Для решений типа δ-ударной волны законы сохранения (3.1) не имеют места, но имеются балансовые законы, обобщающие законы сохранения (3.1).

Обозначим через

$$\begin{aligned}
S_u(t) &= \int\limits_{-\infty}^{\phi(t)} u(x,t)\,dx + \int\limits_{\phi(t)}^{+\infty} u(x,t)\,dx,\\
S_v(t) &= \int\limits_{-\infty}^{\phi(t)} v(x,t)\,dx + \int\limits_{\phi(t)}^{+\infty} v(x,t)\,dx,\\
S_{uv}(t) &= \int\limits_{-\infty}^{\phi(t)} u(x,t)v(x,t)\,dx + \int\limits_{\phi(t)}^{+\infty} u(x,t)v(x,t)\,dx,\\
S_u(0) &= \int\limits_{-\infty}^{0} u^0(x)\,dx + \int\limits_{0}^{+\infty} u^0(x)\,dx,\\
S_v(0) &= \int\limits_{-\infty}^{0} v^0(x)\,dx + \int\limits_{0}^{+\infty} v^0(x)\,dx,\\
S_{uv}(0) &= \int\limits_{-\infty}^{0} u^0(x)v^0(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} u^0(x)v^0(x)\,dx
\end{aligned} \tag{3.2}$$

площади под графиками $y = u(x,t)$, $y = V(x,t)$, $y = u(x,t)V(x,t)$ и $y = u^0(x)$, $y = V^0(x)$, $y = u^0(x)V^0(x)$ соответственно, где $x = \phi(t)$ — линия в верхней полуплоскости $\{(x,t)\colon x \in \mathbb{R},\ t \in [0,\infty)\}$, выходящая из точки $\phi(0) = 0$, $v(x,t) = V(x,t)$ при $x \neq \phi(t)$, $v^0(x) = V^0(x)$ при $x \neq 0$.

Теорема 3.1. *Пусть пара распределений $\big(u(x,t), v(x,t)\big)$ — обобщённое решение типа δ-ударной волны задачи Коши* (1.1), (2.1), *где $v(x,t) = V(x,t)+e(t)\delta(\Gamma)$, $\Gamma = \{(x,t)\colon x = \phi(t)\}$ — линия разрыва, $u(x,t)$, $V(x,t)$ — функции с компактным носителем по x. Тогда имеют место следующие балансовые законы*:

$$\dot{S}_u(t) = 0, \quad \dot{S}_v(t) = -\dot{e}(t), \tag{3.3}$$

где

$$\dot{e}(t) = \left([G(u,v)] - [v]\frac{[F(u,v)]}{[u]}\right)\Big|_{x=\phi(t)} \, -$$

дефицит Ренкина—Гюгонио, т. е.

$$\begin{gathered}\int\limits_{-\infty}^{\phi(t)} u(x,t)\,dx + \int\limits_{\phi(t)}^{+\infty} u(x,t)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} u^0(x)\,dx + \int\limits_{0}^{+\infty} u^0(x)\,dx,\\ \int\limits_{-\infty}^{\phi(t)} v(x,t)\,dx + \int\limits_{\phi(t)}^{+\infty} v(x,t)\,dx + e(t) = \int\limits_{-\infty}^{0} v^0(x)\,dx + \int\limits_{0}^{+\infty} v^0(x)\,dx + e^0,\end{gathered} \tag{3.4}$$

где e^0 — начальная амплитуда дельта-функции.

Доказательство. Докажем второе соотношение (3.3). Обозначим через $v_\pm = \lim\limits_{x\to\phi(t)\pm 0} v(x,t)$ правое и левое значения функции $v(x,t)$ на кривой Γ. Дифференцируя второе соотношение (3.2) и используя второе уравнение системы (1.1), получим

$$\begin{aligned}\dot{S}_v(t) &= v_-\dot{\phi}(t) - v_+\dot{\phi}(t) + \int\limits_{-\infty}^{\phi(t)} v_t(x,t)\,dx + \int\limits_{\phi(t)}^{+\infty} v_t(x,t)\,dx = \\ &= [v]|_{x=\phi(t)}\dot{\phi}(t) - \int\limits_{-\infty}^{\phi(t)} \big(G(u,v)\big)_x\,dx - \int\limits_{\phi(t)}^{+\infty} \big(G(u,v)\big)_x\,dx = [v]|_{x=\phi(t)}\dot{\phi}(t) - \\ &- [G(u,v)]|_{x=\phi(t)} + G\big(u(-\infty,t), v(-\infty,t)\big) - G\big(u(+\infty,t), v(+\infty,t)\big).\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$G\big(u(-\infty,t), v(-\infty,t)\big) = G\big(u(+\infty,t), v(+\infty,t)\big) = G(0,0),$$

