О кососимметричной и общей деформации псевдодифференциальных операторов Лакса

Б. А. КУПЕРШМИДТ
Университет штата Теннесси, США
e-mail: bkupersh@utsi.edu

УДК 517.957

Ключевые слова: интегрируемость, деформация, редукция.

Аннотация

Выдвигается предположение о существовании нелинейной деформации для редукции третьего KP-потока на подпространство кососимметричных операторов. Это предположение доказывается для линеаризованного потока. Как побочный результат получена необычная (неквантовая) полиномиальная деформация чисел $\left\{\binom{2n+1}{2s+1}\frac{4^{s+1}-1}{s+1}B_{2s+2}\right\}$, где B_m — числа Бернулли. Обсуждаются также некоторые общие открытые вопросы и возможные обобщения. Предположение распространяется на все потоки, доказывается его линеаризованная версия.

Abstract

B. A. Kupershmidt, On skew-symmetric and general deformations of Lax pseudodifferential operators, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 7, pp. 101—116.

A nonlinear deformation is conjectured for the reduction of the third KP flow on the subspace of skew-symmetric operators, and the conjecture is proved for the linearized flow. As a by-product, we find a peculiar (nonquantum) polynomial deformation of the numbers $\left\{\binom{2n+1}{2s+1}\frac{4^{s+1}-1}{s+1}B_{2s+2}\right\}$, where B_m's are the Bernoulli numbers. General open questions and generalizations are also discussed. The conjecture is extended to all the flows, and its linearized version is proved.

1. Введение

Пусть

$$\mathcal{L} = \xi + \sum_{i=0}^{\infty} A_i \xi^{-i-1}, \quad \xi = \partial = \frac{d}{dx}, -$$

оператор Лакса для KP-иерархии

$$X_n(\mathcal{L}) = \mathcal{L}_t = [\mathcal{P}_+, \mathcal{L}] = [\mathcal{L}, \mathcal{P}_-], \tag{1.1}$$

$$\mathcal{P} = \frac{1}{n}\mathcal{L}^n, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}, \tag{1.2}$$

где $\mathcal{P}_+$ и $\mathcal{P}_-$ задают, как обычно, чисто дифференциальную и интегральную части псевдодифференциального оператора соответственно (см., например, [2]):

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 7, с. 101—116.

$$\left(\sum_i a_s\xi^s\right)_+ = \sum_{s\geqslant 0} a_s\xi^s, \quad \left(\sum_s a_s\xi^s\right)_- = \sum_{s<0} a_s\xi^s.$$

Переходя в (1.1) к сопряжённому уравнению, получаем

$$X_n(\mathcal{L}^\dagger) = [-(\mathcal{P}^\dagger)_+, \mathcal{L}^\dagger].$$

Таким образом, если

$$\mathcal{P}^\dagger = -\mathcal{P}, \tag{1.3}$$

КР-поток $\#n$ можно редуцировать на подмногообразие

$$\{\mathcal{L}^\dagger = -\mathcal{L}\} \tag{1.4}$$

кососимметричных операторов. (Более общее утверждение можно найти в [7].) Поскольку оператор $\mathcal{L}^\dagger = -\xi$ уже кососимметричен, соотношение (1.3) выполняется в том и только в том случае, когда

$$n \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 2).$$

Первый из потоков X_n с нечётным n, т. е.

$$X_1(A_i) = A_{i,x}, \quad i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},$$

неинтересен. Первый нетривиальный поток — третий:

$$\begin{aligned} X_3(A_i) = \frac{1}{3}A_i^{(3)} + A_{i+1}^{(2)} + A_{i+2}^{(1)} + (A_iA_0)^{(1)} + \\ + \sum_{k=0}^{i-1}(-1)^k\binom{i}{k+1}\big[A_{i-k}A_0^{(k+1)} + A_{i-1-k}A_1^{(k+1)}\big], \quad i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

где

$$(\cdot)^k = \frac{d^k}{dx^k}(\cdot), \quad k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}.$$

В квазиклассическом (бездисперсионном) пределе КР-иерархия сводится к иерархии Бенни [11], построенной в [1,9], так что

$$X_3(A_i) = A_{i,t} = A_{i+2,x} + (A_iA_0)_x + i(A_iA_0, x + A_{i-1}A_{1,x}), \quad i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}. \tag{1.6}$$

Как в своё время заметил Гиббонс (см. [5,6]), система (1.6) имеет инвариантное подмногообразие

$$\{A_i = 0 \mid i \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 2),\ i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}\}, \tag{1.7}$$

на котором эта система принимает вид

$$\begin{aligned} R_{i,t} &= R_{i+1,x} + R_{i,x}R_0 + (2i+1)R_iR_{0,x}, && i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}, \\ R_i &= A_{2i}, && i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}, \end{aligned}$$

а это — частный случай при $\{(a,b,c) = (1,2,1)\}$ общего класса интегрируемых гидродинамических (a,b,c)-цепочек [5,6]

$$R_{i,t} = R_{i+1,x} + R_{i,x}R_0c + R_iR_{0,x}(ai+b), \quad i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}.$$

Возникает вопрос: как выглядит дисперсионный аналог, если таковой существует, редукции Гиббонса (1.7)? Частичный ответ, конечно, очевиден и задаётся условием кососимметричности (1.4): если $\mathcal{L}^\dagger = -\mathcal{L}$, то в квазиклассическом пределе

$$\mathcal{L}^\dagger = \Big(\xi + \sum_{i\geqslant 0} A_i \xi^{-i-1}\Big)^\dagger = -\xi + \sum_{i\geqslant 0} A_i (-1)^{i+1} \xi^{-i-1} = \\ = -\mathcal{L} = -\Big(\xi + \sum_{i\geqslant 0} A_i \xi^{-i-1}\Big) \iff \\ \iff A_i = 0, \quad i \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2), \quad i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}.$$

