К симметрийной классификации эволюционных систем третьего порядка дивергентного вида*

А. Г. МЕШКОВ
Орловский государственный университет
e-mail: meshkov@orel.ru

УДК 517.957

Ключевые слова: канонические плотности, законы сохранения, полная интегрируемость.

Аннотация

Представлена симметрийная классификация интегрируемых 2-полевых эволюционных систем третьего порядка дивергентного вида. Получен список из тринадцати точно интегрируемых систем. Для одиннадцати систем указаны дифференциальные подстановки, связывающие их с известными системами Дринфельда—Соколова, Ито и Хироты—Сатсумы. Две системы являются, по-видимому, новыми.

Abstract

A. G. Meshkov, On symmetry classification of third order evolutionary systems of divergent type, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 7, pp. 141—161.

A symmetry classification is presented for integrable two-field third-order evolutionary systems of divergent type. The list contains thirteen exactly integrable systems. For eleven of them, differential substitutions that relate the systems with the known systems by Drinfeld–Sokolov, Ito, and Hirota–Satsuma are found. The two remaining systems seem to be new.

1. Введение

Эволюционные системы уравнений, интегрируемые методом обратной задачи рассеяния, обладают многими замечательными свойствами и в то же время применимы к описанию различных природных явлений. Этим объясняется неугасающий интерес исследователей из многих стран к этой тематике. В частности, серьёзные усилия прилагаются к пополнению списка интегрируемых систем (см., например, [5,8—10,19—24]). Перечисление всех работ, в которых содержатся новые интегрируемые системы, — непростая задача, поэтому мы сослались лишь на наиболее значительные работы, в которых применялся симметрийный метод

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 05-01-96403.

исследования. Несмотря на эту бурную деятельность, некоторые достаточно простые системы уравнений остаются неисследованными в этом плане по сей день. Так, например, на данный момент неизвестен полный список интегрируемых эволюционных систем третьего порядка с двумя независимыми переменными и двумя неизвестными функциями вида

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xxx} + F(u, v, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx}),\\ v_t &= a v_{xxx} + G(u, v, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx}), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где a — постоянная. Ниже приводится такой список для случая, когда функции F и G являются полными производными и $a \neq 1$. Но прежде чем переходить к этому частному случаю, мы рассмотрим задачу в общем плане.

Обозначим $u_n = \partial^n u/\partial x^n$, $v_n = \partial^n v/\partial x^n$, $\boldsymbol{u}_n = (u_n, v_n)$, $n \geqslant 0$, $\boldsymbol{u}_0 \equiv \boldsymbol{u}$. Назовём n порядком переменных u_n и v_n. Порядком функции $f(\boldsymbol{u}_i)$ (обозначение $\operatorname{ord} f$) будем называть наибольший из порядков переменных $\boldsymbol{u}_i$, от которых она зависит. Рассмотрим систему более общего, чем (1.1), вида

$$\boldsymbol{u}_t = \mathcal{A}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2), \quad \boldsymbol{u}(t,x) \in \mathbb{R}^2, \tag{1.2}$$

где $\mathcal{A}$ — некоторая матрица. Первое условие интегрируемости для этой системы имеет вид (см. [8])

$$D_t \lambda^{-1/3} = D_x \sigma,$$

где D_x — оператор полной производной по x, D_t — оператор эволюционного дифференцирования, λ — одно из собственных значений матрицы $\mathcal{A}$, σ — некоторая функция, зависящая от переменных $\boldsymbol{u}_i$. В [17] получена классификация систем, удовлетворяющих указанному условию. Такие системы приводятся некоторым обратимым преобразованием к одной из трёх следующих форм:

$$u_t = u_3 + F(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2), \qquad v_t = f(u,v) v_3 + G(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2), \tag{1.3}$$

$$u_t = u_3 + v_3 + F(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2), \quad v_t = v_3 + G(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2), \tag{1.4}$$

$$u_t = v_3 + F(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2), \qquad v_t = G(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2). \tag{1.5}$$

Эти три случая соответствуют трём различным каноническим формам матрицы $\mathcal{A}$: диагональной для (1.3), клетке Жордана с ненулевым λ для (1.4) и клетке Жордана с нулевым λ для (1.5). В той же работе приведены результаты симметрийного исследования системы (1.3) для случая, когда $\operatorname{ord} F < 2$, $\operatorname{ord} G < 2$ и $f(f-1) \neq 0$. В этом случае функция f может быть только постоянной, и все интегрируемые системы такого типа были давно известны. Кажется весьма правдоподобным, что интегрируемых систем вида (1.3) не существует, когда $f \neq \mathrm{const}$ и в случае $\operatorname{ord}(F,G) = 2$. По этой причине мы не рассматриваем систем вида (1.3) с непостоянной функцией $f(u,v)$.

Интегрируемые системы вида (1.3) в случае $f = 0$, $\operatorname{ord} G = 1$ были классифицированы в работе [15]. Приведённый там список состоит из 15 систем, однако впоследствии были найдены дифференциальные подстановки, связывающие между собой системы из этого списка [3]. В итоге оказалось, что независимых систем, состоящих из одного уравнения третьего порядка и одного первого, существует всего три — система Ито [14]

$$u_t = \left(u_{xx} + \frac{3}{2}u^2 + v^2\right)_x, \quad v_t = (uv)_x \tag{1.6}$$

и две системы Дринфельда—Соколова [4, 5]

$$u_t = u_{xxx} + 2u_x v_x + u v_{xx}, \quad v_t = u^2, \tag{1.7}$$

$$u_t = u_{xxx} + u_x v_x, \qquad v_t = u_x. \tag{1.8}$$

Системы (1.4), (1.5) и (1.3) при $f = 1$ наиболее сложны для анализа и почти не исследованы. Дело в том, что в этих случаях матрицы коэффициентов при третьих производных в правых частях систем имеют только одно собственное значение. Хотя эта причина техническая, преодолеть её пока не удалось. По-видимому, работы [2, 7, 18, 19], посвящённые симметрийной классификации интегрируемых N-компонентных систем со сферической симметрией как в $\mathbb{R}^N$, так и на сфере $\mathbb{S}^N$, представляют собой единственные успешные попытки классификации систем вида (1.2) с единичной матрицей $\mathcal{A}$. Чтобы получить системы вида (1.1) при $a = 1$ из систем, представленных в [2, 7, 18, 19], надо просто положить $N = 2$ в случае $\mathbb{R}^N$. В случае систем на сфере нужно отобразить сферу $\mathbb{S}^2$ на $\mathbb{R}^2$ при помощи стереографической проекции. Разумеется, полученные этим путём системы не исчерпывают всего множества интегрируемых 2-полевых систем третьего порядка с единичной матрицей $\mathcal{A}$.

Основным объектом в симметрийном подходе к интегрируемости является канонические сохраняющиеся плотности (см. [8—10, 19—24]). В этих работах канонические плотности извлекаются из операторных уравнений, что представляет определённые сложности. Существует более простой способ вывода канонических плотностей, предложенный в [11] и называемый «китайским» методом. Чтобы пояснить суть этого метода, рассмотрим произвольную эволюционную систему

$$\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{K}(t, x, \boldsymbol{u}), \tag{1.9}$$

где $\boldsymbol{u} \in \mathbb{M}$, $\mathbb{M}$ — множество отображений из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^m$ класса C^∞ и $\boldsymbol{K}$ — векторное поле на $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{M}^{n+1}$ класса C^∞. В локальных координатах имеем $\boldsymbol{K}(t, x, \boldsymbol{u}) = \{K^\gamma(t, x, \boldsymbol{u}_i)\}$, $\gamma = 1, \ldots, m$, $\boldsymbol{u}_i = \{\partial_x^i u^\alpha,\ \alpha = 1, \ldots, m\}$, $i = 0, \ldots, n$. Обозначим через D_x оператор полной производной по x

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i,\alpha} u^\alpha_{i+1} \frac{\partial}{\partial u^\alpha_i}, \tag{1.10}$$

и через D_t — оператор эволюционного дифференцирования

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i,\alpha} D_x^i(K^\alpha) \frac{\partial}{\partial u^\alpha_i}. \tag{1.11}$$

