

Некоторые классы электромагнитных волн, допускающих параболические винты

А. С. ИВАНОВА

Ивановский государственный университет
e-mail: sk_ivanov@list.ru

М. А. ПАРИНОВ

Ивановский государственный университет
e-mail: parinov@ivanovo.ac.ru

УДК 514.83+514.7

Ключевые слова: группа Пуанкаре, уравнения Максвелла, пространство Максвелла, электромагнитные волны, классификация.

Аннотация

Дано описание классов электромагнитных волн, допускающих некоторые подгруппы группы Пуанкаре, которые содержат параболические винты. Найдены представители таких классов.

Abstract

A. S. Ivanova, M. A. Parinov, Some classes of electromagnetic waves that admit parabolic helices, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 7, pp. 79–92.

We describe classes of electromagnetic waves that admit the subgroups of the Poincaré group such that the subgroups contain parabolic helices. Representatives of some classes are constructed.

1. Введение

В настоящей работе продолжено начатое в [2–4] описание классов электромагнитных волн, допускающих подгруппы группы Пуанкаре [1]; представлены классы электромагнитных волн, допускающих одномерную группу параболических винтов вида

$$\begin{aligned}\tilde{x}^1 &= x^1 - a(x^2 + x^4), & \tilde{x}^2 &= x^2 + ax^1 - \frac{a^2}{2}(x^2 + x^4), \\ \tilde{x}^3 &= x^3 + \mu a, & \tilde{x}^4 &= x^4 - ax^1 + \frac{a^2}{2}(x^2 + x^4)\end{aligned}\tag{1}$$

в пространстве Минковского $\mathbb{R}_1^4$ ($\mu = \text{const}$, a — групповой параметр). При этом используется классификация пространств Максвелла по подгруппам группы Пуанкаре [6, 7]. Электромагнитная волна трактуется в соответствии с [5] как

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 7, с. 79–92.

© 2006 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

пространство Максвелла, задаваемое непостоянным по времени тензором F_{ij} ($\partial F_{ij}/\partial x^4 \neq 0$) на пространстве Минковского, удовлетворяющим уравнениям Максвелла

$$\partial_{[i} F_{jk]} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla_k F^{ik} = 0. \quad (3)$$

Базис алгебры Ли группы Пуанкаре, а также все используемые в статье обозначения соответствуют [6, 7]. В частности, подгруппы группы Пуанкаре из списка, полученного в [1], и соответствующие алгебры Ли векторных полей обозначены $G_{k,l}$ и $\mathcal{L}_{k,l}$. Через $\{x^i\}$ обозначены галилеевы координаты. Выражение $L\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ всюду означает линейную оболочку векторов $\xi_1, \dots, \xi_k$. Компоненты всех тензоров отнесены к галилеевым координатам, даже если выражены как функции других координат.

Класс электромагнитных волн, допускающих группу $G_{k,l}$, обозначен через $W_{k,l}$. Он состоит из кососимметричных тензорных полей F_{ij} , удовлетворяющих уравнениям (2), (3) и условиям инвариантности F_{ij} относительно группы $G_{k,l}$:

$$L_{\xi_\alpha} F_{ij} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, k = \dim \mathcal{L}_{k,l}) \quad (4)$$

(L_ξ — производная Ли, $\mathcal{L}_{k,l} = L\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$). Можно также сказать, что класс $W_{k,l}$ есть подкласс класса пространств Максвелла $C_{k,l}$, задаваемых тензорами F_{ij} , удовлетворяющими второму уравнению Максвелла (3).

Цель настоящей работы состоит в описании классов $W_{k,l}$ электромагнитных волн, инвариантных относительно групп $G_{k,l}$, алгебры Ли которых содержат вектор $e_{12} - e_{14} + \mu e_3$, задающий группу (1). Мы выделяем два случая: а) $\mu = 0$ и б) $\mu \neq 0$.

2. Классы электромагнитных волн

2.1. Класс $W_{1,4a}$

Алгебре

$$\mathcal{L}_{1,4a} = L\{e_{12} - e_{14}\}$$

соответствует одномерная группа параболических вращений $G_{1,4a}$ ((1) при $\mu = 0$). Здесь мы используем замену

$$\tilde{x}^1 = x^2 + x^4, \quad \tilde{x}^2 = -\frac{x^1}{x^2 + x^4}, \quad \tilde{x}^3 = x^3, \quad \tilde{x}^4 = \frac{1}{2}(x^1)^2 + x^2(x^2 + x^4). \quad (5)$$

Класс $C_{1,4a}$ пространств Максвелла, соответствующий группе $G_{1,4a}$, задаётся формулами [6, 7]

$$\begin{aligned}
F_{13} &= C_1 \tilde{x}^2 + C_2, & F_{24} &= C_5 \tilde{x}^2 + C_6, \\
F_{23} &= \frac{C_1}{2} (\tilde{x}^2)^2 + C_2 \tilde{x}^2 + C_3, & F_{12} &= -\frac{C_5}{2} (\tilde{x}^2)^2 - C_6 \tilde{x}^2 + C_7, \\
F_{34} &= -\frac{C_1}{2} (\tilde{x}^2)^2 - C_2 \tilde{x}^2 + C_4, & F_{14} &= -\frac{C_5}{2} (\tilde{x}^2)^2 - C_6 \tilde{x}^2 + C_8,
\end{aligned} \tag{6}$$