К несчастью, эти рассуждения, хотя и очевидны, совершенно не полны и не ведут далее никуда. Дисперсионная ситуация изобилует ловушками и тайнами, и некоторые из них приводят в замешательство. В нашем частном случае вместо того чтобы полагать

$$(A_0\xi^{-1} + A_1\xi^{-2} + \ldots)^\dagger = (-\xi^{-1}A_0 + \xi^{-2}A_1 + \ldots) = \\ = \big(-A_0\xi^{-1} + A_0^{(1)}\xi^{-2} + A_1\xi^{-2} + \ldots\big) = -(A_0\xi^{-1} + A_1\xi^{-2} + \ldots) \implies \\ \implies A_1 = -\frac{1}{2}A_0^{(1)}, \ldots,$$

мы с тем же успехом могли бы наложить условие

$$A_1 = \alpha A_0^{(1)}, \quad \alpha = \mathrm{const}, \tag{1.8}$$

с произвольным α или хотя бы попытаться сделать это. В самом деле, подставляя соотношение (1.8) в выражения для потока (1.5), находим

$$A_3 = (\alpha - 1)A_2^{(1)} + \alpha^2 A_0^{(3)}, \\ A_5 = (\alpha - 2)A_4^{(1)} + [(\alpha - 1)^2 + \alpha^2]A_2^{(3)} + A_0^{(5)}\alpha^2(2\alpha - 1) + \\ + A_0^{(1)}A_0^{(2)}\alpha(\alpha + 1)(2\alpha + 1), \ldots.$$

Мы предполагаем, что этот процесс можно продолжать и дальше, но доказательства этому в общем случае пока не имеем. Вместо этого мы докажем это предположение в первом приближении, т. е. для линеаризованного потока, в котором отброшены все нелинейные члены.

Линеаризация потока $\#n$ (1.1), (1.2) имеет вид

$$X_n(\mathcal{L}) = \Big[\frac{\xi^n}{n}, \mathcal{L}_-\Big]_- = \Big[\frac{\xi^n}{n}, \sum_{i\geqslant 0} A_i\xi^{-i-1}\Big]_- = \\ = \Big[\sum_{s>0}^{n}\sum_{i\geqslant 0}\frac{1}{n}A_i^{(s)}\xi^{n-i-s-1}\Big]_- = \sum_{s=0}^{h-1}\sum_{j\geqslant 0}\frac{1}{n}\binom{n}{s}A_{s+j}^{(n-s)}\xi^{-j-1} \implies \\ \implies X_n(A_i) = \sum_{s=0}^{n-1}\frac{1}{n}\binom{n}{s}A_{i+s}^{(n-s)}, \quad i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}. \tag{1.9}$$

В частности,

$$X_3(A_i) = \frac{1}{3}A_i^{(3)} + A_{i+1}^{(2)} + A_{i+2}^{(1)}, \qquad i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}, \tag{1.10}$$

$$X_4(A_i) = \frac{1}{4}A_i^{(4)} + A_{i+1}^{(3)} + \frac{3}{2}A_{i+2}^{(2)} + A_{i+3}^{(1)}, \quad i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}. \tag{1.11}$$

Цель настоящей статьи — найти различные факты, поддерживающие уверенность в истинности предположения для третьего потока, а также ещё более общего предположения для потоков $\#N$, $N \geqslant 3$.

Статья организована следующим образом.

В разделе 2 мы изучаем дифференциально-алгебраическое уравнение $\mathcal{L}^\dagger = -\mathcal{L}$ и доказываем, что верна следующая теорема.

Теорема 1. *Решение уравнения $\mathcal{L}^\dagger = -\mathcal{L}$ даётся формулой*

$$A_{2n+1} = \sum_{s=0}^{n} (-1)^{s+1} \binom{2n+1}{2s+1} A_{(2n-s)}^{(2s+1)} \varepsilon_s, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}, \tag{1.12}$$

где

$$\varepsilon_s(-1)^s = \frac{4^{s+1}-1}{s+1} B_{2s+2} \tag{1.13}$$

и B_n — числа Бернулли.

Доказательство проводится без всякого обращения к динамике. В разделе 3 мы применяем более общую редукцию, которая порождается начальным соотношением $A_1 = \alpha A_0^{(1)}$ к линеаризованному третьему потоку (1.10).

Теорема 2. *Редукция потока* (1.10) *на соотношение $A_1 = \alpha A_0^{(1)}$ имеет вид*

$$A_{2n+1} = \sum_{s=0}^{n} A_{2(n-2)}^{(2s+1)} c_s(n), \quad n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}, \tag{1.14}$$

$$X_3(A_{2n}) = \sum_{l=0}^{n+1} A_{2(n+1-l)}^{(2l+1)} d_l(n), \tag{1.15}$$

где

$$d_0(n) = 1, \quad d_1(n) = \frac{1}{3} + c_0(n), \quad d_{l+2}(n) = c_{l+1}(n), \quad l \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}, \tag{1.16}$$

$$c_0(n) = \alpha - n \tag{1.17}$$

и последовательность $\{c_s\}$ задана рекуррентным соотношением

$$c_{s+1}(n+1) = c_{s+1}(n) - \frac{1}{3}c_s(n) + \sum_{i+l=s} c_i(n) d_{l+1}(n-i), \quad s, n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}, \tag{1.18}$$

дополненным начальным условием

$$c_s(0) = \alpha \delta_s^0, \quad s \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}. \tag{1.19}$$

В разделе 4 мы обсуждаем положение дел с высшими потоками, которое оказывается ещё более загадочным. Мы формулируем общее предположение, а затем в разделах 5 и 6 доказываем линеаризованную форму этого предположения. Заканчивается статья обсуждением дифференциальных уравнений Лакса.

