Интегрируемые системы кирального типа

А. В. БАЛАНДИН
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
e-mail: balandin@mm.unn.ru

О. Н. КАЩЕЕВА
Волжская государственная академия водного транспорта
e-mail: pakhareva@rambler.ru

УДК 517.957

Ключевые слова: представление Лакса, системы WZNW, нелинейные сигма-модели, симметрические пространства, алгебры Ли.

Аннотация

В статье представлены новые интегрируемые системы, близкие к системам Весса—Зумино—Новикова—Виттена (WZNW) и неабелевым аффинным системам Тоды. Одна из таких систем является новым интегрируемым обобщением уравнения синус-Гордона.

Abstract

A. V. Balandin, O. N. Kashcheeva, Integrable systems of chiral type, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 7, pp. 5—21.

We present new integrable systems close to the WZNW systems (Wess–Zumino–Novikov–Witten) and to the nonabelian affine Toda systems. One of the systems is a new integrable generalization of the sine-Gordon equation.

1. Введение

Системы кирального типа обычно понимаются (см., например, [10]) как системы дифференциальных уравнений в частных производных следующего вида:
$$U^\alpha_{xy} + G^\alpha_{\beta\gamma} U^\beta_x U^\gamma_y + Q^\alpha = 0. \tag{1.1}$$
Здесь индексы α, β, γ изменяются от 1 до n, а индексы x и y обозначают частные производные по соответствующим переменным и предполагается, что коэффициенты $G^\alpha_{\beta\gamma}$, Q^α являются гладкими функциями переменных $U^1, U^2, \ldots, U^n$. Также предполагается правило суммирования по одинаковым индексам.

Заметим, что при произвольных невырожденных заменах $V^\beta = V^\beta(U^\alpha)$ система (1.1) переходит в систему того же вида, причём коэффициенты $G^\alpha_{\beta\gamma}$ изменяются по закону преобразования коэффициентов аффинной связности. Поэтому

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 7, с. 5—21.

$G^{\alpha}_{\beta\gamma}$ можно считать символами Кристоффеля некоторого пространства аффинной связности в локальной системе координат $U^1, \dots, U^n$.

Если система (1.1) является системой уравнений Эйлера—Лагранжа, то лагранжиан для неё может быть записан в виде

$$L = g_{\alpha\beta}(U^\delta)U^\alpha_x U^\beta_y + a_{\alpha\beta}(U^\delta)U^\alpha_x U^\beta_y + Q(U^\delta), \tag{1.2}$$

где $g_{\alpha\beta}$ — невырожденная симметрическая матрица, $a_{\alpha\beta}$ — кососимметрическая матрица и Q — гладкая функция переменных $U^1, U^2, \dots, U^n$. Заметим, что системы Эйлера—Лагранжа для лагранжиана (1.2) называются общими нелинейными сигма-моделями (см., например, [9, 11]). Эти системы содержат важный класс, называемый системами Весса—Зумино—Новикова—Виттена (WZNW) [5, 12, 15, 16].

Напомним, что системы WZNW могут быть определены следующим образом. Пусть H — полупростая группа Ли, (U^α) — локальная система координат на H и $\Phi^\alpha = T^\alpha_\beta dU^\beta$ — базис левоинвариантных форм на H. Пусть также $\tilde{T}^\alpha_\beta$ — обратная к T^α_β матрица. Далее запятая будет обозначать частные производные, т. е.

$$T^\delta_{\beta,\gamma} = \frac{\partial T^\delta_\beta}{\partial U^\gamma}.$$

Теперь определим коэффициенты $G^\alpha_{\beta\gamma}$ при помощи равенства

$$G^\alpha_{\beta\gamma} = \tilde{T}^\alpha_\delta T^\delta_{\beta,\gamma}. \tag{1.3}$$

Заметим, что коэффициенты $G^\alpha_{\beta\gamma}$ являются коэффициентами первой плоской канонической связности на группе Ли H (см., например, [6]).

Система WZNW, ассоциированная с полупростой группой Ли H, — это система (1.1), для которой $Q^\alpha = 0$ и $G^\alpha_{\beta\gamma}$ определяются равенством (1.3).

Чтобы записать лагранжиан для систем WZNW, введём следующие обозначения. Пусть $C^\alpha_{\beta\gamma}$ — структурные константы группы H относительно базиса Φ^α и $h^0_{\alpha\beta}$ — метрика Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{h}$ группы Ли H относительно двойственного базиса. Определим 3-форму Ψ при помощи равенства

$$\Psi = \frac{2}{3} h^0_{\sigma\delta} C^\sigma_{\varphi\psi} T^\delta_\alpha T^\varphi_\beta T^\psi_\gamma \, dU^\alpha \wedge dU^\gamma \wedge dU^\beta.$$

Форма Ψ замкнута в силу тождества Якоби для структурных констант, поэтому существует (по крайней мере локально) 2-форма $\sigma = a_{\alpha\beta}\, dU^\alpha \wedge dU^\beta$, такая что

$$d\sigma = \frac{2}{3} h^0_{\alpha\delta} C^\delta_{\beta\gamma} \, \Phi^\alpha \wedge \Phi^\gamma \wedge \Phi^\beta.$$

Теперь непосредственная проверка показывает, что уравнения Эйлера для лагранжиана

$$L = h^0_{\gamma\delta} T^\gamma_\alpha T^\delta_\beta U^\alpha_x U^\beta_y + a_{\alpha\beta} U^\alpha_x U^\beta_y$$

совпадают с системой WZNW, ассоциированной с группой H.

В разделе 2 получены представления Лакса для систем уравнений Эйлера, которые определяются следующими лагранжианами:

$$L = h^0_{\gamma\delta} T^\gamma_\alpha T^\delta_\beta U^\gamma_x U^\delta_y + k a_{\alpha\beta} U^\alpha_x U^\beta_y,$$

где k — произвольная константа, причём $k \neq \pm 1$. Назовём их системами типа WZNW.

В разделе 3 мы предлагаем дополнение к конструкции Лезнова—Савельева. Как известно [14], с помощью метода Лезнова—Савельева можно ассоциировать с симметрическими пространствами G/H некоторые интегрируемые системы. Системы, полученные таким образом, называются неабелевыми аффинными системами Тоды (см., например, [9,13]). Мы показываем, что в случае, когда H — прямое произведение простых групп Ли, можно указать новые интегрируемые системы.

Далее рассмотрен пример системы, ассоциированной с симметрическим пространством $\mathrm{SO}(6)/\big(\mathrm{SO}(3)\times\mathrm{SO}(3)\big)$. Для данного примера выполнена редукция к системе, которую можно рассматривать как новое интегрируемое обобщение уравнения синус-Гордона. Представление Лакса для этого интегрируемого обобщения синус-Гордона также указано в работе. Кроме того, приведены примеры систем, ассоциированных с симметрическими пространствами $\mathrm{SO}(p+2)/\big(\mathrm{SO}(p)\times\mathrm{SO}(2)\big)$.

2. Системы типа WZNW

В этом разделе мы рассматриваем интегрируемые системы вида

$$U^\alpha_{xy} + G^\alpha_{\beta\gamma} U^\beta_x U^\gamma_y = 0. \tag{2.1}$$

Пусть G — группа Ли и Θ^a — базис её левоинвариантных форм. Как известно, тогда формы Θ^a удовлетворяют структурным уравнениям Картана

$$d\Theta^a = C^a_{bc}\,\Theta^c \wedge \Theta^b, \tag{2.2}$$

где C^a_{bc} — структурные константы.

Напомним, что система (2.1) допускает представление Лакса с группой G, если система

$$\Theta^a = A^a dx + B^a dy \tag{2.3}$$

является вполне интегрируемой (в смысле Фробениуса) на решениях системы (2.1), т. е. если подстановка выражений (2.3) в (2.2) приводит к системе, эквивалентной системе (2.1).

