Регулярность по Биркгофу: критерий в терминах роста нормы функции Грина*

Е. А. ШИРЯЕВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 517.984

Ключевые слова: регулярность по Биркгофу, обыкновенные дифференциальные операторы.

Аннотация

Рассматривается обыкновенный дифференциальный оператор L, порождённый на отрезке $[0,1]$ дифференциальным выражением

$$l(y) = (-i)^n y^{(n)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x)y$$

и n нормированными однородными краевыми условиями, сосредоточенными на концах отрезка. Коэффициенты $p_k(x)$ предполагаются суммируемыми функциями. Известно, что если краевые условия регулярны по Биркгофу, то функция Грина $G(\lambda)$, являющаяся ядром интегрального оператора $(L-\lambda)^{-1}$, допускает асимптотическую оценку (при достаточно больших $|\lambda| > c_0$)

$$|G(\lambda)| \leqslant M|\lambda|^{\frac{-n+1}{n}},$$

где $M = M(c_0)$ — некоторая постоянная. В этой работе доказывается обратное утверждение: если указанная оценка выполняется на некоторых лучах в комплексной плоскости, то оператор L регулярен.

Abstract

E. A. Shiryaev, Birkhoff regularity in terms of the growth of the norm for the Green function, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 6, pp. 231—239.

We consider the ordinary differential operator L generated on $[0,1]$ by the differential expression

$$l(y) = (-i)^n y^{(n)}(x) + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y$$

and n linearly independent homogeneous boundary conditions at the endpoints. We assume that the coefficients $p_k(x)$ are Lebesgue integrable complex functions. If the boundary conditions are Birkhoff regular, then the Green function $G(\lambda)$, being the kernel of the operator $(L-\lambda)^{-1}$, admits the asymptotic estimate (for sufficiently large $|\lambda| > c_0$)

$$|G(\lambda)| \leqslant M|\lambda|^{\frac{-n+1}{n}},$$

where $M = M(c_0)$ is a certain constant. In the present paper, we prove the converse assertion: the fulfillment of this estimate on some rays implies the regularity of the operator L.

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 04-01-00712 и НШ-5247.2006.1.

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 6, с. 231—239.

1. Введение и формулировка основного результата

Пусть L — обыкновенный дифференциальный оператор, порождённый дифференциальным выражением

$$l(y) = (-i)^n y^{(n)}(x) + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y \qquad (1)$$

и n линейно независимыми однородными краевыми условиями на концах вида

$$\sum_{s=0}^{n-1} \bigl(a_{j,s}y^{(s)}(0) + b_{j,s}y^{(s)}(1)\bigr) = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Далее предполагаем, что коэффициенты $p_k(x)$ — суммируемые комплексные функции на $[0,1]$.

Число k_j ($j = 1, \ldots, n$, $0 \leqslant k_j \leqslant n-1$) называем порядком краевого условия, если это краевое условие содержит $y^{(k_j)}(0)$ или $y^{(k_j)}(1)$, но не содержит $y^{(\nu)}(0)$ и $y^{(\nu)}(1)$ при $\nu > k_j$. Рассмотрим краевые условия порядка $n-1$, если такие имеются. Заменяя их, если надо, линейными комбинациями, можно добиться того, чтобы число линейно независимых краевых условий порядка $n-1$ было не больше двух. Остальные краевые условия имеют порядок не выше $n-2$; применяя к ним тот же приём, сведём их число к минимуму и т. д.

Описанная процедура называется *нормировкой краевых условий*, а полученные в результате краевые условия — *нормированными* (см. [1]). Из способа их построения следует, что нормированные краевые условия должны иметь вид

$$U_j(y) := a_j y^{(k_j)}(0) + b_j y^{(k_j)}(1) + \\ + \sum_{s=0}^{k_j-1} \bigl(a_{j,s}y^{(s)}(0) + b_{j,s}y^{(s)}(1)\bigr) = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \qquad (2)$$

где

$$n-1 \geqslant k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_n \geqslant 0, \quad k_j > k_{j+2},$$

причём для каждого значения индекса j хотя бы одно из чисел a_j, b_j отлично от 0.

Отметим, что *краевые условия являются нормированными тогда и только тогда, когда их суммарный порядок $\kappa = k_1 + \ldots + k_m$ нельзя понизить, переходя к эквивалентным условиям.* Это утверждение доказано в [3].