2. Кососопряжённый случай

Подробно расписывая условие $\mathcal{L}^\dagger = -\mathcal{L}$, мы получаем

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{i\geqslant 0} A_i\xi^{-i-1}\Big)^\dagger &= \sum_{i\geqslant 0}(-1)^{i+1}\xi^{-i-1}A_i = \\ &= \sum_{i\geqslant 0}(-1)^{i+1}\sum_{s\geqslant 0}(-1)^s A_i^{(s)}\binom{i+s}{s}\xi^{-i-1-s} = \\ &= \sum_{n\geqslant 0}(-1)^{n+1}\sum_{k\geqslant 0}\binom{n}{k}A_{n-k}^{(k)}\xi^{-k-1}.\end{aligned}$$

Таким образом, $\mathcal{L}^\dagger = -\mathcal{L}$ в том и только в том случае, когда

$$A_n = (-1)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A_{n-k}^{(k)}, \quad n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}. \tag{2.1}$$

В частности,

$$n=0: \quad A_0 = A_0, \tag{2.2a}$$

$$n=1: \quad A_1 = -\big(A_1 + A_0^{(1)}\big) \implies A_1 = -\frac{1}{2}A_0^{(1)}, \tag{2.2b}$$

$$n=2: \quad A_2 = A_2 + 2A_1^{(1)} + A_0^{(2)}, \tag{2.2c}$$

и последняя формула совместима с (2.2b). Условия совместимости задаются формулами (1.12), (1.13):

$$A_{2n+1} = \sum_{s=0}^{n}(-1)^{s+1}\binom{2n+1}{2s+1}A_{(2n-s)}^{(2s+1)}\varepsilon_s, \quad n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}, \tag{2.3}$$

$$\varepsilon_s(-1)^s = \frac{4^{s+1-1}}{s+1}B_{2s+2}. \tag{2.4}$$

Доказательство теоремы 1. Мы должны показать, что подстановка формулы (2.3) в формулу (2.1) приводит к тождеству при любом $n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Нужно рассмотреть отдельно случаи чётного и нечётного n.

Случай чётного n. Из (2.1) для $n>0$ мы получаем

$$0 = A_{2n+2} - A_{2n+2} = \sum_{k=1}^{2n+2}A_{2n+2-k}^{(k)}\binom{2n+2}{k} =$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \binom{2n+2}{2l+1} A^{(2l+1)}_{2(n-l)+1} + \sum_{r=0}^{n} \binom{2n+2}{2r+2} A^{(2r+2)}_{2(n-r)} =$$

$$= \partial \biggl\{ \sum_{l=0}^{n} \binom{2n+2}{2l+1} A^{(2l)}_{2(n-l)+1} + \sum_{r=0}^{n} \binom{2n+2}{2r+2} A^{(2r+1)}_{2(n-r)} \biggr\} =$$

$$= \partial \biggl\{ \sum_{l=0}^{n} \binom{2n+2}{2l+1} \biggl[\sum_{s=0}^{n-l} (-1)^{s+1} \binom{2(n-l)+1}{2s+1} A^{(2(s+l+1))}_{2(n-l-s)} \varepsilon_s \biggr] +$$

$$+ \sum_{r=0}^{n} \binom{2n+2}{2r+2} A^{(2r+1)}_{2(n-r)} \biggr\}$$

согласно (2.3). Таким образом, нам осталось проверить, что

$$\binom{2n+2}{2r+2} = \sum_{l+s=r} (-1)^s \binom{2n+2}{2l+1} \binom{2(n-l)+1}{2s+1} \varepsilon_s, \quad 0 \leqslant r \leqslant n,$$

или

$$1 = \sum_{s=0}^{r} \binom{2r+2}{2s+1} (-1^s) \varepsilon_s, \quad r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}. \tag{2.5}$$

Поскольку $\varepsilon_0 = 1/2$, числа $(-1)^s \varepsilon_s = \bar{\varepsilon}_s$ легко находятся:

$$\bar{\varepsilon}_0 = 1 \cdot 2^{-1}, \quad \bar{\varepsilon}_1 = 1 \cdot 2^{-2}, \quad \bar{\varepsilon}_2 = 4 \cdot 2^{-3},$$
$$\bar{\varepsilon}_3 = 34 \cdot 2^{-4}, \quad \bar{\varepsilon}_4 = 68 \cdot 2^{-5}, \quad \bar{\varepsilon}_5 = 992 \cdot 2^{-6}, \ldots .$$

Онлайновая энциклопедия целочисленных последовательностей [12] сообщает, что последовательность $\{1, 1, 4, 34\}$ задаётся формулой

$$\frac{2^n (4^{n-1})}{n} B_{2n},$$

где B_n — числа Бернулли.