Будем рассматривать группы, структурные уравнения которых могут быть записаны в виде

$$d\theta^\alpha = D^\alpha_{\beta i}\,\varphi^i \wedge \theta^\beta, \tag{2.4}$$

$$d\varphi^i = C^i_{jk}\,\varphi^k \wedge \varphi^j + R^i_{\beta\gamma}\,\theta^\gamma \wedge \theta^\beta, \tag{2.5}$$

где $D^{\alpha}_{\beta i}, C^{i}_{jk}, R^{i}_{\beta\gamma} = \mathrm{const}$, индексы α, β, γ пробегают значения от 1 до n ($n = \dim G/H$), индексы i, j, k — от 1 до r.

Хорошо известно [7], что уравнения (2.4), (2.5) можно рассматривать как структурные уравнения локально симметрического пространства G/H, где C^{i}_{jk} — структурные константы группы изотропии H.

Будем искать представление Лакса системы (2.1) в виде

$$\theta^{\alpha} = U^{\alpha}_{\beta}\left(\lambda U^{\beta}_{x}\,dx + \frac{1}{\lambda}U^{\beta}_{y}\,dy\right), \tag{2.6}$$

$$\varphi^{i} = (-\Gamma^{i}_{\alpha} + H^{i}_{\alpha})U^{\alpha}_{\beta}U^{\beta}_{x}\,dx + (-\Gamma^{i}_{\alpha} - H^{i}_{\alpha})U^{\alpha}_{\beta}U^{\beta}_{y}\,dy, \tag{2.7}$$

где λ — произвольный параметр, U^{α}_{β}, Γ^{i}_{α}, H^{i}_{α} — гладкие функции переменных $U^{1}, U^{2}, \ldots, U^{n}$. Подставляя выражения (2.6), (2.7) в (2.4), принимая во внимание (2.1) и приводя подобные при λ и $1/\lambda$, приходим к системе

$$U^{\alpha}_{\beta,\gamma} - U^{\alpha}_{\delta}G^{\delta}_{\beta\gamma} + D^{\alpha}_{\mu i}(\Gamma^{i}_{\nu} + H^{i}_{\nu})U^{\mu}_{\beta}U^{\nu}_{\gamma} = 0, \tag{2.8}$$

$$U^{\alpha}_{\gamma,\beta} - U^{\alpha}_{\delta}G^{\delta}_{\beta\gamma} + D^{\alpha}_{\mu i}(\Gamma^{i}_{\nu} - H^{i}_{\nu})U^{\mu}_{\gamma}U^{\nu}_{\beta} = 0. \tag{2.9}$$

Вычитая (2.9) из (2.8) и отделяя симметрическую и кососимметрические части, получаем

$$U^{\alpha}_{[\beta,\gamma]} + D^{\alpha}_{\mu i}\Gamma^{i}_{\nu}U^{\mu}_{[\beta}U^{\nu}_{\gamma]} = 0, \tag{2.10}$$

$$D^{\alpha}_{\mu i}H^{i}_{\nu}U^{\mu}_{(\beta}U^{\nu}_{\gamma)} = 0. \tag{2.11}$$

Далее из уравнений (2.8), (2.9) в силу соотношений (2.10), (2.11) будем иметь

$$U^{\alpha}_{\delta}G^{\delta}_{[\beta\gamma]} = D^{\alpha}_{\mu i}H^{i}_{\nu}U^{\mu}_{[\beta}U^{\nu}_{\gamma]}, \tag{2.12}$$

$$U^{\alpha}_{\delta}G^{\delta}_{(\beta\gamma)} = U^{\alpha}_{(\beta,\gamma)} + D^{\alpha}_{\mu i}\Gamma^{i}_{\nu}U^{\mu}_{(\beta}U^{\nu}_{\gamma)}. \tag{2.13}$$

Аналогично, подставляя (2.6) и (2.7) в (2.5) с учётом (2.1), (2.10)—(2.13), приходим к соотношениям

$$\Gamma^{i}_{[\mu;\nu]} + H^{i}_{\sigma}D^{\sigma}_{[\mu|j|}H^{j}_{\nu]} - \Gamma^{i}_{\sigma}D^{\sigma}_{[\mu|j|}\Gamma^{j}_{\nu]} = C^{i}_{jk}\Gamma^{k}_{[\mu}\Gamma^{j}_{\nu]} - C^{i}_{jk}H^{k}_{[\mu}H^{j}_{\nu]} - R^{i}_{\mu\nu}, \tag{2.14}$$

$$H^{i}_{(\mu;\nu)} = H^{i}_{\sigma}D^{\sigma}_{(\mu|j|}\Gamma^{j}_{\nu)} + 2C^{i}_{jk}H^{k}_{(\mu}\Gamma^{j}_{\nu)}, \tag{2.15}$$

где использованы обозначения $d\Gamma^{i}_{\nu} = \Gamma^{i}_{\nu;\sigma}U^{\sigma}_{\beta}dU^{\beta}$, $dH^{i}_{\nu} = H^{i}_{\nu;\sigma}U^{\sigma}_{\beta}dU^{\beta}$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть G — группа Ли, структурные уравнения которой имеют вид* (2.4), (2.5) *и $G^{\alpha}_{\beta\gamma}$, U^{α}_{β}, Γ^{i}_{α}, H^{i}_{α} — гладкие функции, удовлетворяющие условиям* (2.10)—(2.15). *Тогда равенства* (2.6), (2.7) *определяют представление Лакса системы* (2.1).

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие теорему 1.

Пример 1 (киральные поля со значениями в симметрических пространствах [4]). Пусть G/H — симметрическое пространство с канонической связностью. Предположим, что 1-формы $\theta^{\alpha} = U^{\alpha}_{\beta}\,dU^{\beta}$ — формы смещения и $\varphi^{i} = -\Gamma^{i}_{\alpha}U^{\alpha}_{\beta}\,dU^{\beta}$ — формы связности симметрического пространства G/H. Тогда выполняются структурные уравнения Картана (2.4), (2.5). Отсюда получим

$$U^{\alpha}_{[\mu,\nu]} = -D^{\alpha}_{\varphi i}\Gamma^{i}_{\psi}U^{\varphi}_{[\mu}U^{\psi}_{\nu]},$$

$$\Gamma^{i}_{[\mu,\nu]} - \Gamma^{i}_{\sigma}D^{\sigma}_{[\mu|i|}\Gamma^{i}_{\nu]} = C^{i}_{jk}\Gamma^{k}_{\mu}\Gamma^{j}_{\nu} - R^{i}_{\mu\nu}.$$

Положим $H^{i}_{\alpha} = 0$ в (2.7). Теперь непосредственная проверка показывает, что условия (2.10), (2.11), (2.14), (2.15) выполнены. Таким образом, уравнения (2.4)—(2.7) определяют представление Лакса системы (2.1), где

$$G^{\alpha}_{[\beta\gamma]} = 0,$$

$$G^{\alpha}_{(\beta\gamma)} = \tilde{U}^{\alpha}_{\sigma}\big[U^{\sigma}_{(\beta,\gamma)} + D^{\alpha}_{\varphi i}\Gamma^{i}_{\psi}U^{\varphi}_{(\beta}U^{\psi}_{\gamma)}\big].$$

Последние соотношения показывают (см., например, [6]), что $G^{\alpha}_{\beta\gamma}$ — коэффициенты канонической аффинной связности симметрического пространства G/H относительно голономного базиса.

