Преобразования интегрируемых гидродинамических цепочек и их гидродинамические редукции

М. В. ПАВЛОВ
Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН
e-mail: maxim.pavlov@mtu-net.ru

УДК 517.957

Ключевые слова: гидродинамическая цепочка, преобразование по решению, преобразование типа Миуры, гидродинамическая редукция.

Аннотация

С помощью преобразований типа Миуры и преобразований по решению, применённых к гидродинамической цепочке Бенни, найдены гидродинамические редукции гидродинамической цепочки, ассоциированной с бездисперсионным пределом $(2+1)$-мерного уравнения Гарри—Дима.

Abstract

M. V. Pavlov, Transformations of integrable hydrodynamic chains and their hydrodynamic reductions, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 7, pp. 167—175.

Hydrodynamic reductions of the hydrodynamic chain associated with dispersionless limit of the $(2+1)$-dimensional Harry–Dym equation are found by using the Miura type and reciprocal transformations applied to the Benney hydrodynamic chain.

1. Введение

Методом гидродинамических редукций (см., например, [9, 10, 12, 13]) можно найти решения интегрируемых гидродинамических цепочек и $(2+1)$-мерных квазилинейных систем. Предположим, что нам дана некоторая гидродинамическая цепочка. Тогда мы можем попытаться отыскать гидродинамические редукции для этой гидродинамической цепочки с помощью вышеупомянутого метода гидродинамических редукций или с помощью $\bar{\partial}$-метода (см. [5]). Тем самым гидродинамические редукции бездисперсионного предела $(2+1)$-мерного уравнения Гарри—Дима можно найти либо непосредственно, с помощью гамильтонова подхода, применённого к гидродинамической цепочке Купершмидта (см. [25, 26]), либо с помощью $\bar{\partial}$-подхода (см. [29]). В этой статье, однако, мы займемся пересчётом гидродинамических редукций гидродинамических цепочек, связанных

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 7, с. 167—175.

преобразованиями типа Миуры и преобразованиями по решению. Это означает, что мы будем использовать уже известные гидродинамические редукции гидродинамических цепочек Бенни (см. [1—3, 5, 18, 19, 30]) для реконструкции гидродинамических редукций для бездисперсионного предела $(2+1)$-мерного уравнения Гарри—Дима.

Итак, данная статья посвящена построению гидродинамических редукций, общих для $(2+1)$-мерных квазилинейных систем (бездисперсионное уравнение Кадомцева—Петвиашвили, обобщённое бездисперсионное уравнение Кадомцева—Петвиашвили, $(2+1)$-мерное уравнение Гарри—Дима), связанных с преобразованиями типа Миуры и преобразованиями по решению (см. [6—8,22,27,28]).

Напомним (см. [11]), что гидродинамическая цепочка Бенни (см. [4])

$$A_t^k = A_x^{k+1} + kA^{k-1}A_x^0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

удовлетворяет уравнению Гиббонса

$$\lambda_t - \mu\lambda_x = \frac{\partial\lambda}{\partial\mu}\left[\mu_t - \partial_x\left(\frac{\mu^2}{2} + A^0\right)\right], \tag{2}$$

где уравнение отображения Римана задаётся асимптотическим разложением

$$\lambda = \mu + \frac{A^0}{\mu} + \frac{A^1}{\mu^2} + \frac{A^2}{\mu^3} + \ldots. \tag{3}$$

Обратное асимптотическое разложение

$$\mu = \lambda - \frac{\mathbf{H}_0}{\lambda} - \frac{\mathbf{H}_1}{\lambda^2} - \frac{\mathbf{H}_2}{\lambda^3} - \ldots$$