Случай нечётного $n = 2m+1$. Из (2.1) мы получаем

$$-2A_{2m+1} = \sum_{k=1}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} A^{(k)}_{2m+1-k} = \partial \biggl\{ \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m+1}{k+1} A^{(k)}_{2m-k} \biggr\}.$$

Согласно (2.3) это соотношение тождественно равенству

$$2 \sum_{i=0}^{m} \binom{2m+1}{2i+1} A^{(2i)}_{2(m-i)} \bar{\varepsilon}_i =$$

$$= \sum_{l=0}^{m} \binom{2m+1}{2l+1} A^{(2l)}_{2(m-l)} +$$

$$+ \sum_{s=0}^{m-1} \binom{2m+1}{2s+2} \sum_{j=0}^{m-s-1} \binom{2(m-1-s)+1}{2j+1} A^{(2j+2s+2)}_{2(m-s-1-j)} (-\bar{\varepsilon}_j),$$

которое, в свою очередь, эквивалентно равенству

$$-2\binom{2m+1}{2i+3}\bar{\varepsilon}_{i+1} = \binom{2m+1}{2i+3} - \sum_{j+s=i}\binom{2m+1}{2s+2}\binom{2(m-s)-1}{2j+1}\bar{\varepsilon}_j,$$

которое может быть записано как

$$\sum_{j=0}^{i}\binom{2i+3}{2j+1}\bar{\varepsilon}_j = 1-2\bar{\varepsilon}_{i+1},$$

или как

$$\sum_{j=0}^{i+1}\binom{2i+3}{2j+1}\bar{\varepsilon}_j = 1-\bar{\varepsilon}_{i+1},$$

или, наконец, как

$$\sum_{j=0}^{r}\binom{2r+1}{2j+1}\bar{\varepsilon}_j = 1-\bar{\varepsilon}_r, \tag{2.6}$$

поскольку $\bar{\varepsilon}_0 = 1-\bar{\varepsilon}_0$.

Итак, наши числа $\{\varepsilon_s\}$ должны удовлетворять двум разным рекуррентным соотношениям: (2.5) и (2.6).

Положим

$$\mathcal{E}(z) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{\bar{\varepsilon}_s}{(2s+1)!}z^{2s+1}.$$

Умножим обе части равенства (2.5) на $\frac{z^{2r+2}}{(2r+2)!}$ и просуммируем по $r\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Получаем

$$\operatorname{sh}(z)\mathcal{E}(z) = \operatorname{ch}(z)-1 \implies \mathcal{E}(z) = \frac{\operatorname{ch}(z)-1}{\operatorname{sh}(z)} = \frac{e^z-1}{e^z+1} = 1-\frac{2}{e^z+1}. \tag{2.7}$$

Теперь умножим обе части (2.6) на $\frac{z^{2r+1}}{(2r+1)!}$ и просуммируем по $r\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. При этом мы получаем

$$\operatorname{ch}(z)\mathcal{E}(z) = \operatorname{sh}(z)-\mathcal{E}(z) \implies \mathcal{E}(z) = \frac{\operatorname{sh}(z)}{\operatorname{ch}(z)+1}, \tag{2.8}$$

и формула (2.7) эквивалентна формуле (2.8).

Поскольку многочлены Эйлера $E_n(y)$ задаются порождающей функцией

$$\sum_{n=0}^{\infty}E_n(y)\frac{z^n}{n!} = \frac{2e^{yz}}{e^z+1},$$

мы видим, что

$$\frac{2}{e^z+1} = \sum_{n=0}^{\infty}E_n(0)\frac{z^n}{n!} = 1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_{n+1}(0)}{(n+1)!}z^{n+1} \implies$$

$$\Longrightarrow\ 1-\frac{2}{e^z+1}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_{n+1}(0)}{(n+1)!}z^{n+1}=\mathcal{E}(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\bar\varepsilon_s}{(2s+1)!}z^{2s+1}\ \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\ \bar\varepsilon_s=-E_{2s+1}(0).$$

Так как согласно [3, (23.1.20)]

$$E_n(0)=-\frac{2}{2n+1}(2^{n+1}-1)B_n,\quad n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0},$$

мы получаем

$$\bar\varepsilon_n=\frac{4^{n+1}-1}{n+1}B_{2n+2},\quad n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}.\qquad\square$$

3. Деформация

Доказательство теоремы 2. Подстановка соотношения (1.14) в формулу (1.10) при чётном $i=2n$ даёт

$$X_3(A_{2n})=A^{(1)}_{2n+2}+A^{(2)}_{2n+1}+\frac{1}{3}A^{(3)}_{2n}=A^{(1)}_{2n+2}+\sum_{s=0}^{n}A^{(2s+3)}_{2(n-s)}c_s(n)+\frac{1}{3}A^{(3)}_{2n}=$$
$$=A^{(1)}_{2n+2}+A^{(3)}_{2n}\left[\frac{1}{3}+c_0(n)\right]+\sum_{l=0}^{n-1}A^{(2l+5)}_{2(n-1-l)}c_{l+1}(n).$$

Это доказывает формулу (1.16).

Рассмотрим формулу (1.10) для нечётных $i=2n+1$. Используя формулу (1.14), находим, что

$$X_3(A_{2n+1})-\frac{1}{3}A^{(3)}_{2n+1}-A^{(2)}_{2n+2}-A^{(1)}_{2n+3}= \tag{3.1}$$
$$=\sum_{s=0}^{n}c_s(n)\sum_{l=0}^{n-s+1}A^{(2l+2s+2)}_{2(n-s+1-l)}d_l(n-s)-\frac{1}{3}\sum_{s=0}^{n}A^{(2s+4)}_{2(n-s)}c_s(n)-A^{(2)}_{2n+2}-$$
$$-\sum_{s=0}^{n+1}A^{(2s+2)}_{2(n+1-s)}c_s(n+1), \tag{3.2}$$

и тем самым доказываем формулу (1.15). Выражение (3.2) должно обращаться в нуль.