Пример 2. Пусть H — группа Ли. Рассмотрим симметрическое пространство $(H\times H)/H$ с канонической аффинной связностью. Тогда справедливы структурные уравнения Картана (2.4), (2.5), где C^{i}_{jk} — структурные константы группы H, все индексы принимают значения от 1 до $n = \dim H$ и $D^{\alpha}_{\beta i} = 2C^{\alpha}_{\beta i}$, $R^{i}_{\alpha\beta} = -C^{i}_{\alpha\beta}$. Положим $\Gamma^{i}_{\alpha} = 0$, $H^{i}_{\alpha} = \delta^{i}_{\alpha}$. Пусть U^{α}_{β} — гладкие функции, удовлетворяющие условиям $\det\|U^{\alpha}_{\beta}\| \neq 0$, $U^{\alpha}_{[\beta,\gamma]} = 0$. Тогда непосредственная проверка показывает, что уравнения (2.4)—(2.7) определяют представление Лакса системы (2.1), где коэффициенты $G^{\alpha}_{\beta\gamma}$ удовлетворяют системе

$$G^{\alpha}_{[\beta\gamma]} = 2\tilde{U}^{\alpha}_{\delta}C^{\delta}_{\varphi\psi}U^{\varphi}_{\beta}U^{\psi}_{\gamma},$$

$$G^{\alpha}_{(\beta\gamma)} = 2\tilde{U}^{\alpha}_{\delta}U^{\delta}_{\beta,\gamma}.$$

Теорема 2. *Пусть (U^{α}) — локальные координаты на полупростой группе Ли H. Предположим, что*

1) *$C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ — структурные константы группы Ли H относительно базиса левоинвариантных форм $\Phi^{\alpha} = T^{\alpha}_{\beta}dU^{\beta}$;*
2) *$h^{0}_{\alpha\beta}$ — метрика Киллинга на алгебре Ли $\mathfrak{h}$ группы Ли H, заданная относительно двойственного базиса;*
3) *$h_{\alpha\beta}$ — метрика Киллинга на группе Ли H, т. е.*

$$h_{\alpha\beta} = h^{0}_{\varphi\psi}T^{\varphi}_{\alpha}T^{\psi}_{\beta}; \tag{2.16}$$

4) *$\sigma = a_{\alpha\beta}dU^{\alpha}\wedge dU^{\beta}$ — 2-форма, удовлетворяющая (локально) условию*

$$d\sigma = \frac{2}{3}h^{0}_{\delta\sigma}C^{\sigma}_{\beta\gamma}\,\Phi^{\delta}\wedge\Phi^{\gamma}\wedge\Phi^{\beta}; \tag{2.17}$$

5) *k — произвольная константа, такая что $k \neq \pm 1$.*

Тогда система уравнений Эйлера для лагранжиана

$$L = h_{\alpha\beta}U^{\alpha}_{x}U^{\beta}_{y} + ka_{\alpha\beta}U^{\alpha}_{x}U^{\beta}_{y} \tag{2.18}$$

допускает представление Лакса.

Доказательство. Рассмотрим симметрическое пространство $(H \times H)/H$. В этом случае структурные уравнения Картана имеют вид (2.4), (2.5), где C^i_{jk} — структурные константы группы H, все индексы принимают значения от 1 до $n = \dim H$ и $D^\alpha_{\beta i} = 2C^\alpha_{\beta i}$, $R^i_{\alpha\beta} = -C^i_{\alpha\beta}$.

Подставим

$$U^\alpha_\beta = \frac{1}{2}\sqrt{k^2-1}T^\alpha_\beta, \quad \Gamma^i_\alpha = -\frac{1}{\sqrt{k^2-1}}\delta^i_\alpha, \quad H^i_\alpha = \frac{k}{\sqrt{k^2-1}}\delta^i_\alpha$$

в выражения (2.6), (2.7). Тогда непосредственная проверка показывает, что условия теоремы 1 выполнены и уравнения (2.4)—(2.7) определяют представление Лакса системы

$$U^\alpha_{xy} + \tilde{T}^\alpha_\sigma\big[T^\sigma_{(\beta,\gamma)} + kC^\sigma_{\varphi\psi}T^\varphi_\beta T^\psi_\gamma\big]U^\beta_x U^\gamma_y = 0. \tag{2.19}$$

Докажем, что система (2.19) является системой уравнений Эйлера для лагранжиана (2.18).

Прежде всего заметим, что 3-форма

$$\Psi = \frac{2}{3}h^0_{\delta\sigma}C^\sigma_{\beta\gamma}\,\Phi^\delta \wedge \Phi^\gamma \wedge \Phi^\beta = \frac{2}{3}h^0_{\sigma\delta}C^\sigma_{\varphi\psi}T^\delta_\alpha T^\varphi_\beta T^\psi_\gamma\; dU^\alpha \wedge dU^\gamma \wedge dU^\beta$$

замкнута в силу тождества Якоби для структурных констант $C^\alpha_{\beta\gamma}$. Следовательно, существует, по крайней мере локально, 2-форма σ, удовлетворяющая условию (2.17) теоремы.

Уравнения Эйлера для лагранжиана (2.18) приводят к системе, для которой

$$G^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\tilde{h}^{\alpha\delta}(h_{\delta\gamma,\beta} + h_{\delta\beta,\gamma} - h_{\beta\gamma,\delta}) + \frac{3}{2}k\tilde{h}^{\alpha\delta}a_{[\delta\gamma,\beta]}. \tag{2.20}$$

Непосредственная проверка показывает, что

$$G^\alpha_{(\beta\gamma)} = \frac{1}{2}\tilde{h}^{\alpha\delta}(h_{\delta\gamma,\beta} + h_{\delta\beta,\gamma} - h_{\beta\gamma,\delta}) = \tilde{T}^\alpha_\delta T^\delta_{(\beta,\gamma)}. \tag{2.21}$$

Таким образом, симметрическая часть связности, определённой системой (2.19), совпадает с симметрической частью связности (2.20).

Обозначим $A^\alpha_{\beta\gamma}$ кручение связности, определённой системой (2.19), т. е.

$$A^\alpha_{\beta\gamma} = k\tilde{T}^\alpha_\sigma C^\sigma_{\varphi\psi}T^\varphi_\beta T^\psi_\gamma, \tag{2.22}$$

и покажем, что $G^\alpha_{[\beta\gamma]} = A^\alpha_{\beta\gamma}$. Учитывая (2.22) и (2.16), находим, что

$$h_{\delta\alpha}A^\delta_{\beta\gamma} = kh^0_{\sigma\delta}C^\sigma_{\varphi\psi}T^\delta_\alpha T^\varphi_\beta T^\psi_\gamma.$$

Из последнего равенства и определения формы σ следует, что

$$h_{\delta\alpha}A^\delta_{\beta\gamma} = \frac{3}{2}ka_{[\alpha\gamma,\beta]},$$

т. е. $A^\alpha_{\beta\gamma} = G^\alpha_{[\beta\gamma]}$. □

Замечание 1. Можно проверить, что связность, определённая системой (2.19), является связностью аффинного редуктивного пространства, для которого выполнены условия

$$\nabla R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}=0,\quad \nabla A^{\alpha}_{\beta\gamma}=0,\quad R^{\alpha}_{[\beta\gamma\delta]}=0.$$

Представление Лакса без параметра для таких систем было указано в [1].

Замечание 2. Связность, ассоциированная с системой (2.19), не является плоской, в то время как для обычных систем WZNW тензор кривизны ассоциированной связности удовлетворяет условию $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}=0$.

Преобразования Бэклунда для систем (2.19) можно получить из следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть $\bar{C}^{\alpha}_{\beta\gamma}$, $\hat{C}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ — структурные константы n-мерных алгебр Ли и функции $U^{\alpha}_{\beta}=U^{\alpha}_{\beta}(U^{\gamma})$, $V^{\alpha}_{\beta}=V^{\alpha}_{\beta}(V^{\gamma})$ удовлетворяют уравнениям*

$$U^{\alpha}_{[\beta,\gamma]}=\bar{C}^{\alpha}_{\varphi\psi}U^{\varphi}_{\beta}U^{\psi}_{\gamma},\qquad \det\|U^{\alpha}_{\beta}\|\neq 0, \tag{2.23}$$

$$V^{\alpha}_{[\beta,\gamma]}=\hat{C}^{\alpha}_{\varphi\psi}V^{\varphi}_{\beta}V^{\psi}_{\gamma},\qquad \det\|V^{\alpha}_{\beta}\|\neq 0. \tag{2.24}$$

