О характеристических алгебрах Ли уравнений $u_{xy} = f(u, u_x)$*

А. В. ЖИБЕР
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа
e-mail: zhiber@mail.ru

Р. Д. МУРТАЗИНА
Уфимский государственный авиационный технический университет
e-mail: ReginaUFA@yandex.ru

УДК 517.957

Ключевые слова: нелинейные гиперболические уравнения, характеристическая алгебра, характеристическое уравнение, интеграл уравнения.

Аннотация

Предложен новый подход к классификации интегрируемых нелинейных уравнений, основанный на описании структуры характеристической алгебры. Для уравнения sh-Гордона построен базис характеристической алгебры.

Abstract

A. V. Zhiber, R. D. Murtazina, On the characteristic Lie algebras for equations $u_{xy} = f(u, u_x)$, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 7, pp. 65—78.

A new approach to classification of integrable nonlinear equations is proposed. The method is based on description of the structure of the characteristic algebra. A basis of the characteristic algebra is constructed for the sinh-Gordon equation.

1. Введение

Одним из способов классификации интегрируемых уравнений является симметрийный метод. Симметрийный подход очень эффективен в случае эволюционных уравнений, однако при симметрийной классификации гиперболических уравнений возникают серьёзные технические трудности даже в простейшей ситуации (например, см. [5, 6]). Поэтому эффективное исследование интегрируемости систем гиперболического типа требует иных подходов.

В настоящей работе для решения классификационной задачи используется метод, основанный на исследовании структуры характеристической алгебры

*Работа выполнена при финансовой поддержке грантами РФФИ № 04-01-00190-а, 05-01-00775-а.

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 7, с. 65—78.

Ли. Понятие характеристической алгебры Ли было введено в [7] для систем гиперболических уравнений вида

$$u^i_{xy} = f^i(u^1, u^2, \ldots, u^n), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Было показано, что условием полной интегрируемости в квадратурах является конечномерность этой алгебры, а условием интегрируемости методом обратной задачи рассеяния — наличие её конечномерного представления.

Важный классификационный результат получен в [8] для экспоненциальных систем

$$u^i_{xy} = \exp(a_{i_1} u^1 + \ldots + a_{i_n} u^n), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Было доказано, что характеристическая алгебра Ли системы (1) конечномерна тогда и только тогда, когда $K = (k_{ij})$ — матрица Картана простой алгебры Ли. Отметим также работы [1—3], в которых метод исследования интегрируемости, основанный на изучении характеристических алгебр Ли, применялся для систем гиперболических уравнений вида

$$u^i_{xy} = c^i_{jk} u^j u^k_x, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

В частности, показано, что система уравнений (2) обладает не одной, а двумя характеристическими алгебрами и эти алгебры естественным образом «склеиваются» в единую алгебру Ли посредством так называемых соотношений нулевой кривизны.

Понятие характеристической алгебры Ли определено и для дискретных уравнений гиперболического типа (см. [9]).

В данной работе на примере нелинейных уравнений вида

$$u_{xy} = f(u, u_x) \tag{3}$$

показано, как с использованием характеристической алгебры Ли получить список интегрируемых уравнений.

Рассмотрим набор независимых переменных

$$u,\ u_1,\ \bar{u}_1,\ u_2,\ \bar{u}_2, \ldots,\ u_n,\ \bar{u}_n, \ldots,$$

где

$$u_1 = u_x, \quad \bar{u}_1 = u_y, \quad u_2 = u_{xx}, \quad \bar{u}_2 = u_{yy}, \ldots.$$

Определим x-характеристическую алгебру Ли A уравнения (3). Для этого напомним определение симметрии.

Определение. Функция $F = F(u, u_1, \bar{u}_1, u_2, \bar{u}_2, \ldots, u_n, \bar{u}_n)$ называется симметрией уравнения (3), если она удовлетворяет определяющему соотношению

$$D\bar{D}F = \frac{\partial f}{\partial u_1} DF + \frac{\partial f}{\partial u} F.$$

Здесь D ($\bar{D}$) — оператор полного дифференцирования по переменной x (соответственно y) согласно уравнению (3). Например,

$$\bar{D} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{u}_{k+1} \frac{\partial}{\partial \bar{u}_k} + \sum_{k=1}^{\infty} D^{k-1}(f) \frac{\partial}{\partial u_k}. \tag{4}$$

Известно (см. [6]), что любая симметрия F уравнения (3) представима в виде

$$F = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) + \bar{\varphi}(u, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n),$$

где φ и $\bar{\varphi}$, в свою очередь, симметрии уравнения (3).