Для членов $A^{(2)}_{2n+2}$ это даёт

$$c_0(n)d_0(n)-1-c_0(n+1)=0,$$

откуда

$$c_0(n)=c_0(0)-n=\alpha-n,$$

поскольку $A_1=\alpha A^{(1)}_0$, и тем самым

$$c_0(0)=\alpha.$$

Это доказывает формулу (1.17). Таким образом, формула (1.19) установлена.

Затем, извлекая члены $A_{2(n-s)}^{(2s+4)}$, $0 \leqslant s \leqslant n$, из (3.2), мы получаем

$$c_{s+1}(n+1) = c_{s+1}(n)d_0(n) + \sum_{i+l=s} c_i(n)d_{l+1}(n-i) - \frac{1}{3}c_s(n), \tag{3.3}$$

что даёт нам формулу (1.18), поскольку $d_0(n) = 1$. □

В частности, при $\alpha = -1/2$ формула (1.17) означает, что

$$c_0(n)|_{\alpha=-1/2} = -\frac{1}{2} - n = -\frac{2n+1}{2} = -\binom{2n+1}{1}\frac{1}{2}$$

в согласии с членом $\{s = 0\}$ в формуле (1.12), поскольку $\varepsilon_0 = 1/2$.

При $s = 0$ формула (3.3) даёт нам

$$c_1(n+1) = c_1(n) + c_0(n)\left[\frac{1}{3} + c_0(n)\right] - \frac{1}{3}c_0(n) = c_1(n) + (\alpha - n)^2,$$

откуда

$$c_1(n) = n\left[\alpha^2 - \alpha(n-1) + \frac{(n-1)(2n-1)}{6}\right], \quad n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}.$$

При $\alpha = -1/2$ мы получаем

$$c_1(n)|_{\alpha=-1/2} = \frac{1}{4}\binom{2n+1}{3}$$

в согласии с членом $\{s = 1\}$ в формуле (1.12), так как $\varepsilon_1 = 1/4$. Мы видим, что многочлен (по n и α) $c_s(n)$ обеспечивает деформацию выражения

$$-\binom{2n+1}{2s+1}\frac{4^{s+1}}{s+1}B_{2s+2}, \quad s, n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}.$$

4. Высшие потоки

В квазиклассическом пределе редуцируемость потока X_3 — это частный случай общего явления: любой поток X_N при $N \geqslant 3$ редуцируем.

Теорема 3. *Пусть $N \geqslant 3$. Рассмотрим поток $\#N$ в иерархии Бенни* (*см.* [1,9]) *с гамильтонианом*

$$H = \frac{1}{N}H_n,$$

$$X_N(A_n) = \sum_{s=0}^{N}(n\mathcal{A}_{n+s-1}\partial + \partial s A_{n+s-1})(H|_s), \quad n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}, \tag{4.1}$$

где

$$H|_s = \frac{\partial H}{\partial A_s}.$$

Положим $m = N - 3$. Тогда поток (4.1) *имеет инвариантное подмногообразие*

$$\{A_i = 0 \mid i \neq m \pmod{m+2}\}. \tag{4.2}$$

В переменных

$$R_l = A_{m+l(m+2)}, \quad l \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},$$

поток X_N *на соотношении* (4.2) *редуцируется в поток*

$$R_{l,t} = R_{l+1,x} + R_{l,x}R_0 + [(m+1) + l(m+2)]R_l R_{0,x}, \quad l \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}. \tag{4.3}$$

(Эта теорема была анонсирована без доказательства в [5, предложение 2.117].)

Доказательство. Гамильтониан $H = H_N/N$ (при $N > 3$) имеет вид

$$\frac{H_N}{N} = \frac{A_N}{N} + A_{N-2}A_0 + A_{N-3}A_1 + O(A_{<N-3}),$$

где $O(A_{<r})$ обозначает члены, не содержащие A_i с $i \geqslant r$. Таким образом,

$$H|_N = \frac{1}{N}, \quad H|_{N-1} = 0, \quad H|_{N-2} = A_0, \quad H|_{N-3} = A_1. \tag{4.4}$$

Обозначим через $(\cdot)|$ ограничение $(\cdot)$ на подмногообразие (4.2). Из формулы (4.4) и однородности H_N,

$$\|H_N\| = N + 2 \quad \|A_n\| = n + 2, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},$$

следует, что

$$H|_s| = \begin{cases} 0, & s \neq 1, \\ A_{N-3}, & s = 1. \end{cases}$$

Следовательно, уравнения движения (4.1) могут быть записаны в виде

$$X_N(A_n) = A_{n+N-1,x} + (nA_n\partial + \partial A_n)(H|_1) + \sum_{1 \neq s = 0}^{N-2} (nA_{n+s-1}\partial + \partial s A_{n+s-1})(H|_s).$$

При соотношении (4.2) это даёт

$$X_N(A_n) = A_{n+N-1,x} + A_{n,x}A_{N-3} + (n+1)A_n A_{N-3,x}, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}.$$

Эта формула очевидным образом даёт возможность последовательно находить X_N, и при $m = N - 3$ мы получаем

$$n = N - 3 + l(N-1) = m + l(m+2),$$

откуда следует (4.3). □

Алгебраическая сущность соотношения (4.2) для произвольного m — загадка. Лишь для $m = 0$ известна его интерпретация как условия кососимметричности соответствующего оператора Лакса.