и используя условия Ренкина—Гюгонио (2.4), будем иметь

$$\dot{S}_v(t) = \left([v]\frac{[F(u,v)]}{[u]}\Big|_{x=\phi(t)} - [G(u,v)]\right)\Big|_{x=\phi(t)}.$$

Первое балансовое соотношение (3.3) представляет собой известное балансовое соотношение для $\in L^\infty$-обобщённых решений и доказывается аналогично предыдущему.

Интегрируя (3.3), мы получим (3.4). □

Из второго соотношения (3.4) видно, что смысл амплитуды $e(t)$ дельта-функции — «площадь» линии разрыва. Более того, «полная площадь» $S_v(t) + e(t)$ не зависит от времени.

Теперь мы рассмотрим для системы (1.1) геометрический аспект образования δ-ударной волны из гладких начальных данных (u^0, v^0), имеющих компактный носитель.

Известно, что решения системы законов сохранения u и v за конечное время могут стать *многозначными*. При этом каждая многозначная часть волнового профиля должна быть заменена соответствующим разрывом. Построение разрыва в случае разрушающейся волны было рассмотрено в [5, 2.8]. Ниже мы рассмотрим процесс построения линии разрыва δ-ударной волны в многозначном волновом профиле разрушающейся волны.

Обозначим через $A_u(t)$ и $A_v(t)$ площади частей в соответствующих опрокидывающихся (многозначных) профилях u и v слева от разрыва, а через $B_u(t)$ и $B_v(t)$ — площади частей в соответствующих опрокидывающихся (многозначных) профилях u и v справа от разрыва (рис. 1 и 2).

Если $t = t^*$ — момент образования δ-ударной волны из гладкого решения, то согласно (3.4) в этот момент *правильное* положение разрыва для δ-ударной волны в u и v должно быть таким, чтобы этот разрыв отсекал доли равной площади $B_u(t^*) = A_u(t^*)$ и $B_v(t^*) = A_v(t^*)$, как на рис. 1. При $t > t^*$, согласно (3.4), *правильное* положение разрыва для δ-ударной волны в u и v должно быть таким, чтобы этот разрыв в u отрезал доли равной площади $B_u(t) = A_u(t)$ (см. рис. 1), а разрыв в v отсекал доли, площади которых удовлетворяют соотношению $B_v(t) = A_v(t) + e(t)$ (см. рис. 2).

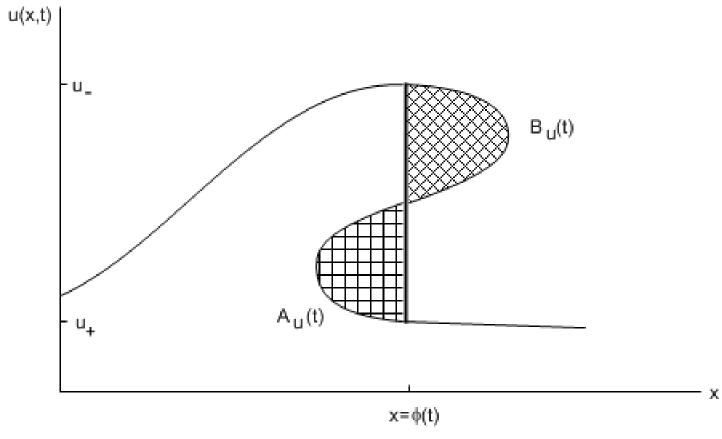

Рис. 1. Построение областей равной площади для положения δ-ударной волны в опрокидывающемся профиле $u(x,t)$

