Гамильтонова теория анионов в кристаллах

Л. МАРТИНА
Университет Лечче, Италия
e-mail: martina@le.infn.it

УДК 517.957

Ключевые слова: динамическая система, пуассоновская структура, группа Галилея, квантовый эффект Холла, анионы.

Аннотация

Полуклассические волновые пакеты для электронов в кристаллах, находящихся под действием внешнего электромагнитного поля, удовлетворяют уравнениям Гамильтона. В размерности $(2+1)$ и в пределе однородных полей возникающая группа симметрий двулистно накрывает группу Ли галилеевской алгебры, расширенной «экзотическим» центральным зарядом. Его физический смысл — фазовая кривизна Берри. Следуя гамильтоновой схеме, мы обсуждаем возможные деформации этой алгебры и физический смысл происходящего.

Abstract

L. Martina, Hamiltonian theory of anyons in crystals, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 7, pp. 129—139.

Semiclassical wave packets for electrons in crystals, subject to external electromagnetic field, satisfy Hamiltonian equations. In $(2+1)$-dimensions and in the limit of uniform fields, the symmetry group results a two-folded Galilei algebra, incorporating an “exotic” central charge. It has the physical meaning of the Berry-phase curvature. In the Hamiltonian scheme, we discuss possible deformations of that algebra and the physical meaning.

Стандартная полуклассическая динамика блоховского электрона в твёрдом теле [1] учитывает различные свойства металлов, полупроводников и изоляторов. Недавно было показано (см. [5, 7, 8, 29] и ссылки, приведённые там, как обозрение результатов и перспектив), что в расчёт требуется принимать геометрические фазовые эффекты (Берри), если мы хотим получить корректную динамику волнового пакета. Итак, геометрическая фаза воздействует на свойства переноса в металле и полупроводниках, что даёт нам новый взгляд на аномальный эффект Холла в ферро- и парамагнетиках [9, 21, 22] и в слое графита [27].

Для хорошо выделенного блоховского уровня и на длинных шкалах времени и пространственных координат в теории возмущений можно сформулировать динамику средней координаты $\boldsymbol{r} = (x^i)$ и среднего квазиимпульса $\boldsymbol{k} = (k_j)$ ($\hbar = 1$ для простоты) волнового пакета с помощью эффективного лагранжиана первого порядка $L_{\text{eff}}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{k}, \dot{\boldsymbol{k}}, t)$. Он получается из шрёдингеровского лагранжиана

$L_{\rm Sch} = \langle \Psi \mid \imath \frac{d}{dt} - \hat{H} \mid \Psi \rangle$ для пространственно и импульсно локализованного волнового пакета Ψ, подвергнутого воздействию микроскопического квантового гамильтонова оператора $\hat{H}$. При действии внешних магнитного $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ и электрического $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ полей, удовлетворяющих однородному уравнению Максвелла, результирующие уравнения движения записываются в виде

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{k}} - \dot{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{k}), \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{k}} = e\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) + e\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{M}(\boldsymbol{k}) \cdot \nabla \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t). \tag{2}$$

Полная энергия $\mathcal{E}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k}, t) = \varepsilon_0(\boldsymbol{k}) - \boldsymbol{M}(\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ включает в себя энергию уровня $\mathcal{E}_0(\boldsymbol{k})$ и магнитную энергию, что обусловлено средним орбитальным магнитным моментом $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{k})$. Более того, заметим, что приведённые уравнения верны, лишь если магнитное поле однородно, иначе появляется добавочный член, содержащий градиент поля $\boldsymbol{B}$ [3, 4, 17]. Наконец, кривизна Берри блоховских состояний электронов представляется вектором $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{k}, t)$, задающим локальное изменение фазы волнового пакета, движущегося в пространстве импульсов. Для кристаллов, для которых нарушены симметрии обращения времени либо пространственной инверсии, вклад кривизны в уравнение движения ответственен за поперечный ток Холла, также в отсутствие внешнего магнитного поля $\boldsymbol{B}$ [9, 21, 22].

Отметим, что в размерности 2+1 уравнения движения типа (1), (2) изучались некоторыми авторами с точки зрения симметрий. В частности, отталкиваясь от формального рассмотрения плоской группы Галилея [6, 15, 16, 24], которая допускает двукратное центральное расширение, параметризованное массой m и вторым «экзотическим» параметром κ, можно усмотреть физические реализации такой симметрии, как, например, в [11, 12, 20, 25]. Частицы, имеющие этот тип симметрии, интерпретируются как «анионы», т. е. частицы, обладающие произвольным спином, заданным величиной κ. Физический интерес к анионам возник несколько лет назад, когда с их помощью был описан дробный квантовый эффект Холла [23]. Когда рассматривается действие внешнего электромагнитного поля, возникают, однако, некоторые трудности. В [26] релятивистские и нерелятивистские анионы описываются единым формализмом с помощью орбит присоединённого действия группы симметрий, причём одновременно как для свободных частиц, так и для частиц, взаимодействующих с однородным постоянным электромагнитным полем, что и является предметом нашего изучения. Здесь, однако, мы ставим тот же вопрос в терминах минимального (симплектического) взаимодействия аниона, как описано в [18], с внешним электромагнитным полем, что приводит к следующему лагранжиану первого порядка на фазовом пространстве:

$$L = \boldsymbol{k} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} - \frac{\boldsymbol{k}^2}{2m} + e(\boldsymbol{A} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} + A_0) + \frac{\theta}{2} \boldsymbol{k} \times \dot{\boldsymbol{k}}, \tag{3}$$