Несмотря на это, мы можем продолжить исследование, имеет ли полностью дисперсионный случай для потока X_{m+3} редукцию, которая в квазиклассическом пределе спускается на соотношение (4.2)? Намёк на положительный ответ на этот вопрос может быть получен уже при рассмотрении потока $\#4$ в его линеаризованной форме (1.11). Оказывается, что собственная редукция порождается начальным соотношением

$$A_0 = 0, \quad A_2 = \alpha A_1^{(1)} \implies A_3 = -\left(1 + \frac{3}{2}\alpha\right) A_1^{(2)}, \ldots .$$

Похоже, что при произвольном m собственное начальное соотношение должно быть таким:

$$\begin{gathered} A_0 = \ldots = A_{m-1} = 0, \\ A_{m+l} = \alpha_l A_m^{(l)}, \quad l = 0, \ldots, m+1, \quad \alpha_0 = 1, \end{gathered} \tag{4.5}$$

где α_l — параметры деформации. На первый взгляд, их должно быть $m+1$ штук.

Мы предполагаем, что формулы (4.5) работают для всей KP-иерархии, а не только для линеаризованных потоков. (Для последних, скорее всего, имеется гораздо большее число редукций.)

Более того, вид линеаризованных потоков (1.9) в точности такой же, как в некоммутативном случае [8], который, однако, не имеет квазиклассического предела (из-за наличия коммутаторов членов, не содержащих производных). Представляется, что ситуация подобна той, которую соотношения (4.5) вызывают в полностью некоммутативном случае, и посредством этого получается некоммутативная версия $\{(a, b, c) = (m+2, m+1, 1)\}$-цепочки (4.3) — проблема чрезвычайно сложная, к решению которой не видно даже никаких подходов.

В следующих двух разделах мы докажем, что общее предположение верно в линеаризованной форме при всех $m \geqslant 4$.

5. Линеаризованная гипотеза, часть (A)

Согласно формуле (1.9) линеаризованный поток $\#N$ имеет вид

$$X_N(A_i) = \sum_{s=0}^{N-1} \frac{1}{N} \binom{N}{s} A_{i+s}^{(N-S)}, \quad i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},$$

или, поскольку $N = m+3$, вид

$$X(A_i) = \sum_{s=0}^{m+2} \frac{1}{m+3} \binom{m+3}{s} A_{i+s}^{(m+3-s)}, \quad i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \tag{5.1}$$

(где мы фиксируем $m \geqslant 1$ до конца статьи).

Мы хотим ограничить поток (5.1) на подмногообразие, состоящее только лишь из переменных

$$R_n = A_{m+n(m+2)}, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}.$$

Оставшиеся переменные, о которых мы делаем предположение, что они выражаются через переменные R_n, разбиваются на две группы:

$$\text{(A)} \quad A_0 = \ldots = A_{m-1} = 0, \tag{5.2}$$

$$\text{(B)}\quad A_{m+n(m+2)+k} = \sum_{s=0}^{n} \partial^{k+s(m+2)}(A_{m+(n-s)(m+2)})\varphi_s(n|k),$$
$$0 \leqslant k \leqslant m+1, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}, \tag{5.3}$$

с некоторыми коэффициентами $\varphi_s(n|k)$, которые предстоит определить.

Для последних выполняются два следующих граничных условия:

$$\varphi_s(n|0) = \delta_s^0, \tag{5.4}$$

поскольку

$$A_{m+n(m+2)} = A_{m+n(m+2)},$$

и

$$\varphi_s(0|k) = \alpha_k \delta_s^0, \quad 0 \leqslant k \leqslant m+1, \tag{5.5}$$

так как мы задали начальное соотношение (см. (4.5)) как

$$A_{m+l} = \alpha_l A_m^{(l)}, \quad 0 \leqslant l \leqslant m+1, \quad \alpha_0 = 1. \tag{5.6}$$

Мы покажем, что параметры $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}$ не являются независимыми, но зато выражаются как многочлены степени 1 от единственной переменной $\alpha = \alpha_1$. Мы увидим это сразу же, как найдём точный результат решения части (A) (см. (5.2)) наших ограничений. В следующем разделе мы будем иметь дело с соотношениями (B) (см. (5.3)).

Действительно, при $0 \leqslant i \leqslant m-1$ мы имеем

$$0 = (m+3)X(A_i) = \sum_{s=0}^{m+2} \binom{m+2}{s} \partial^{m+3-s}(A_{i+s}) \overset{\text{согласно (5.2)}}{=}$$
$$= \sum_{r=0}^{i+2} \binom{m+3}{m-i+r} \partial^{m+3-(m-i+r)}(A_{m+r}) \overset{\text{согласно (5.6)}}{=}$$
$$= \sum_{r=0}^{i+2} \binom{m+3}{m-i+r} \partial^{3+i-r}\big(\alpha_r A_m^{(r)}\big) = \sum_{r=0}^{i+2} \binom{m+3}{m-i-r} A_m^{(i+3)} \alpha_r \iff$$
$$\iff 0 = \sum_{r=0}^{i+2} \binom{m+3}{m-i+r} \alpha_r =$$
$$= \binom{m+3}{m-i} + \sum_{r=0}^{i+1} \binom{m+3}{m-1-i+r} \alpha_{r+1}, \quad 0 \leqslant i \leqslant m-1.$$

Таким образом, мы получаем линейную систему с ненулевыми коэффициентами, у которой на одну диагональ больше, чем у треугольной системы. Это позволяет нам выразить все α_{r+1} через $\alpha = \alpha_1$, что и требовалось.

6. Линеаризованная гипотеза, часть (B)

Для завершения картины нам нужно получить эволюционное уравнение для R_n. Мы будем искать его в виде

$$X\big(A_{m+n(m+2)}\big) = \sum_{l=0}^{n+1} \partial^{1+l(m+2)}\big(A_{m+(n+1-l)(m+2)}\big) d_l(n) \tag{6.1}$$

с некоторыми коэффициентами $d_l(n)$, которые предстоит определить.

