

Классификация потенциальных структур на пространстве Минковского по подгруппам группы Пуанкаре

М. А. ПАРИНОВ

Ивановский государственный университет
e-mail: parinov@ivanovo.ac.ru

УДК 514.83+514.7

Ключевые слова: пространство Минковского, группа Пуанкаре, потенциальная структура, пространство Максвелла, классификация.

Аннотация

Получена полная классификация потенциальных структур (ковекторных полей) на пространстве Минковского, допускающих подгруппы группы Пуанкаре. Описано семь классов пространств Максвелла, допускающих подгруппы группы Пуанкаре.

Abstract

M. A. Parinov, Classification of potential structures on the Minkowski space with respect to subgroups of the Poincaré group, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 7, pp. 177—225.

We obtain a complete description of the potential structures (covector fields) on the Minkowski space that admit subgroups of the Poincaré group. Seven classes of the Maxwell spaces that admit subgroups of the Poincaré group are described.

1. Введение

На основе классификации И. В. Белько подгрупп группы Пуанкаре [1] автором получена классификация пространств Максвелла по подгруппам группы Пуанкаре [3,4]. Для получения представителей классов пространств Максвелла в [4] используются классы потенциальных структур на пространстве Минковского, допускающих те же самые подгруппы группы Пуанкаре. Частично классификация потенциальных структур опубликована в [2,5], её полное изложение впервые предпринято в настоящей работе. Помимо того, что эта классификация представляет самостоятельный интерес, она позволила уточнить описание некоторых классов пространств Максвелла. В частности, некоторые из классов $C_{p,q}$, считавшиеся в [3,4] пустыми, оказались непустыми; их описание приведено в последнем разделе статьи.

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 7, с. 177—225.

© 2006 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

1.1. Постановка задачи и метод решения

Потенциальной структурой на гладком многообразии M назовём дифференциальную 1-форму $A = A_i dx^i$, $A_i = A_i(x)$ [3]. Если многообразие M четырёхмерно и на нём задана ещё псевдоевклидова метрика $g = g_{ij} dx^i dx^j$ лоренцевой сигнатуры $(- - + +)$, то пару (M, g) можно интерпретировать как область в пространстве Минковского $\mathbb{R}_1^4$, а тройку (M, g, A) — как 4-потенциал электромагнитного поля. *Пространство Максвелла* есть тройка (M, g, F) , где

$$F = dA = F_{ij} dx^i dx^j \quad (F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i) — \quad (1.1.1)$$

обобщённая симплектическая структура [3]. Поскольку F замкнута,

$$dF = 0 \iff \partial_{[i} F_{j]k} = 0,$$

F_{ij} можно интерпретировать как тензор электромагнитного поля (если выполнено и второе уравнение Максвелла $\nabla_k F^{ik} = -\frac{4\pi}{c} J^i$, которое при игнорировании физических ограничений можно понимать как определение тока).

Задача групповой классификации потенциальных структур (M, g, A) (потенциалов на $M \subset \mathbb{R}_1^4$) вполне аналогична задаче классификации пространств Максвелла по подгруппам группы Пуанкаре [3, 4]. Для каждой группы $G_{p,q}$, соответствующей алгебре $\mathcal{L}_{p,q} = L\{\xi_1, \dots, \xi_p\}$ из списка в [1], надо найти класс $P_{p,q}$ потенциалов A_i , инвариантных относительно этой группы, т. е. удовлетворяющих условию

$$L_{\xi_\alpha} A_i = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, p = \dim \mathcal{L}_{p,q}) \quad (1.1.2)$$

(L_ξ — производная Ли). Решение систем уравнений (1.1.2) для каждой алгебры $\mathcal{L}_{p,q}$ приводит к полной классификации потенциальных структур.

Выпишем используемый в работе базис алгебры Ли группы Пуанкаре:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, 0), & e_2 &= (0, 1, 0, 0), & e_3 &= (0, 0, 1, 0), & e_4 &= (0, 0, 0, 1), \\ e_{12} &= (-x^2, x^1, 0, 0), & e_{13} &= (x^3, 0, -x^1, 0), & e_{23} &= (0, -x^3, x^2, 0), \\ e_{14} &= (x^4, 0, 0, x^1), & e_{24} &= (0, x^4, 0, x^2), & e_{34} &= (0, 0, x^4, x^3). \end{aligned}$$

Здесь $\{x^i\}$ — галилеевы координаты, для которых

$$g_{ij} = \text{diag}(-1, -1, -1, 1).$$

Выражение $L\{\xi_1, \dots, \xi_p\}$ всюду означает линейную оболочку векторов $\xi_1, \dots, \xi_p$. Компоненты всех тензоров отнесены к галилеевым координатам, даже если выражены как функции других координат.

Следует отметить, что для каждого класса $P_{p,q}$ его представители могут допускать группу $G_{p,q}$ или более широкую подгруппу группы Пуанкаре.

2. Потенциалы, допускающие одномерные группы

2.1. Трансляции

Существуют три вида попарно несопряжённых одномерных подгрупп трансляций.

2.1.1. Класс $P_{1,1a}$

Алгебре $\mathcal{L}_{1,1a} = L\{e_1\}$ соответствует группа $G_{1,1a}$ трансляций в пространственноподобном направлении. Уравнение (1.1.2) для вектора $\xi = e_1$ имеет вид

$$\partial_1 A_i = 0, \quad (2.1.1)$$

поэтому компоненты ковекторного поля A_i не зависят от x^1 .

Утверждение 2.1.1. Класс $P_{1,1a}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{1,1a}$, состоит из полей вида $A_i = A_i(x^2, x^3, x^4)$.

2.1.2. Класс $P_{1,1b}$

Алгебре $\mathcal{L}_{1,1b} = L\{e_4\}$ соответствует группа $G_{1,1b}$ трансляций во времени-подобном направлении. Уравнение (1.1.2) для вектора $\xi = e_4$ имеет вид

$$\partial_4 A_i = 0, \quad (2.1.2)$$

поэтому компоненты ковекторного поля A_i не зависят от x^4 .

Утверждение 2.1.2. Класс $P_{1,1b}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{1,1b}$, состоит из полей вида $A_i = A_i(x^1, x^2, x^3)$.

2.1.3. Класс $P_{1,1c}$

Алгебре $\mathcal{L}_{1,1c} = L\{e_2 + e_4\}$ соответствует группа $G_{1,1c}$ трансляций в направлении изотропного вектора. Уравнение (1.1.2) для вектора $\xi = e_2 + e_4$ имеет вид

$$\partial_2 A_i + \partial_4 A_i = 0. \quad (2.1.3)$$

Переходя к координатам $\{v^i\}$ по формулам

$$v^1 = x^1, \quad v^2 = x^2 + x^4, \quad v^3 = x^3, \quad v^4 = x^2 - x^4, \quad (2.1.4)$$

находим общее решение уравнения (2.1.3):

$$A_i = A_i(v^1, v^3, v^4) = A_i(x^1, x^3, x^2 - x^4), \quad (2.1.5)$$

где $A_i(v^1, v^3, v^4)$ — произвольные гладкие функции трёх переменных.

Утверждение 2.1.3. Класс $P_{1,1c}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{1,1c}$, состоит из полей вида (2.1.5).

2.2. Эллиптические винты

Алгебре $\mathcal{L}_{1,2} = L\{e_{13} + \lambda e_2 + \mu e_4\}$ ($\lambda\mu(\lambda - \mu) = 0$) соответствует одномерная группа $G_{1,2}$ эллиптических винтов, или поворотов. Уравнение (1.1.2) для вектора $\xi = e_{13} + \lambda e_2 + \mu e_4$ имеет вид

$$x^3 \partial_1 A_i + \lambda \partial_2 A_i - x^1 \partial_3 A_i + \mu \partial_4 A_i + A_1 \delta_i^3 - A_3 \delta_i^1 = 0. \quad (2.2.1)$$

В результате замены $\{x^i\} \mapsto \{\tilde{x}^i\} = \{r, \tilde{x}^2, \varphi, \tilde{x}^4\}$, задаваемой формулами

$$x^1 = r \sin \varphi, \quad x^2 = \lambda \varphi + \tilde{x}^2, \quad x^3 = r \cos \varphi, \quad x^4 = \mu \varphi + \tilde{x}^4, \quad (2.2.2)$$

уравнение (2.2.1) принимает вид системы

$$\frac{\partial A_1}{\partial \varphi} - A_3 = 0, \quad \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial A_3}{\partial \varphi} + A_1 = 0, \quad \frac{\partial A_4}{\partial \varphi} = 0. \quad (2.2.3)$$

Общее решение системы (2.2.3) имеет вид

$$\begin{aligned} A_1 &= C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi, & A_2 &= A_2(r, \tilde{x}^2, \tilde{x}^4), \\ A_3 &= -C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi, & A_4 &= A_4(r, \tilde{x}^2, \tilde{x}^4), \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

где $C_i = C_i(r, \tilde{x}^2, \tilde{x}^4)$ — произвольные функции.

Утверждение 2.2.1. Класс $P_{1,2}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{1,2}$, состоит из полей вида (2.2.4).

2.3. Гиперболические винты

Алгебре $\mathcal{L}_{1,3} = L\{e_{24} + \lambda e_1\}$ соответствует одномерная группа $G_{1,3}$ гиперболических винтов, или псевдовращений (преобразований Лоренца). Уравнение (1.1.2) для вектора $\xi = e_{24} + \lambda e_1$ имеет вид

$$\lambda \partial_1 A_i + x^4 \partial_2 A_i + x^2 \partial_4 A_i + A_2 \delta_i^4 + A_4 \delta_i^2 = 0. \quad (2.3.1)$$

В результате замены

$$x^1 = \lambda \varphi + \tilde{x}^1, \quad x^2 = r \operatorname{ch} \varphi, \quad x^3 = \tilde{x}^3, \quad x^4 = r \operatorname{sh} \varphi \quad (2.3.2)$$

уравнение (2.3.1) принимает вид системы

$$\frac{\partial A_1}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} + A_4 = 0, \quad \frac{\partial A_3}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial A_4}{\partial \varphi} + A_2 = 0. \quad (2.3.3)$$

Общее решение системы (2.3.3) имеет вид

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1(\tilde{x}^1, r, \tilde{x}^3), & A_2 &= C_1 \operatorname{ch} \varphi + C_2 \operatorname{sh} \varphi, \\ A_3 &= A_3(\tilde{x}^1, r, \tilde{x}^3), & A_4 &= -C_1 \operatorname{sh} \varphi - C_2 \operatorname{ch} \varphi, \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

где $C_i = C_i(\tilde{x}^1, r, \tilde{x}^3)$ — произвольные функции.

Утверждение 2.3.1. Класс $P_{1,3}$ потенциалов A_i , инвариантных относительно группы $G_{1,3}$, состоит из полей вида (2.3.4).

