Оператор рекурсии для внутреннего обобщённого уравнения синус-Гордона*

М. МАРВАН
Силезский университет, Опава
e-mail: M.Marvan@math.slu.cz

М. ПОБОРЖИЛ
Силезский университет, Опава
e-mail: M.Poboril@math.slu.cz

УДК 514.752+517.957

Ключевые слова: подмногообразия постоянной секционной кривизны, внутреннее обобщённое уравнение синус-Гордона, внутреннее обобщённое волновое уравнение, обобщённое потенциальное модифицированное уравнение Кортевега—де Фриза.

Аннотация

Найдены обратный и «стандартный» операторы рекурсии для внутреннего обобщённого уравнения синус-Гордона для произвольного $n > 2$, где n — число независимых переменных. Среди потоков, порождённых прямым оператором рекурсии, выделен многокомпонентный аналог потенциального модифицированного уравнения Кортевега—де Фриза.

Abstract

M. Marvan, M. Pobořil, Recursion operator for the intrinsic generalized sine-Gordon equation, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 7, pp. 117—128.

We find the inverse and direct recursion operator for the intrinsic generalized sine-Gordon equation in any number $n > 2$ of independent variables. Among the flows generated by the direct operator we identify a higher-dimensional analogue of the pmKdV equation.

Введение

Операторы рекурсии общего вида, введённые Олвером [23], являются псевдодифференциальными операторами

$$\sum_{i=-r}^{s} f_i D_x^i \circ h_i,$$

отображающими симметрии в симметрии; таким образом, эти операторы могут порождать бесконечные серии симметрий. Важное обобщение, сделанное

*Работа выполнена при поддержке Агентства по грантам Чешской Республики (грант 201/04/0538) и Министерства образования, молодёжи и спорта Чешской Республики (грант MSM 4781305904).

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 7, с. 117—128.

Гэтри [15], устраняет присущие этому подходу проблемы с интерпретацией D_x^{-1}. Более того, существует связь между определением Гэтри и теорией накрытий [16, 17], из которой следует, что в бо́льших размерностях главные компоненты операторов рекурсии Гэтри становятся тривиальными, если только рассматриваемая система не является (максимально) переопределённой [19].

Цель данной статьи — продемонстрировать существование переопределённых систем в произвольной размерности, которые допускают нетривиальный оператор рекурсии в смысле определения Гэтри, причём мы стараемся не использовать билокальный подход, обычно применяемый к многомерным системам [6,12,13].

Рассматриваемая система — это внутреннее обобщённое уравнение синус-Гордона [5], описывающее метрики n-мерных римановых пространств M постоянной секционной кривизны K, погружённых в $(2n-1)$-мерное риманово пространство $\bar{M}$ постоянной секционной кривизны $\bar{K}$. В частном случае плоской метрики $(K=0)$ на M это уравнение обычно называется внутренним обобщённым волновым уравнением. Известно, что эти системы интегрируемы в смысле теории солитонов. В частности, данные уравнения допускают преобразования Бэклунда [5] и имеют солитонные решения [14, 26]. С указанным уравнением тесно связаны обобщённое уравнение синус-Гордона и обобщённое волновое уравнение [1, 27, 29], которые описывают погружения, а также так называемые обобщённое уравнение и внутреннее обобщённое уравнение [4, 7], описывающие псевдоримановы метрики. Все эти системы также являются интегрируемыми. Список литературы, содержащей результаты по этим системам, постоянно растёт: см., например, [8, 11, 30, 32], и это только малая часть.

Лиевские симметрии систем внутреннего обобщённого уравнения синус-Гордона и внутреннего обобщённого волнового уравнения были получены Тененблат и Винтерницем [28] одновременно с соответствующими инвариантными решениями; данный результат был перенесён Феррейрой [10] на случай обобщённого уравнения, однако до сих пор не была найдена ни одна высшая симметрия. Мы используем оператор рекурсии, найденный в настоящей статье, для построения локального потока третьего порядка, который мы назвали обобщённым потенциальным модифицированным уравнением Кортевега—де Фриза и который, по-видимому, является интегрируемой эволюционной системой.

Если не оговорено противное, все индексы ниже изменяются от 1 до n.

Внутреннее обобщённое уравнение синус-Гордона

Сведения об этом уравнении можно найти в [5, 26, 28].

