О системе Конно—Асаи—Какухаты: преобразование по решению и связь с системой Каупа—Ньюэлла

Т. НОЙВИРТ
Силезский университет, Опава
e-mail: Tomas.Neuwirth@math.slu.cz

УДК 517.95

Ключевые слова: нелинейные эволюционные уравнения, интегрируемость, преобразование по решению, представление нулевой кривизны.

Аннотация

Построена цепочка преобразований, переводящая новую интегрируемую систему, найденную Конно, Асаи и Какухата, в систему трёх уравнений в частных производных, образованную хорошо известной системой Каупа—Ньюэлла и скалярным линейным уравнением в частных производных первого порядка.

Abstract

T. Neuwirth, The Konno–Asai–Kakuhata system revisited: Reciprocal transformation and connection to the Kaup–Newell system, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 7, pp. 163—166.

We present a chain of changes of variables that transforms a new integrable system found by Konno, Asai, and Kakuhata into a system of three PDEs that consists of the well-known Kaup–Newell system and a scalar first-order linear PDE on the background of the latter.

Недавно Конно, Акаи и Какухата [3] получили следующее интегрируемое обобщение системы Каупа—Ньюэлла:

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{A_4}{2}\left(\frac{qr}{u^2}\right)_x, \\ q_t &= \frac{A_4}{2}\left[\frac{1}{u}\left(\frac{q}{u}\right)_x\right]_x, \\ r_t &= -\frac{A_4}{2}\left[\frac{1}{u}\left(\frac{r}{u}\right)_x\right]_x, \end{aligned} \tag{1}$$

где A_4 — ненулевая постоянная.

Система (1) допускает [3] представление нулевой кривизны

$$U_t - V_x + [U, V] = 0, \tag{2}$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 7, с. 163—166.

где

$$U = \begin{pmatrix} \lambda^2 u & \lambda q \\ \lambda r & -\lambda^2 u \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \lambda^4 A_4 & \frac{\lambda^3 A_4 q}{u} + \frac{\lambda A_4}{2u}\left(\frac{q}{u}\right)_x \\ \frac{\lambda^3 A_4 r}{u} - \frac{\lambda A_4}{2u}\left(\frac{r}{u}\right)_x & -\lambda^4 A_4 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Матрицы U и V в (3) содержат неустранимый параметр λ, и поэтому система (1) обладает бесконечным множеством нетривиальных законов сохранения и является интегрируемой методом обратной задачи рассеяния [3].

Система Конно—Асаи—Какухата (1) связана с системой Каупа—Ньюэлла [2]

$$\begin{aligned} iq_t &= -q_{xx} + i(q^2 r)_x, \\ ir_t &= r_{xx} + i(qr^2)_x \end{aligned} \tag{4}$$

(здесь $i = \sqrt{-1}$) следующим образом [3]: положим $u = -i$ в матрице U из (3) и заменим V в (3) матрицей

$$V_{KN} = \begin{pmatrix} -2i\lambda^4 - i\lambda^2 qr & 2\lambda^3 q + i\lambda q_x + \lambda q^2 r \\ 2\lambda^3 r - i\lambda r_x + \lambda r^2 q & 2i\lambda^4 + i\lambda^2 qr \end{pmatrix}.$$

Тогда (2) задаёт (известное из [2]) представление нулевой кривизны для (4). Отметим, что редукция $r = \pm q^*$ сводит систему Каупа—Ньюэлла (4) к хорошо известному нелинейному уравнению Шрёдингера с производной [2].

В настоящей работе показано, что взаимосвязь (1) и (4) теснее, чем предполагалось в [3]. А именно, нами построена цепочка замен переменных, преобразующая систему Конно—Асаи—Какухата (1) в систему Каупа—Ньюэлла, расширенную *линейным* уравнением в частных производных. Таким образом, система (1) эквивалентна *линейному расширению* системы (4) в терминах [4], т. е. построенная цепочка преобразований приводит к частичному расщеплению системы (1) и поэтому, скорее всего, обобщение (1) системы (4) менее интересно, чем предполагалось изначально.