где $C_k = C_k(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3, \tilde{x}^4)$ — гладкие функции, удовлетворяющие уравнениям

$$C_1 + C_3 + C_4 = 0, \quad C_5 + C_7 - C_8 = 0 \tag{7}$$

и

$$\tilde{x}^1 \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \tag{8a}$$

$$\tilde{x}^1 \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{(\tilde{x}^1)^2 + \tilde{x}^4}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \tag{8b}$$

$$-\frac{C_2}{\tilde{x}^1} - \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{(\tilde{x}^1)^2 + \tilde{x}^4}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \tag{8c}$$

$$-\frac{C_5}{\tilde{x}^1} + \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{\partial C_8}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{(\tilde{x}^1)^2 + \tilde{x}^4}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_8}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \tag{8d}$$

$$-\tilde{x}^1 \frac{\partial C_4}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \tag{8e}$$

$$\frac{C_2}{\tilde{x}^1} + \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\partial C_8}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \tag{8f}$$

$$\frac{\partial C_4}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{(\tilde{x}^1)^2 + \tilde{x}^4}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_4}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^4} = 0. \tag{8g}$$

Подставляя (6) в уравнения Максвелла (3), учитывая, что функции C_k не зависят от $\tilde{x}^2$, группируя в уравнениях слагаемые с одинаковыми степенями $\tilde{x}^2$ и пользуясь линейной независимостью степеней переменной $\tilde{x}^2$, получим, что функции C_k удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^3} - \tilde{x}^1 \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \\
&\frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{C_6}{\tilde{x}^1} - \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \\
&-\tilde{x}^1 \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \\
&\frac{C_1}{\tilde{x}^1} + \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^4} - \tilde{x}^1 \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \\
&-\frac{C_1}{\tilde{x}^1} + \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{(\tilde{x}^1)^2 + \tilde{x}^4}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_4}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_4}{\partial \tilde{x}^4} = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Теорема 1. Класс $W_{1,4a}$ электромагнитных волн, допускающих группу $G_{1,4a}$, задаётся тензором вида (6) при выполнении условий (7), (8), (9).

2.2. Класс $W_{1,4b}$

Алгебре

$$\mathcal{L}_{1,4b} = L\{e_{12} - e_{14} + \mu e_3\}$$

соответствует одномерная группа $G_{1,4b}$ параболических винтов. Здесь мы используем замену

$$\begin{aligned}\tilde{x}^1 &= x^2 + x^4, & \tilde{x}^2 &= -\frac{x^1}{x^2 + x^4}, \\ \tilde{x}^3 &= x^3 + \frac{\mu x^1}{x^2 + x^4}, & \tilde{x}^4 &= \frac{1}{2}(x^1)^2 + x^2(x^2 + x^4),\end{aligned}\tag{10}$$

переходящую в (5) при $\mu = 0$. Согласно [6, 7] класс $C_{1,4b}$ пространств Максвелла, соответствующий группе $G_{1,4b}$, задаётся формулами (6), где функции $C_k = C_k(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3, \tilde{x}^4)$ удовлетворяют системе уравнений (7), (8b), (8e), (8g) и

$$\begin{aligned}\frac{\mu}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^3} + \tilde{x}^1 \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^3} &= 0, \\ \frac{\mu}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{C_2}{\tilde{x}^1} - \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{(\tilde{x}^1)^2 + \tilde{x}^4}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^3} &= 0, \\ \frac{\mu}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{C_5}{\tilde{x}^1} + \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{\partial C_8}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{(\tilde{x}^1)^2 + \tilde{x}^4}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_8}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^4} &= 0, \\ \frac{\mu}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_4}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{C_2}{\tilde{x}^1} + \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\partial C_8}{\partial \tilde{x}^3} &= 0.\end{aligned}\tag{11}$$

Подставляя (6) в уравнения Максвелла (3), учитывая замену (10) и разделяя переменные, получим в результате громоздких вычислений, что функции C_k удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{\mu}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^3} + \tilde{x}^1 \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^3} &= 0, \\ \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{C_6}{\tilde{x}^1} + \frac{\mu}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{\partial \tilde{x}^4}{\partial \tilde{x}^1} \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^4} &= 0, \\ \tilde{x}^1 \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^4} &= 0, \\ \frac{C_1}{\tilde{x}^1} + \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^4} - \tilde{x}^1 \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\mu}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^3} &= 0, \\ -\frac{C_1}{\tilde{x}^1} + \frac{\mu}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{(\tilde{x}^1)^2 + \tilde{x}^4}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_4}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_4}{\partial \tilde{x}^4} &= 0.\end{aligned}\tag{12}$$

Теорема 2. Класс $W_{1,4b}$ электромагнитных волн, допускающих группу $G_{1,4b}$, задаётся тензором вида (6) при выполнении условий (7), (8b), (8e), (8g), (11), (12).

Отметим, что последние девять уравнений при $\mu = 0$ совпадают с (8a), (8c), (8d), (8f), (9).