Определим *регулярные* краевые условия. Обозначим $\varepsilon_j = \exp(2\pi i j/n)$, $j = 0, \ldots, n-1$, корни из 1.

В *чётном* случае $n = 2m$ нормированные краевые условия (2) называются регулярными, если число θ, определённое равенством

$$\theta = \begin{vmatrix} a_1\varepsilon_0^{k_1} & \ldots & a_1\varepsilon_{m-2}^{k_1} & a_1\varepsilon_{m-1}^{k_1} & b_1\varepsilon_m^{k_1} & b_1\varepsilon_{m+1}^{k_1} & \ldots & b_1\varepsilon_{2m-1}^{k_1} \\ a_2\varepsilon_0^{k_2} & \ldots & a_2\varepsilon_{m-2}^{k_2} & a_2\varepsilon_{m-1}^{k_2} & b_2\varepsilon_m^{k_2} & b_2\varepsilon_{m+1}^{k_2} & \ldots & b_2\varepsilon_{2m-1}^{k_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n\varepsilon_0^{k_n} & \ldots & a_n\varepsilon_{m-2}^{k_n} & a_n\varepsilon_{m-1}^{k_n} & b_n\varepsilon_m^{k_n} & b_n\varepsilon_{m+1}^{k_n} & \ldots & b_n\varepsilon_{2m-1}^{k_n} \end{vmatrix},$$

не равно нулю.

При *нечётном* $n = 2m - 1$ нормированные краевые условия (2) регулярны, если оба числа θ_0 и θ_1, определённые равенством

$$\theta_0 + \theta_1 s = \begin{vmatrix} a_1\varepsilon_0^{k_1} & \dots & a_1\varepsilon_{m-2}^{k_1} & (a_1+sb_1)\varepsilon_{m-1}^{k_1} & b_1\varepsilon_m^{k_1} & \dots & b_1\varepsilon_{2m-2}^{k_1} \\ a_2\varepsilon_0^{k_2} & \dots & a_2\varepsilon_{m-2}^{k_2} & (a_2+sb_2)\varepsilon_{m-1}^{k_2} & b_2\varepsilon_m^{k_2} & \dots & b_2\varepsilon_{2m-2}^{k_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n\varepsilon_0^{k_n} & \dots & a_n\varepsilon_{m-2}^{k_n} & (a_n+sb_n)\varepsilon_{m-1}^{k_n} & b_n\varepsilon_m^{k_n} & \dots & b_n\varepsilon_{2m-2}^{k_n} \end{vmatrix},$$

отличны от нуля.

В чётном случае данное определение эквивалентно приведённому в [1], а при нечётном n совпадает с ним. Ещё можно обратить внимание на то, что в определении регулярности не участвуют младшие коэффициенты дифференциального выражения и краевых условий.

Оператор L, заданный дифференциальным выражением (1) и регулярными краевыми условиями (2), будем называть регулярным по Биркгофу.

Пусть λ_j — собственные числа оператора L, а ρ_j — точки в комплексной плоскости $\rho = \lambda^{1/n}$, такие что $\rho_j^n = \lambda_j$. Дж. Биркгоф в [4] доказал следующий результат (см. также [2, гл. IV, § 87] и [1, гл. II, § 5, п. 3]): если оператор L регулярен, то функция Грина $G(x,\xi,\rho)$ оператора $L - \rho^n I$ допускает в комплексной ρ-плоскости вне кружков радиуса ε с центрами в точках ρ_j асимптотическую оценку (при достаточно больших $|\rho| > c_0$)

$$|G(x,\xi,\rho)| \leqslant M|\rho|^{-n+1}, \tag{3}$$

где $M = M(\varepsilon, c_0)$ — некоторая постоянная. Отметим, что в указанных работах эта оценка формулируется явно только на последовательности окружностей, уходящих на бесконечность. Но из метода доказательства легко следует, что она выполняется также и вне указанных кружков (см. подробности в [3]).

Цель настоящей работы — доказать справедливость обратного утверждения. Оказывается, что выполнение оценки (3) только на одном некритическом луче в случае чётного порядка $n = 2m$ и на двух некритических лучах в соседних секторах раствора π/n при нечётном $n = 2m - 1$ влечёт регулярность оператора L. Некритическим называем любой луч, выходящий из 0, с направлением, аргумент которого отличен от $\pi k/n$, $k = 0, \dots, 2n-1$. Остальные $2n$ лучей критические. Сформулируем основной результат работы более точно.