где $\theta = -\kappa/m^2$. Подчеркнём, что $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{k}$ имеют только две компоненты, поскольку мы рассматриваем геометрию на плоскости. Векторный потенциал $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ также лежит в этой плоскости и задаёт магнитное поле (в этой теории фактически являющееся скаляром) с помощью обычного соотношения $B = \varepsilon_{i,j}\partial_i A_j$. Наконец, A_0 — такой электрический потенциал, что электрическое поле в плоскости задаётся как $\boldsymbol{E} = -\nabla A_0 + \partial_t \boldsymbol{A}$. Соответствующие уравнения Эйлера—Лагранжа, т. е. (1), (2) с $\boldsymbol{\Omega} = -\theta$, имеют вид

$$m^*\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{k} - em\theta\hat{\varepsilon}\boldsymbol{E}, \quad \dot{\boldsymbol{k}} = eB\hat{\varepsilon}\dot{\boldsymbol{r}} + e\boldsymbol{E}. \tag{4}$$

В этих уравнениях появляется эффективная масса $m^* = m(1-e\theta B)$ и $\hat{\varepsilon}$ означает оператор поворота векторов в рассматриваемой плоскости на угол $\pi/2$ против часовой стрелки.

Эти же уравнения можно также получить в рамках гамильтонова формализма, если использовать обычный гамильтониан $H = \boldsymbol{k}^2/2m - eA_0$ и модифицированную скобку Пуассона

$$\{r_i, r_j\} = \frac{m}{m^*}\theta\varepsilon_{ij}, \quad \{r_i, k_j\} = \frac{m}{m^*}\delta_{ij}, \quad \{k_i, k_j\} = \frac{m}{m^*}eB\varepsilon_{ij}. \tag{5}$$

Первое важное замечание состоит в том, что тождество Якоби в алгебре, порождённой соотношениями (5), тождественно выполняется для произвольного (зависящего от времени и пространственных координат) магнитного поля. Второе следствие из этой модели состоит в том, что в случае, когда $m^* = 0$, т. е. когда магнитное поле достигает критической величины

$$B = B'_{\mathrm{crit}} = \frac{1}{e\theta}, \tag{6}$$

система становится сингулярной, и единственно допустимые движения заданы законом Холла [11, 12, 20, 25]. Требование $B = B'_{\mathrm{crit}}$ приводит к ограничению на низший уровень Ландау, и квантование позволяет построить волновые функции Лафлина [11, 12, 20, 25]. Равенство нулю величины m^* свидетельствует о некотором переносе фазы в системе. Это означает, что угловой момент может принимать лишь строго положительные целые значения при $m^* \leqslant 0$, даже если энергетический спектр неизменен [19].

Следуя [18, 26], рассмотрим дополнительные переменные, порождающие шестимерное расширенное фазовое пространство, однородное зависящее от времени электрическое поле $\boldsymbol{E}(t)$ и канонический сопряжённый импульс $\boldsymbol{\pi}$. Определим лагранжиан следующим образом:

$$L^{\mathrm{enl}} = L + \boldsymbol{\pi} \cdot \dot{\boldsymbol{E}}, \tag{7}$$

так что компоненты π_i — это множители Лагранжа. Соответствующие уравнения движения имеют вид

$$\dot{\boldsymbol{E}} = 0, \quad \dot{\boldsymbol{\pi}} = e\boldsymbol{r}, \tag{8}$$

т. е. электрическое поле в самом деле является постоянным, но тем не менее нам надо рассматривать его всюду далее как пару динамических переменных. Гамильтонова структура расширяется в том смысле, что фундаментальная скобка Пуассона (5), дополненная соотношением $\{E_i, \pi_j\} = \delta_{ij}$, и гамильтониан

$$H_0 = \frac{\boldsymbol{k}^2}{2m} - e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{r} \tag{9}$$

при подходящем выборе калибровки для A_0 задают уравнения движения (4) и (8).