Обозначим через $\Im$ множество локально-аналитических функций, зависящих от конечного числа переменных u, u_1, $u_2, \ldots$, $u_n, \ldots$, т. е.

$$\Im = \langle \varphi = \varphi(u, u_1, u_2, \ldots, u_n),\ n = 1, 2, \ldots \rangle.$$

Оператор $\bar{D}$ (см. (4)) действует на этом классе функций по правилу

$$\bar{D}\varphi = \bar{u}_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \sum_{k=1}^{\infty} D^{k-1}\big(f(u)\big) \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}.$$

Через X_1 и X_2 обозначим следующие векторные поля:

$$X_1 = \sum_{k=1}^{\infty} D^{k-1}(f) \frac{\partial}{\partial u_k}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial u}. \tag{5}$$

Отметим, что

$$\bar{D} = \bar{u}_1 X_2 + X_1. \tag{6}$$

x-характеристическая алгебра Ли уравнения (3) есть алгебра A, порождённая элементами X_1 и X_2.

Пусть L_n — линейное пространство коммутаторов длины $n - 1$, $n = 2, 3, \ldots$. Например, L_2 — линейная оболочка векторных полей X_1, X_2, а L_3 порождается элементом $[X_1, X_2]$ и т. д. Тогда характеристическую алгебру Ли A предста́вим в виде

$$A = \bigcup_{i=2}^{\infty} L_i.$$

Аналогично вводится y-характеристическая алгебра Ли $\bar{A}$ уравнения (3):

$$\bar{A} = \bigcup_{i=2}^{\infty} \bar{L}_i.$$

В работе показано, что ограничение на порядок роста размерности пространств L_n и $\bar{L}_m$, а именно не более чем на единицу при $n, m = 3, 4, 5, 6$, полностью определяет правую часть уравнения (3). При этом полученный список уравнений совпадает с известным списком интегрируемых уравнений.

Для уравнения sh-Гордона построено полное описание характеристической алгебры Ли (теорема 1 раздела 3).

2. Уравнения Клейна—Гордона

В этом разделе рассматриваются уравнения

$$u_{xy} = f(u). \tag{7}$$

В [5] показано, что нелинейное уравнение (7), обладающее высшими симметриями, сводится к одному из следующих:

$$u_{xy} = e^u, \tag{8}$$

$$u_{xy} = \sin u, \tag{9}$$

$$u_{xy} = e^u + e^{-2u}. \tag{10}$$

Оператор полной производной D на множестве функций $\Im$ определяется следующим образом:

$$D = \sum_{i=0}^{\infty} u_{i+1} \frac{\partial}{\partial u_i}.$$

Лемма 1. *Пусть векторное поле Z имеет вид*

$$Z = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial u_3} + \ldots, \quad \alpha_i = \alpha_i(u, u_1, u_2, \ldots), \quad i = 1, 2, 3, \ldots.$$

Тогда $[D, Z] = 0$, если и только если $Z = 0$.

Доказательство. Имеем

$$[D, Z] = \left(D(\alpha_1) \frac{\partial}{\partial u_1} + D(\alpha_2) \frac{\partial}{\partial u_2} + D(\alpha_3) \frac{\partial}{\partial u_3} + \ldots \right) - \\ - \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial u_1} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots \right) = 0.$$

Таким образом, получаем, что

$$\alpha_1 = 0, \quad D(\alpha_1) - \alpha_2 = 0, \quad D(\alpha_2) - \alpha_3 = 0, \ldots,$$

и следовательно, $\alpha_i = 0$ для $i = 1, 2, 3, \ldots$. □

Так как D и $\bar{D}$ коммутируют и

$$[D, \bar{D}] = f X_2 + \bar{u}_1 [D, X_2] + [D, X_1],$$

то

$$[D, X_1] = -f X_2, \quad [D, X_2] = 0. \tag{11}$$

Следует отметить, что операторы X_1, X_2 линейно независимы при $f(u) \neq 0$. Пусть $X_3 = [X_2, X_1]$. Используя тождество Якоби и (11), получаем

$$[D, X_3] = -f_u X_2. \tag{12}$$

Положим

$$\mathcal{L}_n = \bigcup_{i=2}^{n} L_i, \quad n = 3, 4, \ldots.$$

Лемма 2. *Размерность линейного пространства $\mathcal{L}_3$ равна двум тогда и только тогда, когда*

$$X_3 - c X_1 = 0, \quad c = \text{const}.$$

При этом правая часть уравнения (7) *принимает вид*

$$f(u) = \alpha \mathrm{e}^{cu},$$

где α *— постоянная,* $\alpha \neq 0$.

Доказательство. Пусть $\dim \mathcal{L}_3 = 2$. Тогда

$$X_3 = f_u \frac{\partial}{\partial u_1} + f_{uu} u_1 \frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots,$$

поэтому $X_3 = c(u) X_1$. Согласно лемме 1 и формулам (11) и (12) имеем

$$[D, X_3 - cX_1] = -f_u X_2 - D(c) X_1 + cf X_2 = 0.$$

Последнее соотношение эквивалентно системе уравнений

$$f_u - cf = 0, \quad D(c) = 0.$$

Следовательно, $c = \mathrm{const}$ и $f = \alpha e^{cu}$. □

Таким образом, нелинейное уравнение (7) с двумерной характеристической алгеброй Ли A сводится к уравнению Лиувилля (8).