2.4. Параболические винты

Алгебре $\mathcal{L}_{1,4} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_2 + \mu e_3\}$ ($\lambda, \mu = \text{const}$, $\lambda\mu = 0$) соответствует одномерная группа $G_{1,4}$ параболических винтов, или параболических вращений. Уравнение (1.1.2) для вектора $\xi = e_{12} - e_{14} + \lambda e_2 + \mu e_3$ имеет вид

$$XA_i - A_1(\delta_i^2 + \delta_i^4) + (A_2 - A_4)\delta_i^1 = 0, \quad (2.4.1)$$

где

$$X = -(x^2 + x^4)\partial_1 + (x^1 + \lambda)\partial_2 + \mu\partial_3 - x^1\partial_4. \quad (2.4.2)$$

Для его решения будем использовать разные замены в следующих трёх случаях:
а) $\lambda = \mu = 0$; б) $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$; в) $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$.

2.4.1. Класс $P_{1,4a}$

При $\lambda = \mu = 0$ преобразование координат

$$\tilde{x}^1 = x^2 + x^4, \quad \tilde{x}^2 = -\frac{x^1}{x^2 + x^4}, \quad \tilde{x}^3 = x^3, \quad \tilde{x}^4 = \frac{1}{2}(x^1)^2 + x^2(x^2 + x^4) \quad (2.4.3)$$

заменяет оператор (2.4.2) дифференцированием по $\tilde{x}^2$, уравнение (2.4.1) переходит в систему

$$\frac{\partial A_1}{\partial \tilde{x}^2} + A_2 - A_4 = 0, \quad \frac{\partial A_2}{\partial \tilde{x}^2} - A_1 = 0, \quad \frac{\partial A_3}{\partial \tilde{x}^2} = 0, \quad \frac{\partial A_4}{\partial \tilde{x}^2} - A_1 = 0, \quad (2.4.4)$$

общее решение которой имеет вид

$$A_1 = C_2\tilde{x}^2 + C_3, \quad A_2 = \frac{1}{2}C_2(\tilde{x}^2)^2 + C_3\tilde{x}^2 + C_1, \quad (2.4.5)$$

$$A_3 = A_3(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3, \tilde{x}^4), \quad A_4 = A_2 + C_2,$$

где $A_3(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3, \tilde{x}^4)$ и $C_k = C_k(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3, \tilde{x}^4)$ ($k = 1, 2, 3$) — произвольные функции.

Утверждение 2.4.1. Класс $P_{1,4a}$ потенциалов A_i , инвариантных относительно группы $G_{1,4a}$, соответствующей алгебре $\mathcal{L}_{1,4}$ ($\lambda = \mu = 0$), состоит из полей вида (2.4.5).

2.4.2. Класс $P_{1,4b}$

При $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$ вместо (2.4.3) используем замену

$$\begin{aligned} \tilde{x}^1 &= x^2 + x^4, \quad \tilde{x}^2 = -\frac{x^1}{x^2 + x^4}, \\ \tilde{x}^3 &= x^3 + \frac{\mu x^1}{x^2 + x^4}, \quad \tilde{x}^4 = \frac{1}{2}(x^1)^2 + x^2(x^2 + x^4), \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

которая приводит уравнение (2.4.1) к виду (2.4.4).

Утверждение 2.4.2. Класс $P_{1,4b}$ потенциалов A_i , инвариантных относительно группы $G_{1,4b}$, соответствующей алгебре $\mathcal{L}_{1,4}$ ($\lambda = 0$, $\mu \neq 0$), состоит из полей вида (2.4.5), где вместо замены координат (2.4.3) надо использовать (2.4.6).

2.4.3. Класс $P_{1,4c}$

При $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$ вместо (2.4.3) используем замену

$$\begin{aligned}\tilde{x}^1 &= 2\lambda x^1 + (x^2 + x^4)^2, & \tilde{x}^2 &= \frac{x^2 + x^4}{\lambda}, \\ \tilde{x}^3 &= x^3, & \tilde{x}^4 &= \lambda x^4 + x^1(x^2 + x^4) + \frac{(x^2 + x^4)^3}{3\lambda},\end{aligned}\quad (2.4.7)$$

приводящую уравнение (2.4.1) к виду (2.4.4).

Утверждение 2.4.3. Класс $P_{1,4c}$ потенциалов A_i , инвариантных относительно группы $G_{1,4c}$, соответствующей алгебре $\mathcal{L}_{1,4}$ ($\lambda \neq 0$, $\mu = 0$), состоит из полей вида (2.4.5), где вместо замены координат (2.4.3) надо использовать (2.4.7).

2.5. Пропорциональные бивращения

Алгебре $\mathcal{L}_{1,5} = L\{e_{13} + \lambda e_{24}\}$ соответствует одномерная группа $G_{1,5}$ пропорциональных бивращений. Уравнение (1.1.2) для вектора $\xi = e_{13} + \lambda e_{24}$ имеет вид

$$XA_i + A_1\delta_i^3 + \lambda A_2\delta_i^4 - A_3\delta_i^1 + \lambda A_4\delta_i^2, \quad (2.5.1)$$

$$X = x^3\partial_1 + \lambda x^4\partial_2 - x^1\partial_3 + \lambda x^2\partial_4. \quad (2.5.2)$$

Замена $\{x^i\} \rightarrow \{r, \rho, \theta, \varphi\}$,

$$\begin{aligned}x^1 &= r \cos(\theta - \varphi), & x^2 &= \rho \operatorname{ch}(\lambda\varphi), \\ x^3 &= r \sin(\theta - \varphi), & x^4 &= \rho \operatorname{sh}(\lambda\varphi),\end{aligned}\quad (2.5.3)$$

переводит оператор (2.5.2) в дифференцирование по φ , а уравнение (2.5.1) — в систему

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_1}{\partial \varphi} - A_3 &= 0, & \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} + \lambda A_4 &= 0, \\ \frac{\partial A_3}{\partial \varphi} + A_1 &= 0, & \frac{\partial A_4}{\partial \varphi} + \lambda A_2 &= 0.\end{aligned}\quad (2.5.4)$$

Общее решение системы (2.5.4) имеет вид

$$\begin{aligned}A_1 &= C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi, & A_2 &= C_3 \operatorname{ch} \lambda\varphi + C_4 \operatorname{sh} \lambda\varphi, \\ A_3 &= -C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi, & A_4 &= -C_3 \operatorname{sh} \lambda\varphi - C_4 \operatorname{ch} \lambda\varphi,\end{aligned}\quad (2.5.5)$$

где $C_i = C_i(\rho, r, \theta)$ — произвольные функции.

Утверждение 2.5.1. Класс $P_{1,5}$ потенциалов A_i , инвариантных относительно группы $G_{1,5}$, состоит из полей вида (2.5.5).

3. Потенциалы, допускающие двумерные группы

3.1. Трансляции

Здесь опишем классы потенциалов, инвариантных относительно двумерных групп трансляций.

3.1.1. Класс $P_{2,1a}$

Алгебра $\mathcal{L}_{2,1a} = L\{e_1, e_2\}$ соответствует группе $G_{2,1a}$ трансляций в направлениях векторов евклидовой плоскости. Так как $\mathcal{L}_{1,1a} \subset \mathcal{L}_{2,1a}$, то $P_{2,1a}$ является подклассом класса $P_{1,1a}$. Подставляя $A_i = A_i(x^2, x^3, x^4)$ в уравнение (1.1.2) для вектора $\xi = e_2$

$$\partial_2 A_i = 0, \quad (3.1.1)$$

получаем следующее утверждение.

Утверждение 3.1.1. Класс $P_{2,1a}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{2,1a}$, состоит из полей вида $A_i = A_i(x^3, x^4)$.

3.1.2. Класс $P_{2,1b}$

Алгебра $\mathcal{L}_{2,1b} = L\{e_2, e_4\}$ соответствует группе $G_{2,1b}$ трансляций в направлениях векторов псевдоевклидовой плоскости. Так как $\mathcal{L}_{1,1b} \subset \mathcal{L}_{2,1b}$, то $P_{2,1b} \subset P_{1,1b}$. Подставляя $A_i = A_i(x^1, x^2, x^3)$ в (3.1.1), получаем следующее утверждение.

Утверждение 3.1.2. Класс $P_{2,1b}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{2,1b}$, состоит из полей вида $A_i = A_i(x^1, x^3)$.

3.1.3. Класс $P_{2,1c}$

Алгебра $\mathcal{L}_{2,1c} = L\{e_1, e_2 + e_4\}$ соответствует группе $G_{2,1c}$ трансляций в направлениях векторов изотропной плоскости. Так как $\mathcal{L}_{1,1c} \subset \mathcal{L}_{2,1c}$, то $P_{2,1c} \subset P_{1,1c}$. Подставляя (2.1.5) в (2.1.1), получаем следующее утверждение.

Утверждение 3.1.3. Класс $P_{2,1c}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{2,1c}$, состоит из полей вида $A_i = A_i(x^3, x^2 - x^4)$.

3.2. Класс $P_{2,2}$

Алгебре $\mathcal{L}_{2,2} = L\{e_{13} + \mu e_4, e_2\}$ соответствует группа $G_{2,2}$, состоящая из всевозможных композиций эллиптических винтов с времениподобной осью и трансляций вдоль пространственноподобной прямой. Пусть $\mathcal{L}_{1,2b} = L\{e_{13} + \mu e_4\}$ ($\mathcal{L}_{1,2}$ при $\lambda = 0$). Так как $\mathcal{L}_{1,2b} \subset \mathcal{L}_{2,2}$, то $P_{2,2} \subset P_{1,2b}$. Так как $\lambda = 0$, замена (2.2.2) принимает вид

$$x^1 = r \sin \varphi, \quad x^2 = \tilde{x}^2, \quad x^3 = r \cos \varphi, \quad x^4 = \mu \varphi + \tilde{x}^4. \quad (3.2.1)$$

Подставляя (2.2.4) в (3.1.1), получаем

$$\begin{aligned} A_1 &= C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi, & A_2 &= A_2(r, \tilde{x}^4), \\ A_3 &= -C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi, & A_4 &= A_4(r, \tilde{x}^4), \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

где $C_i = C_i(r, \tilde{x}^4)$ — произвольные функции.

Утверждение 3.2.1. *Класс $P_{2,2}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{2,2}$, состоит из полей вида (3.2.2).*

3.3. Класс $P_{2,3}$

Алгебре $\mathcal{L}_{2,3} = L\{e_{13} + \lambda e_2, e_4\}$ соответствует группа $G_{2,3}$, состоящая из всевозможных композиций эллиптических винтов с пространственноподобной осью и трансляций вдоль времениподобной прямой. Класс $P_{2,3}$ является пересечением классов $P_{1,1b}$ и $P_{1,2a}$ ($P_{1,2}$ в случае $\mu = 0$, $\lambda \neq 0$). Замена (2.2.2) принимает вид

$$x^1 = r \sin \varphi, \quad x^2 = \lambda \varphi + \tilde{x}^2, \quad x^3 = r \cos \varphi, \quad x^4 = \tilde{x}^4. \quad (3.3.1)$$

Для описания класса $P_{2,3}$ достаточно в формулах (2.2.4) учесть, что компоненты ковектора A_i не зависят от x^4 . В результате получим следующее утверждение.

Утверждение 3.3.1. *Класс $P_{2,3}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{2,3}$, состоит из полей вида*

$$\begin{aligned} A_1 &= b_1 \cos \varphi + b_2 \sin \varphi, & A_2 &= A_2(r, \tilde{x}^2), \\ A_3 &= -b_1 \sin \varphi + b_2 \cos \varphi, & A_4 &= A_4(r, \tilde{x}^2), \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

где $b_k = b_k(r, \tilde{x}^2)$, $A_2(r, \tilde{x}^2)$ и $A_4(r, \tilde{x}^2)$ — произвольные функции.