2.3. Классы $W_{2,7a}$ и $W_{2,7b}$

Алгебре

$$\mathcal{L}_{2,7} = L\{e_{12} - e_{14} + \mu e_3, e_2 - e_4\}$$

соответствует группа $G_{2,7}$, порождаемая параболическими винтами (при $\mu = 0$ параболическими вращениями) и трансляциями вдоль изотропной прямой. Алгебра $\mathcal{L}_{2,7}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{1,4} = L\{e_{12} - e_{14} + \mu e_3\}$ с помощью вектора $e_2 - e_4$. Поэтому соответствующие ей классы получаются сужением классов $W_{1,4a}$ и $W_{1,4b}$ путём наложения дополнительного условия (4) для вектора $\xi = e_2 - e_4$:

$$\partial_2 F_{ij} - \partial_4 F_{ij} = 0. \quad (13)$$

Замены (10) и (5) приводят уравнение (13) к одному и тому же виду

$$\tilde{x}^1 \frac{\partial F_{ij}}{\partial \tilde{x}^4} = 0. \quad (14)$$

Последнее условие означает независимость компонент тензора F_{ij} от $\tilde{x}^4$. Учитывая это обстоятельство в уравнениях, задающих классы $W_{1,4a}$ и $W_{1,4b}$, в результате вычислений мы приходим к следующим утверждениям.

Теорема 3. Тензор F_{ij} класса $W_{2,7b}$ электромагнитных волн, допускающих группу $G_{2,7}$ ($\mu \neq 0$), задаётся формулами (6), (7), где

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\mu^2 + (\tilde{x}^1)^2}{\mu} \Psi' + \frac{\tilde{x}^1}{\mu} \Psi, \\ C_2 &= \Psi' \tilde{x}^3 + g, \\ C_3 &= \frac{(\tilde{x}^3)^2}{2} \left[-\frac{7}{\mu} \Psi' - \frac{6\tilde{x}^1}{\mu} \Psi'' - \frac{\mu}{\tilde{x}^1} \Psi'' - \frac{(\tilde{x}^1)^2}{\mu} \Psi''' + \frac{1}{\mu \tilde{x}^1} \Psi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu \tilde{x}^1}{\mu^2 + (\tilde{x}^1)^2} \left(\frac{8}{\tilde{x}^1} \Psi' + 7\Psi'' + \frac{\mu^2}{(\tilde{x}^1)^2} \Psi'' + \frac{1}{(\tilde{x}^1)^2} \Psi \right) \right] + \\ &\quad + \tilde{x}^3 \left[f' + \frac{f}{\tilde{x}^1} + \frac{\mu \tilde{x}^1}{\mu^2 + (\tilde{x}^1)^2} \left(g' + \frac{g}{\tilde{x}^1} - \frac{\mu}{(\tilde{x}^1)^2} f - \frac{\mu}{\tilde{x}^1} f' \right) \right] + p, \\ C_5 &= \Psi, \\ C_6 &= \left(-\frac{3\tilde{x}^1}{\mu} \Psi' - \frac{\mu^2 + (\tilde{x}^1)^2}{\mu} \Psi'' - \frac{1}{\mu} \Psi \right) \tilde{x}^3 + f, \\ C_7 &= \frac{(\tilde{x}^1)^2}{\mu^2 + (\tilde{x}^1)^2} \left[\frac{(\tilde{x}^3)^2}{2} \left(\frac{8}{\tilde{x}^1} \Psi' + 7\Psi'' + \frac{\mu^2}{(\tilde{x}^1)^2} \Psi'' + \frac{\Psi}{(\tilde{x}^1)^2} + \frac{\mu^2 + (\tilde{x}^1)^2}{\tilde{x}^1} \Psi''' \right) + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{x}^3 \left(\frac{g}{\tilde{x}^1} + g' + \frac{\mu}{(\tilde{x}^1)^2} f' \right) \right] + h, \end{aligned} \quad (15)$$

причём $\Psi = \Psi(\tilde{x}^1)$, $g = g(\tilde{x}^1)$, $f = f(\tilde{x}^1)$, $h = h(\tilde{x}^1)$ — произвольные гладкие функции.

Теорема 4. Тензор F_{ij} класса $W_{2,7a}$ электромагнитных волн, допускающих группу $G_{2,7}$ ($\mu = 0$), задаётся формулами (6), (7), где

$$\begin{aligned} C_1(\tilde{x}^1) &= \frac{B}{\tilde{x}^1}, \quad C_2 = -\frac{A}{(\tilde{x}^1)^2}\tilde{x}^3 + f(\tilde{x}^1), \\ C_3 &= -\frac{B}{2(\tilde{x}^1)^3}(\tilde{x}^3)^2 + \left(\frac{h(\tilde{x}^1)}{\tilde{x}^1} + h'(\tilde{x}^1)\right)\tilde{x}^3 + p(\tilde{x}^1), \\ C_5 &= \frac{A}{\tilde{x}^1}, \quad C_6 = \frac{B}{(\tilde{x}^1)^2}\tilde{x}^3 + h(\tilde{x}^1), \\ C_7(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3) &= \frac{A}{2(\tilde{x}^1)^3}(\tilde{x}^3)^2 + \left(\frac{f(\tilde{x}^1)}{\tilde{x}^1} + f'(\tilde{x}^1)\right)\tilde{x}^3 + g(\tilde{x}^1), \end{aligned} \quad (16)$$

$f = f(\tilde{x}^1)$, $g = g(\tilde{x}^1)$, $h = h(\tilde{x}^1)$ и $p = p(\tilde{x}^1)$ — произвольные гладкие функции, A и B — произвольные постоянные.