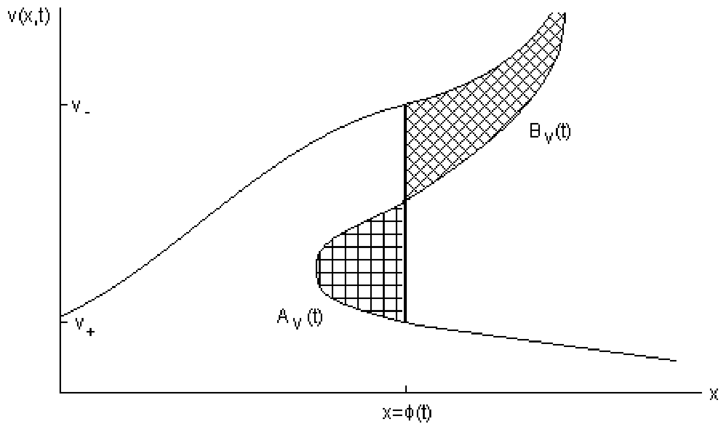

Рис. 2. Построение областей неравной площади для положения δ-ударной волны в опрокидывающемся профиле $v(x,t)$

Отметим, что в момент $t = t^*$ формирования δ-ударной волны площадь $S_v(t)$ — непрерывная функция, а её производная $\dot{S}_v(t)$ терпит разрыв.

Повторяя почти дословно доказательство теоремы 3.1, легко доказать следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть пара распределений $\big(u(x,t), v(x,t)\big)$ — обобщённое решение типа δ-ударной волны задачи Коши* (1.2), (2.8), *где $v(x,t) = V(x,t)+e(t)\delta(\Gamma)$, $\Gamma = \{(x,t)\colon x = \phi(t)\}$ — линия разрыва, $u(x,t)$, $V(x,t)$ — функции с компактным носителем по x. Тогда имеют место следующие балансовые законы*:

$$\dot{S}_v(t) = -\dot{e}(t), \quad \dot{S}_{uv}(t) = -\frac{d\big(e(t)\dot{\phi}(t)\big)}{dt},$$

где $\dot{e}(t)$, $\frac{d(e(t)\dot{\phi}(t))}{dt}$ определены в (2.10). *Таким образом,*

$$\int\limits_{-\infty}^{\phi(t)} v(x,t)\,dx + \int\limits_{\phi(t)}^{+\infty} v(x,t)\,dx + e(t) = \int\limits_{-\infty}^{0} v^0(x)\,dx + \int\limits_{0}^{+\infty} v^0(x)\,dx + e^0,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\phi(t)} u(x,t)v(x,t)\,dx + \int\limits_{\phi(t)}^{+\infty} u(x,t)v(x,t)v(x,t)\,dx + e(t)\dot{\phi}(t) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} u^0(x)v^0(x)\,dx + \int\limits_{0}^{+\infty} u^0(x)v^0(x)\,dx + e^0\dot{\phi}(0),$$

где e^0 — начальная амплитуда дельта-функции, $\dot{\phi}(0)$ — начальная скорость δ-ударной волны.

Согласно теореме 3.2 «полные площади» $S_v(t) + e(t)$ и $S_{uv}(t) + e(t)\dot{\phi}(t)$ не зависят от времени.

Геометрический аспект формирования δ-ударной волны из компактных начальных данных для системы (1.2) может быть рассмотрен аналогично тому, как это было сделано выше для системы (1.1).

3.2. Физический смысл условий Ренкина—Гюгонио

Рассмотрим систему «газовой динамики без давления» (1.10), которая является частным случаем системы (1.2), где $G(u,v) = uv$, $H(u,v) = vu^2$. В этом случае $v(x,t) \geqslant 0$ имеет смысл плотности, а $u(x,t)$ — скорости, и следовательно, площадь $S_v(t) = M(t)$ является массой, а площадь $S_{uv}(t) = p(t)$ является моментом количества движения вне линии разрыва $x = \phi(t)$.

Как было доказано в [23],

$$\dot{e}(t) > 0. \tag{3.5}$$

Действительно, в этом случае система условий Ренкина—Гюгонио (2.10) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= [uv] - [v]\dot{\phi}(t)|_{x=\phi(t)}, \\ \frac{d\big(e(t)\dot{\phi}(t)\big)}{dt} &= [u^2 v] - [uv]\dot{\phi}(t)|_{x=\phi(t)}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Система «газовой динамики без давления» (1.10) имеет совпадающие собственные значения $\lambda_1(u) = \lambda_2(u) = u$, и в этом случае условие «сверхсжатия» (1.11) имеет вид

$$u_+ \leqslant \dot{\phi}(t) \leqslant u_-. \tag{3.7}$$

Учитывая (3.5) и (3.6), получим

$$\dot{e}(t) = v_-\big(u_- - \dot{\phi}(t)\big) + v_+(\dot{\phi}(t) - u_+),$$

что означает выполнение (3.5).