3.4. Класс $P_{2,4}$

Алгебре $\mathcal{L}_{2,4} = L\{e_{13} + \lambda e_2, e_2 + e_4\}$ соответствует группа $G_{2,4}$, состоящая из всевозможных композиций эллиптических винтов с пространственноподобной осью и трансляций вдоль изотропной прямой. Класс $P_{2,4}$ является пересечением классов $P_{1,2a}$ и $P_{1,1c}$. Для описания класса $P_{2,4}$ достаточно подставить выражение потенциала (2.2.4) в уравнение (2.1.3), учитывая, что замена (2.2.2) здесь имеет вид (3.3.1). В результате получим следующее утверждение.

Утверждение 3.4.1. *Класс $P_{2,4}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{2,4}$, состоит из полей вида*

$$\begin{aligned} A_1 &= C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi, & A_2 &= A_2(r, \tilde{x}^2 - \tilde{x}^4), \\ A_3 &= -C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi, & A_4 &= A_4(r, \tilde{x}^2 - \tilde{x}^4), \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

где $C_i = C_i(r, \tilde{x}^2 - \tilde{x}^4)$ — произвольные функции.

3.5. Класс $P_{2,5}$

Алгебре $\mathcal{L}_{2,5} = L\{e_{24} + \lambda e_3, e_1\}$ соответствует группа $G_{2,5}$, состоящая из всевозможных композиций гиперболических винтов и трансляций вдоль пространственноподобной оси. Класс $P_{1,3a}$ потенциалов, соответствующий алгебре $L\{e_{24} + \lambda e_3\} = \mathcal{L}_{1,3a}$, определяется формулами (2.3.4), где вместо замены (2.3.2) должна быть следующая:

$$x^1 = \tilde{x}^1, \quad x^2 = r \operatorname{ch} \varphi, \quad x^3 = \lambda \varphi + \tilde{x}^3, \quad x^4 = r \operatorname{sh} \varphi. \quad (3.5.1)$$

Класс $P_{2,5}$ является пересечением классов $P_{1,3a}$ и $P_{1,1a}$. Комбинируя (2.3.4), (3.5.1) и (2.1.1), получим следующий результат.

Утверждение 3.5.1. *Класс $P_{2,5}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{2,5}$, состоит из полей вида*

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1(r, \tilde{x}^3), & A_2 &= C_1 \operatorname{ch} \varphi + C_2 \operatorname{sh} \varphi, \\ A_3 &= A_3(r, \tilde{x}^3), & A_4 &= -C_1 \operatorname{sh} \varphi - C_2 \operatorname{ch} \varphi, \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

где $C_i = C_i(r, \tilde{x}^3)$ — произвольные функции, а замена координат определяется формулами (3.5.1).

3.6. Класс $P_{2,6}$

Алгебре $\mathcal{L}_{2,6} = L\{e_{24} + \lambda e_3, e_2 - e_4\}$ соответствует группа $G_{2,6}$, состоящая из всевозможных композиций гиперболических винтов и трансляций вдоль изотропной прямой. Класс $P_{2,6}$ является сужением класса $P_{1,3a}$ путём наложения дополнительного условия — уравнения (1.1.2) для вектора $\xi = e_2 - e_4$:

$$\partial_2 A_i - \partial_4 A_i = 0. \quad (3.6.1)$$

Подставляя (2.3.4) в уравнение (3.6.1) с предварительной заменой переменных (3.5.1), в результате вычислений получаем следующее утверждение.

Утверждение 3.6.1. *Класс $P_{2,6}$ потенциалов A_i , инвариантных относительно группы $G_{2,6}$, состоит из полей вида*

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3 - \lambda \ln r), & A_2 &= C_1 \operatorname{ch} \varphi + C_2 \operatorname{sh} \varphi, \\ A_3 &= A_3(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3 - \lambda \ln r), & A_4 &= -C_1 \operatorname{sh} \varphi - C_2 \operatorname{ch} \varphi, \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= a_1(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3 - \lambda \ln r) \operatorname{ch} \ln r + a_2(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3 - \lambda \ln r) \operatorname{sh} \ln r, \\ C_2 &= a_1(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3 - \lambda \ln r) \operatorname{sh} \ln r + a_2(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3 - \lambda \ln r) \operatorname{ch} \ln r, \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

а замена координат определяется формулами (3.5.1).

3.7. Класс $P_{2,7}$

Здесь опишем класс $P_{2,7}$ потенциалов, соответствующий алгебре $\mathcal{L}_{2,7} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_2 + \mu e_3, e_2 - e_4\}$ ($\lambda\mu = 0$). Соответствующая группа $G_{2,7}$

состоит из всевозможных композиций параболических винтов и трансляций вдоль изотропной прямой. Алгебра $\mathcal{L}_{2,7}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{1,4}$ с помощью вектора $\xi = e_2 - e_4$. Поэтому соответствующие ей при различных значениях параметров λ и μ классы $P_{2,7a}$, $P_{2,7b}$ и $P_{2,7c}$ получаются сужением классов $P_{1,4a}$, $P_{1,4b}$ и $P_{1,4c}$ путём наложения дополнительного условия (3.6.1).

3.7.1. Класс $P_{2,7a}$

При $\lambda = \mu = 0$ преобразование координат (2.4.3) приводит уравнение (3.6.1) к виду $\tilde{x}^1 \partial A_i / \partial \tilde{x}^4 = 0$. Поэтому компоненты потенциала не зависят от $\tilde{x}^4$ и справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3.7.1. *Класс $P_{2,7a}$ потенциалов A_i , инвариантных относительно группы $G_{2,7a}$, соответствующей алгебре $\mathcal{L}_{2,7}$ ($\lambda = \mu = 0$), состоит из полей вида*

$$\begin{aligned} A_1 &= C_2 \tilde{x}^2 + C_3, & A_2 &= \frac{1}{2} C_2 (\tilde{x}^2)^2 + C_3 \tilde{x}^2 + C_1, \\ A_3 &= A_3(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3), & A_4 &= A_2 + C_2, \end{aligned} \quad (3.7.1)$$

где $A_3(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3)$ и $C_k = C_k(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3)$ ($k = 1, 2, 3$) — произвольные функции, а замена координат определяется формулами (2.4.3).

3.7.2. Класс $P_{2,7b}$

При $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$ вместо замены (2.4.3) используется (2.4.6). Результат имеет следующий вид.

Утверждение 3.7.2. *Класс $P_{2,7b}$ потенциалов A_i , инвариантных относительно группы $G_{2,7b}$, соответствующей алгебре $\mathcal{L}_{2,7}$ ($\lambda = 0$, $\mu \neq 0$), состоит из полей вида (3.7.1), где замена координат определяется формулами (2.4.6).*

3.7.3. Класс $P_{2,7c}$

При $\lambda \neq 0$ и $\mu = 0$ замена координат (2.4.7) приводит уравнение (3.6.1) к виду $-\lambda \partial A_i / \partial \tilde{x}^4 = 0$. Поэтому компоненты потенциала не зависят от $\tilde{x}^4$ и справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3.7.3. *Класс $P_{2,7c}$ потенциалов A_i , инвариантных относительно группы $G_{2,7c}$, соответствующей алгебре $\mathcal{L}_{2,7}$ ($\lambda \neq 0$, $\mu = 0$), состоит из полей вида (3.7.1), где замена координат определяется формулами (2.4.7).*

3.8. Класс $P_{2,8}$

Алгебре $\mathcal{L}_{2,8} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_2, e_3\}$ соответствует группа $G_{2,8}$, порождаемая параболическими винтами и смещениями вдоль пространственноподобной

прямой. Так как $\mathcal{L}_{1,4c} \subset \mathcal{L}_{2,8}$, то $P_{2,8} \subset P_{1,4c}$. Класс $P_{2,8}$ получается сужением класса $P_{1,4c}$ путём наложения дополнительного условия (1.1.2) для вектора e_3

$$\partial_3 A_i = 0. \quad (3.8.1)$$

Замена (2.4.7) в уравнении (3.8.1) приводит к уравнению $\partial A_i / \partial \tilde{x}^3 = 0$. Таким образом, имеем следующий результат.

Утверждение 3.8.1. Класс $P_{2,8}$ потенциалов A_i , инвариантных относительно группы $G_{2,8}$, состоит из полей вида

$$\begin{aligned} A_1 &= C_2 \tilde{x}^2 + C_3, & A_2 &= \frac{1}{2} C_2 (\tilde{x}^2)^2 + C_3 \tilde{x}^2 + C_1, \\ A_3 &= A_3(\tilde{x}^1, \tilde{x}^4), & A_4 &= A_2 + C_2, \end{aligned} \quad (3.8.2)$$

где $A_3(\tilde{x}^1, \tilde{x}^4)$ и $C_k = C_k(\tilde{x}^1, \tilde{x}^4)$ ($k = 1, 2, 3$) — произвольные функции, а замена координат определяется формулами (2.4.7).

3.9. Класс $P_{2,9}$

Алгебре $\mathcal{L}_{2,9} = L\{e_{13} + \lambda e_{24}, e_2 - e_4\}$ соответствует группа $G_{2,9}$, состоящая из всевозможных композиций пропорциональных бивращений и трансляций вдоль изотропного направления. Так как $\mathcal{L}_{1,5} \subset \mathcal{L}_{2,9}$, то класс $P_{2,9}$ является подклассом класса $P_{1,5}$. Для его определения достаточно подставить (2.5.5) в уравнение

$$\frac{\partial A_i}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_i}{\partial \theta} - \lambda \rho \frac{\partial A_i}{\partial \rho} = 0, \quad (3.9.1)$$

полученное из (3.6.1) в результате замены (2.5.3). Результат имеет следующий вид.

Утверждение 3.9.1. Класс $P_{2,9}$ потенциалов A_i , инвариантных относительно группы $G_{2,9}$, состоит из полей вида

$$\begin{aligned} A_1 &= C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi, & A_2 &= \rho \Phi_3 e^{\lambda \varphi}, \\ A_3 &= -C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi, & A_4 &= -\rho \Phi_3 e^{\lambda \varphi}, \end{aligned} \quad (3.9.2)$$

$$C_1 = \Phi_1 \cos \frac{\ln \rho}{\lambda} + \Phi_2 \sin \frac{\ln \rho}{\lambda}, \quad C_2 = -\Phi_1 \sin \frac{\ln \rho}{\lambda} + \Phi_2 \cos \frac{\ln \rho}{\lambda}, \quad (3.9.3)$$

$\Phi_k = \Phi_k(r, \lambda \theta + \ln \rho)$ — произвольные функции (замена координат определяется формулами (2.5.3)).

3.10. Класс $P_{2,10}$

Алгебре $\mathcal{L}_{2,10} = L\{e_{13}, e_{24}\} = L\{e_{13} + e_{24}, e_{13}\}$ соответствует группа $G_{2,10}$, состоящая из композиций поворотов и псевдовращений или поворотов и бивращений при $\lambda = 1$. Так как в последнем случае $\mathcal{L}_{1,5} \subset \mathcal{L}_{2,10}$, то $P_{2,10} \subset P_{1,5}$.