Пусть n-мерное риманово многообразие M постоянной секционной кривизны K погружено в $(2n-1)$-мерное риманово многообразие M' постоянной секционной кривизны K. На многообразии M можно ввести ортогональные координаты $x^1, \dots, x^n$, $I = (v^1\,dx^1)^2 + \dots + (v^n\,dx^n)^2$ с n коэффициентами Ламе $v^1, \dots, v^n$, удовлетворяющими алгебраическому условию

$$\sum_i (v^i)^2 = 1 \tag{1}$$

и системе из $n^3 - n^2 + n$ дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}
&v^i_j = v^j h^{ji}, \quad j \neq i, \\
&v^i_i = -\sum_{s\neq i} v^s h^{is}, \\
&h^{ij}_i = -h^{ji}_j - Kv^i v^j - \sum_{s\neq i,j} h^{si}h^{sj}, \quad i > j, \\
&h^{ij}_j = -h^{ji}_i - \sum_{s\neq i,j} h^{is}h^{js}, \quad i < j, \\
&h^{ij}_k = h^{ik}h^{kj}, \quad j \neq i \neq k \neq j.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь h^{ij}, $i \neq j$, — это $n^2 - n$ вспомогательных функций (так называемые коэффициенты вращения). Нижние индексы обозначают дифференцирование; так, v^i_j означает $\partial v^i/\partial x^j$ и т. д.

Эта система называется внутренним обобщённым уравнением синус-Гордона при $K \neq 0$ и внутренним обобщённым волновым уравнением при $K = 0$. Результаты, сформулированные для внутреннего обобщённого уравнения синус-Гордона, легко переносятся на внутреннее обобщённое волновое уравнение. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что $h^{ii} = 0$, и тем самым избавимся от ограничений на индексы суммирования.

Для начала мы проверим сильно переопределённую систему (2) на совместность. Эта система является ортономной в смысле теории Рикье (см. [9, § 6], где имеется компактное изложение этой теории) при подходящем упорядочении по рангу производных. А именно, если производные $\partial^{r_1+\ldots+r_n}/(\partial x^1)^{r_1}\ldots(\partial x^n)^{r_n}$ упорядочены лексикографически, сначала по их суммарному порядку $r_1+\ldots+r_n$, затем по степени r_n в x^n, далее по степени r_{n-1} в x^{n-1} и т. д., то (2) разрешено (независимо от того, какие ранги приписаны зависимым переменным v^i, h^{ij}) относительно производных высшего ранга; следовательно, то же верно для его бесконечного продолжения, происходящего из дифференцирования каждого уравнения из (2) по произвольному набору переменных x^i.

Производные в левой части уравнения (2) и его бесконечного продолжения называются *главными* и становятся функциями от остальных — *параметрических* — производных. Теперь легко увидеть, что система (2) пассивна в том смысле, что все её условия интегрируемости (равенства смешанных производных) тождественно выполняются, причём мы можем это установить даже без ссылки на алгебраическое условие (1). Более того, легко проверить, что производная $\sum_i v^i v^i_k$ от левой стороны (1) по произвольному переменному x^k зануляется в силу первых двух уравнений системы (2). Отсюда мы заключаем, что и вся система (1), (2) пассивна.

Условие (1) означает, что точка $(v^1, \dots, v^n)$ лежит на S^{n-1}, т. е. на единичной сфере. Тогда v^n можно выразить через $v^1, \dots, v^{n-1}$ на каждой из двух полусфер $v^n > 0$ и $v^n < 0$ сферы S^{n-1}. Следовательно, полный список параметрических производных, которые будут использоваться ниже, выглядит так:

$$v^1, \dots, v^{n-1}, \quad h^{ij}, \quad i \neq j, \quad h^{ij}_{\underbrace{i\dots i}_{r}}, \quad i > j, \quad h^{ij}_{\underbrace{j\dots j}_{r}}, \quad i < j, \tag{3}$$

где r и j — произвольные натуральные числа.

В терминах геометрической теории систем уравнений с частными производными [25] мы имеем следующую картину. Пусть Y обозначает произведение единичной сферы S^{n-1} с выбранными на ней координатами $v^1, \dots, v^{n-1}$ и арифметического пространства $\mathbb{R}^{n(n-1)}$ с выбранными в нём координатами h^{ij}, $i \neq j$. Рассмотрим тривиальное расслоение $\pi \colon Y \times M \to M$ и его бесконечное продолжение $J^\infty\pi$. Тогда система (2) и её бесконечное продолжение (состоящее из всех её дифференциальных следствий), рассмотренное выше, определяют подмногообразие $\mathcal{E}$ в $J^\infty\pi$. Поскольку система пассивна, дифференциальные следствия с одинаковыми главными производными в левой части эквивалентны. Параметрические производные (3) тогда служат координатами вдоль слоёв в $\mathcal{E} \to M$.