Галилеевская симметрия совокупной системы $\{\text{частица}, \boldsymbol{E}\}$ готова: расширенный лагранжиан (квази)инвариантен относительно бесконечно малых приращений

$$\begin{array}{lllll} \text{трансляции} & \delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}, & \delta\boldsymbol{k} = 0, & \delta\boldsymbol{E} = 0, & \delta\boldsymbol{\pi} = e\boldsymbol{a}\,t, \\ \text{вращения} & \delta\boldsymbol{r} = -\phi\hat{\varepsilon}\boldsymbol{r}, & \delta\boldsymbol{k} = -\phi\hat{\varepsilon}\boldsymbol{k}, & \delta\boldsymbol{E} = -\phi\hat{\varepsilon}\boldsymbol{E}, & \delta\boldsymbol{\pi} = -\phi\hat{\varepsilon}\boldsymbol{\pi}, \\ \text{бусты} & \delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b}t, & \delta\boldsymbol{k} = m\boldsymbol{b}, & \delta\boldsymbol{E} = -B\hat{\varepsilon}\boldsymbol{b}, & \delta\boldsymbol{\pi} = \frac{e}{2}\boldsymbol{b}t^2, \\ \text{электрические} & & & & \\ \text{суперпозиции} & \delta\boldsymbol{r} = 0, & \delta\boldsymbol{k} = 0, & \delta\boldsymbol{E} = \boldsymbol{d}, & \delta\boldsymbol{\pi} = 0, \end{array} \tag{10}$$

где двухкомпонентные векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{d}$ — это подходящие параметры преобразования, соответствующие пространственным трансляциям, бустам и перенормировкам электрического поля. Скаляр ϕ — это параметр вращения.

Сохраняющиеся величины можно построить из теоремы Нётер. В самом деле, непосредственным интегрированием уравнения движения (4) можно получить константу движения

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \boldsymbol{k} - eB\hat{\varepsilon}\boldsymbol{r} - e\boldsymbol{E}t, \tag{11}$$

которая физически описывает равномерное движение ведущего центра заряженной частицы. Используя коммутационные соотношения

$$\{r_i, \mathcal{P}_j\} = \delta_{ij}, \quad \{k_i, \mathcal{P}_j\} = 0, \quad \{E_j, \mathcal{P}_i\} = 0 \quad \{\pi_i, \mathcal{P}_j\} = et\delta_{ij}, \tag{12}$$

можно увидеть, что (11) порождает расширенные трансляции в (10). Подобным образом величины

$$\mathcal{J} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{k} + \frac{\theta}{2}\boldsymbol{k}^2 + \frac{eB}{2}\boldsymbol{r}^2 + \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{\pi} + s_0, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}} = m\boldsymbol{r} - \left(\boldsymbol{\mathcal{P}} + \frac{e\boldsymbol{E}t}{2}\right)t + m\theta\hat{\varepsilon}\boldsymbol{k} - B\hat{\varepsilon}\boldsymbol{\pi} \tag{14}$$

сохраняются и порождают обобщённые вращения и бусты соответственно согласно (10). Конечно, и электрическое поле $\boldsymbol{E}$ рассматривается как ещё одна сохраняющаяся величина. В (13) анионный спин представляется вещественным числом s_0. Следует выделить вклады, возникающие из-за магнитного потока и из-за нового «экзотического» потока, связанного с «площадью», заметаемой в пространстве импульсов.

Вместе с гамильтонианом H_0 получается 11-мерная замкнутая алгебра Ли симметрий со следующими ненулевыми соотношениями:

$$\begin{aligned} &\{\mathcal{P}_i, H_0\} = eE_i, && \{\mathcal{K}_i, H_0\} = \mathcal{P}_i, && \{\mathcal{P}_i, \mathcal{J}\} = -\varepsilon_{ij}\mathcal{P}_j, \\ &\{\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j\} = -eB\varepsilon_{ij}, && \{\mathcal{K}_i, \mathcal{J}\} = -\varepsilon_{ij}\mathcal{K}_j, && \{\mathcal{P}_i, \mathcal{K}_j\} = -m\delta_{ij}, \\ &\{\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j\} = -m^2\theta\,\varepsilon_{ij}, && \{E_i, \mathcal{J}\} = -\varepsilon_{ij}E_j, && \{E_i, \mathcal{K}_j\} = B\varepsilon_{ij}, \end{aligned} \tag{15}$$

где (постоянное) магнитное поле B является третьим центральным зарядом. Действие группы симметрий на эти функции, формально принадлежащие двойственному пространству к алгебре симметрий, задаётся соотношениями