Теорема. *Пусть L — дифференциальный оператор, порождённый дифференциальным выражением* (1) *и краевыми условиями вида* (2). *Пусть при $n = 2m$ найдётся луч*

$$\gamma = \Big\{\rho \;\Big|\; \arg\rho = \varphi \in \Big(0, \frac{\pi}{n}\Big)\Big\},$$

на котором выполнена асимптотическая оценка (3). *Тогда оператор L регулярен.*

Если при нечётном $n = 2m - 1$ найдутся два луча

$$\gamma_1 = \Big\{\rho \;\Big|\; \arg\rho = \varphi_1 \in \Big(0, \frac{\pi}{n}\Big)\Big\}, \quad \gamma_2 = \Big\{\rho \;\Big|\; \arg\rho = \varphi_2 \in \Big(\frac{\pi}{n}, 2\frac{\pi}{n}\Big)\Big\},$$

на которых выполнена асимптотическая оценка (3), *то L также регулярен.*

В [6] доказано, в частности, что из оценки на резольвенту $\|R_\lambda\|_{L_2} \leqslant C/|\lambda|$ следует регулярность оператора. В конце доказательства нашей теоремы мы будем использовать технический приём из этой статьи.

2. Доказательство теоремы

Обозначим $[a(\rho)] = a(\rho)\bigl(1+O(\rho^{-1})\bigr)$. Будем писать $f(\rho) \asymp g(\rho)$, если найдутся такие положительные константы c_1 и c_2, что для всех достаточно больших ρ выполняются неравенства $c_1|f| \leqslant |g| \leqslant c_2|f|$. Будем писать $f(\rho) \succ g(\rho)$, если $g(\rho) = o\bigl(f(\rho)\bigr)$. Введём обозначения $S_\nu = \{\rho \mid \pi\nu/n \leqslant \arg\rho < \pi(\nu+1)/n\}$, $\nu = 0,\dots,n-1$, — сектор, ограниченный соседними критическими лучами; $S_\nu(\varepsilon) = \{\rho \mid \pi\nu/n + \varepsilon \leqslant \arg\rho \leqslant \pi(\nu+1)/n - \varepsilon\}$, $\nu = 0,\dots,n-1$. В каждом секторе $S_\nu(\varepsilon)$ уравнение $l(y) = \rho^n y$ имеет n решений с асимптотикой

$$y_j^{(k)}(x,\rho) = (i\rho\varepsilon_j)^k \exp(i\rho\varepsilon_j x)[1], \quad j,k = 0,\dots,n-1.$$

Часть решений $y_j^{(k)}(x,\rho)$ растёт по ρ, а часть убывает. Перейдём к ограниченным решениям

$$z_k(x,\rho) = \begin{cases} y_k(x,\rho), & k = 0,\dots,p-1,\\ y_k(x,\rho)\exp(-i\rho\varepsilon_k), & k = p,\dots,n-1.\end{cases}$$

Индекс p принимает разные значения в зависимости от сектора $S_\nu(\varepsilon)$ и чётности n: $p = m$ в секторах $S_0(\varepsilon)$ и $S_1(\varepsilon)$ при $n = 2m$,

$$p = \begin{cases} m, & \rho \in S_0(\varepsilon),\\ m-1, & \rho \in S_1(\varepsilon),\end{cases}$$

при $n = 2m-1$.

Очевидно, что

$$z_k(x,\rho) = \begin{cases} \exp(i\rho\varepsilon_k x)[1], & k = 0,\dots,p-1,\\ \exp\bigl(i\rho\varepsilon_k(x-1)\bigr)[1], & k = p,\dots,n-1.\end{cases} \tag{4}$$

Функция Грина вычисляется по следующим формулам:

$$G(x,\xi,\rho) = \frac{(-1)^n}{\Delta(\rho)} H(x,\xi,\rho),$$

где

$$\Delta(\rho) = \det\bigl((i\rho)^{-k_j} U_j(z_k)\bigr),$$

$$H(x,\xi,\rho) = \begin{vmatrix} z_0(x,\rho) & \dots & z_{n-1}(x,\rho) & g(x,\xi,\rho)\\ (i\rho)^{-k_1}U_1(z_0) & \dots & (i\rho)^{-k_1}U_1(z_{n-1}) & (i\rho)^{-k_1}U_1(g)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ (i\rho)^{-k_n}U_n(z_0) & \dots & (i\rho)^{-k_n}U_n(z_{n-1}) & (i\rho)^{-k_n}U_n(g)\end{vmatrix},$$