D_t называют также оператором дифференцирования вдоль траекторий системы (1.9). Уравнение

$$(D_t - \boldsymbol{K}_*)\boldsymbol{\psi} = 0, \tag{1.12}$$

где

$$(\boldsymbol{K}_*\boldsymbol{\psi})^\alpha = \sum_{i,\beta} \frac{\partial K^\alpha}{\partial u_i^\beta} D_x^i \boldsymbol{\psi}^\beta,$$

называется линеаризацией уравнения (1.9). Отправной точкой работы [11] было сопряжённое к (1.12) уравнение

$$(D_t + \boldsymbol{K}_*^+)\boldsymbol{\phi} = 0, \tag{1.13}$$

где $\boldsymbol{K}_*^+$ — сопряжённый по Лагранжу к $\boldsymbol{K}_*$ оператор:

$$(\boldsymbol{K}_*^+\boldsymbol{\phi})_\alpha = \sum_{i,\beta} (-D_x)^i \frac{\partial K^\beta}{\partial u_i^\alpha} \boldsymbol{\phi}_\beta.$$

В цитируемой работе на ряде примеров было показано, что если удлинить производные $D_x \to D_x + \rho$, $D_t \to D_t + \theta$ в уравнении (1.13)

$$\big(D_t + \theta + K_*{}^+(D_x + \rho)\big)\Phi = 0, \tag{1.14}$$

то существует решение в виде формальных рядов по некоторому параметру k

$$\rho = \sum_{n=-r}^{\infty} \rho_n k^n, \quad \theta = \sum_{n=-p}^{\infty} \theta_n k^n, \quad \Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^{(n)} k^n, \tag{1.15}$$

причём $\Phi = (1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m)$, ρ_n и θ_n — локальные функции от t, x, $\boldsymbol{u}$. Более того, функции ρ_n и θ_n удовлетворяют соотношениям

$$D_t\rho_n = D_x\theta_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1.16}$$

Функции ρ_n называются каноническими плотностями уравнения (1.9).

В простых случаях каждый член последовательности ρ_n рекуррентно выражается через ρ_k и θ_k, $k < n$, и, в конечном счёте, все ρ_n выражаются через $\boldsymbol{K}$. Поэтому соотношения (1.16) накладывают жёсткие ограничения на вид системы (1.9). Эти соотношения называются необходимыми условиями полной интегрируемости системы (1.9).

В оригинальной формулировке симметрийного подхода к интегрируемости [8] канонические плотности возникают из «формальных симметрий». В рамках излагаемого подхода это соответствует тому, что вместо уравнения (1.14) используется уравнение

$$\big(D_t + \tilde\theta - K_*(D_x + \tilde\rho)\big)\Psi = 0, \tag{1.17}$$

которое получается из (1.12) тем же путём, которым (1.14) получается из (1.13) (см. [16]). Решение этого уравнения отыскивается в виде формальных рядов, аналогичных рядам (1.15), и тоже приводит к бесконечной последовательности законов сохранения.

Легко видеть, что если в уравнении (1.14) заменить нормировку $\Phi_1 = 1$ столбца Φ на другую, например $\Phi_2 = 1$, то канонические плотности подвергнутся калибровочному преобразованию $\rho_n \to \rho_n + D_x f_n$, где f_n — локальные функции. Это справедливо и в отношении уравнения (1.17). Можно подумать, что для m-полевой системы существует $2m$ серий канонических плотностей $\{\rho_n^i,\ i = 1,\dots,m\}$ и $\{\tilde\rho_n^i,\ i = 1,\dots,m\}$, но это не всегда так. Обозначим $K_* = K_0 + K_1 D_x + \ldots + K_n D_x^n$. Если матрица K_n имеет простое собственное значение λ, то, выбрав в (1.15) в качестве $\Phi^{(0)}$ собственный вектор матрицы $(K_n)^{\mathrm{T}}$, соответствующий собственному значению λ, мы получим рекуррентное соотношение вида

$$\rho_{n+1} = F(\rho_n, \rho_{n-1}, \dots, \theta_n, \theta_{n-1}, \dots),$$

где F — дифференциальный полином. В случае кратного собственного значения λ получается соотношение вида

$$P(\rho_{n+1}) = F(\rho_n, \rho_{n-1}, \dots, \theta_n, \theta_{n-1}, \dots),$$

где P и F — дифференциальные полиномы, причём порядок P на единицу меньше кратности λ. В этом случае, как правило, возникают нелокальные канонические плотности. Как использовать нелокальные плотности для симметрийной классификации уравнений, пока неизвестно. Эта ситуация не является дефектом «китайской» техники, в традиционном симметрийном подходе возникают в точности те же проблемы.

Из изложенного ясно, что система (1.3) при $f = 1$ и системы (1.4), (1.5) имеют нелокальные канонические плотности, хотя у некоторых из таких систем они, наверное, могут быть и локальными. Поэтому для получения полной классификации этих систем нужен особый подход. Во всяком случае сложность этой задачи значительно выше, чем классификация систем (1.1) при $a \neq 1$. По этой причине мы ограничиваемся здесь изучением систем вида

$$\begin{aligned} u_t &= D_x\big(u_2 + F(u, v, u_1, v_1)\big),\\ v_t &= D_x\big(av_2 + G(u, v, u_1, v_1)\big), \quad a \neq 1, \end{aligned} \tag{1.18}$$

а системы (1.4), (1.5) и (1.1) при $a = 1$ планируем рассмотреть в будущем.

2. Классификационные результаты

Выполняя в (1.18) подстановку $u \to u_1$, $v \to v_1$, перепишем эту систему в потенциальной форме

$$u_t = u_3 + F(u_1, v_1, u_2, v_2), \quad v_t = av_3 + G(u_1, v_1, u_2, v_2), \tag{2.1}$$

которая более удобна для исследования. Система (2.1) допускает следующие точечные преобразования:

$$\begin{aligned} &\text{(a)}\quad u' = \alpha u,\ v' = \beta v,\ x' = \gamma x,\ t' = \gamma^3 t;\\ &\text{(b)}\quad u' = v,\ v' = u,\ t' = at\ (\text{при } a \neq 0);\\ &\text{(c)}\quad u_1' = u_1 + c_1,\ v_1' = v_1 + c_2,\ u_t' = u_t + c_3,\ v_t' = v_t + c_4;\\ &\text{(d)}\quad t' = t,\ x' = x + ct,\ u_t = u'_{t'} + cu'_{x'},\ v_t = v'_{t'} + cv'_{x'}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Приводимый ниже список интегрируемых систем содержит лишь неэквивалентные относительно указанных преобразований системы. Кроме того, некоторые из систем, удовлетворяющих условиям интегрируемости, приводятся к треугольному виду обратимыми дифференциальными подстановками $(u,v)\to(U,V)$ вида

$$U=u,\quad V=v+c\,u_1+f(u). \tag{2.3}$$

Такие системы ввиду их тривиальности не включались в список.

Теорема 1. *Не приводящиеся к треугольному виду системы вида* (2.1), *обладающие бесконечным набором сохраняющихся плотностей, приводятся подходящими преобразованиями* (2.2) *к одной из систем следующего списка.*

I. $a\neq 0$.

$$\begin{aligned}
u_t &= u_3+3v_2(u_1+v_1)-\frac12(c+3){v_1}^3+3{u_1}^2v_1-\frac32(c+1)u_1{v_1}^2,\quad c^2=5,\\
v_t &= \frac12(3c-7)v_3+\frac12(c-3)(3u_2(u_1+v_1)-{u_1}^3)-\frac32(c-1){u_1}^2v_1-3u_1{v_1}^2,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
u_t &= u_3+3u_1v_2-3u_1v_1^2+eu_1^3,\quad e^2=1,\\
v_t &= -\frac12v_3-3e(u_1u_2+u_1^2v_1)+v_1^3,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
u_t &= u_3+\frac32(v_2+u_1v_1)-\frac12u_1^3,\\
v_t &= -\frac12v_3-\frac32\left(u_2+v_1-\frac12u_1^2\right)^2+\frac34{v_1}^2.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