$$\begin{aligned} &H_0' = H_0 - \boldsymbol{b}\cdot R_\phi\boldsymbol{\mathcal{P}} + \frac{1}{2}m\boldsymbol{b}^2 - e\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{E}', \\ &\boldsymbol{\mathcal{P}}' = R_\phi\boldsymbol{\mathcal{P}} + e\tau\boldsymbol{E}' - eB\hat{\varepsilon}\boldsymbol{a} - m\boldsymbol{b}, \\ &\mathcal{J}' = \mathcal{J} + \frac{1}{2}eB\boldsymbol{a}^2 - m\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}m^2\theta\boldsymbol{b}^2 + \\ &\qquad + \boldsymbol{a}\times R_\phi\boldsymbol{\mathcal{P}} + \boldsymbol{b}\times R_\phi\boldsymbol{\mathcal{K}} + (R_\phi\boldsymbol{d} + e\tau\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{E}', \\ &\boldsymbol{\mathcal{K}}' = R_\phi\boldsymbol{\mathcal{K}} + m\boldsymbol{a} + \tau m\boldsymbol{b} - m^2\theta\hat{\varepsilon}\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}e\tau^2\boldsymbol{E}' - \tau R_\phi\boldsymbol{\mathcal{P}}, \\ &\boldsymbol{E}' = R_\phi\boldsymbol{E} + B\hat{\varepsilon}\boldsymbol{b}, \end{aligned}$$

где R_ϕ представляет (2×2)-матрицу вращений на угол ϕ, а параметр τ относится к сдвигам по времени, порождённым гамильтонианом H_0.

Кроме m, $\kappa = -m^2\theta$ и B, расширенная группа Галилея имеет два независимых оператора Казимира, а именно

$$\mathcal{C} = e\theta\left(BH_0 - \boldsymbol{\mathcal{P}}\times\boldsymbol{E} + \frac{m}{2B}\boldsymbol{E}^2\right) = \frac{e\theta B}{2m}\left(k_i - \frac{m}{B}\varepsilon_{ij}E_j\right)^2, \tag{16}$$

$$\mathcal{C}' = \frac{\boldsymbol{\mathcal{P}}^2}{2m} - H_0 - \frac{e}{m}(\boldsymbol{\mathcal{K}}\cdot\boldsymbol{E} + \mathcal{J}B) - \frac{me\theta}{2B}\boldsymbol{E}^2 = -\mathcal{C} - \frac{es_0B}{m}. \tag{17}$$

Таким образом, $\mathcal{C}'$ можно интерпретировать как внутреннюю энергию системы, в то время как $\mathcal{C} + \mathcal{C}'$ отождествляется с анионным спином, выраженным в энергетической шкале. Хотя и являющиеся константами движения, наши казимиры не являются фиксированными постоянными: в случае общего положения они ограничивают орбиты действия группы, лежащие в двойственной алгебре симметрий, на шестимерные многообразия. Казимиры являются, однако, выпуклыми функциями, так что в критических точках (в нашем случае при $\mathcal{C} = 0$) их нельзя разрешить относительно пары инвариантов. Более того, они определяют четырёхмерные многообразия. Все эти подмногообразия можно снабдить подходящими пуассоновыми структурами. Точнее, в общем случае орбита, характеризующаяся набором чисел $(m, \kappa, B, \mathcal{C}(\neq 0), s_0)$, может быть снабжена локальными координатами $(\boldsymbol{\mathcal{P}}, \boldsymbol{\mathcal{K}}, \boldsymbol{E})$. Гамильтониан H_0, ограниченный на такую орбиту, становится линейным по импульсам $\mathcal{P}_i$, т. е.

$$H_1 = \frac{\boldsymbol{\mathcal{P}}\times\boldsymbol{E}}{B} - \frac{m}{2B^2}\boldsymbol{E}^2 + \frac{\mathcal{C}}{e\theta B}. \tag{18}$$

Из соотношений (15) можно извлечь нужные нам скобки Пуассона, которые задают некоторую несингулярную квадратичную форму (её определитель равен

B^6e^2), обращение которой определяет несингулярную симплектическую форму на орбите

$$\omega_1 = \frac{1}{B}\, d\mathcal{P}_1 \wedge d\mathcal{P}_2 + \frac{m}{B^2 e}\, d\mathcal{P}_i \wedge dE_i - \frac{\varepsilon_{ij}}{B}\, d\mathcal{K}_i \wedge dE_j + \frac{mm^*}{B^3 e}\, dE_1 \wedge dE_2. \quad (19)$$

Уравнения движения на такой орбите можно найти прямо из первого из соотношений (15), принимая во внимание (8). Их непосредственное решение

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = e\boldsymbol{E}_0 t + \boldsymbol{\mathcal{P}}_0, \quad \boldsymbol{\mathcal{K}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}_0 t^2 + \boldsymbol{\mathcal{P}}_0 t + \boldsymbol{\mathcal{K}}_0, \quad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0$$

приводит к описанию решений исходных уравнений движения (4) через преобразование координат, заданное формулами (9), (11), (13) и (14) (учитывая смену знака t). Таким образом, получаем обычное движение по циклоиде, имеющее ведущий центр в точке $\boldsymbol{r}_0 = \frac{1}{B^2 e}(m\boldsymbol{E}_0 + B\hat{\varepsilon}\boldsymbol{\mathcal{P}}_0) + \hat{\varepsilon}\frac{\boldsymbol{E}_0}{B}t$, радиус $\rho = \frac{m}{eB}\sqrt{\frac{\mathcal{C}}{em\theta B}}$ и частоту $\Omega = \frac{eB}{m^*}$, выраженные через интегралы движения.