Пусть $X_4 = [X_2, X_3]$, $X_5 = [X_1, X_3]$. Используя тождество Якоби и (11), (12), получаем

$$[D, X_4] = -f_{uu} X_2, \quad [D, X_5] = f_u X_3 - f X_4. \tag{13}$$

Далее будем предполагать, что размерность линейного пространства $\mathcal{L}_3$ равна трём, и покажем, что случай $\dim \mathcal{L}_4 = 3$ в действительности не реализуется. В самом деле, если $\dim \mathcal{L}_4 = 3$, то

$$X_4 = c_1 X_1 + c_2 X_3, \quad X_5 = \bar{c}_1 X_1 + \bar{c}_2 X_3, \tag{14}$$

где $c_i = c_i(u, u_1, u_2, \ldots)$, $\bar{c}_i = \bar{c}_i(u, u_1, u_2, \ldots)$, $i = 1, 2$. Первое соотношение (14), согласно утверждению леммы 1 и формулам (11)—(13), эквивалентно соотношениям

$$D(c_1) = 0, \quad c_1 f - f_{uu} + c_2 f_u = 0, \quad D(c_2) = 0.$$

Поэтому c_1, c_2 — постоянные и

$$f_{uu} - c_2 f_u - c_1 f = 0. \tag{15}$$

Второе соотношение (14) эквивалентно системе уравнений

$$D(\bar{c}_1) + c_1 f = 0, \quad \bar{c}_1 f + \bar{c}_2 f_u = 0, \quad D(\bar{c}_2) + c_2 f - f_u = 0.$$

Из последнего уравнения следует, что $\bar{c}_2 = \mathrm{const}$, т. е. $f_u = c_2 f$. Тогда, как показано выше, $\dim \mathcal{L}_3 = 2$.

Пусть теперь $\dim \mathcal{L}_4 = 4$. Тогда, используя лемму 1 и формулы (11)—(13), получаем, что либо

$$X_4 = c_1 X_1 + c_2 X_3 + c_3 X_5$$

и, следовательно,

$$D(c_1) - c_1 c_3 f = 0, \quad f_{uu} - c_1 f - c_2 f_u = 0, \quad D(c_2) + c_3 f_u - c_2 c_3 f = 0, \tag{16}$$

либо

$$X_5 = \bar{c}_1 X_1 + \bar{c}_2 X_3 + \bar{c}_3 X_4$$

и тогда

$$D(\bar{c}_1) = 0, \quad \bar{c}_1 f + \bar{c}_2 f_u + \bar{c}_3 f_{uu} = 0, \quad D(\bar{c}_2) - f_u = 0, \quad D(\bar{c}_3) + f = 0. \tag{17}$$

Согласно первому и третьему уравнениям (16) $c_1, c_2 = \mathrm{const}$, $c_3 = 0$ (иначе $f_u = c_2 f$, но тогда $\dim \mathcal{L}_3 = 2$) и функция f удовлетворяет уравнению $f_{uu} - c_2 f_u - c_1 f = 0$. Если выполнено (17), то $f = 0$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Размерность пространства $\mathcal{L}_4$, порождённого операторами X_1, X_2, X_3, X_4 и X_5, равна 4 тогда и только тогда, когда функция f удовлетворяет уравнению*

$$f_{uu} - p f_u - q f = 0, \tag{18}$$

где $p, q = \mathrm{const}$ и $f_u \neq \beta f$. При этом $X_4 = pX_3 + qX_1$.

Далее будем считать, что выполняется условие леммы 3. Введём операторы длины 4:

$$X_6 = [X_1, X_5], \quad X_7 = [X_2, X_5].$$

Используя тождество Якоби, нетрудно показать, что $X_7 = pX_5$. Поэтому $\dim \mathcal{L}_5 \leqslant 5$.

Замечание. Если $X_7 = 0$, то $p = 0$ и равенство (18) принимает вид

$$f_{uu} - qf = 0.$$

Тогда уравнение (7) сводится к уравнению sh-Гордона (9).

С помощью формул (11)—(13) получаем, что

$$[D, X_6] = (f_u - 2pf) X_5. \tag{19}$$

Легко проверить, что $\dim \mathcal{L}_5 = 5$.

Теперь введём операторы длины 5:

$$X_8 = [X_3, X_5], \quad X_9 = [X_1, X_6], \quad X_{10} = [X_2, X_6].$$

Так как $X_8 = -pX_6 + X_{10}$, то $\dim \mathcal{L}_6 \leqslant 7$.

