

# О минимальных поверхностях, связанных с неполиномиальными контактными симметриями

**А. В. КИСЕЛЁВ**

*Ивановский государственный  
энергетический университет*

e-mail: arthem@newton.physics.metu.edu.tr

УДК 514.763.85+517.972.6

**Ключевые слова:** минимальные поверхности, контактные симметрии, операторы рекурсии, преобразование Лежандра.

## Аннотация

В работе при помощи методов симметрии построены две бесконечные последовательности минимальных поверхностей в трёхмерном пространстве. В частности, получены явные формулы, задающие минимальную поверхность с самопересечениями, заполняющую узел-трилистник.

## Abstract

*A. V. Kiselev, Minimal surfaces associated with nonpolynomial contact symmetries, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 7, pp. 93–100.*

Two infinite sequences of minimal surfaces in space are constructed using symmetry analysis. In particular, explicit formulas are obtained for the self-intersecting minimal surface that fills the trefoil knot.

## 1. Введение

В данной заметке рассматривается лагранжево уравнение минимальных поверхностей

$$\mathcal{E}_{\min \Sigma} = \{(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0\}, \quad (1)$$

решения которого задают двумерные минимальные поверхности  $\Sigma \subset \mathbb{E}^3$  в непараметрической форме  $\Sigma = \{z = u(x, y)\}$  (здесь и далее  $x, y, z$  — декартовы координаты). Построены две бесконечные последовательности минимальных поверхностей, связанные с неполиномиальными контактными симметриями уравнения (1).

**Замечание 1.** Несмотря на то что графики решений уравнения (1) задают минимальные поверхности лишь локально, так что касательные плоскости к ним в каждой точке проецируются на  $Oxy$  без вырождения, в дальнейшем это не послужит ограничением: построенные в разделе 3 минимальные поверхности

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2006, том 12, № 7, с. 93–100.

© 2006 *Центр новых информационных технологий МГУ,  
Издательский дом «Открытые системы»*

допускают самопересечения, и в действительности они заданы многозначными решениями уравнения (1), допускающими особые точки.

Структура заметки такова. В разделе 2 описаны образующие и коммутационные соотношения алгебры контактных симметрий уравнения  $\mathcal{E}_{\min \Sigma}$ , приведены примеры контактных, но не точечных образующих и указаны операторы рекурсии на коммутативной подалгебре Ли алгебры  $\text{sym } \mathcal{E}_{\min \Sigma}$ . В разделе 3 доказано, что минимальные поверхности, инвариантные относительно контактных неточечных преобразований симметрии, всегда плоскости, но в то же время образующим этих симметрий можно поставить в соответствие минимальные поверхности в трёхмерном пространстве, не являющиеся плоскостями (для этого используется обратное преобразование Лежандра). При помощи такого метода построены две последовательности минимальных поверхностей в  $\mathbb{E}^3$ , связанные с неполиномиальными контактными симметриями уравнения  $\mathcal{E}_{\min \Sigma}$ . Одна из последовательностей начинается с геликоида [5]. Рекурсии, размножающие симметрии, задают дискретные преобразования между поверхностями, в то время как сами инфинитезимальные генераторы порождают их непрерывные деформации. В результате приводятся явные формулы, задающие минимальную поверхность  $\Sigma_6$  с самопересечениями, заполняющую узел-трилистник. Данная поверхность следует за геликоидом  $\Sigma_5$  относительно рекурсионных соотношений.

**Замечание 2.** Саму по себе идею построения бесконечного набора минимальных поверхностей без какого-либо ограничения на краевые условия легко реализовать при помощи представления Эннепера—Вейерштрасса [5], которое связывает минимальные поверхности с произвольными комплексно-аналитическими функциями. Цель данной заметки — показать, что геометрия уравнения (1) и анализ его симметрий задают дискретную схему размножения поверхностей, которую можно назвать естественной.

Некоторые из построенных поверхностей приведены на рис. 1—3. По-видимому, они могут оказаться полезными в моделях естественных наук (гидромеханике, бионике или химии). Любопытно, что указанные ниже решения, заданные в параметрической форме, не встречаются в классических работах и обзорах по данной тематике [5, 6].