Записывая (2.5.5) при $\lambda = 1$ в виде

$$\begin{aligned} A_1 &= C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi, & A_2 &= C_3 e^\varphi + C_4 e^{-\varphi}, \\ A_3 &= -C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi, & A_4 &= -C_3 e^\varphi + C_4 e^{-\varphi} \end{aligned} \quad (3.10.1)$$

и подставляя (3.10.1) в уравнение (2.2.1) при $\lambda = \mu = 0$

$$x^3 \partial_1 A_i - x^1 \partial_3 A_i + A_1 \delta_i^3 - A_3 \delta_i^1 = 0, \quad (3.10.2)$$

получаем следующий результат.

Утверждение 3.10.1. Класс $P_{2,10}$ потенциалов A_i , инвариантных относительно группы $G_{2,10}$, состоит из полей вида

$$\begin{aligned} A_1 &= -t_1 \sin(\theta - \varphi) + t_2 \cos(\theta - \varphi), & A_2 &= t_3 e^\varphi + t_4 e^{-\varphi}, \\ A_3 &= t_1 \cos(\theta - \varphi) + t_2 \sin(\theta - \varphi), & A_4 &= -t_3 e^\varphi + t_4 e^{-\varphi}, \end{aligned} \quad (3.10.3)$$

где $t_k = t_k(r, \rho)$ — произвольные функции, а замена координат определяется формулами (2.5.3) при $\lambda = 1$:

$$x^1 = r \cos(\theta - \varphi), \quad x^2 = \rho \operatorname{ch} \varphi, \quad x^3 = r \sin(\theta - \varphi), \quad x^4 = \rho \operatorname{sh} \varphi. \quad (3.10.4)$$

3.11. Класс $P_{2,11}$

Здесь опишем класс $P_{2,11}$ потенциалов, соответствующий алгебре $\mathcal{L}_{2,11} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_1 + \mu e_3, e_{23} + e_{34} - \mu e_1 + \lambda e_3\}$ ($\lambda = 0, \mu \neq 0 \sim \lambda \neq 0, \mu = 0$). В дальнейшем также потребуется случай $\lambda = \mu = 0$.

3.11.1. Класс $P_{2,11}$ ($\lambda = 0, \mu \neq 0$)

Алгебре $\mathcal{L}_{2,11}$ соответствует группа $G_{2,11}$, порождаемая двумя одномерными подгруппами параболических винтов с различными осями. Класс $P_{2,11}$ является подклассом $P_{1,4b}$. Для его нахождения достаточно подставить (2.4.5), (2.4.6) в уравнение (1.1.2) для вектора $\xi = e_{23} + e_{34} - \mu e_1$:

$$X A_i - A_2 \delta_i^3 + A_3 (\delta_i^2 + \delta_i^4) + A_4 \delta_i^3 = 0, \quad (3.11.1)$$

$$\begin{aligned} X f &= -\mu \partial_1 f - x^3 \partial_2 f + (x^2 + x^4) \partial_3 f + x^3 \partial_4 f = \\ &= \frac{\mu}{\tilde{x}^1} \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{(\tilde{x}^1)^2 - \mu^2}{\tilde{x}^1} \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^3} - \tilde{x}^1 \tilde{x}^3 \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^4}. \end{aligned} \quad (3.11.2)$$

При решении этих уравнений используется замена

$$u = \frac{\tilde{x}^1 \tilde{x}^3}{(\tilde{x}^1)^2 - \mu^2}, \quad v = \frac{1}{2} (\tilde{x}^1 \tilde{x}^3)^2 + \tilde{x}^4 ((\tilde{x}^1)^2 - \mu^2). \quad (3.11.3)$$

Результат имеет следующий вид.

Утверждение 3.11.1. Класс $P_{2,11}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{2,11}$, определяется формулами

$$\begin{aligned} A_1 &= \Phi \tilde{x}^2 + \Psi, & A_2 &= \frac{1}{2} \Phi (\tilde{x}^2)^2 + \Psi \tilde{x}^2 + \Xi, \\ A_3 &= \Upsilon, & A_4 &= \frac{1}{2} \Phi (\tilde{x}^2)^2 + \Psi \tilde{x}^2 + \Xi + \Phi, \end{aligned} \quad (3.11.4)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi &= -\frac{\mu u}{\tilde{x}^1} \Phi + C_1, & \Upsilon &= -\Phi u + C_2, \\ \Xi &= \frac{\mu^2 + (\tilde{x}^1)^2}{2(\tilde{x}^1)^2} \Phi u^2 - \frac{\mu C_1 + \tilde{x}^1 C_2}{\tilde{x}^1} u + C_3, \end{aligned} \quad (3.11.5)$$

а $\Phi = \Phi(\tilde{x}^1, v)$ и $C_k = C_k(\tilde{x}^1, v)$ — произвольные гладкие функции двух переменных; при этом связь между переменными $\{x^i\}$, $\{\tilde{x}^i\}$ и $\{u, v\}$ задаётся формулами (2.4.6) и (3.11.3).

3.11.2. Класс $P_{2,11a}$ ($\lambda = \mu = 0$)

Группа $G_{2,11a}$, соответствующая алгебре $\mathcal{L}_{2,11a} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}\}$, порождается двумя одномерными подгруппами параболических вращений. Уравнения (1.1.2), соответствующие базисным векторам алгебры $\mathcal{L}_{2,11a}$, имеют вид

$$\begin{aligned} XA_1 + A_2 - A_4 &= 0, & XA_2 - A_1 &= 0, & XA_3 &= 0, & XA_4 - A_1 &= 0, \\ X &= -(x^2 + x^4)\partial_1 + x^1\partial_2 - x^1\partial_4, \end{aligned} \quad (3.11.6)$$

и

$$\begin{aligned} YA_1 &= 0, & YA_2 + A_3 &= 0, & YA_3 - A_2 + A_4 &= 0, & YA_4 + A_3 &= 0, \\ Y &= -x^3\partial_2 + (x^2 + x^4)\partial_3 + x^3\partial_4. \end{aligned} \quad (3.11.7)$$

Замена

$$\begin{aligned} \tilde{x}^1 &= x^2 + x^4, & \tilde{x}^2 &= -\frac{x^1}{x^2 + x^4}, \\ \tilde{x}^3 &= \frac{x^3}{x^2 + x^4}, & \tilde{x}^4 &= (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 \end{aligned} \quad (3.11.8)$$

переводит оператор X в дифференцирование по $\tilde{x}^2$, а Y — в дифференцирование по $\tilde{x}^3$. Общее решение системы, полученной из (3.11.6), (3.11.7) в результате замены (3.11.8), может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} A_1 &= -\tilde{x}^2\Phi + \Psi, & A_2 &= -\frac{1}{2}\Phi((\tilde{x}^2)^2 + (\tilde{x}^3)^2) + \tilde{x}^2\Psi - \tilde{x}^3\Xi + \Theta, \\ A_3 &= \tilde{x}^3\Phi + \Xi, & A_4 &= A_2 - \Phi, \end{aligned} \quad (3.11.9)$$

где $\Phi = \Phi(\tilde{x}^1, \tilde{x}^4)$, $\Psi = \Psi(\tilde{x}^1, \tilde{x}^4)$, $\Xi = \Xi(\tilde{x}^1, \tilde{x}^4)$ и $\Theta = \Theta(\tilde{x}^1, \tilde{x}^4)$ — произвольные функции.

Утверждение 3.11.2. Класс $P_{2,11a}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{2,11a}$, определяется формулами (3.11.8) и (3.11.9).

3.12. Класс $P_{2,12}$

Алгебре $\mathcal{L}_{2,12} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{24} + \lambda e_3\}$ соответствует группа $G_{2,12}$, порождаемая параболическими вращениями и гиперболическими винтами. Так как $\mathcal{L}_{1,4a} \subset \mathcal{L}_{2,12}$ и $\mathcal{L}_{1,3a} \subset \mathcal{L}_{2,12}$, то класс $P_{2,12}$ является пересечением классов $P_{1,4a}$ и $P_{1,3a}$. Поэтому для нахождения класса $P_{2,12}$ достаточно подставить (2.4.3)–(2.4.5) в уравнение (1.1.2) для вектора $\xi = e_{24} + \lambda e_3$:

$$x^4 \partial_2 A_i + \lambda \partial_3 A_i + x^2 \partial_4 A_i + A_2 \delta_i^4 + A_4 \delta_i^2 = 0. \quad (3.12.1)$$

Последнее уравнение переписывается в виде системы

$$X A_1 = 0, \quad X A_2 + A_4 = 0, \quad X A_3 = 0, \quad X A_4 + A_2 = 0, \quad (3.12.2)$$

где оператор X действует на функции f следующим образом:

$$Xf = x^4 \partial_2 f + \lambda \partial_3 f + x^2 \partial_4 f = \tilde{x}^1 \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^1} - \tilde{x}^2 \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^2} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^3} + (\tilde{x}^1)^2 \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^4},$$

а координаты $\{\tilde{x}^i\}$ связаны с $\{x^i\}$ формулами (2.4.3). Подставляя (2.4.5) в (3.12.2), а также учитывая линейную независимость функций $(\tilde{x}^2)^2$, $\tilde{x}^2$ и 1, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \tilde{x}^1 \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^1} + \lambda \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^3} + (\tilde{x}^1)^2 \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4} - C_2 &= 0, \\ \tilde{x}^1 \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^1} + \lambda \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^3} + (\tilde{x}^1)^2 \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^4} &= 0, \\ \tilde{x}^1 \frac{\partial A_3}{\partial \tilde{x}^1} + \lambda \frac{\partial A_3}{\partial \tilde{x}^3} + (\tilde{x}^1)^2 \frac{\partial A_3}{\partial \tilde{x}^4} &= 0, \\ \tilde{x}^1 \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^1} + \lambda \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^3} + (\tilde{x}^1)^2 \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^4} + C_1 + C_2 &= 0, \\ \tilde{x}^1 \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^1} + \lambda \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^3} + (\tilde{x}^1)^2 \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^4} + C_1 + \tilde{x}^1 \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^1} + \lambda \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^3} + (\tilde{x}^1)^2 \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4} &= 0. \end{aligned} \quad (3.12.3)$$

Система (3.12.3) легко интегрируется с использованием замены

$$u = \tilde{x}^3 - \lambda \ln \tilde{x}^1, \quad v = \tilde{x}^4 - \frac{1}{2}(\tilde{x}^1)^2. \quad (3.12.4)$$

Результат имеет вид

$$C_1 = -\frac{\tilde{x}^1}{2} \Phi_1 + \frac{1}{\tilde{x}^1} \Phi_2, \quad C_2 = \tilde{x}^1 \Phi_1, \quad C_3 = \Phi_3, \quad A_3 = \Phi_4, \quad (3.12.5)$$

где $\Phi_k = \Phi_k(u, v)$ — произвольные функции. Подставляя (3.12.5) в (2.4.5), получаем следующий результат.