Нетрудно показать, используя (11)—(13) и (19), что

$$[D, X_9] = -fX_{10} + (f_u - 2pf) X_6, \quad [D, X_{10}] = (q - 2p^2) f X_5. \tag{20}$$

Если $\dim \mathcal{L}_6 = 5$, то выполняется система соотношений

$$X_9 = c_1 X_1 + c_2 X_3 + c_3 X_5 + c_4 X_6, \quad X_{10} = \bar{c}_1 X_1 + \bar{c}_2 X_3 + \bar{c}_3 X_5 + \bar{c}_4 X_6$$

Первое соотношение согласно утверждению леммы 1 и формулам (11)—(13), (19), (20) перепишем в виде

$$D(c_1) - qc_3 f = 0, \quad c_1 f + c_2 f_u = 0, \quad D(c_3) + c_3 f_u - pc_3 f = 0,$$
$$D(c_3) + c_4 f_u - 2pc_4 f = 0, \quad D(c_4) - f_u + 2pf = 0.$$

Из последнего уравнения следует, что $c_4 = 0$ и $f_u = 2pf$. Значит, $X_3 = 2pX_1$, т. е. $\dim \mathcal{L}_3 = 2$. А так как $\dim \mathcal{L}_3 = 3$, то условие $\dim \mathcal{L}_6 = 5$ не выполняется.

Лемма 4. *Пусть* $\dim \mathcal{L}_i = i$, $i = 3, 4, 5$. *Тогда размерность пространства* $\mathcal{L}_6$ *равна* 6 *тогда и только тогда, когда* $X_{10} = 0$.

Доказательство. Пусть $\dim \mathcal{L}_6 = 6$. Тогда либо

$$X_9 = c_1X_1 + c_2X_3 + c_3X_5 + c_4X_6 + c_5X_{10}$$

и, следовательно,

$$\begin{gathered} D(c_1) - qc_3f = 0, \quad c_1f + c_2f_u = 0, \quad D(c_2) + c_3f_u - pc_3f = 0, \\ D(c_3) + c_4f_u - 2pc_4f + c_5f_{uu} - c_5pf_u - 2c_5p^2f = 0, \\ D(c_4) - f_u + 2pf = 0, \quad D(c_5) + f = 0, \end{gathered} \tag{21}$$

либо

$$X_{10} = \bar{c}_1X_1 + \bar{c}_2X_3 + \bar{c}_3X_5 + \bar{c}_4X_6 + \bar{c}_5X_9$$

и тогда

$$\begin{gathered} D(\bar{c}_1) - \bar{c}_3qf - \bar{c}_1\bar{c}_5f = 0, \quad \bar{c}_1f + \bar{c}_2f_u = 0, \\ D(\bar{c}_2) + \bar{c}_3f_u - \bar{c}_3pf - \bar{c}_2\bar{c}_5f = 0, \\ D(\bar{c}_3) - (q - 2p^2)f + \bar{c}_4(f_u - 2pf) - \bar{c}_3\bar{c}_5f = 0, \\ D(\bar{c}_4) - \bar{c}_4\bar{c}_5f = 0, \quad D(\bar{c}_5) - \bar{c}_5^2f = 0. \end{gathered} \tag{22}$$

Из последнего уравнения (21) видно, что $f = 0$. Систему (22) перепишем в виде

$$\bar{c}_3q = 0, \quad \bar{c}_1f + \bar{c}_2f_u = 0, \quad \bar{c}_3(f_u - pf) = 0, \quad -(q - 2p^2)f + \bar{c}_4(f_u - 2pf) = 0,$$

где $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \bar{c}_4 = \mathrm{const}$, $\bar{c}_5 = 0$.

Если $\bar{c}_3 \neq 0$, то функция f удовлетворяет уравнению $f_u = pf$, тогда $\dim \mathcal{L}_3 = 2$. Если $\bar{c}_3 = 0$, то $\bar{c}_4 = 0$ (иначе $\dim \mathcal{L}_3 = 2$) и из четвёртого уравнения следует, что $q = 2p^2$. Согласно (20) имеем, что $X_{10} = 0$. Таким образом, необходимость доказана.

Теперь докажем достаточность. Пусть $X_{10} = 0$, тогда, так как $X_8 = -pX_6$, имеем $\dim \mathcal{L}_6 \leqslant 6$. Если $\dim \mathcal{L}_6 = 5$, то оператор X_9 является линейной комбинацией операторов X_1, X_3, X_5 и X_6, но в этом случае, как показано выше, $\dim \mathcal{L}_3 = 2$. □

Уравнение (7) при выполнении условия $q = 2p^2$ в (18) приводится к уравнению Цицейки (10).

3. Характеристическая алгебра уравнения sh-Гордона

В этом разделе мы приведём краткое описание x-характеристической алгебры Ли A уравнения

$$u_{xy} = e^u + e^{-u}. \tag{23}$$

Введём кратные коммутаторы следующего специального вида:

$$X_{i_1\dots i_n} = \mathrm{ad}_{i_1}\dots\mathrm{ad}_{i_{n-1}} X_{i_n}, \quad \mathrm{ad}_j Y = [X_j, Y].$$

Тогда линейное пространство L_n есть линейная оболочка элементов $X_{i_1\dots i_n}$, где $i_k = 1, 2,\ k = 1, \dots, n$.