$$g(x,\xi,\rho)=\pm\frac{1}{2W(\xi,\rho)}\begin{vmatrix} y_0(x) & y_1(x) & \dots & y_{n-1}(x)\\ y_0^{(n-2)}(\xi) & y_1^{(n-2)}(\xi) & \dots & y_{n-1}^{(n-2)}(\xi)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ y_0(\xi) & y_1(\xi) & \dots & y_{n-1}(\xi)\end{vmatrix}=$$

$$=\pm\sum_{k=0}^{n-1}y_k(x)\frac{W_k(\xi,\rho)}{2W(\xi,\rho)},\quad (5)$$

$$W(\xi,\rho)=\begin{vmatrix} y_0^{(n-1)}(\xi,\rho) & y_1^{(n-1)}(\xi,\rho) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(\xi,\rho)\\ y_0^{(n-2)}(\xi,\rho) & y_1^{(n-2)}(\xi,\rho) & \dots & y_{n-1}^{(n-2)}(\xi,\rho)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ y_0(\xi,\rho) & y_1(\xi,\rho) & \dots & y_{n-1}(\xi,\rho)\end{vmatrix},$$

W_k — алгебраическое дополнение $y_k^{(n-1)}$ в определителе W. В формуле (5) знак $+$ берётся при $x>\xi$, а $-$ — при $x<\xi$. Выражения $U_\nu(g)$ считаются по переменной x.

Преобразуем $H(x,\xi,\rho)$ с учётом асимптотики функций $y_j(x)$. Обратим внимание на

$$g(x,\xi,\rho)=\frac{\pm1}{2n(i\rho)^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon_k\exp\bigl(i\rho\varepsilon_k(x-\xi)\bigr)[1].$$

При каждой фиксированной паре значений (x,ξ) часть слагаемых растёт по ρ на луче, а часть убывает: при $x>\xi$ растут слагаемые, соответствующие индексам $k\geqslant p$, а при $x<\xi$ — индексам $k<p$. Исключим растущие слагаемые из последнего столбца в определителе $H(x,\xi,\rho)$. Для этого домножим 1-й, 2-й,..., p-й столбец на $W_0/(2W)$, $W_1/(2W)$,..., $W_{p-1}/(2W)$, а $(p+1)$-й,..., n-й — на $\exp(i\rho\varepsilon_p)W_p/(2W)$,..., $\exp(i\rho\varepsilon_{n-1})W_{n-1}/(2W)$ соответственно и прибавим к последнему столбцу. Тогда его элементами будут

$$\tilde g(x,\xi)=\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{p-1}y_k(x)\frac{W_k(\xi)}{W(\xi)}, & x>\xi,\\ -\sum\limits_{k=p}^{n-1}y_k(x)\frac{W_k(\xi)}{W(\xi)}, & x<\xi,\end{cases}\quad (6)$$

$$U_\nu(\tilde g)=\sum_{j=0}^{p-1}b_\nu y_j^{(k_\nu)}(1)\frac{W_j(\xi)}{W(\xi)}[1]-\sum_{j=p}^{n-1}a_\nu y_j^{(k_\nu)}(0)\frac{W_j(\xi)}{W(\xi)}[1],\quad \nu=1,\dots,n.\quad (7)$$

Для W_j/W легко выписать асимптотику:

$$\frac{W_j(\xi)}{W(\xi)}=\frac{[1]}{n(i\rho\varepsilon_j)^{n-1}\exp(i\rho\varepsilon_j\xi)}.$$

Заменим W_j/W на ограниченные функции u_j:

$$u_j(\xi,\rho)=\begin{cases}\frac{W_j(\xi)}{W(\xi)}n(i\rho\varepsilon_j)^{n-1}\exp(i\rho\varepsilon_j)=\exp(i\rho\varepsilon_j(1-\xi)[1], & j<p,\\ \frac{W_j(\xi)}{W(\xi)}n(i\rho\varepsilon_j)^{n-1}=\exp(i\rho\varepsilon_j(-\xi)[1], & j\geqslant p,\end{cases}\quad (8)$$