Утверждение 3.12.1. Класс $P_{2,12}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{2,12}$, определяется формулами

$$\begin{aligned} A_1 &= \tilde{x}^1 \tilde{x}^2 \Phi_1 + \Phi_3, \quad A_2 = \frac{\tilde{x}^1}{2} ((\tilde{x}^2)^2 - 1) \Phi_1 + \tilde{x}^2 \Phi_3 + \frac{\Phi_2}{\tilde{x}^1}, \\ A_3 &= \Phi_4, \quad A_4 = \frac{\tilde{x}^1}{2} ((\tilde{x}^2)^2 + 1) \Phi_1 + \tilde{x}^2 \Phi_3 + \frac{\Phi_2}{\tilde{x}^1}, \end{aligned} \quad (3.12.6)$$

где зависимость между переменными $\{x^i\}$, $\{\tilde{x}^i\}$ и $\{u, v\}$ задаётся формулами (2.4.3) и (3.12.4).

4. Потенциалы, допускающие трёхмерные группы

4.1. Трансляции

Здесь опишем классы потенциалов, инвариантных относительно трёхмерных групп трансляций.

4.1.1. Класс $P_{3,1a}$

Алгебра $\mathcal{L}_{3,1a} = L\{e_1, e_2, e_3\}$ соответствует группе $G_{3,1a}$ трансляций в направлениях векторов трёхмерного евклидова пространства $Ox^1x^2x^3$. Так как $\mathcal{L}_{2,1a} \subset \mathcal{L}_{3,1a}$, класс $P_{3,1a}$ является подклассом класса $P_{2,1a}$. Подставляя $A_i = A_i(x^3, x^4)$ в уравнение (3.8.1) ((1.1.2) для вектора $\xi = e_3$), получаем в результате следующее утверждение.

Утверждение 4.1.1. Класс $P_{3,1a}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{3,1a}$, состоит из полей вида $A_i = A_i(x^4)$.

4.1.2. Класс $P_{3,1b}$

Алгебра $\mathcal{L}_{3,1b} = L\{e_1, e_2, e_4\}$ соответствует группе $G_{3,1b}$ трансляций трёхмерного псевдоевклидова пространства $Ox^1x^2x^4$. Так как $\mathcal{L}_{2,1b} \subset \mathcal{L}_{3,1b}$, то класс $P_{3,1b}$ является подклассом класса $P_{2,1b}$. Подставляя $A_i = A_i(x^1, x^3)$ в (2.1.2), получаем следующий результат.

Утверждение 4.1.2. Класс $P_{3,1b}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{3,1b}$, состоит из полей вида $A_i = A_i(x^3)$.

4.1.3. Класс $P_{3,1c}$

Алгебра $\mathcal{L}_{3,1c} = L\{e_1, e_3, e_2 + e_4\}$ соответствует группе $G_{3,1c}$ трансляций в направлениях векторов трёхмерного изотропного пространства. Так как $\mathcal{L}_{2,1c} \subset \mathcal{L}_{3,1c}$, класс $P_{3,1c}$ является подклассом класса $P_{2,1c}$. Подставляя $A_i = A_i(x^3, x^2 - x^4)$ в (3.8.1), получаем следующий результат.

Утверждение 4.1.3. Класс $P_{3,1c}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{3,1c}$, состоит из полей вида $A_i = A_i(x^2 - x^4)$.

4.2. Класс $P_{3,2}$

Алгебре $\mathcal{L}_{3,2} = L\{e_{13} + \lambda e_2, e_1, e_3\}$ ($\lambda \neq 0$) соответствует группа $G_{3,2}$, состоящая из всевозможных композиций эллиптических винтов с пространственноподобной осью и трансляций в направлениях векторов двумерной евклидовой плоскости. Класс $P_{3,2}$ получается в результате решения системы уравнений

(2.1.1), (3.8.1) и (2.2.1) при $\mu = 0$:

$$x^3 \partial_1 A_i + \lambda \partial_2 A_i - x^1 \partial_3 A_i + A_1 \delta_i^3 - A_3 \delta_i^1 = 0. \quad (4.2.1)$$

Из (2.1.1), (3.8.1) следует, что A_i не зависит от x^1 и x^3 . Подставляя $A_i = A_i(x^2, x^4)$ в (4.2.1), получаем

$$\lambda \partial_2 A_1 - A_3 = 0, \quad \lambda \partial_2 A_2 = 0, \quad \lambda \partial_2 A_3 + A_1 = 0, \quad \lambda \partial_2 A_4 = 0. \quad (4.2.2)$$

Решение системы (4.2.2) при $\lambda \neq 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} A_1 &= C_1(x^4) \sin \frac{x^2}{\lambda} + C_2(x^4) \cos \frac{x^2}{\lambda}, & A_2 &= A_2(x^4), \\ A_3 &= C_1(x^4) \cos \frac{x^2}{\lambda} - C_2(x^4) \sin \frac{x^2}{\lambda}, & A_4 &= A_4(x^4), \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

где $C_1(x^4)$, $C_2(x^4)$, $A_2(x^4)$ и $A_4(x^4)$ — произвольные функции.

При $\lambda = 0$ $G_{3,2}$ представляет собой группу движений двумерной евклидовой плоскости, а решение системы (4.2.2) имеет вид

$$A_1 = A_3 = 0, \quad A_2 = A_2(x^2, x^4), \quad A_4 = A_4(x^2, x^4). \quad (4.2.4)$$

Утверждение 4.2.1. Класс $P_{3,2}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{3,2}$, состоит из полей вида (4.2.3) при $\lambda \neq 0$ и (4.2.4) при $\lambda = 0$.

4.3. Класс $P_{3,3}$

Алгебре $\mathcal{L}_{3,3} = L\{e_{13} + \mu e_4, e_1, e_3\}$ ($\mu \neq 0$) соответствует группа $G_{3,3}$, состоящая из всевозможных композиций эллиптических винтов с времениподобной осью и трансляций в направлениях векторов двумерной евклидовой плоскости. Класс $P_{3,3}$ получается в результате решения системы уравнений (2.1.1), (3.8.1) и (2.2.1) при $\lambda = 0$:

$$x^3 \partial_1 A_i - x^1 \partial_3 A_i + \mu \partial_4 A_i + A_1 \delta_i^3 - A_3 \delta_i^1 = 0. \quad (4.3.1)$$

Действуя как в предыдущем разделе, получим следующий результат.

Утверждение 4.3.1. Класс $P_{3,3}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{3,3}$, состоит из полей вида

$$\begin{aligned} A_1 &= C_1(x^2) \sin \frac{x^4}{\mu} + C_2(x^2) \cos \frac{x^4}{\mu}, & A_2 &= A_2(x^2), \\ A_3 &= C_1(x^2) \cos \frac{x^4}{\mu} - C_2(x^2) \sin \frac{x^4}{\mu}, & A_4 &= A_4(x^2), \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

где $C_1(x^2)$, $C_2(x^2)$, $A_2(x^2)$ и $A_4(x^2)$ — произвольные функции.

4.4. Класс $P_{3,4}$

Алгебре $\mathcal{L}_{3,4} = L\{e_{13} + \lambda(e_2 + e_4), e_1, e_3\}$ соответствует группа $G_{3,4}$, состоящая из всевозможных композиций эллиптических винтов с изотропной осью и трансляций в направлениях векторов двумерной евклидовой плоскости Ox^1x^3 . Класс $P_{3,4}$ получается в результате решения системы уравнений (2.1.1), (3.8.1) и (2.2.1) при $\lambda = \mu \neq 0$:

$$x^3\partial_1 A_i + \lambda\partial_2 A_i - x^1\partial_3 A_i + \lambda\partial_4 A_i + A_1\delta_i^3 - A_3\delta_i^1 = 0. \quad (4.4.1)$$

Подставляя $A_i = A_i(x^2, x^4)$ в (4.4.1), получаем

$$\begin{aligned} \lambda(\partial_2 + \partial_4)A_1 - A_3 &= 0, & \lambda(\partial_2 + \partial_4)A_2 &= 0, \\ \lambda(\partial_2 + \partial_4)A_3 + A_1 &= 0, & \lambda(\partial_2 + \partial_4)A_4 &= 0. \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Используя замену

$$u = x^2 + x^4, \quad v = x^2 - x^4, \quad (4.4.3)$$

найдем решение системы (4.4.2):

$$\begin{aligned} A_1 &= C_1(v) \sin \frac{u}{2\lambda} + C_2(v) \cos \frac{u}{2\lambda}, & A_2 &= A_2(v), \\ A_3 &= C_1(v) \cos \frac{u}{2\lambda} - C_2(v) \sin \frac{u}{2\lambda}, & A_4 &= A_4(v), \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

где $C_1(v)$, $C_2(v)$, $A_2(v)$ и $A_4(v)$ — произвольные функции.

Утверждение 4.4.1. Класс $P_{3,4}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{3,4}$, определяется формулами (4.4.3) и (4.4.4).

4.5. Класс $P_{3,5}$

Алгебре $\mathcal{L}_{3,5} = L\{e_{24}, e_1, e_3\}$ соответствует группа $G_{3,5}$, состоящая из всевозможных композиций псевдовращений в плоскости Ox^2x^4 и трансляций в направлениях векторов евклидовой плоскости Ox^1x^3 . Класс $P_{3,4}$ получается в результате решения системы уравнений (2.1.1), (3.8.1) и (2.3.1) при $\lambda = 0$:

$$x^4\partial_2 A_i + x^2\partial_4 A_i + A_2\delta_i^4 + A_4\delta_i^2 = 0. \quad (4.5.1)$$

Подставляя $A_i = A_i(x^2, x^4)$ в (4.5.1), получаем

$$XA_1 = 0, \quad XA_2 + A_4 = 0, \quad XA_3 = 0, \quad XA_4 + A_2 = 0, \quad (4.5.2)$$

где $X = x^4\partial_2 + x^2\partial_4$. Используя замену

$$x^2 = \rho \operatorname{ch} \varphi, \quad x^4 = \rho \operatorname{sh} \varphi, \quad (4.5.3)$$

получим решение системы (4.5.2):

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1(\rho), & A_2 &= C_1(\rho) \operatorname{ch} \varphi + C_2(\rho) \operatorname{sh} \varphi, \\ A_3 &= A_3(\rho), & A_4 &= -C_1(\rho) \operatorname{sh} \varphi - C_2(\rho) \operatorname{ch} \varphi, \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

где $C_1(\rho)$, $C_2(\rho)$, $A_1(\rho)$ и $A_3(\rho)$ — произвольные функции.

Утверждение 4.5.1. Класс $P_{3,5}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{3,5}$, определяется формулами (4.5.3) и (4.5.4).