II. $a=0$.

$$\begin{aligned}
u_t &= u_3+v_2-2u_1v_1-2u_1^3,\\
v_t &= 3(u_2+v_1+u_1^2)^2,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
u_t &= u_3-\frac34u_2^2u_1^{-1}+2u_1v_2-u_1v_1^2-4u_1^{3/2},\\
v_t &= \frac{u_2}{\sqrt{u_1}}+2v_1\sqrt{u_1},
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
u_t &= u_3+u_1v_2-u_1v_1^2,\\
v_t &= u_2u_1+u_1^2v_1,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
u_t &= u_3+hv_2+\frac12u_1(av_1^2-u_1^2)+c_1v_1+c_2u_1,\quad h=\sqrt{v_1^2+b},\\
v_t &= ahu_2+\frac12v_1(av_1^2-u_1^2)-ac_1u_1+c_3v_1,\quad a^2=1,\quad b^2=1,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 + v_1 v_2 + \frac{1}{2} u_1 (a v_1^2 - u_1^2) + c_1 v_1 + c_2 u_1, \\ v_t &= a u_2 v_1 + \frac{1}{2} v_1 (a v_1^2 - u_1^2) - a c_1 u_1 + c_3 v_1, \quad a^2 = 1, \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 + v_2 \sqrt{v_1} + c_1 (3u_1^2 - v_1^2) + \frac{1}{2} v_1 u_1, \\ v_t &= u_2 \sqrt{v_1} - \frac{1}{4} (u_1^2 - 3v_1^2) + 2c_1 u_1 v_1 + c_2 v_1, \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 - 3a v_2 + u_1^2 + a v_1^2, \\ v_t &= u_2 + \frac{2}{3} u_1 v_1, \quad a^2 = 1, \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 - \frac{3}{4} u_2^2 u_1^{-1} + v_1 u_1, \\ v_t &= u_1, \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 + u_1 v_1, \\ v_t &= u_1, \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 + \frac{3}{2} u_1^2 + v_1^2, \\ v_t &= u_1 v_1. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Замечания.

1. Мы проверили, что каждая из систем (2.4)—(2.16) имеет нетривиальные сохраняющиеся плотности с 1-го по 4-й порядок включительно.

2. Система (2.15) совпадает с (1.8), а (2.16) является потенциальной версией системы (1.6).

3. Некоторые из систем списка допускают мнимые подстановки: подстановка $u \to iu$ изменяет знак параметра e в системе (2.5) и изменяет знак правой части второго уравнения в системе (2.9). Системы (2.11) и (2.16) допускают подстановку $v \to iv$, а система (2.10) допускает три подстановки: $u \to iu$, $v \to iv$ при $b = 1$; $v \to iv$, $a \to -a$, $c_1 \to -ic_1$, $b \to -b$; $u \to iu$, $c_1 \to ic_1$ при $b = -1$.

4. Системы (2.10)—(2.12) содержат произвольные постоянные, которые не уничтожаются преобразованиями (2.2), поэтому список можно сделать более детальным. И наоборот, системы (2.10)—(2.13) можно получить из одной системы. Можно проверить, что система

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 + h v_2 + \frac{1}{2} a (u_1 v_1^2 - u_1^3) + \frac{1}{2} b u_1 v_1 + k_1 (3u_1^2 - v_1^2) + k_2 v_1, \\ v_t &= h u_2 + \frac{1}{2} a (v_1^3 - u_1^2 v_1) + \frac{1}{4} b (3v_1^2 - u_1^2) + 2k_1 u_1 v_1 - k_2 u_1 + k_3 v_1, \end{aligned} \tag{2.17}$$

где $h = \sqrt{a v_1^2 + b v_1 + c}$, a, b, c, k_i — постоянные, удовлетворяет семи условиям интегрируемости. Систему (2.17) можно упростить при помощи сдвигов

$u_1 \to u_1 + \alpha$, $v_1 \to v_1 + \beta$ и растяжений всех переменных. Если $a \neq 0$, то получаем (2.10) или (2.11); если $a = 0$, $b \neq 0$, то получаем (2.12); если $a = b = 0$, то система (2.17) приводится к виду (2.13).

5. Все системы (2.4)—(2.16) допускают высшие симметрии. Например, первая из высших симметрий системы (2.4) имеет седьмой порядок:

$$\begin{aligned} \sigma^u &= u_7 - \frac{7}{2}(c-3)(u_1+v_1)v_6 + \ldots, \\ \sigma^v &= \frac{1}{2}(21c-47)v_7 + \frac{7}{2}(3c-7)(u_1+v_1)u_6 + \ldots. \end{aligned}$$

Простейшая из высших симметрий системы (2.5) имеет пятый порядок:

$$\begin{aligned} \sigma^u &= u_5 + \frac{5}{2}u_1v_4 + 5u_3(v_2 - v_1^2) + 5v_3(u_2 - u_1v_1) + \ldots, \\ \sigma^v &= -\frac{1}{4}v_5 - \frac{5}{2}u_1u_4 - \frac{5}{2}u_3(u_2 + 2u_1v_1) - \frac{5}{2}v_3(u_1^2 - v_1^2) + \ldots. \end{aligned}$$

Последовательность высших симметрий системы (2.6) также начинается с симметрии пятого порядка:

$$\begin{aligned} \sigma^u &= u_5 - 5v_4(6v_2 - 2u_1 - 3v_1^2) + \ldots, \\ \sigma^v &= -4v_5 + \frac{5}{3}(u_4 + u_3v_1) + 5v_3(2v_2 + v_1^2) + \ldots. \end{aligned}$$

Во всех формулах многоточиями обозначены члены более низкого порядка, чем приведённые.

6. Система (2.4) приводится к виду, не содержащему $\sqrt{5}$,

$$\begin{aligned} p_\tau &= 4p_3 + 3q_3 - 15q_2p_1 - 2p_1^3 - 6q_1^3 + 18q_1p_1^2 - 9q_1^2p_1, \\ q_\tau &= 3p_3 + q_3 + 15p_2p_1 + 6p_1^3 - 2q_1^3 - 9q_1p_1^2 - 18q_1^2p_1, \end{aligned} \tag{2.4$'$}$$

линейным преобразованием

$$u = p + \frac{1}{2}(c-1)q, \quad v = \frac{1}{2}(3-c)p + \frac{1}{2}(1-c)q, \quad t = \frac{1}{2}(3c+5)\tau.$$

3. Условия интегрируемости

Для получения канонических плотностей системы (1.1) запишем систему (1.17):

$$\begin{aligned} &[(D_x+\rho)^3 + F_u + F_{u_1}(D_x+\rho) + F_{u_2}(D_x+\rho)^2 - D_t - \theta]\Psi_1 + \\ &\quad + [F_v + F_{v_1}(D_x+\rho) + F_{v_2}(D_x+\rho)^2]\Psi_2 = 0, \\ &[G_u + G_{u_1}(D_x+\rho) + G_{u_2}(D_x+\rho)^2]\Psi_1 + a(D_x+\rho)^3\Psi_2 + \\ &\quad + [G_v + G_{v_1}(D_x+\rho) + G_{v_2}(D_x+\rho)^2 - D_t - \theta]\Psi_2 = 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Мы пишем здесь ρ и θ без тильд ради упрощения формул, так как далее мы рассматриваем главным образом плотности ρ_n, возникающие из уравнений (3.1).