Как построить искомую цепочку преобразований? Сначала выполним преобразование по решению (определения см., например, в [1, гл. 1]), используя закон сохранения, происходящий из первого уравнения в системе (1); кроме того, перемасштабируем t, чтобы избавиться от константы A_4. Это равносильно введению таких новых независимых переменных s и z, что $s = A_4 t/2$, а z удовлетворяет условию

$$dz = u\,dx + \frac{A_4}{2}\frac{qr}{u^2}\,dt. \tag{5}$$

Введём новые зависимые переменные

$$h = \frac{1}{u}, \quad v = \frac{q}{u}, \quad w = \frac{r}{u}.$$

В результате этих двух преобразований мы получаем из (1) систему

$$\begin{aligned} h_s &= -hv_z w - hvw_z - vwh_z, \\ v_s &= v_{zz} - 2vwv_z - v^2 w_z, \\ w_s &= -w_{zz} - 2vww_z - w^2 v_z. \end{aligned} \tag{6}$$

Два последних уравнения в (6) не содержат h и её производных. Предположим, что функции v и w найдены из этих уравнений и подставлены в первое из уравнений системы (6). Мы видим, что оно теперь является *линейным* уравнением в частных производных первого порядка относительно h, и его общее решение несложно построить, например, методом характеристик. Это и есть упомянутое ранее расщепление системы (1).

Рассмотрим теперь уравнения для v и w из (6):

$$\begin{aligned} v_s &= v_{zz} - 2vwv_z - v^2 w_z, \\ w_s &= -w_{zz} - 2vww_z - w^2 v_z. \end{aligned} \tag{7}$$

Введём новые независимые переменные $\tau = is$ и $\xi = -iz$ вместо s и z. При этом уравнение (7) преобразуется в

$$\begin{aligned} iv_\tau &= -v_{\xi\xi} + 2ivwv_\xi + iv^2 w_\xi, \\ iw_\tau &= w_{\xi\xi} + 2ivww_\xi + iw^2 v_\xi, \end{aligned} \tag{8}$$

т. е. в систему (4), в которой q и r заменены на v и w и в то же время x и t заменены на ξ и τ.

Наконец, перепишем первое уравнение в системе (6), используя переменные τ и ξ. В результате мы получаем следующее утверждение.

Утверждение 1. *Введём новые зависимые переменные* $h = 1/u$, $v = q/u$, $w = r/u$ *и новые независимые переменные* $\tau = iA_4 t/2$ *и* $\xi = -iz$, *где* z *определяется из* (5). *В результате система* (1) *принимает вид*

$$\begin{aligned} ih_\tau &= i(hvw)_\xi, \\ iv_\tau &= -v_{\xi\xi} + i(v^2 w)_\xi, \\ iw_\tau &= w_{\xi\xi} + i(w^2 v)_\xi, \end{aligned} \tag{9}$$

т. е. (1) *преобразуется в систему Каупа—Ньюэлла* (8) *для* v *и* w, *к которой добавлено линейное уравнение в частных производных для* h *на фоне* (8).

Мы видим, что можно получить большой запас точных решений системы (1), используя известные (например, многосолитонные) решения (8). В самом деле, для этого необходимо всего лишь решить *линейное* уравнение $ih_\tau = i(hvw)_\xi$ с *известными* v и w, а затем отобразить решения (9) в решения (1), обратив цепочку преобразований, приведённую в утверждении 1.

В заключение отметим, что замена переменных из утверждения 1 преобразует представление нулевой кривизны (3) в представление нулевой кривизны вида $\tilde{U}_\tau - \tilde{V}_\xi + [\tilde{U}, \tilde{V}] = 0$ *только* для системы Каупа—Ньюэлла (8), а не для всей системы (9), так как преобразованные матрицы $\tilde{U}$ и $\tilde{V}$ не зависят от h и её производных. Таким образом, «схлопывание», когда после подходящего преобразования матрицы в представлении нулевой кривизны не зависят от некоторых зависимых переменных и их производных, может произойти не только в результате калибровочного преобразования (см. [5]), но и в результате замены переменных.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта MSM 4781305904 Министерства образования, молодёжи и спорта Чешской Республики. Автор благодарит Артура Сергеева за постановку задачи и ценные обсуждения.

Литература

[1] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978.

[2] Kaup D. J., Newell A. C. An exact solution for a derivative nonlinear Schrödinger equation // J. Math. Phys. — 1978. — Vol. 19, no. 4. — P. 798—801.

[3] Konno K., Asai R., Kakuhata H. A new integrable equation and its hierarchy // J. Phys. Soc. Japan. — 2005. — Vol. 74, no. 7. — P. 1881—1882.

[4] Kupershmidt B. A. Dark equations // J. Nonlinear Math. Phys. — 2001. — Vol. 8, no. 3. — P. 363—445.

[5] Sakovich S. Yu. On zero-curvature representations of evolution equations // J. Phys. A. — 1995. — Vol. 28, no. 10. — P. 2861—2869.