## 2. Контактные симметрии уравнения минимальных поверхностей

Из представления Эннепера—Вейерштрасса [5] следует, что группой симметрии уравнения минимальных поверхностей является конформная группа. Она, в свою очередь, есть полупрямое произведение группы дробно-линейных преобразований и компоненты, соответствующей комплексно-аналитическим функциям (кроме того, группа симметрий содержит преобразование гомотетии). Группа дробно-линейных преобразований задаёт группу вращений пространства  $\mathbb{E}^3$

посредством изоморфизма  $\mathfrak{sl}(2) \simeq \mathfrak{so}(3)$ . В данном разделе приведённое выше утверждение интерпретировано в терминах преобразования Лежандра, линеаризующего уравнение (1).

Напомним, что уравнение (1) отображается в линейное эллиптическое уравнение

$$\mathfrak{L}(\mathcal{E}_{\min \Sigma}) = \{(1 + p^2)\phi_{pp} + 2pq\phi_{pq} + (1 + q^2)\phi_{qq} = 0\} \quad (2)$$

посредством преобразования Лежандра

$$\mathfrak{L} = \{\phi = xu_x + yu_y - u, \quad p = u_x, \quad q = u_y\}.$$

Обратное преобразование Лежандра

$$\mathfrak{L}^{-1} = \{x = \phi_p, \quad y = \phi_q, \quad u = p\phi_p + q\phi_q - \phi\}$$

ставит в соответствие решениям уравнения (2) минимальные поверхности  $\Sigma$ , заданные параметрически.

Каждая симметрия уравнения (2) задаёт преобразование симметрии для исходного уравнения (1). Напомним, что определяющее соотношение  $L_\varphi(F) = 0$ , выполненное в силу  $\mathcal{E} = \{F = 0\}$ , для инфинитезимальных симметрий  $\varphi$  произвольного дифференциального уравнения  $\mathcal{E}$  совпадает с самим уравнением (здесь  $L_\varphi$  обозначает эволюционное векторное поле, заданное сечением  $\varphi$  (см. [1])). В соответствии с вышесказанным понятно, что алгебра симметрий уравнения (1) содержит множество решений

$$\varphi(u_x, u_y) = \phi(p, q) \quad (3)$$

линейного уравнения (2). Отсюда следует описание алгебры контактных симметрий уравнения минимальных поверхностей (1).

**Утверждение 1.** Алгебра Ли  $\text{sum } \mathcal{E}_{\min \Sigma}$  контактных симметрий уравнения минимальных поверхностей (1) порождена решениями  $\varphi(u_x, u_y)$  уравнения (2), в частности сдвигом  $\varphi_1 = 1$  и трансляциями  $\varphi_2^i = u_{x^i}$  по  $x^1 \equiv x$  и  $x^2 \equiv y$ , вращениями  $\varphi_3^{12} = yu_x - xu_y$  и  $\varphi_3^i = x^i + uu_{x^i}$ , где  $i = 1, 2$ , и растяжением  $\varphi_4 = u - xu_x - yu_y$ .

**Пример 1.** В [4] были построены две бесконечные последовательности производящих сечений  $\varphi(u_x, u_y)$  симметрий уравнения минимальных поверхностей. В предположении, что функции  $\varphi$  полиномиальны по  $u_y$  и эти полиномы имеют степень  $k$ , при каждом  $k \geq 0$  существуют два таких решения. Начальные элементы последовательностей таковы:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 1, \quad \varphi_2^1 = u_x, \quad \varphi_2^2 = u_y, \quad \varphi_5 = u_y \arctg u_x, \\ \varphi_6 &= \frac{u_x u_y^2}{1 + u_x^2} + \arctg u_x, \quad \varphi_7 = \frac{u_y^2}{1 + u_x^2} - u_x \arctg u_x, \\ \varphi_8 &= \frac{u_x u_y^3}{(1 + u_x^2)^2} + \frac{3}{2} \frac{u_x u_y}{1 + u_x^2}, \quad \varphi_9 = \frac{u_x^2 - 1}{(1 + u_x^2)^2} u_y^3 - \frac{3u_y}{1 + u_x^2}. \end{aligned}$$

Сечения  $\varphi_k$  зависят от  $u_x$  рационально при всех  $k \geq 8$ . По-видимому, ни одна из контактных симметрий  $\varphi_k$  не является нётеровой при  $k \geq 5$ .