задаёт бесконечную серию плотностей полиномиальных законов сохранения $\mathbf{H}_k(A^0, A^1, \ldots, A^k)$, где производящая функция законов сохранения задана соотношением

$$\mu_t = \partial_x\left(\frac{\mu^2}{2} + A^0\right). \tag{4}$$

Поскольку преобразование $\mathbf{H}_k = \mathbf{H}_k(A^0, A^1, \ldots, A^k)$ обратимо, гидродинамическую цепочку Бенни можно записать в консервативной форме:

$$\partial_t\mathbf{H}_0 = \partial_x\mathbf{H}_1, \quad \partial_t\mathbf{H}_n = \partial_x\left(\mathbf{H}_{n+1} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{H}_k\mathbf{H}_{n-1-k}\right), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Применим производящую функцию преобразований типа Миуры (см. [20, 21])

$$\mu = p + B^0$$

к выписанным выше рядам (см. также [7, 28]). Деформация отображения Римана, определённая асимптотическим разложением

$$\lambda = p + B^0 + \frac{B^1}{p} + \frac{B^2}{p^2} + \frac{B^3}{p^3} + \ldots, \tag{6}$$

удовлетворяет модифицированному уравнению Гиббонса

$$\lambda_t - (p + B^0)\lambda_x = \frac{\partial \lambda}{\partial p}\left[p_t - \partial_x\left(\frac{p^2}{2} + B^0 p\right)\right], \tag{7}$$

где динамика коэффициентов B^k задаётся модифицированной гидродинамической цепочкой Бенни

$$B^k_t = B^{k+1}_x + B^0 B^k_x + k B^k B^0_x, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Замечание. Сравнение двух асимптотических разложений (3) и (6),

$$p + B^0 + \frac{B^1}{p} + \frac{B^2}{p^2} + \frac{B^3}{p^3} + \ldots = p + B^0 + \frac{A^0}{p + B^0} + \frac{A^1}{(p + B^0)^2} + \frac{A^2}{(p + B^0)^3} + \ldots,$$

приводит к точечным полиномиальным преобразованиям типа Миуры

$$A^k(B^0, B^1, \ldots, B^{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Взаимосвязь между $(2+1)$-мерным уравнением Гарри—Дима и уравнением Кадомцева—Петвиашвили была установлена в [22, 27] (см. также [6]). Напомним эту связь между соответствующими гидродинамическими цепочками (см. [8]). Гидродинамическая цепочка, связанная с бездисперсионным пределом $(2+1)$-мерного уравнения Гарри—Дима имеет вид (см., например, [6])

$$C^k_y = (C^{-1})^2 C^{k+1}_z + (k+1) C^{k+1} C^{-1} C^{-1}_z, \quad k = -1, 0, 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Деформация отображения Римана

$$\lambda = C^{-1} q + C^0 + \frac{C^1}{q} + \frac{C^2}{q^2} + \frac{C^3}{q^3} + \ldots \tag{10}$$

задаётся уравнением Гиббонса

$$\lambda_y - q(C^{-1})^2 \lambda_z = \frac{\partial \lambda}{\partial q}\left[q_y - \partial_z\left(\frac{q^2 (C^{-1})^2}{2}\right)\right]. \tag{11}$$

Эта гидродинамическая цепочка имеет первый закон сохранения

$$\partial_y \frac{1}{C^{-1}} = \partial_z(-C^0).$$

При преобразовании по решению

$$dx = \frac{1}{C^{-1}}\, dz - C^0\, dy, \quad dt = dy \tag{12}$$

гидродинамическая цепочка (9) редуцируется к гидродинамической цепочке (8); уравнение Гиббонса (11) редуцируется к уравнению Гиббонса (7); уравнение отображения Римана (10) редуцируется к уравнению отображения Римана (6), где производящая функция преобразований типа Миуры имеет вид

$$p = C^{-1} q,$$

а преобразования типа Миуры таковы (см. [8]):

$$B^k = C^k(C^{-1})^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Гидродинамическая цепочка Бенни хорошо известна. Многие гидродинамические редукции (см., например, [1—3, 5, 18, 19, 30]) найдены уже много лет назад. Ниже мы установим соотношения между гидродинамическими редукциями гидродинамических цепочек, связанных преобразованиями типа Миуры и преобразованиями по решению, и гидродинамическими цепочками Бенни.