Пусть задана функция $f \in C^\infty J^\infty\pi$. Чтобы найти её ограничение $f|_{\mathcal{E}}$ на $\mathcal{E}$, надо заменить каждую главную производную, от которой зависит f, на правую часть соответствующего уравнения (2) или его дифференциального следствия и повторять эту процедуру до тех пор, пока мы не избавимся от всех главных производных (что гарантируется упорядочением Рикье). После этого мы получим функцию, которая уже не зависит от производных координат v^i. Затем v^n заменяется его выражением через координаты $v^1, \dots, v^{n-1}$. Эта легко осуществимая процедура приводит нас к функции, содержащей лишь параметрические производные (3).

Обычные полные производные по x^k допускают ограничение на $\mathcal{E}$, а именно

$$D_k = \frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_{i=1}^{n-1} v^i_k|_{\mathcal{E}} \frac{\partial}{\partial v^i} + \sum_{i<j} h^{ij}_k|_{\mathcal{E}} \frac{\partial}{\partial h^{ij}} + \\ + \sum_{r>0} \sum_{i>j} h^{ij}_{\underbrace{i\dots i}_{r} k}|_{\mathcal{E}} \frac{\partial}{\partial h^{ij}_{\underbrace{i\dots i}_{r}}} + \sum_{r>0} \sum_{i<j} h^{ij}_{\underbrace{j\dots j}_{r} k}|_{\mathcal{E}} \frac{\partial}{\partial h^{ij}_{\underbrace{j\dots j}_{r}}},$$

где коэффициенты $v^i_k|_{\mathcal{E}}$, $h^{ij}_k|_{\mathcal{E}}$ и т. д. определяются из системы (2) и её продолжений.

Представление нулевой кривизны

Для системы (2), согласно [5], такое представление состоит из разреженных антисимметричных $(2n \times 2n)$-матриц $\mathbf{A}_{(k)}$, $k = 1, \dots, n$, заданных соотношениями

$$\begin{aligned} A^{ij}_{(k)} &= \delta^j_k h^{ji} - \delta^i_k h^{ij}, \\ A^{n+i,j}_{(k)} &= -A^{i,n+j}_{(k)} = \left(\frac{K}{4z} - z\right)\delta^i_k\delta^j_k - \frac{K}{2z}\delta^i_k v^j v^k, \\ A^{n+i,n+j}_{(k)} &= \delta^j_k h^{ij} - \delta^i_k h^{ji}. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь z — это так называемый спектральный параметр. Условие нулевой кривизны

$$\mathbf{A}_{(k)x^l} - \mathbf{A}_{(l)x^k} + [\mathbf{A}_{(k)}, \mathbf{A}_{(l)}] = 0,$$

которое имеет место как следствие системы (2), геометрически выражается в виде

$$\big(D_l\mathbf{A}_{(k)} - D_k\mathbf{A}_{(l)} + [\mathbf{A}_{(k)}, \mathbf{A}_{(l)}]\big)\big|_{\mathcal{E}} = 0. \tag{5}$$

Симметрии и операторы рекурсии

Как хорошо известно (см., например, [25]), симметрию уравнения с частными производными можно отождествить с вертикальным векторным полем

$$Q = \sum_\iota Q^\iota\, \partial/\partial q^\iota$$

на соответствующем многообразии $\mathcal{E} \to M$. Поле Q должно коммутировать с полной производной D_k, ограниченной на $\mathcal{E}$. Оказывается, что симметрии системы уравнений $\{F^l = 0\}$ удовлетворяют *линеаризованной системе* $\{\ell_{F^l} = 0\}$, где

$$\ell_{F^l} = \sum_\iota \frac{\partial F^l}{\partial q^\iota} Q^\iota,$$

причём q^ι пробегают координаты многообразия $\mathcal{E}$ (параметрические производные). Более того, из условия перестановочности с D_k следует, что коэффициент Q^κ, соответствующий производной $q^\kappa = D_k q^\iota$ другой координаты q^ι, можно выразить в виде $Q^\kappa = D_k Q^\iota$. Таким образом, единственные коэффициенты, которые нужно найти, — это Q^j, соответствующие переменным q^j порядка 0 (v^i и h^{ij} в нашем случае).