Отождествление (3) показывает, что последовательность решений  $\phi(p, q)$  может быть порождена известной из каких-либо соображений рекурсией, размножающей контактные неточечные симметрии  $\varphi(u_x, u_y)$  уравнения (1). Оказывается, что три локальных оператора рекурсии, действующих на указанной компоненте алгебры  $\text{sum } \mathcal{E}_{\min \Sigma}$ , заданы присоединённым представлением самой алгебры симметрий. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Коммутационные соотношения между семью точечными симметриями  $\varphi_1, \dots, \varphi_4$  (см. утверждение 1) были приведены в [3]. Ниже указаны аналогичные свойства контактных симметрий, получаемых из уравнения (2).

**Лемма 2.** Пусть  $\varphi'(u_x, u_y)$  и  $\varphi''(u_x, u_y)$  — производящие сечения эволюционных векторных полей  $L_{\varphi'}$  и  $L_{\varphi''}$ . Тогда их скобка Якоби  $\{\varphi', \varphi''\}$  всегда равна нулю.

**Утверждение 3.** Все контактные симметрии  $\varphi(u_x, u_y) \in \text{sum } \mathcal{E}_{\min \Sigma}$  уравнения  $\mathcal{E}_{\min \Sigma}$  минимальных поверхностей коммутируют. Кроме того, выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \{\varphi_3^{12}, \varphi\} &= u_x \frac{\partial \varphi}{\partial u_y} - u_y \frac{\partial \varphi}{\partial u_x}, \quad \{\varphi_4, \varphi\} = -\varphi, \\ \{\varphi_3^i, \varphi\} &= -u_{x^i} \varphi + (1 + u_{x^i}^2) \frac{\partial \varphi}{\partial u_{x^i}} + u_x u_y \frac{\partial \varphi}{\partial u_{x^{3-i}}}. \end{aligned}$$

Подалгебра Ли  $\mathfrak{h}$ , порождённая решениями  $\varphi(u_x, u_y)$  уравнения (2), — радикал алгебры  $\text{sum } \mathcal{E}_{\min \Sigma}$  контактных симметрий уравнения (1).

**Следствие 4.** Отображения  $\text{ad}_{\varphi_3^{12}}$  и  $\text{ad}_{\varphi_3^i} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$  задают локальные операторы рекурсии на подалгебре Ли  $\mathfrak{h} \subset \text{sum } \mathcal{E}_{\min \Sigma}$ .

**Замечание 3.** Соответствие между симметриями, упомянутыми в примере 1, задано диаграммой [2]

$$\begin{array}{ccccccc} \varphi_5 & \xrightarrow{\text{ad}_{\varphi_3^2}} & \varphi_6 & \xrightarrow{\text{ad}_{\varphi_3^1}} & \varphi_7 & \xrightarrow{-\frac{1}{2} \text{ad}_{\varphi_3^{12}}} & \varphi_8 - \frac{1}{2} \varphi_5 \\ \text{ad}_{\varphi_3^1} \downarrow & & & & & & \downarrow -\text{ad}_{\varphi_3^1} \\ \varphi_2^2 & \xrightarrow{\text{ad}_{\varphi_3^2}} & \varphi_1 & \xrightarrow{-\text{ad}_{\varphi_3^1}} & \varphi_2^1 & & \varphi_9 + \frac{7}{2} \varphi_2^2. \end{array}$$

Применяя рекурсию  $\text{ad}_{\varphi_3^{12}}$  к сечениям  $\varphi_6$  и  $\varphi_7$  произвольное число раз, мы получаем [4] две бесконечные цепочки контактных симметрий. Из приведённой выше диаграммы следует, что симметрия  $\varphi_5$  является затравкой для обеих последовательностей.