Если положить в (3.1)

$$\Psi_1 = 1, \quad \Psi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n k^n, \quad \rho = k^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n k^n, \quad \theta = k^{-3} + \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n k^n,$$

то возникают следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned}
\rho_{n+2} &= \frac{1}{3}\theta_n - \sum_{i=0}^{n+1} \rho_i \rho_{n-i+1} - \frac{1}{3} \sum_{i+j=0}^{n} \rho_i \rho_j \rho_{n-i-j} - \frac{1}{3}(F_v + F_{v_1} D_x + F_{v_2} D_x^2)\varphi_n - \\
&- \frac{1}{3} F_{u_1}(\delta_{n,-1} + \rho_n) - \frac{1}{3} F_{u_2}\left(D_x \rho_n + 2\rho_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} \rho_i \rho_{n-i} \right) - \frac{1}{3} F_u \delta_{n,0} - \\
&- \frac{1}{3} F_{v_2}\left(\varphi_{n+2} + 2\sum_{i=0}^{n} \rho_i \varphi_{n-i+1} + \sum_{i+j=0}^{n} \rho_i \rho_j \varphi_{n-i-j} \right) - \\
&- \frac{1}{3} F_{v_2}\left(2D_x \varphi_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} \rho_i D_x \varphi_{n-i} + D_x \sum_{i=0}^{n} \rho_i \varphi_{n-i} \right) - \\
&- D_x\left[\rho_{n+1} + \frac{1}{3} D_x \rho_n + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \rho_i \rho_{n-i} \right] - \frac{1}{3} F_{v_1}\left(\varphi_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} \rho_i \varphi_{n-i} \right), \quad n \geqslant -1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1-a)\varphi_{n+3} &= G_u \delta_{n,0} + G_{u_2}\left(D_x \rho_n + 2\rho_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} \rho_i \rho_{n-i} \right) + G_{u_1}(\delta_{n,-1} + \rho_n) - \\
&- \sum_{i=0}^{n} \theta_i \varphi_{n-i} + G_v \varphi_n + G_{v_1}\left(D_x \varphi_n + \varphi_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} \rho_i \varphi_{n-i} \right) - D_t \varphi_n + \\
&+ G_{v_2}\left(2D_x \varphi_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} \rho_i D_x \varphi_{n-i} + D_x \sum_{i=0}^{n} \rho_i \varphi_{n-i} \right) + \\
&+ G_{v_2}\left(\varphi_{n+2} + D_x^2 \varphi_n + 2\sum_{i=0}^{n+1} \rho_i \varphi_{n-i+1} + \sum_{i+j=0}^{n} \rho_i \rho_j \varphi_{n-i-j} \right) + \\
&+ aD_x^3 \varphi_n + 3aD_x^2 \varphi_{n+1} + 6a \sum_{i=0}^{n+1} \rho_i D_x \varphi_{n-i+1} + 3aD_x \varphi_{n+2} + \\
&+ 3a \sum_{i+j=0}^{n} \rho_i \rho_j D_x \varphi_{n-i-j} + 3a \sum_{i=0}^{n+2} \rho_i \varphi_{n-i+2} + 3a \sum_{i=0}^{n} \varphi_{n-i+1} D_x \rho_i + \\
&+ \frac{3}{2} a \sum_{i+j=0}^{n} \varphi_{n-i-j} D_x(\rho_i \rho_j) + 3aD_x \sum_{i=0}^{n} \rho_i \varphi_{n-i} + 3a \sum_{i+j=0}^{n+1} \rho_i \rho_j \varphi_{n-i-j+1} + \\
&+ a \sum_{i=0}^{n} \varphi_{n-i} D_x^2 \rho_i + a \sum_{i+j+k=0}^{n} \rho_i \rho_j \rho_k \varphi_{n-i-j-k}, \quad n \geqslant -1.
\end{aligned}$$

При этом начальные элементы последовательностей ρ_n и φ_n имеют следующий вид:

$$\rho_0 = -\frac{1}{3}F_{u_2}, \quad \varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = \frac{1}{1-a}G_{u_2}.$$

Здесь и далее $\delta_{i,k}$ — символ Кронекера, $F_{u_1} = \partial F/\partial u_1$ и т. д. Очевидно, что приведённые соотношения справедливы и при $a = 0$. Из этих соотношений также должно быть понятно, почему значение $a = 1$ особое.

Аналогично, если положить в (3.1) $\Psi_2 = 1$, то при $a \neq 0$ получаются ещё две рекуррентные формулы, генерирующие вторую последовательность канонических плотностей. При $a = 0$ дополнительных рекуррентных формул не существует. Приведённые рекуррентные соотношения позволяют выписать любое число канонических плотностей и проверить условия интегрируемости (1.16) для системы (1.1) или (2.1). Для упрощения этой проверки можно привлечь дополнительные предположения.

В оригинальной формулировке симметрийного подхода к интегрируемости [8] вводится дополнительное предположение о существовании «формального закона сохранения». В рамках «китайского» подхода те же результаты вытекают из предположения о существовании формального оператора Нётер. Оператор Нётер $\mathcal{N}$ удовлетворяет по определению следующему уравнению [12]:

$$(D_t - K_*)\mathcal{N} = \mathcal{N}(D_t + K_*{}^+). \tag{3.2}$$

Все известные интегрируемые системы являются гамильтоновыми, а гамильтонов оператор, не зависящий явно от t, является оператором Нётер [12]. Поэтому предположение о существовании формального оператора Нётер у всякой интегрируемой методом обратной задачи рассеяния системы представляется оправданным. Формальный оператор Нётер определяется как формальный ряд по степеням D_x^{-1}, удовлетворяющий уравнению (3.2). Пусть Φ — формальное решение уравнения (1.14) в виде рядов (1.15). Тогда с учётом тождества

$$\big(D_t + K_*{}^+(D_x)\big)\exp(D_x^{-1}\rho)\Phi = \exp(D_x^{-1}\rho)\big(D_t + \theta + K_*{}^+(D_x+\rho)\big)\Phi$$

из уравнения (3.2) следует, что

$$\big(D_t - K_*(D_x)\big)\mathcal{N}\exp(D_x^{-1}\rho)\Phi = 0.$$

Умножая это уравнение слева на $\exp(-D_x^{-1}\rho)$, можем переписать его в виде

$$\big(D_t + \theta - K_*(D_x+\rho)\big)\tilde{\Psi} = 0, \tag{3.3}$$

где

$$\tilde{\Psi} = \exp(-D_x^{-1}\rho)\mathcal{N}\exp(D_x^{-1}\rho)\Phi.$$

Подчеркнём, что здесь ρ и θ — те же самые функции, что и в (1.14).

Можно показать, что если столбец Φ представлен рядом Тейлора, то столбец $\tilde{\Psi}$ представляется в виде ряда Лорана по k с полюсом конечного порядка в нуле. При этом коэффициенты ряда являются локальными функциями от $\boldsymbol{u}$.

Можно показать, что начальные члены рядов $\tilde\Psi(k)$ и $\Phi(k)$ связаны, с точностью до множителя вида k^γ, простым соотношением

$$\tilde\Psi^{(0)} = N_p\Phi^{(0)}, \tag{3.4}$$

где N_p — матрица при высшей степени D_x в операторе $\mathcal{N}$. Так как уравнение (3.3) линейное, то, умножив $\tilde\Psi$ на k^γ, можно считать, что $\tilde\Psi$ — ряд Тейлора.

Поскольку формальный оператор Нётер заранее не известен, то для вывода канонических плотностей следует зафиксировать каким-нибудь способом нормировку столбца $\tilde\Psi$ в уравнении (3.3). Если нормировать столбец $\tilde\Psi$ условием $\tilde\Psi = \exp(f)\Psi$ (где $\Psi_1 = 1$, например), то уравнение (3.3) переходит в уравнение (1.17) с функциями $\tilde\rho = \rho + D_x f$, $\tilde\theta = \theta + D_t f$. Если мы хотим воспользоваться эквивалентностью канонических плотностей, получаемых из (1.14) и (1.17), то следует установить соответствие между нормировками столбцов Φ и $\tilde\Psi$, которое определяется соотношением (3.4).

Утверждение 1. *Пусть* $K_* = \sum\limits_{i=0}^{n} K_i D_x^i$. *Если столбцы* $\Phi^{(0)}$ *и* $\tilde\Psi^{(0)}$ *связаны соотношением* (3.4) *и* $K_n^{\mathrm{T}}\Phi^{(0)} = \lambda\Phi^{(0)}$, *то* $K_n\tilde\Psi^{(0)} = (-1)^{n+1}\lambda\tilde\Psi^{(0)}$.

Доказательство. Положим $\mathcal{N} = N_p D_x^p + N_{p-1}D_x^{p-1} + \ldots$, тогда из уравнения (3.2) нетрудно получить соотношение

$$K_n N_p + (-1)^n N_p K_n^{\mathrm{T}} = 0, \tag{3.5}$$

где T — знак транспонирования. Из равенств (3.4) и (3.5) вытекает справедливость нашего утверждения. □

Заметим, что для эволюционных систем нечётных порядков векторы $\Phi^{(0)}$ и $\tilde\Psi^{(0)}$ принадлежат одному и тому же собственному значению. Для систем чётных порядков векторы $\Phi^{(0)}$ и $\tilde\Psi^{(0)}$ принадлежат собственным значениям λ и $-\lambda$. Уравнение (3.5) не всегда имеет решение. Например, если n чётное и $K_n = 1$, то $N_p = 0$. Это связано с отсутствием высших законов сохранения у таких систем, и этот факт хорошо известен в теории интегрируемых систем.