На сингулярных орбитах, определённых равенством $\mathcal{C} = 0$, получаем, что верно соотношение

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \frac{m}{B}\hat{\varepsilon}\boldsymbol{E}, \quad (20)$$

которое уменьшает размерность орбит действия группы до четырёх. В исходных переменных из второго равенства в (16) можно выразить ограничения обеих компонент импульса $\boldsymbol{k}$. Точно так же, обращаясь к уравнениям движения (4), мы видим, что они приводятся к виду

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \hat{\varepsilon}\frac{\boldsymbol{E}}{B}, \quad \boldsymbol{k} = \frac{m}{B}\hat{\varepsilon}\boldsymbol{E}, \quad (21)$$

как предсказывалось соотношением (6) при $m^* = 0 \iff B = B'_{\mathrm{crit}}$. Заметим также, что приведённые выше формулы дают радиус циклоиды, равный 0, и расходящуюся высокую частоту. Иными словами, все движения сводятся к равномерным переносам со скоростью Холла. Итак, на орбите $(m, \kappa, B, \mathcal{C} = 0, s_0)$, набор координат на которой задаётся как $(\boldsymbol{\mathcal{K}}, \boldsymbol{E})$, определена симплектическая форма

$$\omega_2 = \varepsilon_{ij}\, d\mathcal{K}_i \wedge dE_j + em^2\theta^2\, dE_1 \wedge dE_2.$$

При этой редукции гамильтониан приобретает вид $H_2 = \frac{m}{2B^2_{\mathrm{crit}}}\boldsymbol{E}^2$, что приводит к простой системе уравнений $\dot{\boldsymbol{E}} = 0$, $\dot{\boldsymbol{\mathcal{K}}} = \frac{m}{B}\hat{\varepsilon}\boldsymbol{E}$. И снова их решения описывают решения исходной системы.

Прямое обобщение системы (4), снабжённое той же самой алгеброй симметрий, может быть получено с помощью процедуры, впервые использованной Бакри [2]. Новый гамильтониан можно построить, используя образующие группы симметрий. Но в нашем случае возможно доказать, что единственное полиномиально допустимое обобщение имеет вид

$$H_{\mathrm{anom}} = H_0 + \frac{g}{2}\mathcal{C}' =$$
$$= \frac{\boldsymbol{k}^2}{2m}\Big(1 - \frac{g}{2}e\theta B\Big) - e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{r} - \mu B + \frac{ge\theta}{2}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} - \frac{mge\theta}{4B}\boldsymbol{E}^2, \quad (22)$$

где $\mu = ges_0/2m$ и g — вещественный параметр, интерпретируемый как аномальный гиромагнитный фактор. Значит, кинетический член даёт множитель, зависящий от поля. Гамильтониан (22) вместе со стандартным членом μB, задающим магнитный момент, содержит также вклады, подобно гамильтониану (18) пропорциональные g. Будем, однако, считать, что мы используем «естественные» координаты. Соответствующие уравнения движения имеют вид

$$m^*\dot{\boldsymbol{r}} = \Big(1 - \frac{g}{2}e\theta B\Big)\boldsymbol{k} - \Big(1 - \frac{g}{2}\Big)em\theta\hat{\varepsilon}\boldsymbol{E}, \quad (23)$$

их следует пополнить выражением (4) для силы Лоренца. Результирующая система напоминает [13, уравнение (5.3)]. Особые случаи получаются при $g = 2$ и $e\theta B \neq 1$. Поскольку $m\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{k}$, наши уравнения описывают обычную заряженную частицу в электромагнитном поле. При $g = 2$ и $e\theta B = 1$ уравнение (23) выполняется тождественно. Поскольку структура симметрии этой новой аномальной системы та же, что в стандартном случае $g = 0$, анализ движений получается с помощью ровно тех же рассуждений, что и выше. Единственное изменение состоит в том, что частота вращения равна теперь $\Omega = \frac{eB}{2m^*}\big(1 - \frac{g}{2}e\theta B\big)$, что при $g = 2$ сводится к обычной ларморовской частоте eB/m. Но теперь Ω обращается в 0 в новой критической точке $B = B''_{\mathrm{crit}} = \frac{2}{eg\theta}$. При этом $m^* = m(1 - 2/g)$, и уравнение (23) становится тождеством при $g = 2$. С другой стороны, при $g \neq 2$ оно сводится к уравнению $\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{g}{2}e\theta\hat{\varepsilon}\boldsymbol{E}$, которое снова определяет движения, следующие закону Холла (21), за исключением того, что теперь $\dot{\boldsymbol{k}} = 0$, т. е. импульс имеет произвольное постоянное значение.