Тогда равенства

$$U^{\alpha}_{\beta}U^{\beta}_{x}=V^{\alpha}_{\beta}V^{\beta}_{x}, \tag{2.25}$$

$$U^{\alpha}_{\beta}U^{\beta}_{y}=-V^{\alpha}_{\beta}V^{\beta}_{y} \tag{2.26}$$

определяют преобразование Бэклунда между следующими системами:

$$U^{\alpha}_{xy}+\tilde{U}^{\alpha}_{\delta}\big[U^{\delta}_{(\beta,\gamma)}+\hat{C}^{\delta}_{\varphi\psi}U^{\varphi}_{\beta}U^{\psi}_{\gamma}\big]U^{\beta}_{x}U^{\gamma}_{y}=0, \tag{2.27}$$

$$V^{\alpha}_{xy}+\tilde{V}^{\alpha}_{\delta}\big[V^{\delta}_{(\beta,\gamma)}+\bar{C}^{\delta}_{\varphi\psi}V^{\varphi}_{\beta}V^{\psi}_{\gamma}\big]V^{\beta}_{x}V^{\gamma}_{y}=0. \tag{2.28}$$

Доказательство. Продифференцируем (2.26) по x и (2.25) по y. Складывая и вычитая полученные выражения, а также принимая во внимание (2.23)—(2.26), приходим к системам (2.27), (2.28). □

Следствие. *Пусть коэффициенты $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ являются структурными константами некоторой алгебры Ли. Тогда равенства* (2.25), (2.26) *определяют преобразование Бэклунда между системами*

$$U^{\alpha}_{xy}+\tilde{U}^{\alpha}_{\delta}\big[U^{\delta}_{(\beta,\gamma)}+kC^{\delta}_{\varphi\psi}U^{\varphi}_{\beta}U^{\psi}_{\gamma}\big]U^{\beta}_{x}U^{\gamma}_{y}=0, \tag{2.29}$$

$$V^{\alpha}_{xy}+\tilde{W}^{\alpha}_{\delta}\left[W^{\delta}_{(\beta,\gamma)}+\frac{1}{k}C^{\delta}_{\varphi\psi}W^{\varphi}_{\beta}W^{\psi}_{\gamma}\right]V^{\beta}_{x}V^{\gamma}_{y}=0, \tag{2.30}$$

где $k=\mathrm{const}$ и функции $U^{\alpha}_{\beta}=U^{\alpha}_{\beta}(U^{\gamma})$, $W^{\alpha}_{\beta}=W^{\alpha}_{\beta}(V^{\gamma})$ удовлетворяют условиям

$$U^{\alpha}_{[\beta,\gamma]}=C^{\alpha}_{\varphi\psi}U^{\varphi}_{\beta}U^{\psi}_{\gamma},\qquad \det\|U^{\alpha}_{\beta}\|\neq 0, \tag{2.31}$$

$$W^{\alpha}_{[\beta,\gamma]}=C^{\alpha}_{\varphi\psi}W^{\varphi}_{\beta}W^{\psi}_{\gamma},\qquad \det\|W^{\alpha}_{\beta}\|\neq 0. \tag{2.32}$$

Доказательство. Положим $\bar{C}^{\alpha}_{\beta\gamma}=C^{\alpha}_{\beta\gamma}$, $\hat{C}^{\alpha}_{\beta\gamma}=kC^{\alpha}_{\beta\gamma}$, $W^{\alpha}_{\beta}=kV^{\alpha}_{\beta}$ в равенствах (2.23), (2.24). Тогда функции U^{α}_{β}, W^{α}_{β} удовлетворяют уравнениям (2.32), (2.31). В этом случае системы (2.27), (2.28) совпадают с системами (2.29), (2.30). □

3. Системы, ассоциированные с симметрическими пространствами вида $G/(H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_p)$

Чтобы получить новые интегрируемые системы вида (1.1), применим локально-координатный подход к конструкции Лезнова—Савельева.

Рассмотрим симметрическое пространство G/H, структурные уравнения которого имеют вид

$$d\omega^{\alpha'} = D^{\alpha'}_{\beta'\gamma}\,\theta^{\gamma} \wedge \omega^{\gamma'}, \tag{3.1}$$

$$d\theta^{\alpha} = C^{\alpha}_{\beta\gamma}\,\theta^{\gamma} \wedge \theta^{\beta} + R^{\alpha}_{\beta'\gamma'}\,\omega^{\gamma'} \wedge \omega^{\beta'}. \tag{3.2}$$

Здесь индексы α, β, γ принимают значения от 1 до n, индексы α', β', γ' изменяются от $n+1$ до r.

Положим

$$\omega^{\alpha'} = \lambda M^{\alpha'}\,dx + \frac{1}{\lambda}N^{\alpha'}\,dy, \tag{3.3}$$

$$\theta^{\alpha} = T_{1\beta}^{\ \alpha} U^{\beta}_x\,dx + T_{2\beta}^{\ \alpha} U^{\beta}_y\,dy, \tag{3.4}$$

где $M^{\alpha'}$, $N^{\alpha'}$, $T_{1\beta}^{\ \alpha}$, $T_{2\beta}^{\ \alpha}$ — гладкие функции от $U^1, \ldots, U^n$.

Теорема 4 ([8]). *Пусть G/H — локально симметрическое пространство со структурными уравнениями* (3.1), (3.2), *где $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ — структурные константы группы изотропии H. Пусть также существуют функции $T_{1\beta}^{\ \alpha}$, $T_{2\beta}^{\ \alpha}$, $M^{\alpha'}$, $N^{\alpha'}$, удовлетворяющие условиям*

$$T_{i[\beta,\gamma]}^{\ \alpha} = C^{\alpha}_{\mu\nu} T_{i\beta}^{\ \mu} T_{i\gamma}^{\ \nu} \quad (i = 1, 2), \tag{3.5}$$

$$\det \| T_{1\beta}^{\ \alpha} - T_{2\beta}^{\ \alpha} \| \neq 0, \tag{3.6}$$

$$M^{\alpha'}_{,\delta} = D^{\alpha'}_{\beta'\gamma} T_{2\delta}^{\ \gamma} M^{\beta'}, \tag{3.7}$$

$$N^{\alpha'}_{,\delta} = D^{\alpha'}_{\beta'\gamma} T_{1\delta}^{\ \gamma} N^{\beta'}. \tag{3.8}$$

Тогда равенства (3.1)—(3.4) *определяют представление Лакса системы* (1.1), *коэффициенты которой имеют вид*

$$G^{\alpha}_{\beta\gamma} = \tilde{P}^{\alpha}_{\delta}\left[P^{\delta}_{(\beta,\gamma)} + 2C^{\delta}_{\varphi\psi} S^{\varphi}_{\beta} S^{\psi}_{\gamma} - 2C^{\delta}_{\varphi\psi} P^{\varphi}_{(\gamma} S^{\psi}_{\beta)}\right],$$

$$Q^{\alpha} = -\tilde{P}^{\alpha}_{\delta} R^{\delta}_{\beta'\gamma'} N^{\gamma'} M^{\beta'},$$

где

$$S^{\alpha}_{\beta} = \frac{1}{2}(T_{1\beta}^{\ \alpha} + T_{2\beta}^{\ \alpha}), \quad P^{\alpha}_{\beta} = \frac{1}{2}(T_{1\beta}^{\ \alpha} - T_{2\beta}^{\ \alpha})$$

и $\tilde{P}$ — матрица, обратная к P.

При таком подходе для построения интегрируемых систем кирального типа необходимо указать набор функций $T^{\alpha}_{i\beta}$, $M^{\alpha'}$, $N^{\alpha'}$, удовлетворяющих условиям (3.5)—(3.8). Желательно также, чтобы полученная интегрируемая система являлась лагранжевой.

Один из способов решения этой задачи можно найти в [14]. Для дальнейшего будет удобно переформулировать конструкцию Лезнова—Савельева следующим образом.

Пусть U^{α} — локальная система координат на H и $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ — структурные константы группы H относительно базиса левоинвариантных дифференциальных форм $\Phi^{\alpha} = T^{\alpha}_{\beta}\, dU^{\beta}$. Положим $T^{\alpha}_{1\beta} = T^{\alpha}_{\beta}$, $T^{\alpha}_{2\beta} = 0$ (или $T^{\alpha}_{1\beta} = 0$, $T^{\alpha}_{2\beta} = T^{\alpha}_{\beta}$). Тогда условия (3.5), (3.6) выполнены, системы (3.7), (3.8) совместны и равенства (3.1)—(3.4) определяют представление Лакса системы (1.1), коэффициенты которой имеют вид, указанный в теореме 4.