и перепишем формулы (6) и (7) в удобной нам форме:

$$\tilde{g}(x,\xi) = \frac{1}{n(i\rho)^{n-1}} \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{p-1} z_k(x) u_k(\xi) \varepsilon_k e^{-i\rho\varepsilon_k}, & x > \xi, \\ -\sum\limits_{k=p}^{n-1} z_k(x) u_k(\xi) \varepsilon_k e^{i\rho\varepsilon_k}, & x < \xi, \end{cases}$$

$$U_\nu(\tilde{g}) = \\ = (i\rho)^{k_\nu} \left\{ \sum_{j=0}^{p-1} \bigl(b_\nu \varepsilon_j^{(k_\nu)}\bigr)\bigl(\varepsilon_j u_j(\xi)\bigr)[1] - \sum_{j=p}^{n-1} \bigl(a_\nu \varepsilon_j^{(k_\nu)}\bigr)\bigl(\varepsilon_j u_j(\xi)\bigr)[1] \right\}, \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

Разложим $H(x,\xi,\rho)$ по первой строке и воспользуемся формулами для $U_\nu(\tilde{g})$, чтобы преобразовать $G(x,\xi,\rho)$ к виду

$$G(x,\xi,\rho) = \tilde{g}(x,\xi,\rho) - \frac{1}{n\rho^{n-1}} \sum_{t,k=0}^{n-1} a_{t,k}(\rho) z_k(x,\rho) u_t(\xi,\rho), \tag{9}$$

где коэффициенты $a_{t,k}(\rho)$ задаются следующим образом. Обозначим через $\bigl|\Delta \underset{k}{\leftarrow} d\bigr|$ характеристический определитель Δ, в котором k-й столбец заменён вектором d. Тогда

$$a_{t,k}(\rho) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon_t \cdot \bigl|\Delta \underset{k+1}{\longleftarrow} [B_t^1]\bigr|}{\Delta}, & t < p, \\ -\dfrac{\varepsilon_t \cdot \bigl|\Delta \underset{k+1}{\longleftarrow} [B_t^0]\bigr|}{\Delta}, & t \geqslant p, \end{cases} \tag{10}$$

где

$$B_t^0 = (a_j \cdot \varepsilon_k^{k_j})_{j=1}^n, \quad B_t^1 = (b_j \cdot \varepsilon_k^{k_j})_{j=1}^n.$$

Для доказательства теоремы нам потребуются две леммы.

Лемма 1. *Пусть $x, \xi \in [0,1]$ и задана последовательность $\{\rho_k\}^\infty$ ($|\rho_k| \to \infty$). Кроме того, пусть все действительные части чисел p_s и q_s различные и отрицательные. Положим*

$$f(x,\xi,\rho) = \sum_{s=1}^{N} c_s(\rho) \exp\bigl(|\rho|(p_s x + q_s \xi)\bigr).$$

Тогда если $c_s(\rho) \asymp 1$, то $\|f(x,\xi,\rho)\|_{C([0,1]\times[0,1])} \asymp 1$ на $\{\rho_k\}$.

Лемма 2. *Пусть оператор L удовлетворяет условиям теоремы, т. е. найдётся луч γ (при нечётном n два луча γ_1 и γ_2), на котором выполнена асимптотическая оценка (3). Тогда на этом луче коэффициенты $a_{t,k}(\rho)$ в представлении (9) ограниченны: $a_{t,k}(\rho) = O(1)$.*

Доказательство леммы 1. Неравенство $\|f\|_C \leqslant \mathrm{const}$ сомнений не вызывает. Обратим внимание, что в точке $(x_\alpha, \xi_\beta) = (\alpha/|\rho|, \beta/|\rho|)$ функция принимает значение $\sum\limits_{s=1}^{N} c_s(\rho)\exp(\alpha p_s+\beta q_s)$. Предположим теперь противное: не существует такой положительной константы h, чтобы для достаточно больших ρ_k выполнялось дополнительное неравенство $\|f\|_C \geqslant h$. Значит, найдётся подпоследовательность $\{\rho_k\}^{\infty}$, такая что на ней для любых α, β

$$\sum_{s=1}^{N} c_s(\rho)\exp(\alpha p_s+\beta q_s)=o(1). \tag{11}$$

Подберём тогда N пар чисел (α_j,β_j), $j=1,\dots,N$, таких чтобы

$$\det\bigl(\exp(\alpha_j p_s+\beta_j q_s)\bigr)\neq 0.$$

Например, можно взять $\alpha_j=\alpha\cdot j$, $\beta_j=\beta\cdot j$, $\alpha,\beta<1/N$. Получим почти определитель Вандермонда (с точностью до ненулевого множителя) чисел $\exp(\alpha p_s+\beta q_s)$ $(s=1,\dots,N)$. Следовательно, (11) эквивалентно $c_s(\rho)=o(1)$, $s=1,\dots,N$. Это противоречит условию $c_s(\rho)\asymp 1$. Лемма 1 доказана. $\square$