Для начала мы выразим коэффициенты $d_l(n)$ через $\varphi_l(n|k)$.

При $i = m + n(m+2)$, формула (5.1) даёт

$$\begin{aligned} X\big(A_{m+n(m+2)}\big) &= \frac{1}{m+3}\sum_{l=0}^{m+2}\binom{m+3}{l}\partial^{m+3-l}\big(A_{m+n(m+2)+l}\big) = \\ &= \frac{1}{m+3}A^{m+3}_{m+n(m+2)} + A^{(1)}_{m+(n+1)(m+2)} + \\ &+ \frac{1}{m+3}\sum_{l=0}^{m}\binom{m+3}{l+1}\partial^{m+2-l}\big(A_{m+n(m+2)+l+1}\big). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Согласно формуле (5.3), в которой мы полагаем $k = l+1$, выражение (6.2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\sum_{l=0}^{m}\frac{1}{m+3}\binom{m+3}{l+1}\partial^{m+2-l}\sum_{s=0}^{n}\partial^{l+1+s(m+2)}\big(A_{m+(n-s)(m+2)}\big)\varphi_s(n|l+1) = \\ &\quad = \sum_{l=0}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{1}{m+2}\binom{m+2}{l+1}\partial^{m+3+s(m+2)}\big(A_{m+(n-s)(m+2)}\big)\varphi_s(n|l+1). \end{aligned} \tag{6.3}$$

С другой стороны, (6.2) и (6.3) должны быть равны, согласно формуле (6.1), величине

$$X\big(A_{m+n(m+2)}\big) = \sum_{I=0}^{n+1}\partial^{1+I(m+2)}\big(A_{m+(n+1-I)(m+2)}\big)d_I(n).$$

Сравним подобные члены. При $I = 0$ получаем $d_0(n) = 1$, при $I \geqslant 1$ получаем

$$d_{i+1}(n) = \frac{1}{m+3}\delta_i^0 + \sum_{l=0}^{m}\frac{1}{m+3}\binom{m+3}{l+1}\varphi_i(n|l+1), \quad 0 \leqslant i \leqslant n.$$

Теперь мы выведем рекуррентное соотношение для $\varphi_s(n|l)$.

Нам надо проверить, что предположение (B) (см. (5.3)) остаётся инвариантным при действии потока $X = X_N$. Мы уже проверили случай $k = 0$. Рассмотрим теперь соотношение

$$A_{m+n(m+2)+k+1} = \sum_{s=0}^{n}\partial^{1+k+s(m+2)}\big(A_{m+(n-s)(m+2)}\big)\varphi_s(n|k+1), \quad 0 \leqslant k \leqslant m. \tag{6.4}$$

Применяя X к левой части, согласно формуле (5.1) получаем

$$X\big(A_{m+n(m+2)+k+1}\big)=\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{m+3}\binom{m+3}{r}\big(A_{m+n(m+2)+k+1+r}\big). \tag{6.5}$$

Разобьём суммирование по r на три группы:

$$\begin{aligned} 0\leqslant r\leqslant m-k &\implies k+1+r<m+2,\\ r=m+1-k &\implies k+1+r=m+2,\\ m+2-k\leqslant r\leqslant m+2 &\implies m+3\leqslant k+1+r\leqslant m+3+k. \end{aligned}$$

В соответствии с этим сумма (6.5) тоже разделяется на три выражения:

$$\begin{aligned} &\sum_{r=0}^{m-k}\frac{1}{m+3}\binom{m+3}{r}\times\\ &\quad\times\partial^{m+3-r}\sum_{s=0}^{n}\partial^{k+1+r+s(m+2)}\big(A_{m+(n-s)(m+2)}\big)\varphi_s(n|k+1+r)=\\ &\quad=\sum_{r=0}^{m-k}\sum_{s=0}^{n}\frac{1}{m+3}\binom{m+3}{r}\partial^{m+4+k+s(m+2)}\big(A_{m+(n-s)(m+2)}\big)\varphi_s(n|k+1+r); \end{aligned} \tag{6.6}$$

$$\frac{1}{m+3}\binom{m+3}{m+1-k}\partial^{2+k}\big(A_{m+(n+1)(m+2)}\big); \tag{6.7}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{r=m+2-k}^{m+2}\frac{1}{m+3}\binom{m+3}{r}\partial^{m+3-r}\sum_{s=0}^{n+1}\partial^{k+1+r-m-2+s(m+2)}\big(A_{m+(n+1-s)(m+2)}\big)\times\\ &\quad\times\varphi_s(n+1|k+1+r-m-2)=\\ &\quad=\sum_{\rho=0}^{k}\frac{1}{m+3}\binom{m+3}{m+2-k+\rho}\times\\ &\quad\times\sum_{s=0}^{n+1}\partial^{2+k+s(m+2)}\big(A_{m+(n+1-s)(m+2)}\big)\varphi_s(n+1|\rho+1)=\\ &\quad=\sum_{\rho=0}^{k}\frac{1}{m+3}\binom{m+3}{m+2-k+\rho}\partial^{2+k}\big(A_{m+(m+1)(m+2)}\big)\varphi_0(n+1|\rho+1)+ \qquad (6.8)\\ &\quad+\sum_{\rho=0}^{k}\frac{1}{m+3}\binom{m+3}{m+2-k+\rho}\times\\ &\quad\times\sum_{s=0}^{n}\partial^{m+r+k+s(m+2)}\big(A_{m+(n-s)(m+2)}\big)\varphi_{s+1}(n+1|\rho+1). \qquad (6.9) \end{aligned}$$