Если (u,v) — компактное по x обобщённое решение типа δ-ударной волны для системы (1.10), то согласно теореме 3.2 имеют место следующие балансовые соотношения для массы и момента количества движения:

$$\dot{e}(t) = -\dot{M}(t), \quad \frac{d\big(e(t)\dot{\phi}(t)\big)}{dt} = -\dot{p}(t) \tag{3.8}$$

и

$$M(t) + e(t) = M(0) + e^0, \quad p(t) + e(t)\dot{\phi}(t) = p(0) + e^0\phi(0), \tag{3.9}$$

где $M(0) = S_v(0)$, $p(0) = S_{uv}(0)$ — начальные масса и момент количества движения. Из (3.8), (3.5) следует неравенство

$$\dot{M}(t) < 0, \tag{3.10}$$

т. е. масса под графиком $y = V(x,t)$ является монотонно убывающей функцией по t.

Из (3.9) видно, что смысл амплитуды $e(t)$ дельта-функции — «масса» линии разрыва, а смысл $e(t)\dot{\phi}(t)$ — «момент количества движения» линии разрыва. «Полная масса» $M(t) + e(t)$ и «полный момент количества движения» $p(t) + e(t)\dot{\phi}(t)$ сохраняются во времени.

Для специальных начальных данных $M(0) = -e^0$, $p(0) = -e^0\phi(0)$, как следует из (3.9), точка разрыва $x = \phi(t)$ движется со скоростью

$$\dot{\phi}(t) = \frac{p(t)}{M(t)},$$

т. е. эта точка $x = \phi(t)$ является центром масс системы.

Согласно (3.5) и (3.10) имеет место процесс переноса массы из-под графика функции $y = V(x,t)$ на кривую разрыва $x = \phi(t)$.

В соответствии с (3.10), (3.9) возможно, что за конечное время $\tilde{t}$ вся начальная масса $M(0) + e^0$ сконцентрируется в точке $x = \phi(\tilde{t})$ линии разрыва $x = \phi(t)$. После этого момента возникнет состояние вакуума $v_- = v_+ = 0$ (везде, кроме линии разрыва), и, в соответствии с (3.6), упомянутая точка массы $e(\tilde{t}) = M(0) + e^0$ будет двигаться по прямой линии

$$x = \phi(t) = \dot{\phi}(\tilde{t})(t - \tilde{t}) + \phi(\tilde{t})$$

со скоростью $\dot{\phi}(\tilde{t})$.

Модель «газовой динамики без давления» может быть описана на дискретном уровне как множество движущихся частиц. При соударениях частицы слипаются, и в результате образуется одна новая массивная частица.

Литература

[1] Вольперт А. И. Пространства BV и квазилинейные уравнения // Мат. сб. — 1967. — Т. 73, № 2. — С. 225—267.

[2] Данилов В. Г., Маслов В. П., Шелкович В. М. Алгебры особенностей сингулярных решений квазилинейных строго гиперболических систем первого порядка // Теор. и матем. физ. — 1998. — Т. 114, № 1. — С. 3—55.

[3] Данилов В. Г., Шелкович В. М. Распространение и взаимодействие δ-ударных волн гиперболических систем законов сохранения // Докл. РАН. — 2004. — Т. 394, № 1. — С. 10—14.

[4] Маслов В. П. Три алгебры, отвечающие негладким решениям систем квазилинейных гиперболических уравнений // Успехи мат. наук. — 1980. — Т. 35, вып. 2. — С. 252—253.

[5] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.

[6] Bouchut F. On zero pressure gas dynamics // Adv. Math. Sci. Appl. — 1994. — Vol. 22. — P. 171—190.

[7] Danilov V. G., Omel'yanov G. A., Shelkovich V. M. Weak asymptotics method and interaction of nonlinear waves // Asymptotic Methods for Wave and Quantum Problems / M. Karasev, ed. — Amer. Math. Soc., 2003. — (Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2; Vol. 208). — P. 33—165.

[8] Danilov V. G., Shelkovich V. M. Propagation and interaction of nonlinear waves to quasilinear equations // Hyperbolic problems: Theory, Numerics, Applications (Eighth Int. Conf. in Magdeburg, February/March 2000, Vol. I). — Basel: Birkhäuser, 2001. — (Int. Series of Numerical Mathematics; Vol. 140). — P. 267—276.