4.6. Класс $P_{3,6}$

Алгебре $\mathcal{L}_{3,6} = L\{e_{24} + \lambda e_3, e_2, e_4\}$ ($\lambda \neq 0$) соответствует группа $G_{3,6}$, состоящая из композиций гиперболических винтов и трансляций в направлениях векторов двумерной псевдоевклидовой плоскости. Алгебра $\mathcal{L}_{3,6}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{2,1b}$ с помощью вектора $e_{24} + \lambda e_3$, поэтому класс $P_{3,6}$ является подклассом класса $P_{2,1b}$. Подставляя $A_i = A_i(x^1, x^3)$ в уравнение (3.12.1) ((1.1.2) для вектора $\xi = e_{24} + \lambda e_3$), получаем

$$\lambda \partial_3 A_1 = 0, \quad \lambda \partial_3 A_2 + A_4 = 0, \quad \lambda \partial_3 A_3 = 0, \quad \lambda \partial_3 A_4 + A_2 = 0. \quad (4.6.1)$$

Решение системы (4.6.1) имеет при $\lambda \neq 0$ вид

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1(x^1), \quad A_2 = C_1(x^1) \operatorname{ch} \frac{x^3}{\lambda} + C_2(x^1) \operatorname{sh} \frac{x^3}{\lambda}, \\ A_3 &= A_3(x^1), \quad A_4 = -C_1(x^1) \operatorname{sh} \frac{x^3}{\lambda} - C_2(x^1) \operatorname{ch} \frac{x^3}{\lambda}, \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

где $C_1(x^1)$, $C_2(x^1)$, $A_1(x^1)$ и $A_3(x^1)$ — произвольные функции.

При $\lambda = 0$ $G_{3,6}$ представляет собой группу движений двумерной псевдоевклидовой плоскости, а решение системы (4.6.1) имеет вид

$$A_1 = A_1(x^1, x^3), \quad A_2 = 0, \quad A_3 = A_3(x^1, x^3), \quad A_4 = 0. \quad (4.6.3)$$

Утверждение 4.6.1. Класс $P_{3,6}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{3,6}$, состоит из полей вида (4.6.2) при $\lambda \neq 0$ и (4.6.3) при $\lambda = 0$.

4.7. Класс $P_{3,7}$

Алгебре $\mathcal{L}_{3,7} = L\{e_{24} + \lambda e_3, e_1, e_2 - e_4\}$ соответствует группа $G_{3,7}$, состоящая из всевозможных композиций гиперболических винтов и трансляций в направлениях векторов изотропной плоскости. Алгебра $\mathcal{L}_{3,7}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{2,6}$ с помощью вектора e_1 . Поэтому $P_{3,7} \subset P_{2,6}$. Добавляя уравнение (2.1.1), получим, что A_i не зависит от $x^1 = \tilde{x}^1$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4.7.1. Класс $P_{3,7}$ потенциалов A_i , инвариантных относительно группы $G_{3,7}$, состоит из полей вида

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1(u), \quad A_2 = C_1 \operatorname{ch} \varphi + C_2 \operatorname{sh} \varphi, \\ A_3 &= A_3(u), \quad A_4 = -C_1 \operatorname{sh} \varphi - C_2 \operatorname{ch} \varphi, \end{aligned} \quad (4.7.1)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= a_1(u) \operatorname{ch} \ln r + a_2(u) \operatorname{sh} \ln r, \\ C_2 &= a_1(u) \operatorname{sh} \ln r + a_2(u) \operatorname{ch} \ln r, \end{aligned} \quad (4.7.2)$$

$u = \tilde{x}^3 - \lambda \ln r$, а замена координат определяется формулами (3.5.1).

4.8. Класс $P_{3,8}$

Алгебре $\mathcal{L}_{3,8} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_2, e_3, e_2 - e_4\}$ соответствует группа $G_{3,8}$, порождаемая параболическими винтами и трансляциями в направлениях векторов изотропной плоскости. Алгебра $\mathcal{L}_{3,8}$ является расширением алгебр $\mathcal{L}_{2,7c}$ и $\mathcal{L}_{2,8}$. Поэтому класс $P_{3,8}$ является пересечением классов $P_{2,7c}$ и $P_{2,8}$. Объединяя условия, определяющие эти два класса, получим следующий результат.

Утверждение 4.8.1. Класс $P_{3,8}$ потенциалов A_i , инвариантных относительно группы $G_{3,8}$, состоит из полей вида

$$\begin{aligned} A_1 &= C_2 \tilde{x}^2 + C_3, & A_2 &= \frac{1}{2} C_2 (\tilde{x}^2)^2 + C_3 \tilde{x}^2 + C_1, \\ A_3 &= A_3(\tilde{x}^1), & A_4 &= A_2 + C_2, \end{aligned} \quad (4.8.1)$$

где $A_3(\tilde{x}^1)$ и $C_k = C_k(\tilde{x}^1)$ ($k = 1, 2, 3$) — произвольные функции и $\tilde{x}^1 = 2\lambda x^1 + (x^2 + x^4)^2$.

4.9. Класс $P_{3,9}$

Здесь опишем класс $P_{3,9}$ потенциалов, соответствующий алгебре $\mathcal{L}_{3,9} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_2 + \mu e_3, e_1, e_2 - e_4\}$ ($\lambda\mu = 0$). Соответствующая группа $G_{3,9}$ для разных значений параметров λ и μ порождается параболическими вращениями или параболическими винтами с разными осями и трансляциями в направлениях векторов изотропной плоскости. Алгебра $\mathcal{L}_{3,9}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{2,7}$ с помощью вектора e_1 . Поэтому соответствующие ей классы для разных λ и μ получаются сужением классов $P_{2,7a}$, $P_{2,7b}$ и $P_{2,7c}$ путём наложения дополнительного условия (2.1.1). Рассмотрим три случая: а) $\lambda = \mu = 0$; б) $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$; в) $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$.

4.9.1. Класс $P_{3,9b}$

При $\lambda = 0$ замена координат (2.4.6) приводит уравнение (2.1.1) к виду

$$-\frac{1}{\tilde{x}^1} \frac{\partial A_i}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\mu}{\tilde{x}^1} \frac{\partial A_i}{\partial \tilde{x}^3} - \tilde{x}^1 \tilde{x}^2 \frac{\partial A_i}{\partial \tilde{x}^4} = 0. \quad (4.9.1)$$

Подставляя (3.7.1) в (4.9.1) и пользуясь линейной независимостью функций $(\tilde{x}^2)^2$, $\tilde{x}^2$ и 1, получаем, что функции $C_k(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3)$ и $A_3(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3)$ должны удовлетворять уравнениям

$$\mu \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \quad \mu \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^3} - C_2 = 0, \quad \mu \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^3} - C_3 = 0, \quad \mu \frac{\partial A_3}{\partial \tilde{x}^3} = 0. \quad (4.9.2)$$

Решение системы уравнений (4.9.2) при $\mu \neq 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(\tilde{x}^3)^2}{2\mu^2} \Phi(\tilde{x}^1) + \frac{\tilde{x}^3}{\mu} \Psi(\tilde{x}^1) + \Xi(\tilde{x}^1), & C_2 &= \Phi(\tilde{x}^1), \\ C_3 &= \frac{\tilde{x}^3}{\mu} \Phi(\tilde{x}^1) + \Psi(\tilde{x}^1), & A_3 &= A_3(\tilde{x}^1), \end{aligned} \quad (4.9.3)$$

где $A_3(\tilde{x}^1)$, $\Phi(\tilde{x}^1)$, $\Psi(\tilde{x}^1)$ и $\Xi(\tilde{x}^1)$ — произвольные функции и $\tilde{x}^1 = x^2 + x^4$, $\tilde{x}^3 = x^3 + \mu x^1/(x^2 + x^4)$.

Утверждение 4.9.1. Класс $P_{3,9b}$ потенциалов A_i , инвариантных относительно группы $G_{3,9b}$, соответствующей алгебре $\mathcal{L}_{3,9}$ ($\lambda = 0$, $\mu \neq 0$), состоит из полей вида

$$\begin{aligned} A_1 &= C_2 \tilde{x}^2 + C_3, & A_2 &= \frac{1}{2} C_2 (\tilde{x}^2)^2 + C_3 \tilde{x}^2 + C_1, \\ A_3 &= A_3(\tilde{x}^1), & A_4 &= A_2 + C_2, \end{aligned} \quad (4.9.4)$$

где C_k определены формулами (4.9.3).

4.9.2. Класс $P_{3,9a}$

Пусть теперь $\mu = \lambda = 0$. Тогда $P_{3,9a} \subset P_{2,7a}$. Решение системы (4.9.2) принимает вид

$$C_1 = C_1(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3), \quad C_2 = C_3 = 0, \quad A_3 = A_3(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3). \quad (4.9.5)$$

Утверждение 4.9.2. Класс $P_{3,9a}$ потенциалов A_i , инвариантных относительно группы $G_{3,9a}$, соответствующей алгебре $\mathcal{L}_{3,9}$ ($\lambda = 0$, $\mu = 0$), состоит из полей вида

$$A_1 = 0, \quad A_2 = A_4 = C_1(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3), \quad A_3 = A_3(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3), \quad (4.9.6)$$

где $C_1(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3)$ и $A_3(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3)$ — произвольные функции и $\tilde{x}^1 = x^2 + x^4$, $\tilde{x}^3 = x^3$.

4.9.3. Класс $P_{3,9c}$

При $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$ алгебра $\mathcal{L}_{3,9c} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_2, e_1, e_2 - e_4\}$ содержит в себе $\mathcal{L}_{2,7c}$. Поэтому $P_{3,9c} \subset P_{2,7c}$. Добавляя к условиям, определяющим класс $P_{2,7c}$, уравнение

$$2\lambda \frac{\partial A_i}{\partial \tilde{x}^1} + \lambda \tilde{x}^2 \frac{\partial A_i}{\partial \tilde{x}^4} = 0 \quad (4.9.7)$$

((2.1.1) в координатах $\{\tilde{x}^i\}$, связанных с $\{x^i\}$ заменой (2.4.7)), а также учитывая, что A_i не зависит от $\tilde{x}^4$, получим следующий результат.

Утверждение 4.9.3. Класс $P_{3,9c}$ потенциалов A_i , инвариантных относительно группы $G_{3,9c}$, соответствующей алгебре $\mathcal{L}_{3,9c}$, состоит из полей вида

$$\begin{aligned} A_1 &= C_2 \tilde{x}^2 + C_3, & A_2 &= \frac{1}{2} C_2 (\tilde{x}^2)^2 + C_3 \tilde{x}^2 + C_1, \\ A_3 &= A_3(\tilde{x}^3), & A_4 &= A_2 + C_2, \end{aligned} \quad (4.9.8)$$

где $A_3(\tilde{x}^3)$ и $C_k = C_k(\tilde{x}^3)$ ($k = 1, 2, 3$) — произвольные функции и $\tilde{x}^2 = (x^2 + x^4)/\lambda$, $\tilde{x}^3 = x^3$.

4.10. Класс $P_{3,10}$

Здесь опишем класс потенциалов $P_{3,10}$, соответствующий алгебре $\mathcal{L}_{3,10} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_2, e_1 + \mu e_3, e_2 - e_4\}$, которая при $\mu = 0$ совпадает с алгеброй $\mathcal{L}_{3,9c}$. Ей соответствует группа $G_{3,10}$, порождаемая параболическими вращениями, или параболическими винтами, и трансляциями в направлениях векторов изотропной плоскости. Рассмотрим два случая: а) $\lambda \neq 0, \mu \neq 0$ и б) $\lambda = 0, \mu \neq 0$.