### 3. Минимальные поверхности, связанные с контактными симметриями

Развивая рассуждения предыдущего раздела, мы видим, что всякая контактная симметрия  $\varphi(u_x, u_y) \in \mathfrak{h}$  уравнения (1) задаёт минимальные поверхности  $\Sigma$  двумя разными способами:

- 1) вспомним, что функция  $\phi(p, q)$ , определённая в (3), является решением уравнения (2), поэтому прообраз  $\mathfrak{L}^{-1}(\phi)$  графика  $\phi$  относительно преобразования Лежандра есть минимальная поверхность в параметрическом представлении;
- 2) редукция  $\mathcal{E}_{\min \Sigma} \cap \{\varphi = 0\}$  уравнения (1) при помощи симметрии  $\varphi \in \mathfrak{h} \subset \text{sym } \mathcal{E}_{\min \Sigma}$  задаёт  $\varphi$ -инвариантную поверхность в  $\mathbb{E}^3$ .

**Пример 2.** Рассмотрим решение  $\phi_5 = q \operatorname{arctg} p$  уравнения (2). Первый из перечисленных выше методов задаёт геликоид  $\{z = x \operatorname{tg} y\} \subset \mathbb{E}^3$  с осью  $Oy$ . Минимальная поверхность, инвариантная относительно симметрии  $\varphi_5 = u_y \operatorname{arctg} u_x$ , есть плоскость. На самом деле данное замечание является частным случаем более общего свойства поверхностей.

**Утверждение 5.** Минимальная поверхность  $\Sigma$ , инвариантная относительно контактной симметрии  $\varphi(u_x, u_y)$ , является плоскостью.

**Доказательство.** Рассмотрим редукцию  $\varphi = 0$ . По теореме о неявной функции имеем  $u_y = f(u_x)$  почти везде, поэтому  $u_{yy} = (f'(u_x))^2 u_{xx}$  и уравнение (1) преобразуется к виду

$$\left( (1 + u_x^2)(f'(u_x))^2 - 2u_x f(u_x) f'(u_x) + (1 + f^2(u_x)) \right) u_{xx} = 0.$$

Таким образом, либо  $u_{xx} = 0$  и потому  $u_x = \operatorname{const}$ ,  $u_y = f(u_x) = \operatorname{const}$ , либо  $u_x$  удовлетворяет алгебраическому уравнению, решения которого — константы  $u_x = \operatorname{const}$ , и поэтому вновь получаем  $u_y = f(u_x) = \operatorname{const}$ .  $\square$

В дальнейшем мы сосредоточимся на первом методе построения минимальных поверхностей, а именно  $\Sigma = \mathfrak{L}^{-1}(\phi(p, q))$ . Используя утверждение 3 и следствие 4, мы получаем две последовательности решений  $\phi_k(p, q)$  уравнения (2), полиномиальных по  $q$  и неполиномиальных по  $p$  при  $k \geq 5$ . Согласно замечанию 3 обе последовательности порождены сечением  $\phi_5(p, q)$ . Выпишем решения  $\phi_{10}$ ,  $\phi_{11}$  и  $\phi_{12}$ ,  $\phi_{13}$  уравнения (2), которые являются полиномами по  $q$  степеней 4 и 5 соответственно:

$$\begin{aligned} \phi_{10} &= \frac{p^3 - 3p}{(1 + p^2)^3} q^4 + \frac{3}{2} \frac{p^5 - 2p^3 - 3p}{(1 + p^2)^3} q^2 - \frac{3}{2} \frac{p}{1 + p^2}, \\ \phi_{11} &= \frac{3p^2 - 1}{(1 + p^2)^3} q^4 + \frac{3}{2} \frac{3p^4 + 2p^2 - 1}{(1 + p^2)^3} q^2 + \frac{3}{2} \frac{p^2}{1 + p^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_{12} &= \frac{p^4 - 6p^2 + 6}{(1 + p^2)^4} q^5 + \\ &+ \frac{11p^6 - 49p^4 - 51p^2 + 9}{6(1 + p^2)^4} q^3 + \frac{2p^8 - 3p^6 - 11p^4 - 5p^2 + 1}{2(1 + p^2)^4} q, \\ \phi_{13} &= \frac{p^3 - p}{(1 + p^2)^4} q^5 + \frac{21p^5 + 2p^3 - 19p}{12(1 + p^2)^4} q^3 + \frac{3p^7 + 4p^5 - p^3 - 2p}{4(1 + p^2)^4} q.\end{aligned}$$