Итак, рассмотрим нашу систему (1), (2). Её симметрии определяются функциями V^i, H^{ij} на многообразии $\mathcal{E}$ (т. е. функциями, зависящими от (3)), которые удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}
&\sum_i v^i V^i = 0,\\
&V^i_j = v^j H^{ji} + h^{ji} V^j, \quad j \ne i,\\
&V^i_i = -\sum_{s\ne i}(v^s H^{is} + h^{is} V^s),\\
&H^{ij}_i = -H^{ji}_j - K(v^i V^j + v^j V^i) - \sum_{s\ne i,j}(h^{si} H^{sj} + h^{sj} H^{si}), \quad i > j,\\
&H^{ij}_j = -H^{ji}_i - \sum_{s\ne i,j}(h^{is} H^{js} + h^{js} H^{is}), \quad i < j,\\
&H^{ij}_k = h^{ik} H^{kj} + h^{kj} H^{ik}, \quad j \ne i \ne k \ne j,
\end{aligned} \tag{6}$$

где $V^i_j = D_j V^i$ и т. п.

Следуя Гэтри [15] и нашим прежним наблюдениям [19], мы интерпретируем оператор рекурсии как автопреобразование Бэклунда для линеаризованной системы (6).

Как правило [2,22], существует оператор рекурсии, который можно выразить в терминах некоторой вспомогательной системы уравнений, тесно связанной с представлением нулевой кривизны, а именно системы

$$\mathbf{W}_{x^k} = [\mathbf{A}_{(k)}, \mathbf{W}] + \ell_{\mathbf{A}_{(k)}}, \tag{7}$$

где $\ell_{\mathbf{A}_{(k)}}$ вычисляются покомпонентно. В нашем случае $\mathbf{W}$ — это антисимметричная $(2n \times 2n)$-матрица, родственная матрицам $\mathbf{A}_{(k)}$. Совместность системы (7) следует из условия нулевой кривизны (5).

Теперь легко проверить, что если V^i, H^{ij} — симметрии и $\mathbf{W}$ удовлетворяет (7), то V'^i, H'^{ij}, заданные формулами

$$\begin{aligned}
V'^i &= 2zV^i - 2z\sum_{s\ne i} v^s W^{is},\\
H'^{ij} &= Kv^j \sum_{s=1}^{n} v^s W^{s,n+i} - \left(\frac{1}{2}K + 2z^2\right) W^{j,n+i},
\end{aligned} \tag{8}$$

тоже являются симметриями. Таким образом, формулы (7) и (8) определяют семейство операторов рекурсии $\mathcal{R}_z$ для внутреннего обобщённого уравнения синус-Гордона. Будучи применён к (локальной) симметрии внутреннего обобщённого уравнения синус-Гордона, оператор $\mathcal{R}_z$ производит ровно $\frac{1}{2}n(n-1)$ симметрий, все они, как правило, сильно нелокальны. В таких случаях «стандартный» оператор рекурсии надо искать среди обратных к $\mathcal{R}_z - \lambda\,\mathrm{Id}$ при подходящем значении λ и подходящем выборе спектрального параметра z.

«Стандартный» оператор рекурсии

Оказывается, что этот оператор совпадает с $\mathcal{R}_z^{-1}$, если $K \neq \pm 4z^2$. Обращение оператора $\mathcal{R}_z$ (при произвольном n) использует (7), (8), линеаризованное уравнение (6) и то же самое линеаризованное уравнение (6), написанное для V'^i, H'^{ij} (мы будем ссылаться на него как на (6′)), чтобы выразить V^i, H^{ij} через V'^i, H'^{ij}, исключая, по возможности, как можно большее число величин W^{ij}.

Для начала заметим, что

$$V^i = \frac{1}{2z} V'^i + \sum_{s \neq i} v^s W^{is}$$

из первого уравнения (8) и

$$H^{ij} = -D_i W^{ij} + \sum_s h^{is} W^{js} + \left(\frac{K}{4z} - \frac{K}{2z} (v^i)^2 - z \right) W^{j,n+i} + \frac{K}{2z} v^i v^j W^{i,n+i}$$

из верхней левой внедиагональной части системы (7). Для всех $i \neq j$ мы тогда получаем

$$W^{i,n+j} = -2 \frac{H'^{ji}}{K + 4z^2} + \frac{4Kv^i \sum_s v^s H'^{js}}{(K + 4z^2)(K - 4z^2 - 2K(v^j)^2)} - \frac{2Kv^i v^j W^{j,n+j}}{K - 4z^2 - 2K(v^j)^2}$$

из второго уравнения (8) в предположении, что $K \neq -4z^2$. Подобным образом все оставшиеся компоненты W^{ij} и $W^{n+i,n+j}$ можно выразить алгебраически через $W^{i,n+i}$, предполагая дополнительно, что $K \neq 4z^2$. Пропустим детали утомительных вычислений. В конце концов мы получаем выражения для $W^{i,n+i}$ в терминах «потенциалов» Q^i, которое можно описать следующим образом. Пусть

$$q_i^i = K(v^i)^2 + \sum_s ((h^{si})^2 + (h^{is})^2),$$
$$q_k^i = -2h^{ik} h^{ki} \quad \text{для} \quad i \neq k.$$