2. Модифицированная гидродинамическая цепочка Бенни

Рассмотрим пример. Гидродинамические редукции Захарова (см. [1, 30])

$$a_t^i = \partial_x\left[\frac{(a^i)^2}{2} + A^0\right], \quad b_t^i = \partial_x(a^i b^i), \quad A^0 = \sum_{n=1}^{N} b^n, \tag{13}$$

цепочки моментов Бенни (1) связаны с уравнением римановой поверхности

$$\lambda = \mu + \sum_{n=1}^{N} \frac{b^n}{\mu - a^n}.$$

Перепишем приведённую выше формулу в виде

$$\lambda = \mu + \frac{b^i}{\mu - a^i} + \sum_{k\neq i} \frac{b^k}{\mu - a^k}, \tag{14}$$

где индекс i фиксирован. Подставляя ряд Тейлора

$$\mu^{(i)} = a^i + \frac{b^i}{\lambda} + \frac{c^i(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\lambda^2} + \frac{d^i(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\lambda^3} + \ldots$$

в (4), можно получить бесконечную последовательность законов сохранения вблизи каждой точки разложения $\mu^{(i)} = a^i$. Гидродинамическая цепочка Бенни (5) определена при $k \geqslant 0$. Распространим эту гидродинамическую цепочку в отрицательном направлении. Тогда отрицательная часть гидродинамической цепочки Бенни задаётся уравнением

$$\partial_t \mathbf{H}_{-1} = \partial_x\left[\frac{(\mathbf{H}_{-1})^2}{2} + \mathbf{H}_0\right],$$

$$\partial_t \mathbf{H}_{-k-1} = \frac{1}{2}\partial_x\left[\sum_{m=0}^{k} \mathbf{H}_{-m-1}\mathbf{H}_{m-k-1}\right], \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $\mathbf{H}_{-1} \equiv a^i$, $\mathbf{H}_{-2} \equiv b^i$, и приведённая выше система гидродинамического типа

$$a_t^k = \partial_x\left(\frac{(a^k)^2}{2} + \mathbf{H}_{-2} + \sum_{n\neq i} b^n\right), \quad b_t^k = \partial_x(a^k b^k), \quad k = 1, 2, \ldots, N, \quad k \neq i,$$

$$\partial_t \mathbf{H}_{-1} = \partial_x\left(\frac{(\mathbf{H}_{-1})^2}{2} + \mathbf{H}_{-2} + \sum_{n\neq i} b^n\right), \quad \partial_t \mathbf{H}_{-2} = \partial_x(\mathbf{H}_{-1}\mathbf{H}_{-2}),$$

связана с уравнением римановой поверхности (см. (14))

$$\tilde{\lambda} \equiv \lambda^{(i)} = \frac{\mathbf{H}_{-2}}{\mu - \mathbf{H}_{-1}} + \mu + \sum_{k\neq i} \frac{b^k}{\mu - a^k}. \tag{15}$$

Поскольку первый момент модифицированной цепочки Бенни — это $B^0 \equiv \mathbf{H}_{-1}$, уравнение римановой поверхности для соответствующей гидродинамической редукции

$$u_t^k = \partial_x\left(\frac{(u^k)^2}{2} + B^0 u^k\right), \quad b_t^k = \partial_x[(B^0 + u^k) b^k], \quad k = 1, 2, \ldots, N, \quad k \neq i,$$

$$B_t^0 = \partial_x\left(\frac{(B^0)^2}{2} + \mathbf{H}_{-2} + \sum_{n\neq i} b^n\right), \quad \partial_t \mathbf{H}_{-2} = \partial_x(B^0 \mathbf{H}_{-2}),$$

модифицированной гидродинамической цепочки Бенни задаётся формулой

$$\lambda = \frac{\mathbf{H}_{-2}}{p} + B^0 + p + \sum_{k\neq i} \frac{b^k}{p - u^k},$$

где $u^k = a^k - B^0$; производящая функция преобразований типа Миуры имеет вид $p = \mu - B^0$.