Оказывается, что в случае, когда H является прямым произведением простых групп Ли $H_1, \ldots, H_p$, можно указать другие решения уравнений (3.5)—(3.8), которые приводят к новым интегрируемым системам.

Рассмотрим случай $H = H_1 \times H_2$, где H_1, H_2 — простые группы Ли. Пусть (U^{α}) — локальная система координат на H. Разделим координаты (U^{α}) на две группы $(U^{\alpha_1}, U^{\alpha_2})$ в соответствии с разложением группы H и перепишем структурные уравнения симметрического пространства G/H в виде

$$d\omega^{\beta'} = D^{\beta'}_{\gamma'\alpha_1}\, \theta^{\alpha_1} \wedge \omega^{\gamma'} + D^{\beta'}_{\gamma'\alpha_2}\, \theta^{\alpha_2} \wedge \omega^{\gamma'}, \tag{3.9}$$

$$d\theta^{\alpha_1} = C^{\alpha_1}_{\beta_1\gamma_1}\, \theta^{\gamma_1} \wedge \theta^{\beta_1} + R^{\alpha_1}_{\beta'\gamma'}\, \omega^{\gamma'} \wedge \omega^{\beta'}, \tag{3.10}$$

$$d\theta^{\alpha_2} = C^{\alpha_2}_{\beta_2\gamma_2}\, \theta^{\gamma_2} \wedge \theta^{\beta_2} + R^{\alpha_2}_{\beta'\gamma'}\, \omega^{\gamma'} \wedge \omega^{\beta'}. \tag{3.11}$$

Далее будем использовать следующие обозначения:

$\mathfrak{g}, \mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$, $\mathfrak{h}_i$ — алгебры Ли групп Ли G, H, H_i соответственно ($i = 1, 2$);

$C^{\alpha_i}_{\beta_i\gamma_i}$ — структурные константы группы H_i относительно базиса левоинвариантных дифференциальных форм $\Phi^{\alpha_i} = T^{\alpha_i}_{\beta_i}\, dU^{\beta_i}$;

$h^0_{\alpha_i\beta_i}$ — коэффициенты формы Киллинга $h^0_i(\cdot,\cdot)$ алгебры Ли $\mathfrak{h}_i$, заданные относительно базиса, двойственного к базису $\{\Phi^{\alpha_i}\}$;

$g^0(\cdot,\cdot)$ — форма Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$;

S_i — константы, удовлетворяющие условию

$$h^0_i(\cdot,\cdot) = S_i g^0(\cdot,\cdot)_{|\mathfrak{h}_i}. \tag{3.12}$$

Такие константы существуют, так как $\mathfrak{h}_i$ — простые подалгебры полупростой алгебры $\mathfrak{g}$;

$h_{\alpha_i\beta_i}$ — метрика Киллинга группы H_i относительно локальных координат (U^{α_i}), т. е.

$$h_{\alpha_i\beta_i} = h^0_{\gamma_i\delta_i} T^{\gamma_i}_{\alpha_i} T^{\delta_i}_{\beta_i}; \tag{3.13}$$

$\sigma_i = a_{\alpha_i\beta_i}\, dU^{\alpha_i} \wedge dU^{\beta_i}$ — 2-форма, удовлетворяющая условию

$$d\sigma_i = \frac{2}{3} h^0_{\alpha_i\delta_i} C^{\delta_i}_{\beta_i\gamma_i}\, \Phi^{\alpha_i} \wedge \Phi^{\gamma_i} \wedge \Phi^{\beta_i}. \tag{3.14}$$

Теорема 5. *Пусть G/H — локально симметрическое пространство, G — полупростая группа Ли и $H = H_1 \times H_2$, где H_1, H_2 — простые группы Ли. Определим лагранжиан L равенством*

$$L = S_2[h_{\alpha_1\beta_1}(U^{\gamma_1}) + \varepsilon_1 a_{\alpha_1\beta_1}(U^{\gamma_1})]U_x^{\alpha_1}U_y^{\beta_1} + \\ + S_1[h_{\alpha_2\beta_2}(U^{\gamma_2}) + \varepsilon_2 a_{\alpha_2\beta_2}(U^{\gamma_2})]U_x^{\alpha_2}U_y^{\beta_2} + Q, \quad (3.15)$$

где

$$Q = 4S_1S_2 g^0_{\gamma'\delta'} M^{\gamma'} N^{\delta'}, \quad (3.16)$$
$$\varepsilon_i = \pm 1 \quad (i = 1, 2),$$

а функции $M^{\gamma'}$, $N^{\delta'}$ удовлетворяют условиям

$$M^{\gamma'}_{,\beta_i} = \frac{1-\varepsilon_i}{2} D^{\gamma'}_{\delta'\alpha_i} T^{\alpha_i}_{\beta_i} M^{\delta'} \quad (i = 1, 2), \quad (3.17)$$

$$N^{\gamma'}_{,\beta_i} = \frac{1+\varepsilon_i}{2} D^{\gamma'}_{\delta'\alpha_i} T^{\alpha_i}_{\beta_i} N^{\delta'} \quad (i = 1, 2). \quad (3.18)$$

Тогда система уравнений Эйлера для лагранжиана (3.15) *допускает представление Лакса.*

Доказательство. Положим

$$\theta^{\alpha_1} = \frac{1+\varepsilon_1}{2} T^{\alpha_1}_{\beta_1} U_x^{\beta_1}\, dx + \frac{1-\varepsilon_1}{2} T^{\alpha_1}_{\beta_1} U_y^{\beta_1}\, dy, \quad (3.19)$$

$$\theta^{\alpha_2} = \frac{1+\varepsilon_2}{2} T^{\alpha_2}_{\beta_2} U_x^{\beta_2}\, dx + \frac{1-\varepsilon_2}{2} T^{\alpha_2}_{\beta_2} U_y^{\beta_2}\, dy, \quad (3.20)$$

$$\omega^{\gamma'} = \lambda M^{\gamma'}\, dx + \frac{1}{\lambda} N^{\gamma'}\, dy. \quad (3.21)$$

Тогда, подставляя выражения (3.19)—(3.21) для форм θ^{α_1}, θ^{α_2}, $\omega^{\gamma'}$ в уравнения (3.9)—(3.11), придём к системе (1.1), ненулевые коэффициенты которой имеют вид

$$G^{\alpha_1}_{\beta_1\gamma_1} = \tilde{T}^{\alpha_1}_{\delta_1}(T^{\delta_1}_{(\beta_1,\gamma_1)} + \varepsilon_1 T^{\delta_1}_{[\beta_1,\gamma_1]}), \quad (3.22)$$

$$G^{\alpha_2}_{\beta_2\gamma_2} = \tilde{T}^{\alpha_2}_{\delta_2}(T^{\delta_2}_{(\beta_2,\gamma_2)} + \varepsilon_2 T^{\delta_2}_{[\beta_2,\gamma_2]}), \quad (3.23)$$

$$Q^{\alpha_1} = 2\varepsilon_1 \tilde{T}^{\alpha_1}_{\delta_1} R^{\delta_1}_{\beta'\gamma'} M^{\gamma'} N^{\beta'}, \quad (3.24)$$

$$Q^{\alpha_2} = 2\varepsilon_2 \tilde{T}^{\alpha_2}_{\delta_2} R^{\delta_2}_{\beta'\gamma'} M^{\gamma'} N^{\beta'}. \quad (3.25)$$

Докажем, что эта система является системой уравнений Эйлера—Лагранжа для лагранжиана (3.15). Действительно, уравнения Эйлера для лагранжиана (3.15) приводят к системе

$$U^{\alpha_1}_{xy} + G^{\alpha_1}_{\beta_1\gamma_1} U_x^{\beta_1} U_y^{\gamma_1} - \frac{1}{2S_2} \tilde{h}^{\alpha_1\beta_1} Q_{,\beta_1} = 0,$$

$$U^{\alpha_2}_{xy} + G^{\alpha_2}_{\beta_2\gamma_2} U_x^{\beta_2} U_y^{\gamma_2} - \frac{1}{2S_1} \tilde{h}^{\alpha_2\beta_2} Q_{,\beta_2} = 0,$$

где коэффициенты $G^{\alpha_1}_{\beta_1\gamma_1}$, $G^{\alpha_2}_{\beta_2\gamma_2}$ имеют вид (3.22), (3.23). Доказательство этого факта аналогично доказательству теоремы 2.