Тогда $D_l q_k^i = D_k q_l^i$ для всех $k \neq l$ на $\mathcal{E}$, и поэтому горизонтальные формы $\xi^i = q_k^i \, dx^k$ определяют абелево накрытие над (2) (см. [3]). Тогда линеаризованные формы $\Xi^i = Q_k^i \, dx^k$ с

$$\begin{aligned} Q_i^i &= 2Kv^i V'^i + 2 \sum_s (h^{si} H'^{si} + h^{is} H'^{is}), \\ Q_k^i &= -2h^{ik} H'^{ki} - 2h^{ki} H'^{ik} \quad \text{для} \quad i \neq k \end{aligned} \tag{9}$$

удовлетворяют условию $D_l Q_k^i = D_k Q_l^i$ на (6′) и, следовательно, определяют абелево накрытие над линеаризованным уравнением (6′). Требуемые потенциалы Q^i являются попросту естественно выбранными нелокальными переменными на этом накрытии, которые можно представлять себе как независимые величины, удовлетворяющие соотношениям

$$D_k Q^i = Q_k^i. \tag{10}$$

В терминах потенциалов Q^i конечный результат обращения $\mathcal{R}_z$ таков:

$$
\begin{aligned}
V^i &= 2\sum_s v^s D_i H'^{is} + 2\sum_t h^{ti} \sum_s v^s H'^{ts} - 2\sum_t h^{ti} v^i H'^{ti} - \\
&\quad - 2K(v^i)^2 V'^i + \sum_s v^s (h^{is} Q^i - h^{si} Q^s), \\
H^{ij} &= -2D_i^2 H'^{ij} - 2\sum_s h^{is} D_s H'^{sj} - 2\Big(K(v^i)^2 + \sum_s (h^{si})^2\Big) H'^{ij} - \\
&\quad - 2\sum_s \Big(h^{ij} h^{is} H'^{is} + 2h^{ij} h^{si} H'^{si} + \Big(h_i^{si} + \sum_{t\neq j} h^{it} h^{st}\Big) H'^{sj}\Big) - \\
&\quad - 2K h^{ij} (2v^i V'^i - v^j V'^j) - \\
&\quad - h_i^{ij} Q^i + \Big(h_i^{ji} + \sum_s h^{is} h^{js}\Big) Q^j - \sum_s h^{is} h^{sj} Q^s
\end{aligned}
\tag{11}
$$

(зависимость от z устранена делением оператора рекурсии на подходящую функцию z). Из уравнений (6′), (9)—(11) следует (6). Таким образом, уравнения (9)—(11) определяют оператор рекурсии, обозначаемый всюду далее $\mathcal{L}$, для внутреннего обобщённого уравнения синус-Гордона.

Замечание 1. Полные производные D_k в (10) являются полными производными для накрывающего уравнения (они коммутируют вследствие соотношений $D_l Q_k^i = D_k Q_l^i$) и, следовательно, уравнение (10) несколько формально. Только когда $\mathcal{L}$ применяется к некой исходной симметрии σ с компонентами V'^i, H'^{ij}, величины Q_k^i, так же как и $\Xi^i = Q_k^i\,dx^k$, порождают объекты на $\mathcal{E}$ (или на его подходящем накрытии, если исходная симметрия нелокальна). Довольно часто случается, что индуцированные формы Ξ^i точны на $\mathcal{E}$, и следовательно, потенциалы Q^i существуют как функции на $\mathcal{E}$, а результирующая симметрия $\mathcal{L}(\sigma)$ локальна. Если Ξ^i не точны на $\mathcal{E}$, то они индуцируют абелево накрытие $\tilde{\mathcal{E}}$ над $\mathcal{E}$, и $\mathcal{L}(\sigma)$ тогда является нелокальной симметрией с тенью, определённой на $\tilde{\mathcal{E}}$ [17,19]. (Это обычно происходит с $\mathcal{R}_z(\sigma)$ и объясняет, почему операторы $\mathcal{R}_z$ не порождают локальных симметрий.)

Другие случаи

Рутинные вычисления показывают, что оператор $\mathcal{R}_z - \lambda\,\mathrm{Id}$ обратим при всех $\lambda \neq 0$, однако способность порождать локальные симметрии у обратного оператора $(\mathcal{R}_z - \lambda\,\mathrm{Id})^{-1}$ ничуть не больше, чем у самого $\mathcal{R}_z$, поэтому мы продолжим исследование при $\lambda = 0$.