Выделим элементы вида

$$Y_n = X_{1\dots 1\,2\,1}, \quad Z_n = X_{2\,1\dots 1\,2\,1}.$$

Теорема 1. *Для уравнения* sh*-Гордона* (23) *справедливы равенства*

$$\dim L_n = \begin{cases} 2 & \text{при } n = 2k, \\ 1 & \text{при } n = 2k-1, \end{cases} \qquad k = 3, 4, \dots. \tag{24}$$

При этом линейное пространство L_{2k-1} *порождается векторным полем* $X_{1\dots 1\,2\,1}$, *а* L_{2k} *— полями* $X_{1\dots 1\,2\,1}$ *и* $X_{2\,1\dots 1\,2\,1}$.

Доказательство. Элементы X_1, X_2 и X_3 определены в разделе 2. Здесь мы для удобства положим $X_4 = [X_1, X_3]$. Тогда пространство L_5 есть линейная оболочка элементов $[X_1, X_4]$, $[X_2, X_4]$. Используя тождество Якоби и соотношения

$$\begin{gathered} [D, X_1] = -(e^u + e^{-u})X_2, \quad [D, X_2] = 0, \quad [D, X_3] = -(e^u - e^{-u})X_2, \\ [D, X_4] = -(e^u + e^{-u})X_1 + (e^u - e^{-u})X_3, \end{gathered} \tag{25}$$

получаем, что

$$\big[D, [X_2, X_4]\big] = 0.$$

Следовательно, согласно лемме 1 $[X_2, X_4] = 0$, и поэтому L_5 порождается элементом $[X_1, X_4] = X_{1\,1\,2\,1}$.

Обозначим $X_5 = [X_1, X_4]$, тогда $[D, X_5] = (e^u + e^{-u})X_4$.

Пространство L_6 есть линейная оболочка элементов $[X_1, X_5]$, $[X_2, X_5]$, $[X_3, X_4]$. Используя тождество Якоби, имеем

$$[X_3, X_4] = [X_2, X_5].$$

Поэтому L_6 порождается элементами $[X_1, X_5] = X_{1\,1\,1\,2\,1}$, $[X_2, X_5] = X_{2\,1\,1\,2\,1}$.

Пусть $[X_1, X_5] = X_6$, тогда

$$[D, X_6] = -(e^u - e^{-u})X_5 + (e^u + e^{-u})[X_2, X_5], \quad [D, X_{2\,1\,1\,2\,1}] = (e^u + e^{-u})X_4.$$

Линейная оболочка L_7 порождается элементами

$$[X_1, X_6], \quad [X_2, X_6], \quad [X_3, X_5], \quad [X_1, X_{2\,1\,1\,2\,1}], \quad [X_2, X_{2\,1\,1\,2\,1}].$$

Используя тождество Якоби, имеем

$$[X_3, X_5] = -[X_1, X_{2\,1\,1\,2\,1}] + [X_2, X_6].$$

Нетрудно показать, что

$$\big[D, [X_2, X_{2\,1\,1\,2\,1}]\big] = (e^u - e^{-u})X_4 = [D, X_5],$$

следовательно, $[X_2, X_{2\,1\,1\,2\,1}] = X_5$. Кроме того, поскольку

$$\big[D, [X_1, X_{2\,1\,1\,2\,1}]\big] = -(e^u + e^{-u})[X_2, X_{2\,1\,1\,2\,1}] + (e^u + e^{-u})X_5,$$
$$\big[D, [X_2, X_6]\big] = -(e^u + e^{-u})[X_2, X_{2\,1\,1\,2\,1}] + (e^u + e^{-u})X_5,$$

то $[X_1, X_{2\,1\,1\,2\,1}] = [X_2, X_6]$ и $[X_2, X_6] = 0$. Значит, L_7 порождается элементом $[X_1, X_6] = X_{1\,1\,1\,1\,2\,1}$.

Пусть $X_{i+1} = [X_1, X_i]$, тогда

$$[D, X_{i+1}] = (e^u - e^{-u})X_i - (e^u + e^{-u})[X_2, X_i], \tag{26}$$

$$\Big[D, \big[X_2, [X_2, X_i]\big]\Big] = (e^u - e^{-u})X_{i-1} + (e^u + e^{-u})[X_2, X_{i-1}], \tag{27}$$

$$[X_j, X_{i-j+3}] = 0, \quad j = 3, 4, \ldots, \tag{28}$$

$$[X_j, X_{2\,1\ldots1\,2\,1}] = 0, \quad j = 3, 4, \ldots. \tag{29}$$

Так как

$$\big[D, [X_2, X_{i+1}]\big] = -(e^u + e^{-u})\big[X_2, [X_2, X_i]\big] + (e^u + e^{-u})X_i$$

и

$$\Big[D, \big[X_1, [X_2, X_i]\big]\Big] = -(e^u + e^{-u})\big[X_2, [X_2, X_i]\big] + (e^u + e^{-u})X_i, \tag{30}$$