2.4. Класс $W_{2,11}$

Алгебре

$$\mathcal{L}_{2,11} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_1 + \mu e_3, e_{23} + e_{34} - \mu e_1 + \lambda e_3\}$$

($\lambda = 0$, $\mu \neq 0$, $\sim \lambda \neq 0$, $\mu = 0$) соответствует группа $G_{2,11}$, порождаемая двумя одномерными подгруппами параболических винтов. Пусть $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$, тогда алгебра $\mathcal{L}_{2,11} = \mathcal{L}\{e_{12} - e_{14} + \mu e_3, e_{23} + e_{34} - \mu e_1\}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{1,4b}$, поэтому $W_{2,11} \subset W_{1,4b}$. Согласно [6, 7] класс $C_{2,11}$ определяется формулами (6), где функции $C_k = C_k(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3, \tilde{x}^4)$ удовлетворяют системе уравнений (7), (8b), (8e), (8g), (11) и

$$\begin{aligned} \frac{(\tilde{x}^1)^2 - \mu^2}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^3} - \tilde{x}^1 \tilde{x}^3 \frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^4} &= 0, \\ \frac{(\tilde{x}^1)^2 - \mu^2}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^3} - \tilde{x}^1 \tilde{x}^3 \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^4} - C_1 + \frac{\mu}{\tilde{x}^1} C_5 &= 0, \\ \frac{(\tilde{x}^1)^2 - \mu^2}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^3} - \tilde{x}^1 \tilde{x}^3 \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^4} + C_2 - \frac{\mu}{\tilde{x}^1} C_6 &= 0, \\ \frac{(\tilde{x}^1)^2 - \mu^2}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^3} - \tilde{x}^1 \tilde{x}^3 \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^4} &= 0, \\ \frac{(\tilde{x}^1)^2 - \mu^2}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^3} - \tilde{x}^1 \tilde{x}^3 \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4} + C_5 + \frac{\mu}{\tilde{x}^1} C_1 &= 0, \\ \frac{(\tilde{x}^1)^2 - \mu^2}{\tilde{x}^1} \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^3} - \tilde{x}^1 \tilde{x}^3 \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^4} + C_6 + \frac{\mu}{\tilde{x}^1} C_2 &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Учитывая второе уравнение Максвелла, получим следующий результат.

Теорема 5. Класс $W_{2,11}$ ($\mu \neq 0$) электромагнитных волн, допускающих группу $G_{2,11}$, задаётся тензором вида (6) при выполнении условий (7), (8b), (8e), (8g), (11), (12) и (17); связь между координатами задаётся формулами (10).

2.5. Класс $W_{2,11a}$

Выделим необходимый для описания других классов случай $\lambda = \mu = 0$. Алгебра

$$\mathcal{L}_{2,11a} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}\}$$

соответствует группе $G_{2,11a}$, порождаемой двумя одномерными подгруппами параболических вращений. Используя замену

$$\begin{aligned}\tilde{x}^1 &= x^2 + x^4, & \tilde{x}^2 &= -\frac{x^1}{x^2 + x^4}, & \tilde{x}^3 &= \frac{x^3}{x^2 + x^4}, \\ \tilde{x}^4 &= (\tilde{x}^1)^2 + (\tilde{x}^2)^2 + (\tilde{x}^3)^2 - (\tilde{x}^4)^2,\end{aligned}\quad (18)$$

можно получить, что класс $C_{2,11a}$ пространств Максвелла, допускающих группу $G_{2,11a}$, задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{aligned}F_{12} &= -\frac{C_5}{2}((\tilde{x}^2)^2 - (\tilde{x}^3)^2) - C_1\tilde{x}^2\tilde{x}^3 - C_4\tilde{x}^2 - C_8\tilde{x}^3 + C_9, \\ F_{13} &= C_1\tilde{x}^2 - C_5\tilde{x}^3 + C_8, & F_{14} &= F_{12} + C_5, \\ F_{23} &= \frac{C_1}{2}((\tilde{x}^2)^2 - (\tilde{x}^3)^2) - C_5\tilde{x}^2\tilde{x}^3 + C_8\tilde{x}^2 - C_4\tilde{x}^3 - C_{10}, \\ F_{24} &= C_5\tilde{x}^2 + C_1\tilde{x}^3 + C_4, & F_{34} &= -F_{23} - C_1,\end{aligned}\quad (19)$$

где функции $C_k = C_k(\tilde{x}^1, \tilde{x}^4)$ ($k = 1, 4, 5, 8, 9, 10$) удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}C_8 &= \frac{K}{(\tilde{x}^1)^2} \quad (K = \text{const}), \\ \tilde{x}^1 \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^1} + (\tilde{x}^4 + (\tilde{x}^1)^2) \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^4} + C_1 - 2(\tilde{x}^1)^2 \frac{\partial C_{10}}{\partial \tilde{x}^4} &= 0, \\ \tilde{x}^1 \frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^1} + (\tilde{x}^4 + (\tilde{x}^1)^2) \frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^4} + C_5 + 2(\tilde{x}^1)^2 \frac{\partial C_9}{\partial \tilde{x}^4} &= 0.\end{aligned}\quad (20)$$

Подставляя (19) во второе уравнение Максвелла (3), учитывая соотношения (20), группируя в уравнениях слагаемые с одинаковыми степенями $\tilde{x}^3$ и пользуясь линейной независимостью степеней переменной $\tilde{x}^3$, получаем следующее утверждение.