При выводе канонических плотностей из уравнений (1.14) и (1.17) начальные члены рядов Тейлора $\Phi^{(0)}$ и $\Psi^{(0)}$ являются собственными векторами матриц K_n^{T} и K_n соответственно. Поэтому, зафиксировав $\Phi^{(0)}$, мы должны подобрать $\Psi^{(0)}$ в соответствии с утверждением 1. Потребуем, чтобы процедура нормирования $\Psi \to \Psi/\Psi_i$, $\Phi \to \Phi/\Phi_j$ приводила к рядам Тейлора по параметру k. Это возможно, если $\Psi_i\Phi_j \neq 0$ при $k = 0$, что равносильно $\Psi_i^{(0)}\Phi_j^{(0)} \neq 0$. Это ограничение приводит к правилу: определив собственные векторы $\Phi^{(0)}$ и $\Psi^{(0)}$ матриц K_n^{T} и K_n, принадлежащие собственным значениям λ и $(-1)^{n+1}\lambda$, надо указать их ненулевые компоненты; если $\Psi_i^{(0)}\Phi_j^{(0)} \neq 0$, то можно принять нормировку $\Psi_i = \Phi_j = 1$. При такой нормировке канонические плотности, получаемые из (1.14) и (1.17), будут калибровочно эквивалентны.

Утверждение 2. *Если для эволюционной системы* (1.9) *нечётного порядка* n *матрица* K_n *диагональна и все элементы диагонали различны, то при совпадающих нормировках* $\Psi_i = \Phi_i = 1$ *из уравнений* (1.14) *и* (1.17) *получаются калибровочно эквивалентные канонические плотности.*

Этот результат непосредственно применим к системе (1.1) при $a \neq 1$. В случае $a \neq 0$ возможны две нормировки: 1) $\Phi = (1, \varphi)$, $\Psi = (1, \tilde{\varphi})$ и 2) $\Phi = (\varphi, 1)$, $\Psi = (\tilde{\varphi}, 1)$. Разложения для функций ρ_i и $\tilde{\rho}_i$, соответствующих этим двум нормировкам векторов, зададим в виде

$$\rho_i = k^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{[i,n]} k^n, \quad \tilde{\rho}_i = k^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\rho}_{[i,n]} k^n, \quad i = 1, 2, \tag{3.6}$$

тогда имеет место эквивалентность

$$\rho_{[i,n]} - \tilde{\rho}_{[i,n]} = D_x \chi_{[i,n]}, \quad i = 1, 2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.7}$$

где $\chi_{[i,n]}$ — некоторые локальные функции. Далее под условиями полной интегрируемости эволюционной системы (1.1) мы понимаем условия

$$D_t \rho_{[i,n]} = D_x \theta_{[i,n]}, \quad i = 1, 2, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{3.8}$$

вместе с условиями (3.7). Учитывая, что вариационная производная от всякой дивергенции равна нулю, можно записать условия интегрируемости в иной форме:

$$\frac{\delta}{\delta u^\alpha} D_t \rho_{[i,n]} = 0, \quad \frac{\delta}{\delta u^\alpha} (\rho_{[i,n]} - \tilde{\rho}_{[i,n]}) = 0.$$

В случае $a = 0$ система (1.1) имеет только одну серию канонических плотностей ρ_n и серию эквивалентных плотностей $\tilde{\rho}_n$. Эти серии получаются при первой нормировке Φ и Ψ.

Канонические плотности для эволюционных систем любого порядка и с любым числом уравнений, но при некоторых ограничениях на вид главной матрицы K_n, о которых говорилось во введении, можно получить в Maple при помощи процедур **cd** и **acd**, входящих в состав пакета JET. Этот пакет вместе с файлами справки доступен по адресу `http://www.orel.ru/meshkov`, подробное описание программ содержится в [6].

Приведём явный вид некоторых канонических плотностей для системы (1.1), полученных из (1.17):

$$\begin{aligned}
\rho_{[1,0]} &= -\frac{1}{3} F_{u_2}, \\
\rho_{[2,0]} &= -\frac{1}{3a} G_{v_2}, \\
\rho_{[1,1]} &= \frac{1}{9} F_{u_2}^2 - \frac{1}{3} F_{u_1} + \frac{1}{3b} F_{v_2} G_{u_2} + \frac{1}{3} D_x F_{u_2}, \\
\rho_{[2,1]} &= \frac{1}{9a^2} G_{v_2}^2 - \frac{1}{3a} G_{v_1} - \frac{1}{3ab} F_{v_2} G_{u_2} + \frac{1}{3a} D_x G_{v_2},
\end{aligned} \tag{3.9}$$

где $b = a - 1$. Вид канонических плотностей очень быстро усложняется с ростом их номеров, поэтому ограничимся теми, которые приведены. Сопряжённое уравнение (1.14) даёт несколько иные канонические плотности:

$$\tilde{\rho}_{[1,0]} = -\rho_{[1,0]}, \quad \tilde{\rho}_{[1,1]} = \rho_{[1,1]}, \quad \tilde{\rho}_{[2,0]} = -\rho_{[2,0]}, \quad \tilde{\rho}_{[2,1]} = \rho_{[2,1]}.$$

Отсюда видно, что условия (3.7) выполнены для $n = 1$ автоматически, а для $n = 0$ из (3.7) и (3.9) следует $F_{u_2} \in \operatorname{Im} D_x$, $G_{v_2} \in \operatorname{Im} D_x$. Полагая $F_{u_2} = -\frac{3}{2} D_x \ln f$, $G_{v_2} = -\frac{3}{2} a D_x \ln g$, где $\operatorname{ord}(f, g) \leqslant 1$, можем записать систему (1.1) при $a \neq 0$ в виде

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 - \frac{3}{2f} u_2 D_x f + \frac{3}{4f} f_{u_1} u_2^2 + F_1(u, v, u_1, v_1, v_2), \\ v_t &= a v_3 - \frac{3a}{2g} v_2 D_x g + \frac{3a}{4g} g_{v_1} v_2^2 + G_1(u, v, u_1, v_1, u_2). \end{aligned} \tag{3.10}$$

При $a = 0$ имеется только одна серия канонических плотностей $\rho_{[1,n]}$ и её сопряжённая $\tilde{\rho}_{[1,n]}$. Поэтому система (1.1) при $a = 0$, удовлетворяющая условию (3.7) при $n = 0$, имеет вид

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 - \frac{3}{2f} u_2 D_x f + \frac{3}{4f} f_{u_1} u_2^2 + F_1(u, v, u_1, v_1, v_2), \\ v_t &= G(u, v, u_1, v_1, u_2, v_2). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Из-за громоздкости канонических плотностей вычисление их эволюционных производных и тем более вариационных производных требует больших компьютерных ресурсов и времени. Кроме того, получаемые «в лоб» уравнения совершенно необозримы, поэтому полезно исследовать структуру произвольной сохраняющейся плотности. Предварительно введём следующее отношение эквивалентности

$$f \sim g \iff f - g \in \operatorname{Im} D_x,$$

где Im означает область значений отображения. Нетрудно проверить, что это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно. Используя введённое отношение, всякий закон сохранения $D_t \rho = D_x \theta$ можно записать в виде $D_t \rho \sim 0$. Очевидную формулу $f D_x g \sim -g D_x f$ мы называем преобразованием эквивалентности.

Лемма 1. *Сохраняющиеся плотности порядка $n \geqslant 2$ системы* (3.10), *где $a(a-1) \neq 0$, имеют следующую структуру*:

$$\rho = c_1 f^{-1} u_n^2 + c_2 g^{-1} v_n^2 + p_1 u_n + p_2 v_n + p_3, \tag{3.12}$$

причём

$$\begin{aligned} &(a-1)(p_{1,v_{n-1}} - p_{2,u_{n-1}}) + 2\delta_{n2}(a-1)(c_2 g^{-2} g_{u_1} v_2 - c_1 f^{-2} f_{v_1} u_2) + \\ &\quad + c_1 f^{-2}(2f F_{1,v_2} - 3 f_{v_1} u_2) + c_2 g^{-2}(2g G_{1,u_2} - 3a g_{u_1} v_2) = 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Здесь c_i — постоянные, $\operatorname{ord} p_i \leqslant n - 1$.