Соответствующие им минимальные поверхности легко построить, используя стандартное программное обеспечение, например модифицируя приведённую ниже программу для MAPLE:

```
phi6:=p*q^2/(1+p^2)+arctan(p);
x:=diff(phi6,p); y:=diff(phi6,q); z:=p*x+q*y-phi6;
plot3d([x,y,z],p=-2..2,q=-2..2,grid=[50,50]);
```

Оказывается, граница поверхности  $\Sigma_6 = \mathcal{L}^{-1}(\phi_6)$  задаёт узел-трилистник — самопересекающаяся поверхность  $\Sigma_6$  заполняет его изнутри. Минимальная поверхность  $\Sigma_7 = \mathcal{L}^{-1}(\phi_7)$ , не имеющая особенностей, напоминает летящую птицу. Поверхности  $\Sigma_8$  и  $\Sigma_{13}$  имеют форму пропеллера. Набор  $\Sigma_9, \Sigma_{10}, \Sigma_{11}, \Sigma_{12}$  подобен морским раковинам; для каждой из этих поверхностей начало координат является особой точкой, а число самопересечений и, соответственно, число клеток, на которые данные поверхности разделяют пространство  $\mathbb{E}^3$ , различно для разных  $k$ . Графики всех этих поверхностей приведены на рис. 1—3.

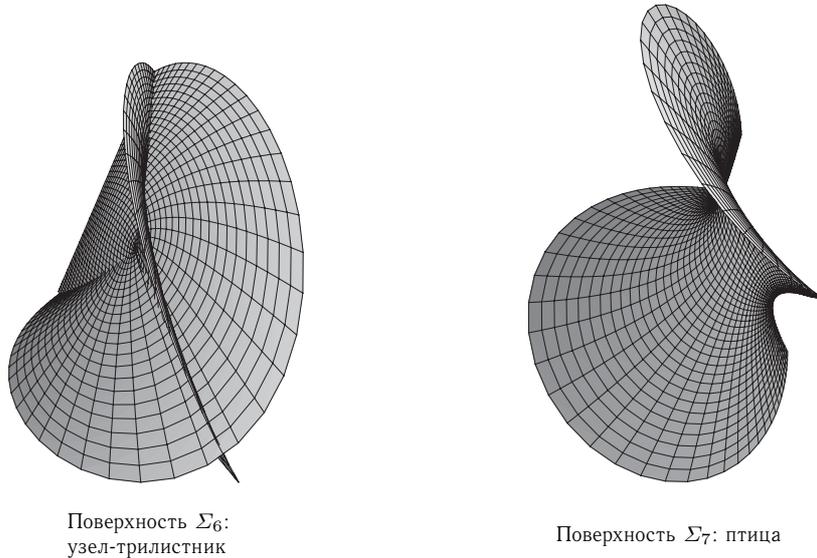


Рис. 1.