Теорема 6. Класс $W_{2,11a}$ электромагнитных волн, допускающих группу $G_{2,11a}$, задаётся тензором вида (19), причём

$$\begin{aligned}C_1 &= -\frac{f(u)}{2\tilde{x}^1}, & C_4 &= \frac{B}{(\tilde{x}^1)^2}, & C_5 &= \frac{A}{\tilde{x}^1}, & C_8 &= \frac{K}{(\tilde{x}^1)^2}, \\ C_9 &= g(\tilde{x}^1), & C_{10} &= \frac{1}{4} \int \frac{f'_u(u)}{(\tilde{x}^4)^2} d\tilde{x}^4, & u &= \frac{\tilde{x}^1}{\tilde{x}^4},\end{aligned}\quad (21)$$

где $f(u)$, $g(\tilde{x}^1)$ — произвольные функции, A , B , K — произвольные постоянные (связь между координатами задаётся формулами (18)).

2.6. Класс $W_{2,12}$

Алгебра

$$\mathcal{L}_{2,12} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{24} + \lambda e_3\}$$

соответствует группе $G_{2,12}$, порождаемой параболическими вращениями и гиперболическими винтами. Согласно [6, 7] класс пространств Максвелла $C_{2,12}$, соответствующий $\mathcal{L}_{2,12}$, определяется формулами (6), где функции $C_k = C_k(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3, \tilde{x}^4)$ удовлетворяют системе уравнений (7), (8) и

$$\begin{aligned} \tilde{x}^1 \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^1} + \lambda \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^3} + (\tilde{x}^1)^2 \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^4} - C_1 &= 0, \\ \tilde{x}^1 \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^1} + \lambda \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^3} + (\tilde{x}^1)^2 \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4} &= 0, \\ \tilde{x}^1 \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^1} + \lambda \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^3} + (\tilde{x}^1)^2 \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^4} - C_4 &= 0, \\ \tilde{x}^1 \frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^1} + \lambda \frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^3} + (\tilde{x}^1)^2 \frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^4} - C_5 &= 0, \\ \tilde{x}^1 \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^1} + \lambda \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^3} + (\tilde{x}^1)^2 \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^4} &= 0, \\ \tilde{x}^1 \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^1} + \lambda \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^3} + (\tilde{x}^1)^2 \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^4} + C_8 &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Так как $W_{2,12} \subset W_{1,4a}$, то, учитывая второе уравнение Максвелла, получим следующий результат.

Теорема 7. Класс $W_{2,12}$ электромагнитных волн, допускающих группу $G_{2,12}$ ($\lambda \neq 0$), задаётся тензором вида (6) при выполнении условий (7), (8), (22) и (9); связь между координатами задаётся формулами (5).

2.7. Класс $W_{2,12a}$

При $\lambda = 0$ алгебра $\mathcal{L}_{2,12}$ принимает вид

$$\mathcal{L}_{2,12a} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{24}\}.$$

Соответствующая группа $G_{2,12a}$ порождается параболическими вращениями и псевдовращениями (преобразованиями Лоренца). Согласно [6, 7] класс пространств Максвелла $C_{2,12a}$, соответствующий алгебре $\mathcal{L}_{2,12a}$, определяется формулами (6), где функции

$$\begin{aligned} C_1 &= \tilde{x}^1 \Phi_1, \quad C_2 = \Phi_2, \quad C_3 = -\frac{\tilde{x}^1}{2} \Phi_1 + \frac{1}{\tilde{x}^1} \Phi_3, \quad C_4 = -C_1 - C_3, \\ C_5 &= \tilde{x}^1 \Phi_4, \quad C_6 = \Phi_5, \quad C_7 = -\frac{\tilde{x}^1}{2} \Phi_4 + \frac{1}{\tilde{x}^1} \Phi_6, \quad C_8 = C_5 + C_7 \end{aligned} \quad (23)$$

и

$$\Phi_k = \Phi_k \left(\tilde{x}^3, \tilde{x}^4 - \frac{1}{2}(\tilde{x}^1)^2 \right) = \Phi_k(\tilde{x}^3, t) \quad (k = 1, \dots, 6) \quad (24)$$

удовлетворяют системе уравнений (8b)–(8g). Так как класс $W_{2,12a}$ содержится в $W_{1,4a}$, то класс $W_{2,12a}$ определяется сформулированными выше условиями для класса $C_{2,12a}$ и уравнениями (9). Анализ этих условий приводит к следующему утверждению.

Теорема 8. Класс $W_{2,12a}$ электромагнитных волн, допускающих группу $G_{2,12a}$, задаётся тензором F_{ij} вида (6), где

$$\begin{aligned} C_1 = 0, \quad C_2 = \Phi_2, \quad C_3 = -C_4 = \frac{A\tilde{x}^3 + B}{\tilde{x}^1}, \quad C_5 = \tilde{x}^1\Phi_4, \\ C_6 = A, \quad C_7 = -\frac{\tilde{x}^1}{2}\Phi_4 + \frac{1}{\tilde{x}^1}\Phi_6, \quad C_8 = C_5 + C_7, \end{aligned} \quad (25)$$

A и B — произвольные постоянные, а функции Φ_2 , Φ_4 и Φ_6 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} t\frac{\partial\Phi_4}{\partial t} + \Phi_4 - \frac{\partial\Phi_6}{\partial t} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial\tilde{x}^3} = 0, \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_4}{\partial\tilde{x}^3} = 0, \\ t\frac{\partial\Phi_4}{\partial t} + 2\Phi_4 + \frac{\partial\Phi_6}{\partial t} = 0, \quad t\frac{\partial\Phi_2}{\partial t} + \Phi_2 - \frac{\partial\Phi_6}{\partial\tilde{x}^3} = 0; \end{aligned} \quad (26)$$

при этом $t = \tilde{x}^4 - (\tilde{x}^1)^2/2$ и замена переменных задаётся формулами (5).