Доказательство леммы 2. Пусть функция Грина $G(x,\xi,\rho)$ оператора L на некритическом луче γ, лежащем в секторе S_0 или S_1, допускает оценку (3). Наша цель показать, что коэффициенты $a_{t,k}$ в (9) на этом луче ограниченны. В силу (4) и (8) мы имеем

$$\sum_{t,k=0}^{n-1} a_{t,k}(\rho)z_k(x,\rho)u_t(\xi,\rho)=\sum_{t,k=0}^{n-1} a_{t,k}(\rho)\exp\bigl(i\rho(\varepsilon_k x-\varepsilon_t\xi+\delta_{t,k})\bigr)[1]=O(1),$$

где $\delta_{t,k}=0$ или $\delta_{t,k}=\pm1$ в зависимости от t и k и $\delta_{t,k}$ определяется из (4) и (8). Причём показатели экспонент в последней сумме — линейные комбинации x или $1-x$ и ξ или $1-\xi$. Таким образом, графики прямых, определяемых уравнением $\operatorname{Re}\bigl(i\rho(\varepsilon_k x-\varepsilon_t\xi+\delta_{t,k})\bigr)=0$, проходят через вершины единичного квадрата в плоскости (x,ξ), левая нижняя из которых лежит в нуле. Эти прямые имеют ровно по одной общей точке с квадратом, и более того, для каждой пары (t,k) для внутренних точек квадрата верно $\operatorname{Re}\bigl(i\rho(\varepsilon_k x-\varepsilon_t\xi+\delta_{t,k})\bigr)<0$. Разобьём сумму на четыре суммы, соответствующие четырём вершинам квадрата, и заметим, что каждая из них ограниченна, поскольку норма в C каждой подсуммы при достаточно больших ρ достигается на точке вблизи соответствующей вершины квадрата. Рассмотрим те слагаемые, которые относятся к вершине в начале координат:

$$\sum_{t=p}^{n-1}\sum_{k=0}^{p-1} a_{t,k}(\rho)\exp\bigl(i\rho(\varepsilon_k x-\varepsilon_t\xi)\bigr)[1]. \tag{12}$$

Теперь предположим, что утверждение леммы 2 несправедливо, т. е. найдётся хотя бы одна функция $a_{t_0,k_0}(\rho)$ в сумме (12), неограниченная на луче γ (может оказаться, что неограниченная функция $a_{t,k}$ обнаружится в сумме, относящейся к другой вершине квадрата; тогда рассуждения будут аналогичны). Выберем последовательность $\{\rho_k\}$ на луче γ, на которой $|a_{t_0,k_0}(\rho_k)|$ монотонно растёт, а для остальных $a_{t,k}(\rho_k)$ из рассматриваемой суммы ($t=p,\dots,n-1$, $k=0,\dots,p-1$) либо выполнено то же, либо они ограниченны на $\{\rho_k\}$. Выделим эквивалентные $a_{t,k}$ (возможно, выбирая подпоследовательность в $\{\rho_k\}$). Переставим слагаемые в сумме (12), чтобы упорядочить их по росту $a_{t,k}$. Получим

$$a_{t_1,k_1}(\rho)\sum_{s_1,v_1}\exp\bigl(i\rho(\varepsilon_{s_1}x-\varepsilon_{v_1}\xi)\bigr)[1]+a_{t_2,k_2}(\rho)\sum_{s_2,v_2}\exp\bigl(i\rho(\varepsilon_{s_2}x-\varepsilon_{v_2}\xi)\bigr)[1]+\dots,$$
$$a_{t_1,k_1}\succ a_{t_2,k_2}\succ a_{t_3,k_3}\succ\dots. \qquad (13)$$