4.10.1. Класс $P_{3,10a}$ ($\lambda \neq 0, \mu \neq 0$)

Алгебра $\mathcal{L}_{3,10a} = \mathcal{L}_{3,10}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{2,7c}$ с помощью вектора $e_1 + \mu e_3$. Поэтому класс $P_{3,10a}$ содержится в $P_{2,7c}$. Уравнение (1.1.2) для $\xi = e_1 + \mu e_3$

$$\partial_1 A_i + \mu \partial_3 A_i = 0 \quad (4.10.1)$$

в результате замены (2.4.7) принимает вид

$$2\lambda \frac{\partial A_i}{\partial \tilde{x}^1} + \mu \frac{\partial A_i}{\partial \tilde{x}^3} + \lambda \tilde{x}^2 \frac{\partial A_i}{\partial \tilde{x}^4} = 0. \quad (4.10.2)$$

Подставляя (2.4.7), (3.7.1) в (4.10.2), получаем в результате решения полученной системы уравнений следующее утверждение.

Утверждение 4.10.1. Класс $P_{3,10a}$ потенциалов A_i , инвариантных относительно группы $G_{3,10a}$, соответствующей алгебре $\mathcal{L}_{3,10a}$, состоит из полей вида

$$\begin{aligned} A_1 &= C_2 \tilde{x}^2 + C_3, \quad A_2 = \frac{1}{2} C_2 (\tilde{x}^2)^2 + C_3 \tilde{x}^2 + C_1, \\ A_3 &= A_3(\mu \tilde{x}^1 - 2\lambda \tilde{x}^3), \quad A_4 = A_2 + C_2, \end{aligned} \quad (4.10.3)$$

где $A_3(\mu \tilde{x}^1 - 2\lambda \tilde{x}^3)$ и $C_k = C_k(\mu \tilde{x}^1 - 2\lambda \tilde{x}^3)$ ($k = 1, 2, 3$) — произвольные функции и $\tilde{x}^1 = 2\lambda x^1 + (x^2 + x^4)^2$, $\tilde{x}^3 = x^3$.

4.10.2. Класс $P_{3,10b}$

Алгебра $\mathcal{L}_{3,10b} = L\{e_{12} - e_{14}, e_1 + \mu e_3, e_2 - e_4\}$ ($\mathcal{L}_{3,10}$ при $\lambda = 0$ и $\mu \neq 0$) является расширением алгебры $\mathcal{L}_{2,7a}$ с помощью вектора $e_1 + \mu e_3$. Поэтому класс $P_{3,10b}$ содержится в $P_{2,7a}$. Уравнение (4.10.1) в результате замены (2.4.3) переходит в следующее:

$$-\frac{1}{\tilde{x}^1} \frac{\partial A_i}{\partial \tilde{x}^2} + \mu \frac{\partial A_i}{\partial \tilde{x}^3} = 0. \quad (4.10.4)$$

Подставляя (3.7.1) в (4.10.4) и пользуясь линейной независимостью функций $(\tilde{x}^2)^2$, $\tilde{x}^2$ и 1, получаем, что функции $C_k(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3)$ и $A_3(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3)$ должны удовлетворять уравнениям

$$\mu \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \quad \mu \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{C_2}{\tilde{x}^1} = 0, \quad \mu \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{C_3}{\tilde{x}^1} = 0, \quad \mu \frac{\partial A_3}{\partial \tilde{x}^3} = 0. \quad (4.10.5)$$

Решение системы уравнений (4.10.5) имеет вид

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(\tilde{x}^3)^2}{2\mu^2(\tilde{x}^1)^2} \Phi(\tilde{x}^1) + \frac{\tilde{x}^3}{\mu\tilde{x}^1} \Psi(\tilde{x}^1) + \Xi(\tilde{x}^1), \quad C_2 = \Phi(\tilde{x}^1), \\ C_3 &= \frac{\tilde{x}^3}{\mu\tilde{x}^1} \Phi(\tilde{x}^1) + \Psi(\tilde{x}^1), \quad A_3 = A_3(\tilde{x}^1), \end{aligned} \quad (4.10.6)$$

где $A_3(\tilde{x}^1)$, $\Phi(\tilde{x}^1)$, $\Psi(\tilde{x}^1)$ и $\Xi(\tilde{x}^1)$ — произвольные функции.

Утверждение 4.10.2. Класс $P_{3,10b}$ потенциалов A_i , инвариантных относительно группы $G_{3,10b}$, соответствующей алгебре $\mathcal{L}_{3,10b}$, состоит из полей вида (4.9.4), где C_k определены формулами (4.10.6), а $\tilde{x}^1 = x^2 + x^4$, $\tilde{x}^2 = -x^1/(x^2 + x^4)$, $\tilde{x}^3 = x^3$.

4.11. Класс $P_{3,11}$

Алгебре $\mathcal{L}_{3,11} = L\{e_{13} + \lambda e_{24}, e_1, e_3\}$ соответствует группа $G_{3,11}$, состоящая из всевозможных композиций пропорциональных бивращений и трансляций в направлениях векторов евклидовой плоскости. Класс $P_{3,11}$, соответствующий алгебре $\mathcal{L}_{3,11}$, является подклассом класса $P_{1,5}$. Для его определения достаточно подставить (2.5.5) в уравнения

$$\cos(\theta - \varphi) \frac{\partial A_i}{\partial r} - \frac{\sin(\theta - \varphi)}{r} \frac{\partial A_i}{\partial \theta} = 0 \quad (4.11.1)$$

и

$$\sin(\theta - \varphi) \frac{\partial A_i}{\partial r} + \frac{\cos(\theta - \varphi)}{r} \frac{\partial A_i}{\partial \theta} = 0 \quad (4.11.2)$$

((2.1.1) и (3.8.1) в координатах $\{r, \rho, \theta, \varphi\}$, связанных с $\{x^i\}$ заменой (2.5.3)). Результат имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} A_1 &= C_1(\rho) \cos \varphi + C_2(\rho) \sin \varphi, \quad A_2 = C_3(\rho) \operatorname{ch} \lambda \varphi + C_4(\rho) \operatorname{sh} \lambda \varphi, \\ A_3 &= -C_1(\rho) \sin \varphi + C_2(\rho) \cos \varphi, \quad A_4 = -C_3(\rho) \operatorname{sh} \lambda \varphi - C_4(\rho) \operatorname{ch} \lambda \varphi, \end{aligned} \quad (4.11.3)$$

где $C_k = C_k(\rho)$ — произвольные функции.

Утверждение 4.11.1. Класс $P_{3,11}$ потенциалов A_i , инвариантных относительно группы $G_{3,11}$, состоит из полей вида (4.11.3).

4.12. Класс $P_{3,12}$

Алгебре $\mathcal{L}_{3,12} = L\{e_{13} + \lambda e_{24}, e_2, e_4\}$ соответствует группа $G_{3,12}$, состоящая из всевозможных композиций пропорциональных бивращений и трансляций в направлениях векторов псевдоевклидовой плоскости. Алгебра $\mathcal{L}_{3,12}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{1,5}$ с помощью векторов e_2 и e_4 . Поэтому класс $P_{3,12}$ содержится в $P_{1,5}$. Для его определения достаточно подставить (2.5.5) в уравнения

$$\operatorname{ch}(\lambda \varphi) \frac{\partial A_i}{\partial \rho} - \frac{\operatorname{sh}(\lambda \varphi)}{\lambda \rho} \frac{\partial A_i}{\partial \theta} - \frac{\operatorname{sh}(\lambda \varphi)}{\lambda \rho} \frac{\partial A_i}{\partial \varphi} = 0 \quad (4.12.1)$$

и

$$-\operatorname{sh}(\lambda\varphi)\frac{\partial A_i}{\partial\rho} + \frac{\operatorname{ch}(\lambda\varphi)}{\lambda\rho}\frac{\partial A_i}{\partial\theta} + \frac{\operatorname{ch}(\lambda\varphi)}{\lambda\rho}\frac{\partial A_i}{\partial\varphi} = 0 \quad (4.12.2)$$

((3.1.1) и (2.1.2) в координатах $\{r, \rho, \theta, \varphi\}$, связанных с $\{x^i\}$ заменой (2.5.3)). Умножая (4.12.1) на $\operatorname{ch}(\lambda\varphi)$, (4.12.2) на $\operatorname{sh}(\lambda\varphi)$ и складывая полученные уравнения, получим

$$\frac{\partial A_i}{\partial\rho} = 0. \quad (4.12.3)$$

Поэтому A_i и C_k не зависят от ρ : $C_k = C_k(r, \theta)$. Из (4.12.1) и (4.12.3) следует, что

$$\frac{\partial A_i}{\partial\theta} + \frac{\partial A_i}{\partial\varphi} = 0. \quad (4.12.4)$$

Система уравнений (4.12.1), (4.12.2) эквивалентна системе (4.12.3), (4.12.4). Подставляя (2.5.5) в (4.12.3), (4.12.4), получаем в результате вычислений

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1(r) \sin(\theta - \varphi) + a_2(r) \cos(\theta - \varphi), \\ A_2 &= a_3(r) \operatorname{sh}[\lambda(\theta - \varphi)] + a_4(r) \operatorname{ch}[\lambda(\theta - \varphi)], \\ A_3 &= -a_1(r) \cos(\theta - \varphi) + a_2(r) \sin(\theta - \varphi), \\ A_4 &= a_3(r) \operatorname{ch}[\lambda(\theta - \varphi)] + a_4(r) \operatorname{sh}[\lambda(\theta - \varphi)], \end{aligned} \quad (4.12.5)$$

где $a_k = a_k(r)$ — произвольные функции.

Утверждение 4.12.1. Класс $P_{3,12}$ потенциалов A_i , инвариантных относительно группы $G_{3,12}$, состоит из полей вида (4.12.5) (замена координат определяется формулами (2.5.3)).

4.13. Класс $P_{3,13}$

Алгебра $\mathcal{L}_{3,13} = L\{e_{13}, e_{24}, e_2 - e_4\}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{2,10}$ с помощью вектора $e_2 - e_4$, поэтому класс $P_{3,13}$ содержится в классе $P_{2,10}$. Уравнение (3.6.1) ((1.1.2) для вектора $\xi = e_2 - e_4$) в результате замены (3.10.4) переходит в следующее:

$$\frac{\partial A_i}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_i}{\partial\theta} - \rho \frac{\partial A_i}{\partial\rho} = 0. \quad (4.13.1)$$

Подставляя (3.10.3) в (4.13.1), получаем следующий результат.

Утверждение 4.13.1. Класс $P_{3,13}$ потенциалов A_i , инвариантных относительно группы $G_{3,13}$, состоит из полей вида

$$\begin{aligned} A_1 &= -t_1(r) \sin(\theta - \varphi) + t_2(r) \cos(\theta - \varphi), \\ A_2 &= \rho C(r) e^\varphi + \frac{D(r)}{\rho} e^{-\varphi}, \\ A_3 &= t_1(r) \cos(\theta - \varphi) + t_2(r) \sin(\theta - \varphi), \\ A_4 &= -\rho C(r) e^\varphi + \frac{D(r)}{\rho} e^{-\varphi}, \end{aligned} \quad (4.13.2)$$

где $t_1(r)$, $t_2(r)$, $C(r)$ и $D(r)$ — произвольные функции (замена координат определяется формулами (3.10.4)).