3. Бездисперсионное (2 + 1)-мерное уравнение Гарри—Дима

В заключение применим преобразование по решению (см. (12))

$$dz = \mathbf{H}_{-2}\, dx + B^0 \mathbf{H}_{-2}\, dt, \quad dy = dt \tag{16}$$

к приведённой выше системе гидродинамического типа.

Уравнение римановой поверхности для соответствующей гидродинамической редукции

$$\bar{u}_y^k = \partial_z\left[\frac{(\bar{u}^k)^2}{2}(C^{-1})^2\right], \quad \bar{b}_y^k = \partial_z(C^{-1}\bar{u}^k \bar{b}^k), \quad k = 1, 2, \ldots, N, \quad k \neq i,$$

$$C_y^0 = \left(1 + \sum_{n\neq i} \bar{b}^n\right) C^{-1} C_z^{-1} + (C^{-1})^2 \sum_{n\neq i} \bar{b}_z^n, \quad C_y^{-1} = (C^{-1})^2 C_z^0,$$

бездисперсионного предела $(2+1)$-мерного уравнения Гарри—Дима задаётся тогда следующим образом:

$$\lambda = C^{-1}q + C^0 + \frac{1}{q} + \sum_{k\neq i} \frac{\bar{b}^k}{q - \bar{u}^k},$$

где $C^0 \equiv B^0$, $C^{-1} \equiv \mathbf{H}_{-2}$, $\bar{b}^k = b^k/\mathbf{H}_{-2}$, $\bar{u}^k = u^k/\mathbf{H}_{-2}$; при этом производящая функция преобразований типа Миуры имеет вид $p = qC^{-1}$.

Перепишем уравнение римановой поверхности (14) для гидродинамической редукции Захарова (13) в виде (см. [23, 24])

$$\lambda = p \prod_{k=1}^{N} \frac{p - c^k}{p - u^k},$$

где $B^0 \equiv \mathbf{H}_{-1} = \sum (u^n - c^n)$. Применение преобразования по решению (16) даёт нам другую гидродинамическую редукцию бездисперсионного предела $(2+1)$-мерного уравнения Гарри—Дима

$$\bar{u}^k_y = \partial_x \left[\frac{(\bar{u}^k)^2}{2} (C^{-1})^2 \right], \quad \bar{c}^k_y = \partial_x \left[\frac{(\bar{c}^k)^2}{2} (C^{-1})^2 \right], \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

где

$$C^{-1} \equiv \mathbf{H}_{-2} = \prod \frac{u^n}{c^n} \equiv \prod \frac{\bar{u}^n}{\bar{c}^n}.$$

Соответствующее уравнение римановой поверхности задаётся формулой

$$\lambda = q \prod_{k=1}^{N} \frac{1 - q/\bar{c}^k}{1 - q/\bar{u}^k}.$$

Начнём с редукции (см. [14—17])

$$a^k_t = \partial_x \left[\frac{(a^k)^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n a^n \right], \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

цепочки моментов Бенни (1)

$$\lambda = \mu - \varepsilon_i \ln(\mu - a^i) - \sum_{k\neq i} \varepsilon_k \ln(\mu - a^k), \quad \sum \varepsilon_n = 0.$$

Введём отождествление $\mathbf{H}_{-1} \equiv a^i$, где индекс i фиксирован. Тогда приведённая выше система гидродинамического типа

$$a^k_t = \partial_x \left[\frac{(a^k)^2}{2} + \varepsilon_i \mathbf{H}_{-1} + \sum_{n\neq i} \varepsilon_n a^n \right], \quad k = 1, 2, \ldots, N, \quad k \neq i,$$

$$\partial_t \mathbf{H}_{-1} = \partial_x \left[\frac{(A^{-1})^2}{2} + \varepsilon_i \mathbf{H}_{-1} + \sum_{n\neq i} \varepsilon_n a^n \right],$$