то

$$[X_2, X_{i+1}] = \big[X_1, [X_2, X_i]\big]. \tag{31}$$

Предположим, что L_{2k-1} порождается элементом $[X_1, X_{2k-2}]$. Заметим, что

$$[X_2, X_{2k-2}] = 0.$$

Тогда линейная оболочка L_{2k} порождается элементами

$$[X_1, X_{2k-1}],\ [X_2, X_{2k-1}],\ [X_3, X_{2k-2}], \ldots,\ [X_j, X_{2\,1\ldots1\,2\,1}].$$

В соответствии с формулами (28) и (29) все эти элементы, кроме первых двух, равны нулю. Значит, L_{2k} порождается элементами $[X_1, X_{2k-1}]$, $[X_2, X_{2k-1}]$ и

$$\big[D, [X_2, X_{2k-1}]\big] =$$
$$= -(e^u + e^{-u})\big[X_2, [X_2, X_{2k-2}]\big] + (e^u + e^{-u})X_{2k-2} = (e^u + e^{-u})X_{2k-2}.$$

Теперь пусть L_{2k} порождено элементами $[X_1, X_{2k-1}]$, $[X_2, X_{2k-1}]$, тогда L_{2k+1} есть линейная оболочка элементов

$$[X_1, X_{2k}],\ [X_2, X_{2k}],\ \big[X_1, [X_2, X_{2k-1}]\big],\ \big[X_2, [X_2, X_{2k-1}]\big],$$
$$[X_3, X_{2k-1}], \ldots,\ [X_j, X_{2\,1\ldots1\,2\,1}].$$

Из соотношений (28) и (29) следует, что

$$[X_3, X_{2k-1}] = [X_4, X_{2k-2}] = \ldots = [X_j, X_{2\,1\ldots1\,2\,1}] = 0,$$

а из (26), (27) имеем

$$\Big[D, \big[X_2, [X_2, X_{2k-1}]\big]\Big] = (e^u - e^{-u})X_{2k-2} + (e^u + e^{-u})[X_2, X_{2k-2}] = [D, X_{2k-1}],$$

т. е. $\big[X_2,[X_2,X_{2k-1}]\big]=X_{2k-1}$. Соотношения (30) и (31) принимают вид

$$[X_2,X_{2k}]=\big[X_1,[X_2,X_{2k-1}]\big]=-(e^u+e^{-u})X_{2k-1}+(e^u+e^{-u})X_{2k-1}=0.$$

Следовательно, L_{2k+1} порождается элементом $[X_1,X_{2k}]$. Из принципа математической индукции вытекает справедливость равенств (24). □

Таким образом, базис x-характеристической алгебры Ли A состоит из элементов

$$X_1,\ X_2,\ X_{2\,1},\ Y_3,\ Y_4,\ Y_5,\ Z_5,\ Y_6,\ Y_7,\ Z_7,\dots,\ Y_{2n},\ Y_{2n+1},\ Z_{2n+1},\dots.$$

Отметим, что в [3] уравнение sh-Гордона представлено как квадратичная система и предложен другой базис характеристической алгебры.

4. Уравнения $u_{xy}=f(u,u_x)$

x-характеристическая алгебра Ли A уравнения (3) порождается векторными полями

$$X_1=\sum_{i=1}^{\infty}D^{i-1}(f)\frac{\partial}{\partial u_i},\quad X_2=\frac{\partial}{\partial u},$$

а y-характеристическая алгебра Ли $\bar{A}$ — полями

$$Y_1=u_1\frac{\partial}{\partial u}+\sum_{i=1}^{\infty}\bar{D}^{i-1}(f)\frac{\partial}{\partial \bar{u}_i},\quad Y_2=\frac{\partial}{\partial u_1}.$$

Напомним, что

$$A=\bigcup_{i=2}^{\infty}L_i,\quad \bar{A}=\bigcup_{i=2}^{\infty}\bar{L}_i,\quad \mathcal{L}_n=\bigcup_{i=2}^{n}L_i,\quad \bar{\mathcal{L}}_n=\bigcup_{i=2}^{n}\bar{L}_i,\quad n=3,4,\dots,$$

где L_n ($\bar{L}_n$) — линейная оболочка векторных полей $X_{i_1\,i_2\dots\,i_n}$ (соответственно $Y_{i_1\,i_2\dots\,i_n}$) (см. раздел 3).

Классификация уравнений (3) основана на следующем предложении.

Лемма 5. *Если*

$$X=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\frac{\partial}{\partial u_i},\quad \alpha_i=\alpha_i(u,\bar{u}_1,u_1,u_2,\dots,u_{n_i}),\quad i=1,2,\dots,$$

$$Y=\sum_{i=1}^{\infty}\bar{\alpha}_i\frac{\partial}{\partial \bar{u}_i},\quad \bar{\alpha}_i=\bar{\alpha}_i(u,u_1,\bar{u}_1,\bar{u}_2,\dots,\bar{u}_{n_i}),\quad i=1,2,\dots,$$

то $[D,X]=0$ и $[\bar{D},Y]=0$ тогда и только тогда, когда $X=0$ и $Y=0$ соответственно.