В двух сингулярных случаях, когда $K = \pm 4z^2$, автопреобразование Бэклунда $\mathcal{R}_z$ допускает редукцию множества нелокальных переменных (см. [20]). Если $K = -4z^2$, то $\mathcal{R}_z$ можно записать в терминах $2n$ нелокальных переменных $p^i = \sum\limits_{j=1}^{n} v^j W^{ij}$, $i = 1, \ldots, 2n$, в виде

$$V'^i = 2z(V^i - p^i), \quad H'^{ij} = 4z^2 v^j p^{n+i},$$

где p^i удовлетворяют другой определяющей линейной системе $p^i_{x^k} = B^{ij}_{(k)} p^j + B'^i_{(k)}$, явный вид которой здесь не важен. Из второго уравнения сразу же следует, что $H'^{i1}/v^1 = \ldots = H'^{n1}/v^n$; следовательно, образ оператора $\mathcal{R}_z$ не совпадает со всем $\mathcal{E}$, и поэтому $\mathcal{R}_z$ необратим.

Если $K = 4z^2$, то максимально редуцированное множество нелокальных переменных имеет вид $p^i = \sum\limits_{j=1}^{n} v^j W^{ij}$ при $i = 1, \ldots, n$ и $q^{ij} = v^j W^{i,n+j} - v^i W^{j,n+j}$ при $i, j = 1, \ldots, n$. Мы можем выразить $\mathcal{R}_z$ через p^i, q^{ij} в виде

$$V'^i = 2z(V^i - p^i), \quad H'^{ij} = 4z^2 \left(\sum_s \frac{v^s v^j}{v^i} q^{si} - \frac{q^{ji}}{v^i} \right),$$

опуская весьма громоздкие линейные системы для p^i, q^{ij}. Так же как и в предыдущем случае, подробное исследование обнаруживает, что полученный оператор необратим.

Иерархия симметрий

По-видимому, иерархия, порождённая оператором $\mathcal{L}$, содержит бесконечно много коммутирующих симметрий, как это обычно бывает для других интегрируемых уравнений. Поскольку, однако, мы пока не располагаем доказательством этого предположения, приведём лишь несколько первых членов этой иерархии.

Как объяснено в замечании 1, применение оператора Гэтри $\mathcal{L}$ к исходной симметрии S требует решения уравнения (10) с коэффициентами, заданными соотношением (9), где V'^i, H'^{ij} заменены компонентами исходной симметрии.

Применяя $\mathcal{L}$ к нулевой симметрии, мы выводим из (9), (10), что Q^i постоянны, и поэтому всюду далее мы будем обозначать их $-c^i$. Тогда из (11) мы получаем n-мерную алгебру симметрий первого порядка

$$V^i = \sum_s (v^s h^{si} c^s - v^s h^{is} c^i), \quad H^{ij} = h^{ij}_i c^i + h^{ij}_j c^j + \sum_s h^{is} h^{sj} c^s,$$

параметризованную константами $c^1, \ldots, c^n$. Вследствие (2) их можно отождествить с очевидными трансляциями по x,

$$V^i = \sum_s v^i_s c^s, \quad H^{ij} = \sum_s h^{is}_s c^s.$$

В [28] было доказано, что они исчерпывают алгебру лиевских симметрий при $K \neq 0$.

Применение оператора $\mathcal{L}$ к трансляциям по x требует решения системы (10), где на этот раз

$$V'^i = \sum_s (v^s h^{si} c^s - v^s h^{is} c^i), \quad H'^{ij} = h^{ij}_i c^i + h^{ij}_j c^j + \sum_s h^{is} h^{sj} c^s.$$

Тогда потенциалы Q^i для Q^i_k из (9) являются просто локальными функциями:

$$Q^i = \left(K(v^i)^2 + \sum_s (h^{is})^2 + \sum_s (h^{si})^2\right)c^i - 2\sum_s h^{is}h^{si}c^s.$$