будет связана с уравнением римановой поверхности (см. (15))

$$\tilde{\lambda} \equiv \lambda^{(i)} = \frac{1}{\mu - \mathbf{H}_{-1}} \prod_{k \neq i} (\mu - a^k)^{-\varepsilon_k/\varepsilon_i} \exp \frac{\mu}{\varepsilon_i}.$$

Поскольку первый момент модифицированной цепочки Бенни удовлетворяет соотношению $B^0 \equiv \mathbf{H}_{-1}$, уравнение римановой поверхности для соответствующей гидродинамической редукции

$$u_t^k = \partial_x \left(\frac{(u^k)^2}{2} + B^0 u^k \right), \quad k = 1, 2, \ldots, N, \quad k \neq i,$$

$$B_t^0 = \partial_x \left(\frac{(B^0)^2}{2} + \sum_{n \neq i} \varepsilon_n u^n \right),$$

модифицированной цепочки Бенни задаётся формулой

$$\lambda = \frac{\mathbf{H}_{-2}}{p} e^{p/\varepsilon_i} \prod_{k \neq i} \left(1 - \frac{p}{u^k} \right)^{-\varepsilon_k/\varepsilon_i}.$$

Наконец, применим преобразование по решению (16), где

$$\mathbf{H}_{-2} = e^{B^0/\varepsilon_i} \prod_{k \neq i} (u^k)^{-\varepsilon_k/\varepsilon_i}.$$

Тогда уравнение римановой поверхности для соответствующей гидродинамической редукции

$$\bar{u}_y^k = \partial_z \left[\frac{(\bar{u}^k)^2}{2} (C^{-1})^2 \right], \quad k = 1, 2, \ldots, N, \quad k \neq i,$$

$$C_y^{-1} = (C^{-1})^2 \partial_z \left(\sum_{n \neq i} \varepsilon_n \ln \bar{u}^n \right),$$

бездисперсионного предела $(2+1)$-мерного уравнения Гарри—Дима задаётся формулой

$$\lambda = C^{-1} q - \sum_{n \neq i} \varepsilon_n \ln \frac{1 - \bar{u}^n/q}{\bar{u}^n}.$$

Все прочие гидродинамические редукции цепочки моментов Бенни могут быть пересчитаны в гидродинамические редукции (9) тем же самым способом.

Автор признателен Институту математики в Тайбэе (Тайвань), где была выполнена некоторая часть этой работы; автор особо признателен Цзень Сю Чжану и Дерчи Ву за полезные и стимулирующие обсуждения.

Литература

[1] Захаров В. Е. Уравнения Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи // Функц. анализ и его прил. — 1980. — Т. 14, № 2. — С. 15—24.

[2] Кричевер И. М. Метод усреднения для двумерных «интегрируемых» уравнений // Функц. анализ и его прил. — 1988. — Т. 22, № 3. — С. 37—52.

[3] Кричевер И. М. Спектральная теория двумерных периодических операторов и её приложения // Успехи мат. наук. — 1989. — Т. 44, № 2. — С. 121—184.

[4] Benney D. J. Some properties of long nonlinear waves // Stud. Appl. Math. — 1973. — Vol. 52. — P. 45—50.

[5] Bogdanov L. V., Konopelchenko B. G. Symmetry constraints for dispersionless integrable equations and systems of hydrodynamic type // Phys. Lett. A. — 2004. — Vol. 330. — P. 448—459.

[6] Chang J.-H. Hydrodynamic reductions of dispersionless Harry—Dym hierarchy // J. Phys. A. — 2005. — Vol. 38, no. 29. — P. 6505—6515.

[7] Chang J.-H., Tu M.-H. On the Miura map between the dispersionless KP and dispersionless modified KP hierarchies // J. Math. Phys. — 2000. — Vol. 41, no. 8. — P. 5391—5406.

[8] Chen Y.-T., Tu M.-H. A note on the dispersionless Dym hierarchy // Lett. Math. Phys. — 2003. — Vol. 63. — P. 125—139.