Обобщение другого рода можно получить путём деформации алгебры симметрий, хотя генераторы симметрий остаются всё теми же. В частности, мы могли бы менять только гамильтониан, комбинируя H_0 с другими генераторами. Хотя систематическое изучение этого не является целью настоящей работы, рассмотрим гамильтониан с магнитным взаимодействием

$$H_{\mathrm{mag}} = H_0 + \mu B\mathcal{J}. \quad (24)$$

Эту модель не следует путать с той моделью, что была введена в начале статьи в контексте физики твёрдого тела, поскольку $\mathcal{J}$ имеет физический смысл, отличный от смысла $\boldsymbol{M}$. Однако в каких-то пределах модель будет полезна. Скобки Пуассона в (15) модифицируются, конечно же, лишь при коммутировании с H_{mag}. А именно, различия состоят в следующем:

$$\{H_{\mathrm{mag}}, \boldsymbol{\mathcal{P}}\} = -e\boldsymbol{E} + \mu B\hat{\varepsilon}\boldsymbol{\mathcal{P}}, \quad \{H_{\mathrm{mag}}, \boldsymbol{\mathcal{K}}\} = -\boldsymbol{\mathcal{P}} + \mu B\hat{\varepsilon}\boldsymbol{\mathcal{K}}, \quad \{H_{\mathrm{mag}}, \boldsymbol{E}\} = \mu B\hat{\varepsilon}\boldsymbol{E}.$$

Заметим, что присутствие $\boldsymbol{\pi}$, сопряжённого к $\boldsymbol{E}$ в $\mathcal{J}$, вызывает непостоянство электрического поля. Более того, можно найти лишь единственный оператор Казимира, а именно

$$\mathcal{C}_{\mathrm{mag}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\mathcal{P}}^2 - eB\mathcal{J} + \frac{mm^*}{B^2}\boldsymbol{E}^2 - e\boldsymbol{\mathcal{K}}\cdot\boldsymbol{E} - \frac{m}{B}\boldsymbol{\mathcal{P}}\times\boldsymbol{E} = \\ = \frac{m^*}{m}B^2\left(\boldsymbol{k} - \frac{m}{B}\hat{\varepsilon}\boldsymbol{E}\right)^2 - 2eB^2 s_0.$$

Этот инвариант также является выпуклой функцией, и поэтому нам надо ожидать падения размерности групповой орбиты в случае (20). Уравнения движения в естественных координатах $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{k}$ принимают вид

$$\begin{aligned} m^*\dot{\boldsymbol{r}} &= \boldsymbol{k} - em\theta\hat{\varepsilon}\boldsymbol{E}, \\ \dot{\boldsymbol{k}} &= e(1 + Bm\theta\mu)\boldsymbol{E} + B(e + m^*\mu)(\hat{\varepsilon}\dot{\boldsymbol{r}} - B\mu\boldsymbol{r}), \\ \dot{\boldsymbol{E}} &= -B\mu\hat{\varepsilon}\boldsymbol{E}, \\ \dot{\boldsymbol{\pi}} &= B\mu\boldsymbol{\pi} + e\boldsymbol{r}. \end{aligned}$$

Эта модель представляется весьма очевидной, и мы не проводим её дальнейшего анализа. Но, возвращаясь к полуклассической динамике электронных волновых пакетов в кристаллах, мы рассмотрим эффективный лагранжиан [5, 7, 8, 29]

$$L^{\mathrm{Bloch}} = \boldsymbol{k}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} + \mathcal{E} + e(\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} + A_0) + \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k})\cdot\dot{\boldsymbol{k}}, \tag{25}$$

который обобщает лагранжиан (3). (Эффективный) векторный потенциал $\mathcal{A}_i$ называется связностью Берри. Последний член в (25) аналогичен тогда нашему «экзотическому» члену в (3), к которому он и сводится в случае, когда кривизна Берри

$$\theta(\boldsymbol{P}) = \hat{\varepsilon}\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\mathcal{A}} \tag{26}$$

является постоянной. Групповая скорость $\dot{\boldsymbol{r}}$ блоховского электрона удовлетворяет, следовательно, уравнению

$$\big(1 - eB\theta(\boldsymbol{k})\big)\dot{\boldsymbol{r}} = \nabla_{\boldsymbol{k}}\mathcal{E} - e\theta(\boldsymbol{k})\hat{\varepsilon}\boldsymbol{E}, \tag{27}$$

дополненному уравнением Лоренца (4). Оно имеет ту же структуру, что и наше исходное ($g = 0$) соотношение скоростей (4). В рамках гамильтонова формализма система описывается блоховским гамильтонианом $H^{\mathrm{Bloch}} = \mathcal{E}(\boldsymbol{k}) - e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{r}$ и формально теми же самыми скобками Пуассона (5), кроме зависимости θ от импульсов. Зависимость от $\boldsymbol{k}$ совместна с тождеством Якоби [3, 4] даже при пространственно-зависимом B [11, 12, 20, 25].