2.8. Классы $W_{3,9a}$ и $W_{3,9b}$

Алгебра

$$\mathcal{L}_{3,9} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_2 + \mu e_3, e_1, e_2 - e_4\}$$

соответствует группе $G_{3,9}$, порождаемой параболическими винтами и трансляциями вдоль векторов двумерной изотропной плоскости. Рассмотрим случаи $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$ и $\mu = \lambda = 0$.

2.8.1.

При $\lambda = 0$ и $\mu \neq 0$ класс пространств Максвелла $C_{3,9b}$, соответствующий алгебре

$$\mathcal{L}_{3,9b} = L\{e_{12} - e_{14} + \mu e_3, e_1, e_2 - e_4\},$$

задаётся формулами (6), где

$$\begin{aligned} C_1 = -\frac{a_1}{\mu}\tilde{x}^1 + a_2, \quad C_2 = \frac{\tilde{x}^3}{\mu}\left(-\frac{a_1}{\mu}\tilde{x}^1 + a_2\right) + \mu\Phi(\tilde{x}^1), \\ C_3 = \frac{(\tilde{x}^3)^2}{2\mu^2}\left(-\frac{a_1}{\mu}\tilde{x}^1 + a_2\right) + \tilde{x}^3\Phi(\tilde{x}^1) + \Psi_1(\tilde{x}^1), \\ C_4 = -C_1 - C_3, \quad C_5 = a_1, \quad C_6 = \frac{a_1}{\mu}\tilde{x}^3 - \mu^2\Phi'(\tilde{x}^1), \\ C_7 = -\frac{a_1}{2\mu^2}(\tilde{x}^3)^2 + \mu\tilde{x}^3\Phi'(\tilde{x}^1) + \Psi_2(\tilde{x}^1), \quad C_8 = C_5 + C_7, \end{aligned} \quad (27)$$

$a_1, a_2 = \text{const}$, а $\Phi(\tilde{x}^1)$, $\Psi_1(\tilde{x}^1)$ и $\Psi_2(\tilde{x}^1)$ — произвольные функции (координаты $\{\tilde{x}^i\}$ связаны с $\{x^i\}$ формулами (10)) [6, 7]. Имеем $W_{3,9b} \subset W_{1,4b}$ и $W_{3,9b} \subset C_{3,9b}$. Подставляя (6)–(27) во второе уравнение Максвелла, записанное в виде системы (12), получим следующий результат.

Теорема 9. Класс $W_{3,9b}$ электромагнитных волн, допускающих группу $G_{3,9}$, при $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$ задаётся тензором F_{ij} вида (6), где

$$\begin{aligned} C_1 &= 0, \quad C_2 = \mu \left(A_1 \cos \frac{\tilde{x}^1}{\mu} + A_2 \sin \frac{\tilde{x}^1}{\mu} \right), \\ C_3 &= -C_4 = \tilde{x}^3 \left(A_1 \cos \frac{\tilde{x}^1}{\mu} + A_2 \sin \frac{\tilde{x}^1}{\mu} \right) + \Psi_1(\tilde{x}^1), \\ C_5 &= 0, \quad C_6 = \mu \left(A_1 \sin \frac{\tilde{x}^1}{\mu} - A_2 \cos \frac{\tilde{x}^1}{\mu} \right), \\ C_7 &= C_8 = \tilde{x}^3 \left(-A_1 \sin \frac{\tilde{x}^1}{\mu} + A_2 \cos \frac{\tilde{x}^1}{\mu} \right) + \Psi_2(\tilde{x}^1), \end{aligned} \quad (28)$$

$A_1, A_2 = \text{const}$, $\Psi_1(\tilde{x}^1)$ и $\Psi_2(\tilde{x}^1)$ — произвольные функции, а связь между координатами задаётся формулами (10).

Пример. Полагая в (28) $A_1 = A_2 = 0$, $\Psi_1 = \Psi_2 = 0$ и возвращаясь к галилеевым координатам $\{x^i\}$, получим

$$\begin{aligned} F_{12} &= F_{14} = -x^3 A \sin \frac{x^2 + x^4}{\mu}, \quad F_{13} = A\mu \cos \frac{x^2 + x^4}{\mu}, \\ F_{23} &= -F_{34} = x^3 A \cos \frac{x^2 + x^4}{\mu}, \quad F_{24} = A\mu \sin \frac{x^2 + x^4}{\mu}. \end{aligned} \quad (29)$$

В результате исследования уравнения $L_\xi F_{ij} = 0$ для поля (29) получим следующее утверждение.

Предложение 10. Если $A \neq 0$, то электромагнитная волна, определяемая тензором (29), допускает трёхмерную группу $G_S = G_{3,9b}$.

2.8.2.