Докажем, что функции $-\frac{1}{2S_2}\tilde{h}^{\alpha_1\beta_1}Q_{,\beta_1}$ совпадают с функциями (3.24). Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ — каноническое разложение, т. е.

$$[\mathfrak{h},\mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{h},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}, \quad [\mathfrak{m},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}.$$

Тогда из (3.12) и свойств метрики Киллинга следует, что

$$h^0_1(h,[m_1,m_2]) = S_1 g^0(m_1,[m_2,h]) \tag{3.26}$$

для любых элементов $h \in \mathfrak{h}_1$, $m_1, m_2 \in \mathfrak{m}$. Заметим, что равенство (3.26) эквивалентно следующему условию для структурных констант:

$$h^0_{\alpha_1\varphi_1} R^{\varphi_1}_{\beta'\gamma'} = S_1 g^0_{\beta'\delta'} D^{\delta'}_{\gamma'\alpha_1}. \tag{3.27}$$

Теперь, дифференцируя равенство (3.16) по переменной U^{β_1} и учитывая (3.17), (3.18), (3.27), получим

$$\begin{aligned} Q_{,\beta_1} &= 4S_1S_2 g^0_{\gamma'\delta'}(M^{\gamma'}_{,\beta_1}N^{\delta'} + M^{\gamma'}N^{\delta'}_{,\beta_1}) = \\ &= 4S_1S_2 g^0_{\gamma'\delta'}\left(\frac{1-\varepsilon_1}{2} D^{\gamma'}_{\psi'\alpha_1} T^{\alpha_1}_{\beta_1} M^{\psi'} N^{\delta'} + \frac{1+\varepsilon_1}{2} D^{\delta'}_{\psi'\alpha_1} T^{\alpha_1}_{\beta_1} M^{\gamma'} N^{\psi'}\right) = \\ &= -4\varepsilon_1 S_2 h^0_{\alpha_1\varphi_1} R^{\varphi_1}_{\delta'\gamma'} T^{\alpha_1}_{\beta_1} M^{\gamma'} N^{\delta'}. \end{aligned}$$

Поэтому функции $-\frac{1}{2S_2}\tilde{h}^{\alpha_1\beta_1}Q_{,\beta_1}$ совпадают с функциями (3.24).

Аналогично доказывается, что функции $-\frac{1}{2S_1}\tilde{h}^{\alpha_2\beta_2}Q_{,\beta_2}$ совпадают с функциями (3.25). □

Замечание 3. Таким образом, кроме систем Лезнова—Савельева ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$), можно указать дополнительные интегрируемые системы, соответствующие случаям $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть G/H — локально симметрическое пространство, G — полупростая группа Ли и $H = H_1 \times \ldots \times H_p$, где $H_1, \ldots, H_p$ — простые группы Ли. Пусть (U^{α_i}) — локальная система координат на группе H_i и лагранжиан L имеет вид*

$$L = \sum_{i=1}^{p} \frac{S}{S_i}[h_{\alpha_i\beta_i}(U^{\gamma_i}) + \varepsilon_i a_{\alpha_i\beta_i}(U^{\gamma_i})]U^{\alpha_i}_x U^{\beta_i}_y + 4S g^0_{\beta'\gamma'} M^{\beta'} N^{\gamma'},$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$ ($i = \overline{1,p}$); $h_{\alpha_i\beta_i}$ — метрика Киллинга группы H_i; $a_{\alpha_i\beta_i}$, $M^{\beta'}, N^{\gamma'}$ и константы S_i определяются так же, как и в предыдущей теореме; $S = S_1 \ldots S_p$. Тогда система уравнений Эйлера для лагранжиана L допускает представление Лакса.

Пример 3 (система, ассоциированная с симметрическим пространством $\mathbf{SO(6)/(SO(3) \times SO(3))}$). Выберем в качестве локальных координат U^1, U^2,

U^3 на группе $H_1 = \mathrm{SO}(3)$ углы Эйлера. Тогда

$$\Phi^1 = -\cos U^2\, dU^3 - \sin U^2 \sin U^3\, dU^1,$$
$$\Phi^2 = \sin U^3 \cos U^2\, dU^1 - \sin U^2\, dU^3,$$
$$\Phi^3 = -\cos U^3\, dU^1 - dU^2 -$$

базис левоинвариантных дифференциальных форм на H_1 и структурные уравнения группы $\mathrm{SO}(3)$ имеют вид

$$d\Phi^1 = \Phi^3 \wedge \Phi^2, \quad \Phi^2 = \Phi^1 \wedge \Phi^3, \quad \Phi^3 = \Phi^2 \wedge \Phi^1.$$

Локальные координаты U^4, U^5, U^6 и левоинвариантные дифференциальные формы Φ^4, Φ^5, Φ^6 на группе $H_2 = \mathrm{SO}(3)$ выберем аналогично.

Используя вложение группы $\mathrm{SO}(6)$ в $\mathrm{GL}(6)$, запишем структурные уравнения симметрического пространства $\mathrm{SO}(6)/\big(\mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SO}(3)\big)$ в виде

$$d\Omega = \Omega \wedge \Omega, \quad \Omega = \begin{Vmatrix} \theta^a_b & \omega^a_{b'} \\ \omega^{a'}_b & \theta^{a'}_{b'} \end{Vmatrix}, \tag{3.28}$$

где $\theta^a_b = -\theta^b_a$, $\theta^{a'}_{b'} = -\theta^{b'}_{a'}$, $\omega^{a'}_b = -\omega^b_{a'}$, индексы $a, b, c, \ldots$ принимают значения от 1 до 3, индексы $a', b', \ldots$ изменяются от 4 до 6.

Следуя доказательству теоремы 5, положим $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = 1$. Тогда

$$\begin{aligned}
\theta^1_2 &= (-\cos U^3 U^1_y - U^2_y)\, dy, \\
\theta^1_3 &= (-\sin U^3 \cos U^2 U^1_y + \sin U^2 U^3_y)\, dy, \\
\theta^2_3 &= (-\cos U^2 U^3_y - \sin U^2 \sin U^3 U^1_y)\, dy, \\
\theta^4_5 &= (-\cos U^6 U^4_x - U^5_x)\, dx, \\
\theta^4_6 &= (-\sin U^6 \cos U^5 U^4_x + \sin U^5 U^6_x)\, dx, \\
\theta^5_6 &= (-\cos U^5 U^6_x - \sin U^5 \sin U^6 U^4_x)\, dx,
\end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\omega^a_{a'} = \lambda M^a_{a'}\, dx + \frac{1}{\lambda} N^a_{a'}\, dy. \tag{3.30}$$

Подставляя (3.29), (3.30) в уравнения (3.28) и приравнивая к нулю коэффициенты при λ и $1/\lambda$, получим системы дифференциальных уравнений для определения функций $M^a_{a'}$, $N^a_{a'}$. Выберем следующие частные решения:

$$M^1_6 = \sin U^2 \sin U^3, \quad M^2_6 = -\cos U^2 \sin U^3, \quad M^3_6 = \cos U^3,$$
$$N^3_4 = k \sin U^2 \sin U^3, \quad N^3_5 = -k \cos U^5 \sin U^6, \quad N^3_6 = k \cos U^6,$$

где $k = \mathrm{const}$, а другие функции $M^a_{a'}$, $N^a_{a'}$ равны нулю. Теперь, подставляя найденные функции $M^a_{a'}$, $N^a_{a'}$ в (3.30), получим представление Лакса (3.28)—(3.30) системы уравнений Эйлера для лагранжиана

$$L = \sum_{\beta_1=1}^{3} U_x^{\beta_1} U_y^{\beta_1} + 2\cos U^3 U_y^1 U_x^2 + \\ + \sum_{\beta_2=4}^{6} U_x^{\beta_2} U_y^{\beta_2} + 2\cos U^6 U_x^4 U_y^5 + 2k \cos U^3 \cos U^6. \quad (3.31)$$