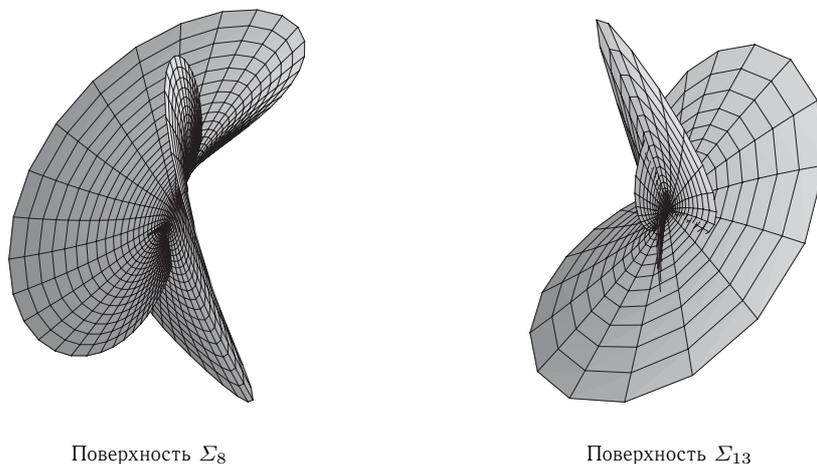
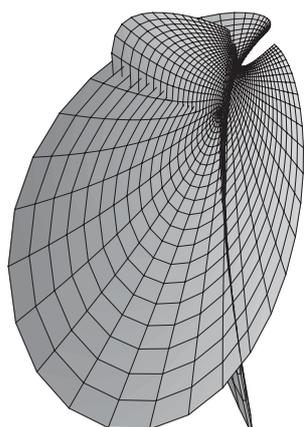
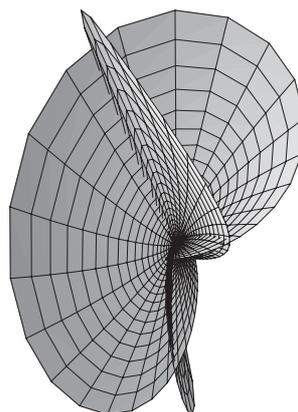
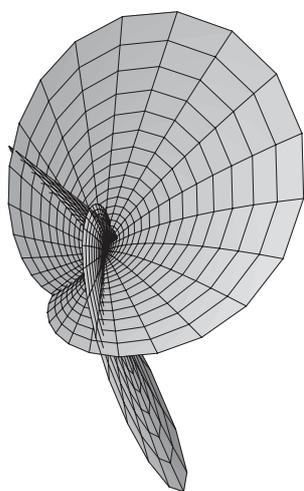
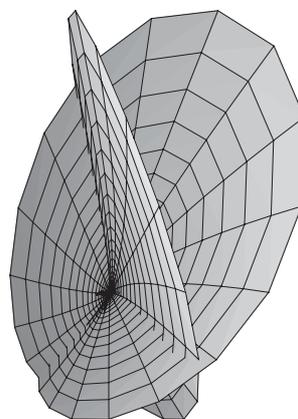


Рис. 2. Поверхности  $\Sigma_8$  и  $\Sigma_{13}$ : пропеллеры

Автор благодарен А. Клячко, Д. Пелиновскому и Р. Витоло за полезные обсуждения. Работа выполнена при частичной поддержке грантом № 650 CP/D университета Лечче. Часть данного исследования была выполнена автором в университете Лечче.

## Литература

- [1] Бочаров А. В., Вербовецкий А. М., Виноградов А. М. и др. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / Ред. А. М. Виноградов, И. С. Красильщик. — 2-е изд. — М.: Факториал, 2005.
- [2] Киселёв А. В. О редукции уравнения минимальных поверхностей // Труды XXVII Конференции молодых ученых. Механико-математический факультет МГУ, 11–21 апреля 2005 г. — С. 67–71.
- [3] Bilă N. Lie groups applications to minimal surfaces PDE // Differ. Geom. Dyn. Syst. — 1999. — Vol. 1, no. 1. — P. 1–9.
- [4] Kiselev A. V., Manno G. On the symmetry structure of the minimal surface equation // Proc. IX Conf. "Differential Geometry and Its Applications," August 2004. — Prague: Charles Univ., 2005. — P. 483–490. — [arXiv:math.DG/0410557](https://arxiv.org/abs/math/0410557).
- [5] Nitsche J. C. C. Vorlesungen über Minimalflächen. — Berlin: Springer, 1974.
- [6] Osserman R. A Survey of Minimal Surfaces. — New York: Van Nostrand Reinhold, 1969.

Поверхность  $\Sigma_9$ Поверхность  $\Sigma_{10}$ Поверхность  $\Sigma_{11}$ Поверхность  $\Sigma_{12}$ Рис. 3. Поверхности  $\Sigma_9$ ,  $\Sigma_{10}$ ,  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{12}$ : морские раковины