Пусть $\mu = \lambda = 0$, тогда класс пространств Максвелла $C_{3,9a}$, соответствующий алгебре

$$\mathcal{L}_{3,9a} = L\{e_{12} - e_{14}, e_1, e_2 - e_4\},$$

задаётся формулами

$$\begin{aligned} F_{12} &= F_{14} = \Phi(x^2 + x^4), \quad F_{13} = F_{24} = 0, \\ F_{34} &= -F_{23} = \Psi(x^2 + x^4, x^3), \end{aligned} \quad (30)$$

где $\Phi(u)$, $\Psi(u, x^3)$ — произвольные функции [6, 7]. Для нахождения класса электромагнитных волн $W_{3,9a}$ подставим (30) в (3). Получим следующее утверждение.

Теорема 11. Класс $W_{3,9a}$ имеет вид

$$\begin{aligned} F_{12} = F_{14} = \Phi(x^2 + x^4), \quad F_{13} = F_{24} = 0, \\ F_{34} = -F_{23} = \Psi(x^2 + x^4), \end{aligned} \quad (31)$$

где $\Phi(x^2 + x^4)$, $\Psi(x^2 + x^4)$ — функции одной переменной.

2.9. Класс $W_{3,10a}$

Алгебра

$$\mathcal{L}_{3,10a} = L\{e_{12} - e_{14}, e_1 + \mu e_3, e_2 - e_4\}$$

является расширением алгебры $\mathcal{L}_{2,7a}$. Поэтому $W_{3,10a} \subset W_{2,7a}$. Добавляя к соотношениям, определяющим класс $W_{2,7a}$, уравнение (4) для вектора $\xi = e_1 + \mu e_3$, иначе говоря,

$$\partial_1 F_{ij} + \mu \partial_3 F_{ij} = -\frac{1}{\tilde{x}^1} \frac{\partial F_{ij}}{\partial \tilde{x}^3} + \mu \frac{\partial F_{ij}}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \quad (32)$$

получим вид тензора F_{ij} класса $W_{3,10a}$ (замена (5)).

Теорема 12. Класс $W_{3,10a}$ электромагнитных волн, допускающих группу $G_{3,10a}$, задаётся тензором F_{ij} вида (6), где

$$\begin{aligned} C_1 = C_5 = 0, \quad C_2 = f(\tilde{x}^1), \quad C_6 = D(\tilde{x}^1)^{\frac{1-\mu}{\mu}} - f(\tilde{x}^1), \\ C_3 = -C_4 = \left(\frac{D}{\mu} (\tilde{x}^1)^{\frac{1-2\mu}{\mu}} - \frac{f(\tilde{x}^1)}{\tilde{x}^1} - f'(\tilde{x}^1) \right) \tilde{x}^3 + p(\tilde{x}^1), \\ C_7 = C_8 = \left(\frac{f(\tilde{x}^1)}{\tilde{x}^1} + f'(\tilde{x}^1) \right) \tilde{x}^3 + g(\tilde{x}^1), \end{aligned} \quad (33)$$

$D = \text{const}$, а $f(\tilde{x}^1)$, $g(\tilde{x}^1)$, $p(\tilde{x}^1)$ — произвольные гладкие функции.

2.10. Класс $W_{3,17}$

Алгебре

$$\mathcal{L}_{3,17} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{24}\}$$

соответствует группа $G_{3,17}$, порождаемая двумя одномерными подгруппами параболических вращений и одномерной группой псевдовращений. Алгебра $\mathcal{L}_{3,17}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{2,11a}$ с помощью вектора e_{24} . Поэтому $W_{3,17} \subset W_{2,11a}$ и для описания класса $W_{3,17}$ достаточно к условиям, определяющим класс $W_{2,11a}$, добавить уравнение (4) для вектора $\xi = e_{24}$. Анализируя эти уравнения, получаем следующее утверждение.

Теорема 13. Класс $W_{3,17}$ электромагнитных волн задаётся формулами (19), причём

$$\begin{aligned} C_1 = -\frac{B\tilde{x}^1}{(\tilde{x}^4)^2}, \quad C_4 = 0, \quad C_5 = \frac{A}{\tilde{x}^1}, \quad C_8 = 0, \\ C_9 = -\frac{A \ln \tilde{x}^1}{\tilde{x}^1}, \quad C_{10} = -\frac{B\tilde{x}^1}{2(\tilde{x}^4)^2} + \frac{F}{\tilde{x}^1}, \end{aligned} \quad (34)$$

где A, B, F — произвольные постоянные, а замена координат осуществляется по формулам (18).

2.11. Класс $W_{3,18}$

Группа $G_{3,18}$, соответствующая алгебре

$$\mathcal{L}_{3,18} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{13} + \lambda(e_2 - e_4)\},$$

порождается параболическими вращениями в двух различных плоскостях и эллиптическими винтами с изотропной осью. Алгебра $\mathcal{L}_{3,18}$ есть расширение алгебры $\mathcal{L}_{2,11a}$ с помощью вектора $e_{13} + \lambda(e_2 - e_4)$. Поэтому класс $W_{3,18}$ получается сужением класса $W_{2,11a}$ и для его описания достаточно к условиям, определяющим класс $W_{2,11a}$, добавить уравнение (4) для вектора $\xi = e_{12} + \lambda(e_2 - e_4)$. После некоторых вычислений получим следующее утверждение.