Пример 4 (интегрируемое обобщение уравнения синус-Гордона). Заметим, что система уравнений Эйлера для лагранжиана (3.31) допускает редукцию, аналогичную указанной в [2]. Действительно, подставляя выражения

$$U_x^1 = -\cos U^3 U_x^2, \qquad U_y^1 = -\frac{1}{\cos U^3} U_y^2,$$
$$U_x^4 = -\frac{1}{\cos U^6} U_x^5, \qquad U_y^4 = -\cos U^6 U_y^5$$

в систему уравнений Эйлера для лагранжиана (3.31), получим систему

$$\begin{aligned} U_{xy}^2 + U_y^3 U_x^2 \operatorname{ctg} U^3 + \frac{1}{\sin U^3 \cos U^3} U_x^3 U_y^2 &= 0, \\ U_{xy}^3 - U_y^2 U_x^2 \operatorname{tg} U^3 + k \sin U^3 \cos U^6 &= 0, \\ U_{xy}^5 + U_y^5 U_x^6 \operatorname{ctg} U^6 + \frac{1}{\sin U^6 \cos U^6} U_x^5 U_y^6 &= 0, \\ U_{xy}^6 - U_y^5 U_x^5 \operatorname{tg} U^6 + k \cos U^3 \sin U^6 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система не принадлежит классу лагранжевых систем, однако она допускает преобразование Бэклунда, определённое равенствами

$$U_y^2 = \frac{\cos U^3}{1+\cos U^3} V_y^1, \quad U_x^2 = \frac{1}{1+\cos U^3} V_x^1, \qquad U^3 = V^2,$$
$$U_y^5 = \frac{1}{1+\cos U^6} V_y^3, \quad U_x^5 = \frac{\cos U^6}{1+\cos U^6} V_x^3, \qquad U^6 = V^4,$$

которое приводит к системе

$$\begin{aligned} V_{xy}^1 + \frac{1}{\sin V^2} V_y^1 V_x^2 + \frac{1}{\sin V^2} V_y^2 V_x^1 &= 0, \\ V_{xy}^2 - \frac{\sin V^2}{(1+\cos V^2)^2} V_y^1 V_x^1 + k \sin V^2 \cos V^4 &= 0, \\ V_{xy}^3 + \frac{1}{\sin V^4} V_y^3 V_x^4 + \frac{1}{\sin V^4} V_y^4 V_x^3 &= 0, \\ V_{xy}^4 - \frac{\sin V^4}{(1+\cos V^4)^2} V_y^3 V_x^3 + k \cos V^2 \sin V^4 &= 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Последняя система является системой уравнений Эйлера для лагранжиана

$$L = V_x^1 V_y^1 \operatorname{tg}^2 \frac{V^2}{2} + V_x^2 V_y^2 + V_x^3 V_y^3 \operatorname{tg}^2 \frac{V^4}{2} + V_x^4 V_y^4 + 2k \cos V^2 \cos V^4. \quad (3.33)$$

Замечание 4. Систему (3.32) можно рассматривать как двойной комплексный случай уравнения синус-Гордона. Действительно, подставляя $V^1 = V^3$, $V^2 = V^4$ в (3.32), получим комплексное уравнение синус-Гордона. Полагая $V^1 = V^3 = 0$, $V^2 = V^4 = V$, получим само уравнение синус-Гордона.

Замечание 5. Метрика, ассоциированная с лагранжианом (3.33), является произведением двух метрик чёрных дыр [17].

Замечание 6. Система (3.32) допускает представление Лакса, которое может быть записано в виде (3.28), (3.30), где

$$
\begin{aligned}
&\theta^1_2 = \frac{1}{2\cos\frac{V^2}{2}}(V^1_x\,dx + V^1_y\,dy), && \theta^1_3 = -\frac{\sin\frac{V^2}{2}}{2\cos^2\frac{V^2}{2}}(V^1_x\,dx - V^1_y\,dy),\\
&\theta^2_3 = \frac{1}{2}(V^2_x\,dx - V^2_y\,dy), && \theta^4_5 = \frac{1}{2\cos\frac{V^4}{2}}(V^3_x\,dx + V^3_y\,dy),\\
&\theta^4_6 = -\frac{\sin\frac{V^4}{2}}{2\cos^2\frac{V^4}{2}}(V^3_x\,dx - V^3_y\,dy), && \theta^5_6 = \frac{1}{2}(V^4_x\,dx - V^4_y\,dy),\\
&M^a_4 = M^1_{a'} = 0, && N^a_4 = N^1_{a'} = 0,\\
&M^2_5 = \sin\frac{V^2}{2}\sin\frac{V^4}{2}, && M^2_6 = -\sin\frac{V^2}{2}\cos\frac{V^4}{2},\\
&M^3_5 = -\cos\frac{V^2}{2}\sin\frac{V^4}{2}, && M^3_6 = \cos\frac{V^2}{2}\cos\frac{V^4}{2},\\
&N^2_5 = k\sin\frac{V^2}{2}\sin\frac{V^4}{2}, && N^2_6 = k\sin\frac{V^2}{2}\cos\frac{V^4}{2},\\
&N^3_5 = k\cos\frac{V^2}{2}\sin\frac{V^4}{2}, && N^3_6 = k\cos\frac{V^2}{2}\cos\frac{V^4}{2}.
\end{aligned}
$$

Для случая симметрических пространств $\mathrm{SO}(p+2)/\big(\mathrm{SO}(p)\times\mathrm{SO}(2)\big)$ справедлив следующий аналог теоремы 5.

Теорема 7. *Пусть (U^{α_1}) — локальная система координат на группе $\mathrm{SO}(p)$, причём $p \geqslant 3$. Определим матрицы $g_{\alpha_1\beta_1}$, $a_{\alpha_1\beta_1}$ так же, как и в теореме 5 для группы $H_1 = \mathrm{SO}(p)$. Тогда система уравнений Эйлера для лагранжиана*

$$L = [g_{\alpha_1\beta_1}(U^{\gamma_1}) + a_{\alpha_1\beta_1}(U^{\gamma_1})]U^{\alpha_1}_x U^{\beta_1}_y - 2(p-2)V_xV_y + 4(p-2)M^b_{b'}N^{b'}_b \tag{3.34}$$

допускает представление Лакса. Здесь индексы a, b изменяются от 1 до p, индексы a', b' принимают значения $p+1$, $p+2$, функции $M^b_{b'}(U^{\alpha_1}, V)$, $N^{b'}_b(U^{\alpha_1}, V)$ являются решениями систем дифференциальных уравнений, которые будут указаны в доказательстве.

Доказательство. С использованием вложения группы $\mathrm{SO}(p+2)$ в $\mathrm{GL}(p+2)$ структурные уравнения симметрического пространства $\mathrm{SO}(p+2)/\big(\mathrm{SO}(p)\times\mathrm{SO}(2)\big)$ могут быть записаны в виде

$$d\Omega = \Omega\wedge\Omega, \quad \Omega = \begin{Vmatrix} \theta^a_b & \omega^a_{b'} \\ \omega^{a'}_b & \theta^{a'}_{b'} \end{Vmatrix}, \tag{3.35}$$

где $\theta^a_b = -\theta^b_a$, $\theta^{a'}_{b'} = -\theta^{b'}_{a'}$, $\omega^{a'}_b = -\omega^b_{a'}$, индексы $a, b, c, \ldots$ изменяются от 1 до p, индексы со штрихами $a', b', \ldots$ принимают значения $p+1$, $p+2$. Пусть коэффициенты $H^a_{b\delta_1} = -H^b_{a\delta_1}$ определяются вложением алгебры Ли $\mathfrak{so}(p)$ в $\mathfrak{gl}(p)$, т. е. $\theta^a_b = H^a_{b\alpha_1}\Phi^{\beta_1}$, где $\Phi^{\alpha_1} = T^{\alpha_1}_{\beta_1}\,dU^{\beta_1}$ — базис левоинвариантных дифференциальных форм группы $\mathrm{SO}(p)$. Тогда для этих коэффициентов имеют место тождества

$$H^a_{b\delta_1}C^{\delta_1}_{\beta_1\gamma_1} = H^a_{d[\gamma_1}H^d_{|b|\beta_1]}, \quad (p-2)H^a_{b\beta_1}H^b_{a\gamma_1} = h_{\beta_1\gamma_1}, \tag{3.36}$$