Геометрически очевидно, что все $\mathrm{Re}(i\rho\varepsilon_k)$ и все $\mathrm{Re}(-i\rho\varepsilon_t)$ в сумме (12) различны и отрицательны. Применим лемму 1 к выделенным суммам в (13) и получим $a_{t_1,k_1}[1]+a_{t_2,k_2}[1]+\dots$. Следовательно, вся сумма (13) эквивалентна a_{t_1,k_1}. Получаем, что из неограниченности одной функции $a_{t,k}$ следует неограниченность

$$\sum_{t,k=0}^{n-1}a_{t,k}(\rho)\exp\bigl(i\rho(\varepsilon_k x-\varepsilon_t\xi)\bigr),$$

что приводит к противоречию с условием леммы 2. Следовательно, $a_{t,k}=O(1)$. Лемма 2 доказана. □

Завершим доказательство теоремы. Так как для коэффициентов $a_{t,k}$ верно равенство (10), то столбцы A_k матрицы $\mathbf{A}=(a_{t,k})_{t,k=0}^{n-1}$ удовлетворяют уравнению

$$\mathbf{\Delta}A_k=(-1)^{1-\tau}\cdot\varepsilon_k[B_k^\tau],\quad 0\leqslant k\leqslant n-1, \qquad (14)$$

где $\mathbf{\Delta}=((i\rho)^{-k_j}U_j(z_s))$ — матрица характеристического определителя Δ,

$$\tau(k)=\begin{cases}1, & k<p,\\ 0, & k\geqslant p.\end{cases}$$

Из утверждения леммы 2 следует ограниченность множества векторов $A_j(\rho)$ на луче γ. Значит, существуют векторы $\eta_j=\lim\limits_{l\to\infty}A_j(\rho_{k_l})$ для некоторой подпоследовательности $\{\rho_{k_l}\}$.

Имеет место равенство

$$\lim_{l\to\infty}\mathbf{\Delta}(\rho_{k_l})=\mathbf{\Theta}:=(B_k^0,\ k=0,\dots,p-1\mid B_k^1,\ k=p,\dots,n-1),$$

которое вместе с (14) даёт

$$\mathrm{span}(B_0^1,\dots,B_{p-1}^1,B_p^0,\dots,B_{n-1}^0)\subset R(\mathbf{\Theta}), \qquad (15)$$

где $R(\cdot)$ обозначает образ матрицы. Следующее отношение тривиально:

$$\mathrm{span}(B_0^0,\dots,B_{p-1}^0,B_p^1,\dots,B_{n-1}^1)\subset R(\mathbf{\Theta}). \qquad (16)$$

Из включений (15) и (16) получаем

$$\mathrm{span}(B_0^0,\dots,B_{n-1}^0,B_0^1,\dots,B_{n-1}^1)\subset R(\mathbf{\Theta}),$$

а отсюда уже несложно вывести, что $\mathbf{\Theta}$ имеет полный ранг n, т. е. $\det(\mathbf{\Theta}) \neq 0$. Наконец, осталось заметить, что определяющие регулярность оператора числа θ (при n чётном), θ_0 и θ_1 (при n нечётном) равны $\det(\mathbf{\Theta})$:

$$\det(\mathbf{\Theta}) = \begin{cases} \theta, & n = 2m,\ \gamma \subset S_0, \\ \theta_0, & n = 2m-1,\ \gamma \subset S_0, \\ \theta_1, & n = 2m-1,\ \gamma \subset S_1. \end{cases}$$

Доказательство теоремы завершено.

Замечание. Формулировки теоремы и леммы 2 можно немного обобщить: достаточно потребовать, чтобы при нечётном $n = 2m-1$ оценка функции Грина выполнялась на последовательностях $\{\rho_{k_1}\}$ в секторе $S_0(\varepsilon)$ и на $\{\rho_{k_2}\}$ в секторе $S_1(\varepsilon)$, ($|\rho_{k_\nu}| \to \infty$, $\nu = 1, 2$), а при $n = 2m$ — на одной последовательности $\{\rho_k\}$ в $S_0(\varepsilon)$.

Автор благодарит А. А. Шкаликова за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

[1] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.

[2] Тамаркин Я. Д. О некоторых задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. — Петроград, 1917.

[3] Шкаликов А. А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. — 1983. — Вып. 9. — С. 190—229.

[4] Birkhoff G. Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1908. — Vol. 9. — P. 373—395.

[5] Minkin A. M. Regularity of dissipative operators. — 1999. — arXiv:math.SP/9909092.

[6] Minkin A. M. Resolvent's growth and Birkhoff-regularity. — To be published in JMAA.