Получающаяся при этом симметрия имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned} V^i = {} & -2\sum_s h^{is}_{ii}v^s c^i + \left(\sum_s v^s h^{is}\right)\left(3K(v^i)^2 + \sum_s (h^{is})^2 + 3\sum_s (h^{si})^2\right)c^i + \\ & + 2\sum_s h^{si}_{ss}v^s c^s + 2\sum_s\sum_t v^t(h^{si}_s h^{st} - h^{st}_s h^{si})c^s + \\ & + \sum_s v^s h^{si}\left(3K(v^s)^2 + \sum_t (h^{st})^2 + 3\sum_t (h^{ts})^2\right)c^s \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} H^{ij} = {} & 2h^{ij}_{iii}c^i + 6h^{ij}\sum_s h^{si}h^{si}_i c^i - 6Kv^i h^{ij}\sum_s v^s h^{is}c^i + \\ & + h^{ij}_i\left(3K(v^i)^2 + 3\sum_s (h^{is})^2 + \sum_s (h^{si})^2\right)c^i + 2h^{ij}_{jjj}c^j + 6h^{ij}\sum_s h^{js}h^{js}_j c^j + \\ & + h^{ij}_j\left(3K(v^j)^2 + 3\sum_s (h^{js})^2 + \sum_s (h^{sj})^2\right)c^j + \\ & + 2\sum_s (h^{is}_{ss}h^{sj} - h^{is}_s h^{sj}_s + h^{sj}_{ss}h^{is})c^s + \\ & + 3\sum_s h^{is}h^{sj}\left(K(v^s)^2 + \sum_t (h^{st})^2 + \sum_t (h^{ts})^2\right)c^s \end{aligned}$$

(постоянные интегрирования уравнений (10) здесь опущены; они лишь порождают добавочные трансляции по x).

Рассмотрим базис симметрий V^i_k, H^{ij}_k, полученных подстановкой $c_i = \delta_{ik}$. Интересно, что выражения V^i_k, H^{ij}_k содержат лишь производные по x^k при каждом k. В частности, $\{v^i_\tau = V^i_k,\ h^{ij}_\tau = H^{ij}_k\}$ — это система эволюционных уравнений по τ и x^k, которую мы в дальнейшем будем называть обобщённым потенциальным модифицированным уравнением Кортевега—де Фриза. Это мотивировано тем, что при $n = 2$ уравнение (2) превращается в уравнение синус-Гордона $w_{y^1,y^2} = -K\sin w$ при отождествлении

$$v^1 = \cos\frac{1}{2}w, \quad v^2 = \sin\frac{1}{2}w, \quad h^{12} = \frac{1}{2}w_{x^1}, \quad h^{21} = -\frac{1}{2}w_{x^2},$$
$$y^1 = x^1 + x^2, \quad y^2 = x^1 - x^2$$

[26]. То же самое отождествление переводит V^i_1 в потенциальное модифицированное уравнение Кортевега—де Фриза: $w_t = w_{xxx} + \frac{1}{2}w_x^3$ (с добавочным устранимым членом $3Kw_x$). Известно, что потенциальное модифицированное

уравнение Кортевега—де Фриза совпадает с первым потоком иерархии, ассоциированной с уравнением синус-Гордона [18]. Мы предполагаем, что обобщённое потенциальное модифицированное уравнение Кортевега—де Фриза и его высшие аналоги являются интегрируемыми.

По-видимому, $(1+1)$-мерная иерархия обобщённого потенциального модифицированного уравнения Кортевега—де Фриза допускает бигамильтонову формулировку и классический оператор рекурсии, а локальность этой иерархии можно доказать, используя результаты Сергеева [24]. Эти и иные интересные вопросы мы обсудим в другой публикации.

Литература

[1] Аминов Ю. А. О погружении областей n-мерного пространства Лобачевского в $(2n-1)$-мерное евклидово пространство // ДАН СССР. — 1977. — Т. 236. — С. 521—524.

[2] Баран Х., Марван М. К одной гипотезе о нелокальных членах операторов рекурсии // Фундамент. и прикл. мат. — 2006. — Т. 12, № 7. — С. 23—33.

[3] Хорькова Н. Г. Законы сохранения и нелокальные симметрии // Мат. заметки. — 1988. — Т. 44, № 1. — С. 134—144.

[4] Barbosa J. L., Ferreira W., Tenenblat K. Submanifolds of constant sectional curvature in pseudo-Riemannian manifolds // Ann. Global. Anal. Geom. — 1996. — Vol. 14. — P. 381—401.

[5] Beals R., Tenenblat K. An intrinsic generalization for the wave and sine-Gordon equations // Differential Geometry / B. Lawson et al., eds. — Longman, 1991. — (Pitman Monographs; Vol. 52). — P. 25—46.

[6] Boiti M., Léon J. J.-P., Pempinelli F. Canonical and noncanonical recursion operators in multidimensions // Stud. Appl. Math. — 1988. — Vol. 78. — P. 1—19.

[7] Campos P. T., Tenenblat K. Bäcklund transformations for a class of systems of differential equations // Geom. Funct. Anal. — 1994. — Vol. 4, no. 3. — P. 270—287.