где $C^{\delta_1}_{\beta_1\gamma_1}$ и $h_{\beta_1\gamma_1}$ — структурные константы и метрика Киллинга группы $\mathrm{SO}(p)$ относительно базиса $\{\Phi^{\alpha_1}\}$. Положим

$$\theta^a_b = H^a_{b\beta_1}T^{\beta_1}_{\gamma_1}U^{\gamma_1}_x\,dx, \quad \theta^{p+1}_{p+2} = V_y\,dy, \quad \omega^a_{a'} = \lambda M^a_{a'}\,dx + \frac{1}{\lambda}N^a_{a'}\,dy, \tag{3.37}$$

где функции $M^a_{a'}$, $N^a_{a'}$ являются решениями вполне интегрируемой системы

$$M^a_{a',\beta_1} = 0, \quad M^a_{p+1,V} = M^a_{p+2}, \quad M^a_{p+2,V} = -M^a_{p+1},$$
$$N^a_{a',\beta_1} = H^a_{b\gamma_1}T^{\gamma_1}_{\beta_1}N^b_{a'}, \quad N^a_{a',V} = 0.$$

Теперь, подставляя выражения (3.37) для форм θ^a_b, $\omega^a_{a'}$ в (3.35), придём к системе кирального типа. Непосредственная проверка показывает, что полученная система является системой уравнений Эйлера для лагранжиана (3.34). □

Пример 5 (система, ассоциированная с симметрическим пространством $\mathbf{SO(5)/(SO(3)\times SO(2))}$). Выберем локальные координаты и левоинвариантные формы группы $\mathrm{SO}(3)$ так же, как в примере 3. Теперь, следуя доказательству теоремы 7, положим

$$M^1_5 = \sin U^2\sin U^3, \quad M^2_5 = -\cos U^2\sin U^3, \quad M^3_5 = \cos U^3, \quad M^a_4 = 0,$$
$$N^1_{a'} = N^2_a = 0, \quad N^3_4 = l\sin V, \quad N^3_5 = l\cos V, \quad l = \mathrm{const}.$$

Тогда (3.35), (3.37) определяют представление Лакса системы уравнений Эйлера для лагранжиана

$$L = \sum_{\alpha_1=1}^{3} U^{\alpha_1}_x U^{\alpha_1}_y + V_xV_y + 2\cos U^3 U^1_y U^2_x + 2l\cos U^3\cos V.$$

Выполняя редукцию и преобразования Бэклунда аналогично примеру 4, получим систему

$$V^1_{xy} + \frac{1}{\sin V^2}V^1_yV^2_x + \frac{1}{\sin V^2}V^2_yV^1_x = 0,$$
$$V^2_{xy} - \frac{\sin V^2}{(1+\cos V^2)^2}V^1_yV^1_x + l\sin V^2\sin V = 0,$$
$$V_{xy} + l\cos V^2\sin V = 0,$$

которая является системой уравнений Эйлера для лагранжиана

$$L = V^1_xV^1_y\,\mathrm{tg}^2\,\frac{V^2}{2} + V^2_xV^2_y + V_xV_y + 2l\cos V^2\cos V.$$

Последняя система допускает представление Лакса вида (3.35), где

$$\theta_2^1 = \frac{1}{2\cos\frac{V^2}{2}}(V_x^1\,dx + V_y^1\,dy), \qquad \theta_3^1 = -\frac{\sin\frac{V^2}{2}}{2\cos^2\frac{V^2}{2}}(V_x^1\,dx - V_y^1\,dy),$$
$$\theta_3^2 = \frac{1}{2}(V_x^2\,dx - V_y^2\,dy), \qquad \theta_5^4 = V_x\,dx,$$
$$\omega_{a'}^a = \lambda M_{a'}^a\,dx + \frac{1}{\lambda}N_{a'}^a\,dy$$

и

$$M_4^a = M_5^1 = N_4^1 = N_5^1 = 0, \quad M_5^2 = -\sin\frac{V^2}{2}, \quad M_5^3 = \cos\frac{V^2}{2},$$
$$N_4^2 = l\sin\frac{V^2}{2}\sin V, \quad N_5^2 = l\sin\frac{V^2}{2}\cos V,$$
$$N_4^3 = l\cos\frac{V^2}{2}\sin V, \quad N_5^3 = l\cos\frac{V^2}{2}\cos V.$$

Заметим в заключение, что интегрируемые системы с лагранжианом

$$L = V_x^1 V_y^1\,\mathrm{tg}^2\,\frac{V^2}{2} + V_x^2 V_y^2 + V_x V_y + Q$$

изучены Мешковым и Демским (см. [3,10]).

Авторы выражают благодарность Е. В. Ферапонтову, Н. А. Степанову и Ю. В. Тузову за полезные обсуждения и замечания.

Литература

[1] Баландин А. В. Система дифференциальных уравнений, допускающая представление нулевой кривизны // Успехи мат. наук. — 1990. — Т. 45, № 6 (276). — С. 125—126.

[2] Гетманов Б. С. Интегрируемая двумерная лоренц-инвариантная нелинейная модель комплексного скалярного поля // Теор. и матем. физ. — 1981. — Т. 48, № 1. — С. 13—23.

[3] Демской Д. К., Мешков А. Г. Представление Лакса для триплета скалярных полей // Теор. и матем. физ. — 2003. — Т. 134, № 3. — С. 401.

[4] Захаров Е. В., Михайлов А. В. Релятивистски-инвариантные двумерные модели теории поля, интегрируемые методом обратной задачи // ЖЭТФ. — 1978. — Т. 74. — С. 1953—1973.

[5] Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // Успехи мат. наук. — 1982. — Т. 37, № 5 (227). — С. 3—49.

[6] Трофимов В. В. Введение в геометрию многообразий с симметриями. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.

[7] Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. — М.: Мир, 1964.

[8] Balandin A. V., Pakhareva O. N., Potemin G. V. Lax representation of the chiral-type field equations // Phys. Lett. A. — 2001. — Vol. 283, no. 3—4. — P. 168—176.

[9] Bilal A. Non-abelian Toda theory: A completely integrable model for strings on a black hole background // Nuclear Phys. B. — 1994. — Vol. 422, no. 1—2. — P. 258—288.

[10] Demskoi D. K., Meshkov A. G. Zero-curvature representation for a chiral-type three-field system // Inverse Problems. — 2003. — Vol. 19, no. 3. — P. 563—571.

[11] Dijkgraaf R., Verlinde H. L., Verlinde E. P. String propagation in a black hole geometry // Nuclear Phys. B. — 1992. — Vol. 371. — P. 269—314.

[12] Gawedzki K., Kupiainen A. G/H conformal field theory from gauged WZW model // Phys. Lett. B. — 1988. — Vol. 215. — P. 119—123.

[13] Hollowood T. J., Miramontes J. L., Han Park Q. Massive integrable soliton theories // Nuclear Phys. B. — 1995. — Vol. 445. — P. 451—468.

[14] Leznov A. N., Saveliev M. V. Two-dimensional exactly and completely integrable dynamical systems. Monopoles, instantons, dual models, relativistic strings, Lund—Regge model, generalized Toda lattice, etc. // Commun. Math. Phys. — 1983. — Vol. 89, no. 1. — P. 59—75.

[15] Wess J., Zumino B. Consequences of anomalos ward identities // Phys. Lett. B. — 1971. — Vol. 37. — P. 95—97.

[16] Witten E. Nonabelian bosonization in two-dimensions // Commun. Math. Phys. — 1984. — Vol. 92. — P. 455—472.

[17] Witten E. On string theory and black holes // Phys. Rev. D. — 1991. — Vol. 44. — P. 314—324.