[9] Ferapontov E. V., Khusnutdinova K. R. On integrability of $(2+1)$-dimensional quasilinear systems // Comm. Math. Phys. — 2004. — Vol. 248. — P. 187—206.

[10] Ferapontov E. V., Khusnutdinova K. R. The characterization of 2-component $(2+1)$-dimensional integrable systems of hydrodynamic type // J. Phys. A. — 2004. — Vol. 37, no. 8. — P. 2949—2963.

[11] Gibbons J. Collisionless Boltzmann equations and integrable moment equations // Physica D. — 1981. — Vol. 3. — P. 503—511.

[12] Gibbons J., Tsarev S. P. Reductions of Benney's equations // Phys. Lett. A. — 1996. — Vol. 211. — P. 19—24.

[13] Gibbons J., Tsarev S. P. Conformal maps and reductions of the Benney equations // Phys. Lett. A. — 1999. — Vol. 258. — P. 263—270.

[14] Gibbons J., Yu L. A. The initial value problem for reductions of the Benney equations // Inverse Problems. — 2000. — Vol. 16, no. 3. — P. 605—618.

[15] Yu L. A. Waterbag reductions of the dispersionless discrete KP hierarchy // J. Phys. A. — 2000. — Vol. 33. — P. 8127—8138.

[16] Kodama Y. A method for solving the dispersionless KP equation and its exact solutions // Phys. Lett. A. — 1988. — Vol. 129, no. 4. — P. 223—226.

[17] Kodama Y. A solution method for the dispersionless KP equation // Progr. Theoret. Phys. Suppl. — 1988. — Vol. 94. — P. 184.

[18] Krichever I. M. The dispersionless equations and topological minimal models // Comm. Math. Phys. — 1992. — Vol. 143, no. 2. — P. 415—429.

[19] Krichever I. M. The τ-function of the universal Whitham hierarchy, matrix models and topological field theories // Comm. Pure Appl. Math. — 1994. — Vol. 47. — P. 437—475.

[20] Kupershmidt B. A. Deformations of integrable systems // Proc. Roy. Irish Acad. Sec. A. — 1983. — Vol. 83, no. 1. — P. 45—74.

[21] Kupershmidt B. A. Normal and universal forms in integrable hydrodynamical systems // Proc. Berkeley—Ames Conf. Nonlinear Problems in Control and Fluid Dynamics (Berkeley, 1983). Systems Inform. Control. II. — Brookline: Math. Sci. Press, 1984. — P. 357—378.

[22] Oevel W., Rogers C. Gauge transformations and reciprocal links in (2+1) dimensions // Rev. Math. Phys. — 1993. — Vol. 5. — P. 299—330.

[23] Pavlov M. V. Local Hamiltonian structures of Benney's system // Russ. Phys. Dokl. — 1994. — Vol. 39, no. 9. — P. 607—608.

[24] Pavlov M. V. Exact integrability of a system of the Benney equations // Russ. Phys. Dokl. — 1994. — Vol. 39, no. 11. — P. 745—747.

[25] Pavlov M. V. The Kupershmidt hydrodynamic chains and lattices. — Не опубликовано.

[26] Pavlov M. V. The Hamiltonian approach in the classification and the integrability of hydrodynamic chains. — Не опубликовано.

[27] Rogers C. The Harry—Dym equation in $(2 + 1)$ dimensions: A reciprocal link with the Kadomtsev—Petviashvili equation // Phys. Lett. A. — 1987. — Vol. 120, no. 1. — P. 15—18.

[28] Shaw J.-C., Tu M.-H. Canonical Miura maps between the modified KP and KP hierarchies // J. Phys. A. — 1997. — Vol. 30. — P. 4825—4833.

[29] Wu D., Tu M.-H., Chen Y.-T., Chang J.-H. The $\bar{\partial}$ approach to the dispersionless $(2 + 1)$-Harry—Dym hierarchy // J. Phys. A. — 2005. — Vol. 38. — P. 6167—6181.

[30] Zakharov V. E. On the Benney's equations // Physica D. — 1981. — Vol. 3. — P. 193—200.