Снова рассмотрим расширенный лагранжиан (7). Зависимость от $\boldsymbol{k}$ NC-параметра сводит галилеевскую симметрию только лишь к магнитным трансляциям (умноженным на сдвиги по времени). В предположении, что только θ и $\mathcal{E}$ зависят от $\boldsymbol{k}^2$, восстанавливается вращательная симметрия с помощью образующей

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2}\int^{\boldsymbol{k}^2}\theta(\chi)\,d\chi.$$

Следовательно, у нас осталась остаточная симметрия с образующими $\mathcal{P}_i$, H, $\mathcal{J}$, E_i и B; последняя принадлежит центру. Расширенная евклидова алгебра имеет казимиры $\mathcal{C}_0 = BH^{\mathrm{Bloch}} - \varepsilon_{ij}\mathcal{P}_i E_j$ и бесконечную башню $\mathcal{C}_n = (\boldsymbol{E}^2)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Обобщение условия (20) имеет вид

$$\nabla_{\boldsymbol{k}}\mathcal{E} = \frac{\hat{\varepsilon}\boldsymbol{E}}{B}. \tag{28}$$

Это уравнение может иметь более одного решения, как это происходит, например, для выражения энергии $\mathcal{E} = a^2\boldsymbol{P}^2 + b^2\sqrt{1 + c^2\boldsymbol{P}^2}$, рассмотренного в [9, 21, 22] для аномального эффекта Холла. Тогда в общей ситуации магнитное поле нельзя настроить на какое-либо из критических значений B'_{crit} или B''_{crit}. Следовательно, холловский тип движений нельзя сделать предписанным.

Аномальное расширение полуклассической блоховской модели можно также получить, добавив $(ge\theta/2)\mathcal{C}$ к H^{Bloch}. Тогда обобщением уравнения для скорости (27) служило бы уравнение

$$(1 - eB\theta)\dot{\boldsymbol{r}} = \left(1 - \frac{g}{2}e\theta B\right)\nabla_{\boldsymbol{k}}\mathcal{E} - \left(1 - \frac{g}{2}\right)e\theta\hat{\varepsilon}\boldsymbol{E} - \frac{eg}{2}\mathcal{C}_0\nabla_{\boldsymbol{k}}\theta, \tag{29}$$

как и ранее, дополненное уравнением Лоренца (4). Для движений Холла, т. е. по ограниченной орбите (28), импульс постоянен: $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}^0$. Полагая $\theta^0 = \theta(\boldsymbol{k}^0)$ и подставляя в уравнение движения, получаем равенство

$$\left(1 - \frac{g}{2}e\theta^0 B\right)\left(\nabla_{\boldsymbol{k}}\mathcal{E}|_{\boldsymbol{k}^0} - \hat{\varepsilon}\frac{\boldsymbol{E}}{B}\right) = e\frac{g}{2}\mathcal{C}_0(\boldsymbol{k}^0)\nabla_{\boldsymbol{k}}\theta\Big|_{\boldsymbol{k}^0}, \tag{30}$$

которое, в общем случае когерентно с (29), если $\nabla_{\boldsymbol{k}}\theta|_{\boldsymbol{k}_0} = 0$ или $\mathcal{C}|_{\boldsymbol{k}_0} = 0$.

Выводы

«Расширенная галилеевская симметрия» служит основой, объединяющей фазовое пространство и полевые переменные. Обобщения этой модели строятся с помощью добавления казимира к гамильтониану, что позволяет учесть аномальное взаимодействие моментов. Рассмотрены также другие возможные обобщения с тем же набором симметрий. Мы получаем алгебраическое описание движений Холла в терминах условий критичности для операторов симметрий Казимира. На той же основе могут быть рассмотрены и другие возможные обобщения полуклассической теории блоховского электрона.

Работа была частично поддержана грантом Министерства по делам высшего образования и научных и технологических исследований Италии (MURST) SINTESI-2004 и грантом итальянского Национального института ядерной физики (INFN) LE41. Автор благодарен П. Хорвати и П. Штихелю за многие полезные обсуждения.

Литература

[1] Ashcroft N. W., Mermin N. D. Solid State Physics. — Philadelphia: Saunders, 1976.

[2] Bacry H. Wigner elementary particle in an external homogeneous field // Lett. Math. Phys. — 1976. — Vol. 1. — P. 295—299.

[3] Bérard A., Mohrbach H. Monopole and Berry phase in momentum space in noncommutative quantum mechanics // Phys. Rev. D. — 2004. — Vol. 69. — No. 127701.

[4] Bérard A., Mohrbach H. Spin Hall effect and Berry phase of spinning particles // Phys. Lett. A. — 2006. — Vol. 352. — P. 190—195.