Исследование линейных пространств $\bar{\mathcal{L}}_n$, $n=3,4$, приводит к следующему результату.

Если $\dim \bar{\mathcal{L}}_3 = 2$, то уравнение (3) имеет вид

$$u_{xy} = u_x R(u). \tag{32}$$

Если $\dim \bar{\mathcal{L}}_4 = 3$, то

$$u_{xy} = R(u_x), \quad R' - \frac{u_x}{R} = \lambda, \quad \lambda = \mathrm{const}, \tag{33}$$

либо

$$u_{xy} = e^u R(u_x), \quad RR' - u_x = 0, \tag{34}$$

либо

$$u_{xy} = s(u)u_x + B, \quad B = \mathrm{const} \neq 0; \tag{35}$$

Если $\dim \bar{\mathcal{L}}_4 = 4$, то

$$u_{xy} = s(u)u_x + B(u), \tag{36}$$

либо

$$u_{xy} = s(u)R(u_x), \quad R' - \alpha\frac{u_x}{R} = \lambda, \quad \lambda = \mathrm{const}, \tag{37}$$

либо

$$u_{xy} = e^u R(u_x), \tag{38}$$

где функция R удовлетворяет системе уравнений

$$c_1' R + 2c_1 R' = \lambda u_x c_1^2 R^2, \quad c_1(1 - \lambda R)(u_x R' - R) + R'' = 0,$$

либо

$$u_{xy} = e^u R(u_x), \tag{39}$$

где функция R удовлетворяет системе уравнений

$$R'' + c_3\lambda(R - u_x R') = 0, \quad c_3(R' - c_3 u_x \lambda R) + c_3' R = 0,$$

либо

$$u_{xy} = R(u_x). \tag{40}$$

Уравнения вида $u_{xy} = e^u R(u_x)$ можно записать следующим образом:

$$\upsilon_y = e^u, \quad u_x = \varphi(\upsilon).$$

Последнее сводится к уравнению

$$\upsilon_{xy} = \upsilon_x \varphi(\upsilon). \tag{41}$$

Задача об интегрировании уравнений (32)—(34) и (38)—(40) сводится к интегрированию обыкновенного уравнения; далее мы эти уравнения рассматривать не будем. Интерес представляют уравнения (36) и (37).

Линейное пространство $\bar{\mathcal{L}}_4$ порождается операторами

$$Y_1,\ Y_2,\ Y_3 = [Y_2, Y_1],\ Y_4 = [Y_2, Y_3],\ Y_5 = [Y_1, Y_3].$$

Для уравнения (36) $Y_4 = 0$, а для уравнения (37)

$$Y_4 = \frac{\alpha}{R^2(u_1)}(Y_1 - u_1 Y_3). \tag{42}$$

Пусть $Y_6 = [Y_2, Y_5]$, $Y_7 = [Y_1, Y_5]$ и $Y_8 = [Y_2, Y_7]$, $Y_9 = [Y_1, Y_7]$, $Y_{10} = [Y_3, Y_5]$. Для уравнения (36) $Y_6 = 0$ и $Y_{10} = Y_8$, а для уравнения (37) имеем

$$Y_6 = -\frac{\alpha u_1}{R^2} Y_5, \quad Y_{10} = \frac{\alpha u_1}{R^2} Y_7 + Y_8,$$

поэтому $\dim \bar{\mathcal{L}}_5 = 5$, $\dim \bar{\mathcal{L}}_6 \leqslant 7$. При $\dim \bar{\mathcal{L}}_6 = 6$ уравнение (36) сводится к уравнению типа (32), а для уравнения (37) получаем

$$s'' = 0, \quad \alpha = 2\lambda^2. \tag{43}$$

При $s = u$ уравнение (37), (43) приводится к виду

$$u_{xy} = 3uR(u_x), \quad (u_x - R)(R + 2u_x)^2 = 1, \tag{44}$$

которое связано с уравнением $v_{xy} = e^v + e^{-2v}$ дифференциальной подстановкой (см. [4])

$$v = -\frac{1}{2} \ln(u_x - R).$$

Рассматривая x-характеристическую алгебру Ли, а именно линейные пространства $\mathcal{L}_3$ и $\mathcal{L}_4$, получаем следующее.