Сохраняющиеся плотности порядка $n \geqslant 2$ *системы* (3.11) *имеют следующий вид*:

$$\rho = c_1 f^{-1} u_n^2 + h(v_n, u_{n-1}, v_{n-1}, \ldots), \tag{3.14}$$

причём

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 h}{\partial v_n^2}\frac{\partial G}{\partial v_2} = 0,\\ &\frac{\partial^2 h}{\partial v_n^2}\,\frac{\partial G}{\partial u_2} + \frac{\partial^2 h}{\partial v_n \partial u_{n-1}} + 2c_1 f^{-1}\frac{\partial F}{\partial v_2} + 2\delta_{n2} c_1 f^{-2}\frac{\partial f}{\partial v_1} u_2 = 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Доказательство. Рассмотрим эволюционную систему общего вида (1.1). Применяя к $D_t\rho$, где $\operatorname{ord}\rho = n \geqslant 2$, преобразование эквивалентности, получаем

$$\begin{aligned} D_t\rho = {}&\frac{\partial\rho}{\partial u_n}(u_{n+3} + D_x^n F) + \frac{\partial\rho}{\partial v_n}(av_{n+3} + D_x^n G) + \\ &+ \frac{\partial\rho}{\partial u_{n-1}}(u_{n+2} + D_x^{n-1}F) + \frac{\partial\rho}{\partial v_{n-1}}(av_{n+2} + D_x^{n-1}G) + L\big(\underset{n+1}{u}\big) \sim \\ &\sim -D_x\left(\frac{\partial\rho}{\partial u_n}\right)(u_{n+2} + D_x^{n-1}F) - av_{n+2}D_x\left(\frac{\partial\rho}{\partial v_n}\right) - \\ &- D_x\left(\frac{\partial\rho}{\partial v_n}\right)D_x^{n-1}(G) - D_x\left(\frac{\partial\rho}{\partial u_{n-1}}\right)(u_{n+1} + D_x^{n-2}F) - \\ &- D_x\left(\frac{\partial\rho}{\partial v_{n-1}}\right)(av_{n+1} + D_x^{n-2}G) + L\big(\underset{n+1}{u}\big), \end{aligned}$$

где посредством $L\big(\underset{n+1}{u}\big)$ обозначены члены n-го порядка, линейные по u_{n+1} и v_{n+1}. На первом этапе преобразований нас будут интересовать только кубичные по u_{n+1}, v_{n+1} члены, а сумму квадратичных членов и членов, порядок которых ниже $n+1$, обозначим $Q(u_{n+1}, v_{n+1})$. Вновь применяя преобразование эквивалентности, приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned} D_t\rho \sim {}&-D_x\left(\frac{\partial\rho}{\partial u_n}\right)u_{n+2} - D_x\left(\frac{\partial\rho}{\partial v_n}\right)av_{n+2} + Q(u_{n+1}, v_{n+1}) \sim \\ &\sim -\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial u_n^2}u_{n+1} + \frac{\partial^2\rho}{\partial u_n\partial v_n}v_{n+1}\right)u_{n+2} - \\ &- \left(\frac{\partial^2\rho}{\partial u_n\partial v_n}u_{n+1} + \frac{\partial^2\rho}{\partial v_n^2}v_{n+1}\right)av_{n+2} + Q(u_{n+1}, v_{n+1}) \sim \\ &\sim \frac{1}{2}u_{n+1}^2 D_x\frac{\partial^2\rho}{\partial u_n^2} + \frac{a}{2}v_{n+1}^2 D_x\frac{\partial^2\rho}{\partial v_n^2} + au_{n+1}v_{n+1}D_x\frac{\partial^2\rho}{\partial u_n\partial v_n} + \\ &+ (a-1)u_{n+2}v_{n+1}\frac{\partial^2\rho}{\partial u_n\partial v_n} + Q(u_{n+1}, v_{n+1}). \end{aligned}$$

В предпоследнем слагаемом нельзя понизить порядок $u_{n+2}v_{n+1}$, а так как $a-1\neq 0$ по условию, то смешанная производная от ρ по u_n, v_n равна нулю. С учётом этого получаем

$$D_t\rho \sim \frac{1}{2}u_{n+1}^3\frac{\partial^3\rho}{\partial u_n^3}+\frac{a}{2}v_{n+1}^3\frac{\partial^3\rho}{\partial v_n^3}+Q(u_{n+1},v_{n+1}).$$

Порядок нелинейных по u_{n+1}, v_{n+1} членов также не понижается преобразованием эквивалентности. Следовательно, эквивалентность $D_t\rho\sim 0$ возможна только при выполнении уравнений

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u_n\partial v_n}=0,\quad \frac{\partial^3\rho}{\partial u_n^3}=0,\quad a\frac{\partial^3\rho}{\partial v_n^3}=0.$$

Интегрирование этих уравнений даёт нам возможный вид сохраняющихся плотностей с точностью до тривиальных слагаемых:

$$\begin{aligned}&\rho=\varphi u_n^2+\psi v_n^2+p_1u_n+p_2v_v+p_3, && a\neq 0, && \operatorname{ord}(\varphi,\psi,p_i)\leqslant n-1;\\ &\rho=\varphi u_n^2+h(v_n,u_{n-1},v_{n-1},\ldots), && a=0, && \operatorname{ord}\varphi\leqslant n-1.\end{aligned}$$

Здесь во второй формуле отсутствует возможное слагаемое вида fu_n, $\operatorname{ord} f<n$, потому что

$$fu_n=D_x\int f\,du_{n-1}-v_n\int\frac{\partial f}{\partial v_{n-1}}\,du_{n-1}+\tilde f(u_{n-1},v_{n-1},\ldots).$$

По этой же причине в первой формуле можно положить одну из функций p_1, p_2 равной нулю.

Далее, используя полученный результат, повторяем вычисление и приходим к выражениям (3.12) и (3.14). □

Лемма 1 даёт возможность получить некоторые простые следствия условий интегрируемости непосредственно из вида канонических плотностей. Рассмотрим дальнейшие простые следствия из условий интегрируемости для системы (3.10).

Лемма 2. *Чтобы не приводящаяся к треугольному виду система* (3.10) *удовлетворяла шести условиям интегрируемости* $D_t\rho_{[i,n]}\sim 0$ *при* $i=1,2$, $n=1,3,5$ *и условиям* (3.7) *при* $n=2$, *необходимо, чтобы она имела вид*

$$\begin{aligned}u_t&=u_3-\frac{3}{2f}u_2D_xf+\frac{3}{4f}f_{u_1}u_2^2+f_1v_2^2+f_2v_2+f_3,\\ v_t&=av_3-\frac{3a}{2g}v_2D_xg+\frac{3a}{4g}g_{v_1}v_2^2+g_1u_2^2+g_2u_2+g_3,\end{aligned}\tag{3.16}$$

где $\operatorname{ord}(f,g,f_i,g_j)\leqslant 1$.