[9] Danilov V. G., Shelkovich V. M. Propagation and interaction of shock waves of quasilinear equation // Nonlinear Stud. — 2001. — Vol. 8, no. 1. — P. 135—169.

[10] Danilov V. G., Shelkovich V. M. Propagation and interaction of delta-shock waves of a hyperbolic system of conservation laws // Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications. Proc. of the Ninth Int. Conf. on Hyperbolic Problems held in CalTech, Pasadena, March 25—29, 2002 / Hou Th. Y., Tadmor E., eds. — Springer, 2003. — P. 483—492.

[11] Danilov V. G., Shelkovich V. M. Delta-shock wave type solution of hyperbolic systems of conservation laws // Quart. Appl. Math. — 2005. — Vol. 63, no. 3. — P. 401—427.

[12] Danilov V. G., Shelkovich V. M. Dynamics of propagation and interaction of delta-shock waves in conservation law systems // J. Differential Equations. — 2005. — Vol. 211. — P. 333—381.

[13] Ercole G. Delta-shock waves as self-similar viscosity limits // Quart. Appl. Math. — 2000. — Vol. 58, no. 1. — P. 177—199.

[14] Joseph K. T. A Riemann problem whose viscosity solutions contain δ-measures // Asymptotic Anal. — 1993. — Vol. 7. — P. 105—120.

[15] Huang F. Existence and uniqueness of discontinuous solutions for a class nonstrictly hyperbolic systems // Advances in Nonlinear Partial Differential Equations and Related Areas. Proc. of Conf. Dedicated to Prof. Xiaqi Ding, China, 1997 / G.-Q. Chen (ed.) et al. — P. 187—208.

[16] Keyfitz B. L. Conservation laws, delta-shocks and singular shocks // Nonlinear Theory of Generalized Functions / M. Grosser, G. Hormann, M. Oberguggenberger, eds. — Chapman & Hall/CRC, 1999. — P. 99—112.

[17] Keyfitz B. L., Kranzer H. C. Spaces of weighted measures for conservation laws with singular shock solutions // J. Differential Equations. — 1995. — Vol. 118. — P. 420—451.

[18] Le Floch P. An existence and uniqueness result for two nonstrictly hyperbolic systems // Nonlinear Evolution Equations That Change Type.— Springer, 1990. — P. 126—138.

[19] Liu T.-P., Xin Zh. Overcompressive shock waves // Nonlinear Evolution Equations That Change Type.— Springer, 1990. — P. 139—145.

[20] Maslov V. P. Non-standard characteristics in asymptotical problems // Proc. of the Int. Congress of Mathematicians, August 16—24, 1983, Warszawa. Vol. I. — Amsterdam: North-Holland, 1984. — P. 139—185.

[21] Shandarin S. F., Zeldovich Ya. B. The large-scale structure of the universe: Turbulence, intermittence, strucrures in self-gravitating medium // Rev. Modern Phys. — 1989. — Vol. 61. — P. 185—220.

[22] Shelkovich V. M. Delta-shock waves of a class of hyperbolic systems of conservation laws // Patterns and Waves / A. Abramian, S. Vakulenko, V. Volpert, eds. — St. Petersburg: AkademPrint, 2003. — P. 155—168.

[23] Shelkovich V. M. A specific hyperbolic system of conservation laws admitting delta-shock wave type solutions. — Preprint 2003-059. — `http://www.math.ntnu.no/conservation/2003/059.html`.

[24] Sheng W., Zhang T. The Riemann Problem for the Transportaion Equations in Gas Dynamics. — Amer. Math. Soc., 1999. — (Mem. Amer. Math. Soc.; Vol. 654).

[25] Tan D., Zhang T., Zheng Y. Delta-shock waves as limits of vanishing viscosity for hyperbolic systems of conservation laws // J. Differential Equations. — 1994. — Vol. 112. — P. 1—32.

[26] Weinan E., Rykov Yu., Sinai Ya. G. Generalized variational principles, global weak solutions and behavior with random initial data for dystems of conservation laws arising in adhesion particlae dynamics // Comm. Math. Phys. — 1996. — Vol. 177. — P. 349—380.

[27] Yang H. Riemann problems for class of coupled hyperbolic systems of conservation laws // J. Differential Equations. — 1999. — Vol. 159. — P. 447—484.

[28] Zeldovich Ya. B. Gravitationnal instability: An approximate theory for large density perturbations // Astronom. and Astrophys. — 1970. — Vol. 5. — P. 84—89.