[8] Cieśliński J., Aminov Yu. A. A geometric interpretation of the spectral problem for the generalized sine-Gordon system // J. Phys. A. — 2001. — Vol. 34. — P. L153—L159.

[9] Douglas J. Solution of the inverse problem of the calculus of variations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1941. — Vol. 50. — P. 71—128.

[10] Ferreira W. On metrics of constant sectional curvature // Mat. Contemp. — 1995. — Vol. 9. — P. 91—110.

[11] Ferus D., Pedit F. Isometric immersions of space forms and soliton theory // Math. Ann. — 1996. — Vol. 305. — P. 329—342.

[12] Fokas A. S., Santini P. M. Recursion operators and bi-Hamiltonian structure in multidimensions. I // Comm. Math. Phys. — 1988. — Vol. 115. — P. 375—419.

[13] Fokas A. S., Santini P. M. Recursion operators and bi-Hamiltonian structure in multidimensions. II // Comm. Math. Phys. — 1988. — Vol. 116. — P. 449—474.

[14] Gu C. H., Hu H. S. Explicit solutions to the intrinsic generalization for the wave and sine-Gordon equations // Lett. Math. Phys. — 1993. — Vol. 29. — P. 1—11.

[15] Guthrie G. A. Recursion operators and non-local symmetries // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. — 1994. — Vol. 446. — P. 107—114.

[16] Krasilshchik I. S., Vinogradov A. M. Nonlocal symmetries and the theory of coverings: An addendum to A. M. Vinogradov's "Local symmetries and conservation laws" // Acta Appl. Math. — 1984. — Vol. 2. — P. 79—96.

[17] Krasilshchik I. S., Vinogradov A. M. Nonlocal trends in the geometry of differential equations: Symmetries, conservation laws, and Bäcklund transformations // Acta Appl. Math. — 1989. — Vol. 15. — P. 161—209.

[18] Kumei S. Invariance transformations, invariance group transformations, and invariance groups of the sine-Gordon equations // J. Math. Phys. — 1975. — Vol. 16. — P. 2461—2468.

[19] Marvan M. Another look on recursion operators // Differential Geometry and Applications. Proc. Conf. Brno, 1995. — Brno: Masaryk University, 1996. — P. 393—402.

[20] Marvan M. Some local properties of Bäcklund relations // Acta Appl. Math. — 1998. — Vol. 54. — P. 1—25.

[21] Marvan M. Scalar second-order evolution equations possessing an irreducible sl_2-valued zero-curvature representation // J. Phys. A. — 2002. — Vol. 35. — P. 9431—9439.

[22] Marvan M., Sergyeyev A. Recursion operator for the Nizhnik—Veselov—Novikov equation // J. Phys. A. — 2003. — Vol. 36. — P. L87—L92.

[23] Olver P. J. Evolution equations possessing infinitely many symmetries // J. Math. Phys. — 1977. — Vol. 18. — P. 1212—1215.

[24] Sergyeyev A. Why nonlocal recursion operators produce local symmetries: New results and applications // J. Phys. A. — 2005. — Vol. 38. — P. 3397—3407.

[25] Symmetries and Conservation Laws for Differential Equations of Mathematical Physics / I. S. Krasil'shchik , A. M. Vinogradov, eds. — Providence: Amer. Math. Soc., 1999. — (Translations of Math. Monographs; Vol. 182).

[26] Tenenblat K. A note on solutions for the intrinsic generalized wave and sine-Gordon equation // J. Math. Anal. Appl. — 1992. — Vol. 166. — P. 288—301.

[27] Tenenblat K., Terng C. L. A higher dimension generalization of the sine-Gordon equation and its Bäcklund transformation // Bull. Amer. Math. Soc. — 1979. — Vol. 1. — P. 589—593.

[28] Tenenblat K., Winternitz P. On the symmetry groups of the intrinsic generalized wave and sine-Gordon equations // J. Math. Phys. — 1993. — Vol. 34. — P. 3527—3542.

[29] Terng C. L. A higher dimension generalization of the sine-Gordon equation and its soliton theory // Ann. Math. — 1980. — Vol. 111. — P. 491—510.

[30] Terng C. L. Soliton equations and differential geometry // J. Differential Geom. — 1997. — Vol. 45. — P. 407—445.

[31] Zakharov V. E., Konopelchenko B. G. On the theory of recursion operator // Comm. Math. Phys. — 1984. — Vol. 94. — P. 483—509.

[32] Zhou Z. X. Darboux transformations for the twisted $\mathrm{so}(p, q)$ system and local isometric immersions of space forms // Inverse Problems. — 1998. — Vol. 14. — P. 1353—1370.