Схема доказательства. Условие $D_t\rho_{[1,1]}\sim 0$ приводит, в частности, к соотношениям

$$\frac{\partial^2G_1}{\partial u_2^2}\,\frac{\partial^3F_1}{\partial v_2^3}=0,\quad \frac{\partial^3G_1}{\partial u_2^3}\,\frac{\partial^2F_1}{\partial v_2^2}=0.$$

С точностью до растяжения переменной t система (3.10) симметрична относительно перестановки $u \leftrightarrow v$, поэтому, не ограничивая общности, полагаем

$$G_1 = g_1 u_2^2 + g_2 u_2 + g_3, \tag{3.17}$$

где $\mathrm{ord}(g_i) \leqslant 1$. Если теперь предположить, что $F_{1,v_2v_2v_2} \neq 0$, то из предыдущих уравнений следует $g_1 = 0$. Далее несложные, но длинные вычисления приводят к тому, что условия (3.8) при $n = 1, 3, 5$ и условия (3.7) при $n = 2$ могут выполняться только в том случае, если уравнение для v не содержит u, т. е. только в случае треугольной системы (3.10). □

В соответствии с леммой 2 для доказательства основной теоремы следует проверить условия интегрируемости для системы

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 - \frac{3}{4f} f_{u_1} u_2^2 - \frac{3}{2f} f_{v_1} u_2 v_2 + f_1 v_2^2 + f_2 v_2 + f_3, \\ v_t &= a v_3 - \frac{3a}{4g} g_{v_1} v_2^2 - \frac{3a}{2g} g_{u_1} u_2 v_2 + g_1 u_2^2 + g_2 u_2 + g_3, \end{aligned} \tag{3.18}$$

где $a(a-1) \neq 0$, f, g, f_i, g_i — функции, зависящие только от u_1 и v_1, и для системы с $a = 0$

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 - \frac{3}{4} f_{u_1} u_2^2 - \frac{3}{2} f_{v_1} u_2 v_2 + f_1, \\ v_t &= G(u_1, v_1, u_2, v_2), \end{aligned} \tag{3.19}$$

где $f = f(u_1, v_1)$, $f_1 = f_1(u_1, v_1, v_2)$.

Задачу упрощает то, что случай $G = G(u_1, v_1)$ уже исследован ранее [15]. Тем не менее проведение расчётов без компьютера невозможно, и расчёты требует большой аккуратности. Для отдельных систем потребовалось проверить более десяти условий интегрируемости. Общий объём вычислений был столь велик, что даже схему вычислений изложить в статье невозможно.

4. Дифференциальные подстановки

Все три дивергентные системы из подсписка $a \neq 0$ получаются из известных интегрируемых систем при помощи дифференциальных подстановок. Одна из систем Дринфельда—Соколова [5]

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 + u_1(u+v) - \frac{1}{2}(c-3)uv_1 + \frac{1}{2}(5c-11)vv_1, \quad c^2 = 5, \\ v_t &= \frac{1}{2}(3c-7)v_3 + (c+2)uu_1 - vu_1 + \frac{1}{2}(c-3)v_1(u+v) \end{aligned} \tag{4.1}$$

допускает подстановку

$$\begin{aligned} u &= \frac{3}{2}(c-1)U_2 + \frac{3}{4}(c-3)U_1^2 + \frac{3}{4}(c+1)V_1(2U_1 + V_1), \\ v &= -\frac{3}{4}(c+1)(2V_2 + U_1^2 + 2U_1V_1) - \frac{3}{4}(3c+7)V_1^2, \end{aligned} \tag{4.2}$$

которая приводит к системе (2.4) для U и V. Система Хироты—Сатсумы—Дринфельда—Соколова [4, 13]

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 + u_1 v, \\ v_t &= -\frac{1}{2} v_3 + u u_1 - v v_1 \end{aligned} \tag{4.3}$$

допускает две подстановки, которые приводят к системам вида (2.1):

$$u = 3\sqrt{2e}(U_2 + 2U_1V_1), \qquad v = -3(V_2 + eU_1^2 + V_1^2), \tag{4.4}$$

$$u = \frac{3}{4}\sqrt{2}(2U_2 - U_1^2 + 2V_1), \quad v = -\frac{3}{2}V_1. \tag{4.5}$$

Подстановка (4.4), где $e = \pm 1$, приводит к системе (2.5) для U и V, а подстановка (4.5) — к системе (2.6).

Большинство систем из подсписка $a = 0$ также удалось связать с известными системами при помощи дифференциальных подстановок. Так, система (1.7) допускает две подстановки, которые приводят к системам вида (2.1) при $a = 0$:

$$u = U_1^{1/2}, \qquad v = V, \tag{4.6}$$

$$u = \sqrt{6}(U_2 + U_1^2 + V_1), \quad v = 2V. \tag{4.7}$$

Подстановка (4.6) приводит к системе (2.14), а подстановка (4.7) — к системе (2.7) для U и V. Система (1.6) также допускает две дифференциальные подстановки, которые приводят к системам вида (2.1) при $a = 0$:

$$\begin{aligned} u &= \frac{2}{3}U_1 - 3a, \\ v &= \sqrt{\frac{2}{3}aV_1^2 - 2aV_2 + 2aU_1 - \frac{9}{2}}, \quad a^2 = 1; \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} u &= aU_2 + \frac{1}{2}(aV_1^2 - U_1^2) + c_2, \quad a^2 = 1, \\ v &= \sqrt{c_1(aV_2 - U_1V_1) - ac_2V_1^2 - \frac{1}{2}ac_1^2}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Подстановка (4.8) приводит к системе

$$\begin{aligned} U_t &= U_3 - 3aV_2 + U_1^2 + aV_1^2 - 6aU_1, \\ V_t &= U_2 + \frac{2}{3}U_1V_1 - 6aV_1, \end{aligned} \tag{2.13$'$}$$

которая отличается от (2.13) преобразованием Галилея. Подстановка (4.9) приводит к системе

$$\begin{aligned} U_t &= U_3 + V_1V_2 + \frac{1}{2}U_1(aV_1^2 - U_1^2) + c_1V_1 + 3c_2U_1, \\ V_t &= aU_2V_1 + \frac{1}{2}V_1(aV_1^2 - U_1^2) - ac_1U_1 + c_2V_1, \end{aligned} \tag{2.11$'$}$$

которая сводится к системе (2.11) преобразованием Галилея. Если положить в (4.9) $c_1 = 0$, $c_2 = -ak^2$, то эта подстановка упрощается:

$$u = aU_2 + \frac{1}{2}(aV_1^2 - U_1^2) - ak^2, \quad v = kV_1.$$

Соответственно упрощается и вид системы (2.11′).

Система (2.8) допускает две подстановки, которые приводят к системам вида (2.1) при $a = 0$:

$$u_1 = (U_2 + U_1^2 + V_1)^2, \quad v = -2U; \tag{4.10}$$

$$u_1 = -\frac{1}{4}(U_2 + U_1V_1)^2, \quad v = iU_1 - V_1. \tag{4.11}$$

Подстановка (4.10) приводит к системе (2.7), а подстановка (4.11) — к системе (2.9). Таким образом, системы (2.8) и (2.9) связаны с системой Ито (1.6).

Для оставшихся двух систем (2.10) и (2.12) не удалось найти подстановок, связывающих их с известными системами. Вероятно, эти системы являются новыми интегрируемыми системами.

Дифференциальные подстановки, указанные в этом разделе, позволяют записать представления нулевой кривизны для большей части дивергентных систем, исходя из известных представлений для систем Дринфельда—Соколова, Ито и Хироты—Сатсумы.

5. Заключение

Дальнейшее исследование представленных в работе систем возможно в направлении доказательства интегрируемости двух систем (2.10) и (2.12). Для этого существуют различные способы. Например, можно пытаться найти представление Лакса. Однако эффективного алгоритма для этого не существует, поэтому в случае отрицательного результата вопрос об интегрируемости уравнения остаётся открытым. Второй способ состоит в проверке теста Пенлеве, а третий — в вычислении автопреобразования Бэклунда для исследуемого уравнения. Зависящие от параметра автопреобразования Бэклунда позволяют строить многосолитонные и конечнозонные решения соответствующих уравнений (см. [1]). Поэтому наличие такого преобразования можно считать доказательством точной интегрируемости рассматриваемого уравнения.

Даже для систем, связанных дифференциальными подстановками с более простыми системами, вычисление их преобразований Бэклунда не лишено смысла. В самом деле, если нам, к примеру, известно некоторое решение системы (4.3), то для отыскания соответствующего решения системы (2.5) придётся интегрировать нелинейную систему (4.4), а это не так легко сделать.

Мы затрудняемся определить, что такое «существенная» зависимость автопреобразования Бэклунда от параметра. Например, в преобразовании Бэклунда для уравнения синус-Гордона (или mKdV) параметр можно обратить в единицу масштабным преобразованием независимых переменных $x \to \mu x$, $t \to \mu^{-1} t$.