Для производной по времени от правой части формулы (6.4) мы находим

$$
\begin{aligned}
&\sum_{s=0}^{n}\varphi_s(n|k+1)\partial^{1+k+s(m+2)}X\big(A_{m+(n-s)(m+2)}\big) =\\
&\quad=\sum_{s=0}^{n}\varphi_s(n|k+1)\partial^{1+k+s(m+2)}\times\\
&\quad\times\sum_{l=0}^{n-s+1}\partial^{1+l(m+2)}\big(A_{m+(n-s+1-l)(m+2)}\big)d_l(n-s) =\\
&\quad=\sum_{s=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-s+1}\varphi_s(n|k+1)d_l(n-s)\partial^{2+k+(l+s)(m+2)}\big(A_{m+(n+1-s-l)(m+2)}\big) =\\
&\quad=\varphi_0(n|k+1)\partial^{2+k}\big(A_{m+(n+1)(m+2)}\big)+ \qquad (6.10)\\
&\quad+\sum_{l+s=1}^{n+1}\varphi_s(n|k+1)d_l(n-s)\partial^{m+4+k+(l+s-1)(m+2)}\big(A_{m+(n-(s+l-1))(m+2)}\big). \qquad (6.11)
\end{aligned}
$$

Приравнивая (6.7) + (6.8) к (6.10), получаем

$$
\frac{1}{m+3}\left\{\binom{m+3}{m+1-k}+\sum_{\rho=0}^{k}\binom{m+3}{m+2-k+\rho}\varphi_o(n+1|\rho+1)\right\}=\varphi_0(n|k+1).
$$

При $k=0$ получаем

$$
\varphi_0(n+1|1)=\varphi_0(n|1)-\frac{m+2}{2},
$$

что вместе с граничным условием (5.5) даёт

$$
\varphi_0(n|1)=\alpha-n\frac{m+2}{2}.
$$

Увеличивая k на 1 шаг за шагом, отыскиваем остальные величины $\varphi_0(n|k)$.

Наконец, приравнивая (6.6) + (6.9) к (6.11), получаем для $0\leqslant s\leqslant n$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{m-k}\frac{1}{m+3}\binom{m+3}{r}\varphi_s(n|k+1+r)+\\
&\quad+\sum_{\rho=0}^{k}\frac{1}{m+3}\binom{m+3}{m+2-k+\rho}\varphi_{s+1}(n+1|\rho+1)=\\
&\quad=\sum_{l+p=s+1}\varphi_p(n|k+1)d_l(n-p)=\varphi_{s+1}(n|k+k)+\sum_{p=0}^{s}\varphi_p(n|k+1)d_{s-p}(n-p).
\end{aligned}
$$

Те же действия, что и выше, позволяют дать рекурсивное определение величин $\varphi_s(n|k)$ для всех $s>0$ и k с помощью граничного условия (5.5).

Замечания. Деформации KP-иерархии, обсуждаемые в этой статье, основаны на неизвестных принципах. Оператор Лакса в этом случае не является дифференциальным оператором; это псевдодифференциальный оператор порядка 1.

Это обстоятельство даёт заметный контраст, а на самом деле дополнительную ситуацию, к случаю чисто дифференциальных уравнений Лакса. Для этого случая общая деформация была построена в [5] для нередуцируемых потоков на основе обобщённого отображения Миуры Mod Lax → Lax, построенного в [10]. Похоже, что эти две ситуации имеют мало общего.

Благодарность. Мне была очень полезна замечательная онлайн-энциклопедия целочисленных последовательностей, которую поддерживает Н. Слоун [12].

Литература

[1] Купершмидт Б. А., Манин Ю. И. Уравнения длинных волн со свободной поверхностью. II. Гамильтонова структура и высшие уравнений // Функц. анализ и его прил. — 1978. — Т. 12, № 1. — С. 25—37.

[2] Манин Ю. И. Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. математики. Т. 11. — М.: ВИНИТИ, 1978. — С. 5—152 .

[3] Abramowitz M., Stegun I. A. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. — New York: Dover, 1992.

[4] Benney D. J. Some properties of long nonlinear waves // Stud. Appl. Math. — 1973. — Vol. L11. — P. 45—50.

[5] Kupershmidt B. A. Deformations of integrable systems // Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A. — 1983. — Vol. 83, no. 1. — P. 45—74.

[6] Kupershmidt B. A. Normal and universal forms in integrable hydrodynamical systems // Proc. of NASA Ames-Berkeley Conf. on Nonlinear Problems in Optimal Control and Hydrodynamics / L. R. Hunt, C. F. Martin, eds. — Math. Sci. Press, 1984. — P. 357—378.

[7] Kupershmidt B. A. Mathematics of dispersive water waves // Comm. Math. Phys. — 1985. — Vol. 99. — P. 51—73.

[8] Kupershmidt B. A. KP or mKP. Noncommutative Mathematics of Lagrangian, Hamiltonian, and Integrable Systems. — Providence: Amer. Math. Soc., 2000.

[9] Kupershmidt B. A. Extended equations of long waves // Stud. Appl. Math. — 2006. — Vol. 116. — P. 415—434.

[10] Kupershmidt B. A., Wilson G. Modifying Lax equations and the second Hamiltonian structure // Invent. Math. — 1981. — Vol. 62. — P. 403—436.

[11] Lebedev D. R., Manin Yu. I. Conservation laws and Lax representation of Benney's long wave equations // Phys. Lett. A. — 1979. — Vol. 74. — P. 154—156.

[12] Sloane N. On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. — `http://www.research.att.com/~njas/sequences`.