Теорема 14. Класс $W_{3,18}$ электромагнитных волн задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{aligned} F_{12} = F_{14} &= \frac{Bx^1 - Kx^3}{(x^2 + x^4)^3}, & F_{13} &= \frac{K}{(x^2 + x^4)^2}, \\ F_{23} = -F_{34} &= \frac{-Kx^1 - Bx^3}{(x^2 + x^4)^3}, & F_{24} &= \frac{B}{(x^2 + x^4)^2}, \end{aligned} \quad (35)$$

где B, K — произвольные постоянные.

2.12. Класс $W_{4,9a}$

Алгебре

$$\mathcal{L}_{4,9a} = L\{e_{12} - e_{14}, e_1, e_3, e_2 - e_4\}$$

соответствует группа $G_{4,9a}$, порождаемая параболическими вращениями и трансляциями в направлениях векторов трёхмерного изотропного пространства. Согласно [6, 7] соответствующий класс пространств Максвелла $C_{4,9a}$ задаётся тензором (31). Подставляя (31) во второе уравнение Максвелла (3), получим в итоге следующие утверждения.

Теорема 15. Класс $W_{4,9a}$ электромагнитных волн задаётся кососимметричным тензором F_{ij} вида (31).

Предложение 16. Если функции Φ, Ψ и $(x^2 + x^4)\Phi'$ линейно независимы, то электромагнитная волна (31) допускает пятимерную группу G_S , соответствующую алгебре $L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_1, e_3, e_2 - e_4\}$. Не существует электромагнитных волн с группой симметрий $G_{4,9a}$.

2.13. Классы $W_{4,12a}$ и $W_{4,12b}$

Группа $G_{4,12}$, соответствующая алгебре

$$\mathcal{L}_{4,12} = L\{e_{12} - e_{14} + \mu e_3, e_{23} + e_{34} + \nu e_2, e_1, e_2 - e_4\},$$

порождается двумя одномерными подгруппами параболических винтов и трансляций в направлениях векторов двумерной изотропной плоскости. Рассмотрим случаи $\mu = \nu = 0$ и $\mu \neq 0, \nu = 0$.

2.13.1.

Класс пространств Максвелла $C_{4,12a}$, соответствующий алгебре $\mathcal{L}_{4,12}$ ($\mu = \nu = 0$), задаётся тензором (31) [6, 7]. Уравнение (3) для (31) выполняется тождественно. Учитывая также предложение 16, получим следующее утверждение.

Теорема 17. *Класс $W_{4,12a}$ электромагнитных волн задаётся тензором F_{ij} вида (31). Не существует электромагнитных волн с группой симметрий $G_{4,12a}$. Размерность группы G_S пространства Максвелла, задаваемого тензором (31), не меньше пяти.*

2.13.2.

Класс пространств Максвелла $C_{4,12b}$, соответствующий алгебре $\mathcal{L}_{4,12}$ ($\mu \neq 0, \nu = 0$), задаётся тензором

$$\begin{aligned} F_{12} = F_{14} = C_1 = \text{const}, \quad F_{13} = F_{24} = 0, \\ F_{34} = -F_{23} = \Psi \left(x^3 - \frac{1}{2\mu}(x^2 + x^4)^2 \right), \end{aligned} \quad (36)$$

где $\Psi(t)$ — произвольная функция [6, 7]. Подставляя (36) в (3), получим

$$F_{12} = F_{14} = C_1, \quad F_{13} = F_{24} = 0, \quad F_{34} = -F_{23} = C_2, \quad (37)$$

где $C_1, C_2 = \text{const}$. Так как все компоненты тензора (37) являются постоянными, такое пространство Максвелла не является электромагнитной волной. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 18. *Не существует электромагнитных волн, допускающих группу $G_{4,12b}$.*

2.14. Класс $W_{4,20}$

Класс пространств Максвелла $C_{4,20}$, соответствующий алгебре

$$\mathcal{L}_{4,20} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{13}, e_{24}\},$$

задаётся тензором [6, 7]

$$\begin{aligned} F_{12} = F_{14} = \frac{Bx^1}{x^2 + x^4}, \quad F_{23} = -F_{34} = -\frac{Bx^3}{x^2 + x^4}, \\ F_{13} = 0, \quad F_{24} = B \quad (B = \text{const}). \end{aligned} \quad (38)$$

Подставляя (38) в (3), получим, что $F_{ij} = 0$. Таким образом, класс $W_{4,20}$ пуст.

Литература

- [1] Белько И. В. Подгруппы группы Лоренца—Пуанкаре // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1971. — № 1. — С. 5—13.
- [2] Иванова А. С. Групповая классификация электромагнитных волн, допускающих смещение по одной из пространственных координат // Науч. тр. Ив. гос. ун-та. Математика. — 1999. — Вып. 2. — С. 50—62.
- [3] Иванова А. С. Групповая классификация электромагнитных волн, допускающих эллиптические винты // Мат. и её прил. — 2004. — № 1. — С. 51—62.
- [4] Иванова А. С. Электромагнитные волны, допускающие трансляции в изотропном направлении // Фундамент. и прикл. мат. — 2004. — Т. 10, вып. 1. — С. 49—56.
- [5] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука, 1967.
- [6] Паринов М. А. Пространства Эйнштейна—Максвелла и уравнения Лоренца. — Иваново: Изд-во ИвГУ, 2003.
- [7] Паринов М. А. Классы пространств Максвелла, допускающих подгруппы группы Пуанкаре // Фундамент. и прикл. мат. — 2004. — Т. 10, вып. 1. — С. 183—237.