По-видимому, масштабные преобразования независимых переменных надо исключать из рассмотрения при решении вопроса о том, является ли зависимость от параметра существенной. Приведём ещё один пример. Система (2.5) имеет следующее «автопреобразование Бэклунда» первого порядка:

$$\tilde{u}_x = u_x + \mu\cos(u+\tilde{u})\exp(-v-\tilde{v}), \quad \tilde{v}_x = v_x + \mu\sin(u+\tilde{u})\exp(-v-\tilde{v})$$

при $e=-1$, а при $e=1$ нужно заменить тригонометрические функции на гиперболические. Очевидно, что постоянную μ можно обратить в единицу сдвигом $v\to v+\alpha$, который не изменяет вида системы (2.5). Это означает, что указанное преобразование по известному решению системы u, v позволяет строить новое решение $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, содержащее параметр μ лишь аддитивно. По этой причине мы считаем, что приведённое преобразование не является преобразованием Бэклунда в том смысле, который все вкладывают в этот термин.

Расчёты показали, что преобразования Бэклунда первого порядка для систем (2.4)—(2.6) не содержат параметров. Первое нетривиальное автопреобразование Бэклунда для системы (2.5) имеет второй порядок. Системы (2.5) при $e=1$ и $e=-1$ связаны подстановкой $u\to iu$. Поэтому форма преобразований Бэклунда для этих двух случаев различна. Если $e=-1$, то автопреобразование Бэклунда записывается в виде

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{xx} &= u_{xx} + (u_x+\tilde{u}_x)\xi_x \operatorname{sh} f - \\ &\quad - \mu(\operatorname{ch} f)^{-1}(\operatorname{sh}\eta + \cos\xi \operatorname{sh} f) + \xi_x(v_x+\tilde{v}_x), \\ \tilde{v}_{xx} &= v_{xx} + (v_x+\tilde{v}_x)(2\xi_x \operatorname{sh} f - \eta_x) + \\ &\quad + 2\mu(\operatorname{ch} f)^{-1}(\cos\xi - \operatorname{sh}\eta \operatorname{sh} f) - \xi_x(u_x+\tilde{u}_x),\end{aligned} \tag{5.1}$$

где μ — параметр, $\xi = u-\tilde{u}$, $\eta = v-\tilde{v}$, а f является корнем уравнения

$$(\xi_x \operatorname{sh} f - \eta_x)\xi_x \operatorname{ch} f = \mu(\sin\xi - \operatorname{ch}\eta).$$

Автопреобразование Бэклунда для системы (2.5) при $e=1$ имеет вид

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{xx} &= u_{xx} + (u_x+\tilde{u}_x)\xi_x \operatorname{ch} f + \\ &\quad + \mu(\operatorname{sh} f)^{-1}(\operatorname{ch}\eta + \operatorname{ch}\xi \operatorname{ch} f) + \xi_x(v_x+\tilde{v}_x), \\ \tilde{v}_{xx} &= v_{xx} + (v_x+\tilde{v}_x)(2\xi_x \operatorname{ch} f - \eta_x) + \\ &\quad + 2\mu(\operatorname{sh} f)^{-1}(\operatorname{ch}\xi + \operatorname{ch}\eta \operatorname{ch} f) + \xi_x(u_x+\tilde{u}_x),\end{aligned} \tag{5.2}$$

где f является корнем уравнения

$$(\xi_x \operatorname{ch} f - \eta_x)\xi_x \operatorname{sh} f = \mu(\operatorname{sh}\xi + \operatorname{sh}\eta),$$

μ — параметр, а ξ и η те же, что и выше.

Литература

[1] Адлер В. Э., Шабат А. Б., Ямилов Р. И. Симметрийный подход к проблеме интегрируемости // Теор. и матем. физ. — 2000. — Т. 125, № 3. — С. 355—426.

[2] Балахнев М. Ю. Об одном классе интегрируемых эволюционных векторных уравнений // Теор. и матем. физ. — 2005. — Т. 142, № 1. — С. 13—20.

[3] Балахнев М. Ю., Кулемин И. В., Дифференциальные постановки для эволюционных систем 3-го порядка // Дифференц. уравн. и процессы управления. — 2002. — № 1. — `http://www.neva.ru/journal`.

[4] Дринфельд В. Г., Соколов В. В. Новые эволюционные уравнения, обладающие LA-парой // Дифференциальные уравнения с частными производными. — Новосибирск: Ин-т математики, 1981. — (Тр. сем. С. Л. Соболева; Вып. 2.). — С. 5—9.

[5] Дринфельд В. Г., Соколов В. В. Алгебры Ли и уравнения типа Кортевега—де Фриза // Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. математики. Т. 24. — М.: ВИНИТИ, 1984. — С. 81—180.

[6] Мешков А. Г. Инструменты для симметрийного анализа дифференциальных уравнений в частных производных // Дифференц. уравн. и процессы управления. — 2002. — № 1. — `http://www.neva.ru/journal`.

[7] Мешков А. Г., Соколов В. В. Классификация интегрируемых дивергентных N-компонентных эволюционных систем // Теор. и матем. физ. — 2004. — Т. 139, № 2. — С. 192—208.

[8] Михайлов А. В., Шабат А. Б., Соколов В. В. Симметрийный подход к классификации интегрируемых уравнений // Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов / Под ред. В. Г. Бахтарьяра, В. Е. Захарова, В. М. Черноусенко. — Киев: Наукова думка, 1990. — С. 213—279.

[9] Свинолупов С. И., Соколов В. В. Деформации йордановых тройных систем и интегрируемые уравнения // Теор. и матем. физ. — 1996. — Т. 108, № 3. — С. 388—392.

[10] Соколов В. В., Свинолупов С. И. Векторно-матричные обобщения классических интегрируемых уравнений // Теор. и матем. физ. — 1994. — Т. 100, № 2. — С. 214—218.

[11] Chen H. H., Lee Y. C., Liu C. S. Integrability of nonlinear Hamiltonian systems by inverse scattering method // Phys. Scripta. — 1979. — Vol. 20, no. 3—4. — P. 490—492.

[12] Fuchssteiner B., Fokas A. S. Symplectic structures, their Bäcklund transformations and hereditary symmetries // Physica D. — 1981. — Vol. 4, no. 1. — P. 47—66.

[13] Hirota R., Satsuma J. Soliton solutions of a coupled Korteweg—de Vries equation // Phys. Lett. A. — 1981. — Vol. 85, no. 8. — P. 407—408.

[14] Ito M. Symmetries and conservation laws of a coupled nonlinear wave equation // Phys. Lett. A. — 1982. — Vol. 91. — P. 335—338.

[15] Kulemin I. V., Meshkov A. G. To the classification of integrable systems in $1+1$ dimensions // Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics. Proc. 2nd Int. Conf., Kyiv, Ukraine, July 7—13, 1997 / M. Shkil, A. Nikitin, V. Boyko, eds. — Kyiv: Ukr. Inst. Math., 1997. — P. 115—121.

[16] Meshkov A. G. Necessary conditions of the integrability // Inverse Problems. — 1994. — Vol. 10, no. 3. — P. 635—653.

[17] Meshkov A. G. Integrability and integrodifferential substitutions // J. Math. Phys. — 1997. — Vol. 38, no. 12. — P. 6428—6443.

[18] Meshkov A. G., Balakhnev M. Yu. Integrable anisotropic evolution equations on a sphere // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. — 2005. — Vol. 1, no. 027.

[19] Meshkov A. G., Sokolov V. V. Integrable evolution equations on the N-dimensional sphere // Comm. Math. Phys. — 2002. — Vol. 232, no. 1. — P. 1—18.

[20] Mikhailov A. V., Sokolov V. V. Symmetries of differential equations and the problem of integrability // Integrability / A. V. Mikhailov, ed. — Princeton Univ. Press, 2003.

[21] Olver P. J., Sokolov V. V. Integrable evolution equations on associative algebras // Comm. Math. Phys. — 1998. — Vol. 193, no. 2. — P. 245—268.

[22] Olver P. J., Sokolov V. V. Non-Abelian integrable systems of the derivative nonlinear Schrödinger type // Inverse Problems. — 1998. — Vol. 14, no. 6. — P. L5—L8.

[23] Sokolov V. V., Svinolupov S. I., Wolf T. On linearizable evolution equations of second order // Phys. Lett. A. — 1992. — Vol. 163. — P. 415—418.

[24] Sokolov V. V., Wolf T. Classification of integrable polynomial vector evolution equations // J. Phys. A. — 2001. — Vol. 34, no. 49. — P. 11139—11148.