[5] Bohm A., Mostafazadeh A., Koizumi H., Niu Q., Zwanziger J. The Geometric Phase in Quantum Systems. — Springer, 2003.

[6] Brihaye Y., Gonera C., Giller S., Kosiński P. Galilean invariance in $2+1$ dimensions. — 1995. — arVix:hep-th/9503046.

[7] Chang M. C., Niu Q. Berry phase, hyperorbits, and the Hofstadter spectrum // Phys. Rev. Lett. — 1995. — Vol. 75. — P. 1348—1351.

[8] Chang M. C., Niu Q. Berry phase, hyperorbits, and the Hofstadter spectrum: Semiclassical dynamics in magnetic Bloch bands // Phys. Rev. B. — 1996. — Vol. 53. — P. 7010—7023.

[9] Culcer D., MacDonald A. H., Niu Q. Anomalous Hall effect in paramagnetic two-dimensional systems // Phys. Rev. B. — 2003. — Vol. 68. — No. 045327.

[10] Duval C. Thèse de 3e cycle. — Marseille, 1972.

[11] Duval C., Horváthy P. A. The exotic Galilei group and the “Peierls substitution” // Phys. Lett. B. — 2000. — Vol. 479. — P. 284—290.

[12] Duval C., Horváthy P. A. Exotic Galilean symmetry in the noncommutative plane and the Hall effect // J. Phys. A. — 2001. — Vol. 34. — P. 10097—10107.

[13] Duval C., Horváthy P. A. Anyons with anomalous gyromagnetic ratio and the Hall effect // Phys. Lett. B. — 2004. — Vol. 594. — P. 402—409; E-print hep-th/0402191.

[14] Grignani G., Plyushchay M., Sodano P. A pseudoclassical model for P,T-invariant planar fermions // Nuclear Phys. B. — 1996. — Vol. 464. — P. 189—212; E-print hep-th/9511072.

[15] Grigore D. R. The projective unitary irreducible representations of the Galilei group in $1+2$ dimensions // J. Math. Phys. — 1996. — Vol. 37, no. 1. — P. 460—473.

[16] Grigore D. R. Transitive symplectic manifolds in $1+2$ dimensions // J. Math. Phys. — 1996. — Vol. 37, no. 1. — P. 240—253.

[17] Horváthy P., Martina L., Stichel P. Comments on spin-orbit interaction of anyons // Modern Phys. Lett. A. — 2005. — Vol. 20. — P. 1177—1185.

[18] Horváthy P. A., Martina L., Stichel P. C. Enlarged Galilean symmetry of anyons and the Hall effect // Phys. Lett. B. — 2005. — Vol. 615. — P. 87.

[19] Horváthy P. A., Plyushchay M. S. Nonrelativistic anyons in external electromagnetic field. — 2005. — arXiv:hep-th/0502040.

[20] Horváthy P. A., Plyushchay M. S. Nonrelativistic anyons, exotic Galilean symmetry and noncommutative plane. — 2002. — arXiv:hep-th/0201228.

[21] Jungwirth T., Niu Q., MacDonald A. H. Anomalous Hall effect in ferromagnetic semiconductors // Phys. Rev. Lett. — 2002. — Vol. 88. — No. 207208.

[22] Karplus R., Luttinger J. M. Hall effect in ferromagnetics // Phys. Rev. — 1954. — Vol. 95. — P. 1154—1160.

[23] Laughlin R. B. Anomalous quantum Hall effect: An incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations // Phys. Rev. Lett. — 1983. — Vol. 50. — P. 1395—1398.

[24] Lévy-Leblond J.-M. Galilei group and Galilean invariance // Group Theory and Applications. — New York: Academic Press, 1972. — P. 222.

[25] Lukierski J., Stichel P. C., Zakrzewski W. J. Galilean-invariant $(2 + 1)$-dimensional models with a Chern–Simons-like term and $D = 2$ noncommutative geometry // Ann. Phys. — 1997. — Vol. 260, no. 2. — P. 224—249.

[26] Negro J., Del Olmo M. A., Tosiek J. Anyons, group theory and planar physics // J. Math. Phys. — 2006. — Vol. 47.

[27] Novoselov K. S., McCann E., Morozov S. V., Fal'ko V. I., Katsnelson M. I., Zeitler U., Jiang D., Schedin F., Geim A. K. Unconventional quantum Hall effect and Berry's phase of 2 in bilayer graphene // Nature Phys. — 2006. — Vol. 2. — P. 177—180.

[28] Skagerstam B. S., Stern A. Lagrangian descriptions of classical charged particles with spin // Phys. Scripta. — 1981. — Vol. 24, no. 3. — P. 493—497.

[29] Sundaram G., Niu Q. Wave-packet dynamics in slowly perturbed crystals: Gradient corrections and Berry-phase effects // Phys. Rev. B. — 1999. — Vol. 59. — P. 14915—14925.