Если $\dim \mathcal{L}_3 = 2$, то уравнение (3) принимает вид

$$u_{xy} = e^{\alpha u} R(u_x), \quad \alpha = \text{const}. \tag{45}$$

Если $\dim \mathcal{L}_4 = 3$, то

$$u_{xy} = s(u) u_x, \tag{46}$$

где функция s удовлетворяет системе уравнений

$$s'' - c_1 s - c_3 s' = 0, \quad \bar{c}_1 s + \bar{c}_3 s' = 0,$$
$$\bar{c}_1' + c_1 s = 0, \quad \bar{c}_3' + c_3 s - s' = 0, \quad c_i = \text{const}, \quad \bar{c}_i = \bar{c}_i(u), \quad i = 1, 3.$$

Если $\dim \mathcal{L}_4 = 4$, то

$$u_{xy} = s(u) u_x,$$

где функция s удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{gathered} s'' - c_1 s - c_3 s' = 0, \quad c_1 = \alpha c_5, \\ c_5' = c_5^2 s, \quad c_3' + c_5 s' - c_3 c_5 s = 0, \quad c_i = c_i(u), \quad i = 1, 3, 5, \end{gathered} \tag{47}$$

или уравнениям

$$\begin{gathered} s'' + \bar{c}_1 s + \bar{c}_3 s' = 0, \quad \bar{c}_3' = s', \\ \bar{c}_5' = -s, \quad \bar{c}_1 = \text{const}, \quad \bar{c}_3 = \bar{c}_3(u), \quad \bar{c}_5 = \bar{c}_5(u). \end{gathered} \tag{48}$$

Если $\dim \mathcal{L}_4 = 4$, то возможно также, что

$$u_{xy} = s(u) R(u_x), \tag{49}$$

где функция s такая, что

$$s'' - c_3 s' - c_1 s = 0, \quad c_1, c_3 = \text{const}. \tag{50}$$

Уравнения (46)—(48) относятся к уравнениям типа (41).

Рассмотрим уравнения (49), (50), для которых $\dim \bar{\mathcal{L}}_4 = 4$, а именно функция $R(u_x)$ — решение уравнения

$$R' - \frac{u_x}{R} = \beta, \quad \beta = \text{const}. \tag{51}$$

Принимая во внимание, что $X_4 = c_1 X_1 + c_3 X_3$, и полагая

$$X_6 = [X_2, X_5], \quad X_7 = [X_1, X_5], \quad X_8 = [X_2, X_7],$$
$$X_9 = [X_1, X_7], \quad X_{10} = [X_3, X_5],$$

нетрудно показать, что $X_6 = c_3 X_5$ и $X_{10} = -c_3 X_7 + X_8$. Заметим, что если $X_4 = 0$, то $s(u) = u$, а при $X_6 = 0$ $s(u) = \sin u$. Видно, что $\dim \mathcal{L}_5 = 5$. Условие $\dim \mathcal{L}_6 = 6$ для данного уравнения (т. е. для (49)—(51)) эквивалентно тому, что $s(u) = u$. При этом $X_8 = -X_1 + uX_3 + \beta X_5$.

При $\lambda = 0$ для функции $s = \sin u$ уравнения (49)—(51) связаны с уравнением $v_{xy} = \sin v$ дифференциальной подстановкой $v = \arcsin u_x + u$, а при $s = u$ они связано подстановкой $v = \arcsin u_x$.

Структура x-характеристической алгебры Ли уравнений

$$u_{xy} = u\sqrt{1 - u_x^2}, \quad u_{xy} = \sin u \sqrt{1 - u_x^2} \quad (\lambda = 0)$$

аналогична структуре x-характеристической алгебры Ли уравнения sh-Гордона (9), а y-характеристическая алгебра уравнения (44) имеет ту же структуру, что и характеристическая алгебра уравнения Цицейки (10).

Отметим, что полученный список интегрируемых уравнений совпадает с известным списком.

Литература

[1] Бормисов А. А., Гудкова Е. С., Мукминов Ф. Х. Об интегрируемости гиперболических систем типа уравнения Риккати // Теор. и матем. физ. — 1997. — Т. 113, № 2. — С. 261—275.

[2] Бормисов А. А., Мукминов Ф. Х. Симметрии гиперболических систем типа уравнения Риккати // Теор. и матем. физ. — 2001. — Т. 127, № 1. — С. 448—459.

[3] Жибер А. В., Мукминов Ф. Х. Квадратичные системы, симметрии, характеристические и полные алгебры // Задачи математической физики и асимптотика их решений. — Уфа: БНЦ УРО АН СССР, 1991. — С. 14—33.

[4] Жибер А. В., Соколов В. В. Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа // Успехи мат. наук. — 2001. — Т. 56, № 1. — С. 63—106.

[5] Жибер А. В., Шабат А. Б. Уравнения Клейна—Гордона с нетривиальной группой // ДАН СССР. — 1979. — Т. 247, № 5. — С. 1103—1107.

[6] Жибер А. В., Шабат А. Б. Системы уравнений $u_x = p(u, v)$, $v_y = q(u, v)$, обладающие симметриями // ДАН СССР. — 1984. — Т. 277, № 1. — С. 29—33.

[7] Лезнов А. Н., Смирнов В. Г., Шабат А. Б. Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем // Теор. и матем. физ. — 1982. — Т. 51, № 1. — С. 10—21.

[8] Шабат А. Б., Ямилов Р. И. Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана. — Препринт Башк. филиала АН СССР. — Уфа, 1981.

[9] Habibullin I. T. Characteristic algebras of fully discrete hyperbolic type equations // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. — 2005. — Vol. 1, no. 23. — P. 1—9.