4.14. Класс $P_{3,14}$

Алгебре $\mathcal{L}_{3,14} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_1 + \mu e_3, e_{23} + e_{34} + \nu e_1 + \lambda e_3, e_2 - e_4\}$ соответствует группа $G_{3,14}$, состоящая из всевозможных композиций параболических винтов двух видов и трансляций вдоль изотропного направления. Уравнения (1.1.2), соответствующие базисным векторам алгебры $\mathcal{L}_{3,14}$, имеют вид

$$XA_i - A_1(\delta_i^2 + \delta_i^4) + (A_2 - A_4)\delta_i^1 = 0, \quad X = (\lambda - x^2 - x^4)\partial_1 + \mu\partial_3, \quad (4.14.1)$$

$$YA_i - (A_2 - A_4)\delta_i^3 + A_3(\delta_i^2 + \delta_i^4) = 0, \quad Y = \nu\partial_1 + (\lambda + x^2 + x^4)\partial_3, \quad (4.14.2)$$

и (3.6.1). Общее решение уравнения (3.6.1) имеет вид

$$A_i = A_i(x^1, x^2 + x^4, x^3). \quad (4.14.3)$$

Подставляя (4.14.3) в (4.14.1) и (4.14.2) и совершая в этих уравнениях замену

$$u = x^2 + x^4, \quad \varphi = \frac{\mu x^1 + (u - \lambda)x^3}{u^2 - \lambda^2 + \mu\nu}, \quad \psi = \frac{\nu x^3 - (u + \lambda)x^1}{u^2 - \lambda^2 + \mu\nu}, \quad (4.14.4)$$

получаем соответственно

$$\frac{\partial A_1}{\partial \psi} + A_2 - A_4 = 0, \quad \frac{\partial A_2}{\partial \psi} - A_1 = 0, \quad \frac{\partial A_3}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial A_4}{\partial \psi} - A_1 = 0, \quad (4.14.5)$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} + A_3 = 0, \quad \frac{\partial A_3}{\partial \varphi} - A_2 + A_4 = 0, \quad \frac{\partial A_4}{\partial \varphi} + A_3 = 0. \quad (4.14.6)$$

Общее решение системы (4.14.5) имеет вид

$$A_1 = \psi C_2(u, \varphi) + C_3(u, \varphi), \quad A_2 = \frac{1}{2}\psi^2 C_2(u, \varphi) + \psi C_3(u, \varphi) + C_1(u, \varphi), \\ A_3 = A_3(u, \varphi), \quad A_4 = A_2 + C_2(u, \varphi). \quad (4.14.7)$$

Подставляя (4.14.7) в (4.14.6), получаем окончательно

$$A_1 = C_3(u), \quad A_2 = A_4 = \psi C_3(u) + C_1(u), \quad A_3 = 0, \quad (4.14.8)$$

где $C_1(u)$ и $C_3(u)$ — произвольные функции.

Утверждение 4.14.1. Класс $P_{3,14}$ потенциалов A_i , инвариантных относительно группы $G_{3,14}$, состоит из полей, задаваемых формулами (4.14.8) и (4.14.4).

4.15. Класс $P_{3,15}$

Алгебре $\mathcal{L}_{3,15} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{24}, e_3\}$ соответствует группа $G_{3,15}$, состоящая из всевозможных композиций параболических вращений, псевдовращений и трансляций вдоль пространственноподобного направления. Алгебра $\mathcal{L}_{3,15}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{2,12a}$ ($\mathcal{L}_{2,12}$ при $\lambda = 0$) с помощью вектора e_3 .

Поэтому класс $P_{3,15}$ содержится в $P_{2,12a}$ ($P_{2,12}$ при $\lambda = 0$). Подставляя (3.12.6), (3.12.4), (2.4.3) в уравнение (3.8.1), означающее независимость A_i от $\tilde{x}^3$, получаем следующий результат.

Утверждение 4.15.1. Класс $P_{3,15}$ потенциалов A_i , инвариантных относительно группы $G_{3,15}$, состоит из полей, задаваемых формулами (3.12.6), где

$$\Phi_k = \Phi_k(v) = \Phi_k\left(\tilde{x}^4 - \frac{1}{2}(\tilde{x}^1)^2\right) -$$

произвольные функции, а зависимость между переменными $\{x^i\}$ и $\{\tilde{x}^i\}$ задаётся формулами (2.4.3).

4.16. Класс $P_{3,16}$

Опишем класс $P_{3,16}$ потенциалов, соответствующий алгебре $\mathcal{L}_{3,16} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{24} + \lambda e_1 + \mu e_3, e_2 - e_4\}$. Соответствующая группа $G_{3,16}$ состоит из всевозможных композиций параболических вращений, гиперболических винтов и трансляций в направлении изотропной прямой. Алгебра $\mathcal{L}_{3,16}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{2,7a} = L\{e_{12} - e_{14}, e_2 - e_4\}$ с помощью вектора $e_{24} + \lambda e_1 + \mu e_3$. Поэтому $P_{3,16} \subset P_{2,7a}$. Уравнение (1.1.2) для вектора $\xi = e_{24} + \lambda e_1 + \mu e_3$ имеет вид

$$XA_i + A_2\delta_i^4 + A_4\delta_i^2 = 0, \quad (4.16.1)$$

$$\begin{aligned} Xf &= \lambda\partial_1 f + x^4\partial_2 f + \mu\partial_3 f + x^2\partial_4 f = \\ &= -\lambda\left(\frac{1}{\tilde{x}^1}\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^2} + \tilde{x}^1\tilde{x}^2\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^4}\right) + \tilde{x}^1\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^1} - \tilde{x}^2\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^2} + \mu\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^3} + (\tilde{x}^1)^2\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^4} \end{aligned} \quad (4.16.2)$$

(координаты связаны формулами (2.4.3)). Подставляя (3.7.1) в (4.16.1) и используя линейную независимость функций $(\tilde{x}^2)^2$, $\tilde{x}^2$ и 1, получаем, что функции $C_k(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3)$ и $A_3(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3)$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \tilde{x}^1\frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^1} + \mu\frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^3} - C_2 &= 0, \\ \tilde{x}^1\frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^1} + \mu\frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{\lambda}{\tilde{x}^1}C_2 &= 0, \\ \tilde{x}^1\frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^1} + \mu\frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^3} + C_1 + C_2 - \frac{\lambda}{\tilde{x}^1}C_3 &= 0, \\ \tilde{x}^1\frac{\partial A_3}{\partial \tilde{x}^1} + \mu\frac{\partial A_3}{\partial \tilde{x}^3} &= 0. \end{aligned} \quad (4.16.3)$$

Совершая в уравнениях (4.16.3) замену

$$u = \tilde{x}^3 - \mu \ln \tilde{x}^1, \quad v = \ln \tilde{x}^1, \quad (4.16.4)$$

найдем решение полученной системы:

$$C_1 = \Phi_3(u)e^{-v} - \frac{1}{2}\Phi_1(u)e^v + ve^{-v} \left[\frac{1}{2}\lambda^2 v \Phi_1(u) + \lambda \Phi_2(u) \right], \quad (4.16.5)$$

$$C_2 = \Phi_1(u)e^v, \quad C_3 = \lambda v \Phi_1(u) + \Phi_2(u), \quad A_3 = \Phi_4(u),$$

где $\Phi_k(u)$ — произвольные функции. Таким образом, имеем следующий результат.

Утверждение 4.16.1. Класс $P_{3,16}$ потенциалов A_i , инвариантных относительно группы $G_{3,16}$, состоит из полей вида

$$A_1 = C_2 \tilde{x}^2 + C_3, \quad A_2 = \frac{1}{2}C_2(\tilde{x}^2)^2 + C_3 \tilde{x}^2 + C_1, \quad (4.16.6)$$

$$A_3 = \Phi_4(u), \quad A_4 = A_2 + C_2,$$

где $C_l = C_l(u, v)$ задаются формулами (4.16.4), (4.16.5), $\Phi_k(u)$ — произвольные функции, $\tilde{x}^1 = x^2 + x^4$, $\tilde{x}^2 = -x^1/(x^2 + x^4)$ и $\tilde{x}^3 = x^3$.

4.17. Класс $P_{3,17}$

Алгебре $\mathcal{L}_{3,17} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{24}\}$ соответствует группа $G_{3,17}$, порождаемая двумя одномерными подгруппами параболических вращений и одномерной группой псевдовращений. Алгебра $\mathcal{L}_{3,17}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{2,11a}$ с помощью вектора e_{24} . Поэтому для описания класса $P_{3,17}$ достаточно в классе $P_{2,11a}$ решить уравнение (1.1.2) для вектора $\xi = e_{24}$

$$XA_1 = 0, \quad XA_2 + A_4 = 0, \quad XA_3 = 0, \quad XA_4 + A_2 = 0, \quad (4.17.1)$$

где $X = x^4 \partial_2 + x^2 \partial_4$. Замена (3.11.8) преобразует оператор X в следующий:

$$X = \tilde{x}^1 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1} - \tilde{x}^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^2} - \tilde{x}^3 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^3}. \quad (4.17.2)$$

Подставляя (3.11.9) в (4.17.1), (4.17.2) и используя линейную независимость функций $(\tilde{x}^2)^2$, $\tilde{x}^2$, $(\tilde{x}^3)^2$, $\tilde{x}^3$ и 1, получаем следующий результат.

Утверждение 4.17.1. Класс $P_{3,17}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{3,17}$, определяется формулами (3.11.9), где

$$\Phi = \tilde{x}^1 C_1(\tilde{x}^4), \quad \Psi = C_2(\tilde{x}^4), \quad (4.17.3)$$

$$\Xi = C_3(\tilde{x}^4), \quad \Theta = \frac{\tilde{x}^1}{2} C_1(\tilde{x}^4) + \frac{C_4(\tilde{x}^4)}{\tilde{x}^1},$$

$C_k(\tilde{x}^4)$ — произвольные функции, а зависимость между переменными $\{x^i\}$ и $\{\tilde{x}^i\}$ задаётся формулами (3.11.8).

4.18. Класс $P_{3,18}$

Группа $G_{3,18}$, соответствующая алгебре $\mathcal{L}_{3,18} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{13} + \lambda(e_2 - e_4)\}$, порождается двумя одномерными подгруппами параболических вращений и одномерной группой эллиптических винтов с изотропной осью

(при $\lambda = 0$ — поворотов). Алгебра $\mathcal{L}_{3,18}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{2,11a}$ с помощью вектора $e_{13} + \lambda(e_2 - e_4)$, поэтому $P_{3,18} \subset P_{2,11a}$. Уравнение (1.1.2) для $\xi = e_{13} + \lambda(e_2 - e_4)$ имеет вид

$$XA_1 - A_3 = 0, \quad XA_2 = 0, \quad XA_3 + A_1 = 0, \quad XA_4 = 0, \quad (4.18.1)$$

где $X = x^3\partial_1 + \lambda\partial_2 - x^1\partial_3 - \lambda\partial_4$. Замена (3.11.8) преобразует оператор X в следующий:

$$X = -\tilde{x}^3 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^2} + \tilde{x}^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^3} + 2\lambda\tilde{x}^1 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^4}. \quad (4.18.2)$$

Подставляя (3.11.9) в (4.18.1), (4.18.2) и разделяя переменные с учётом линейной независимости степеней переменных $\tilde{x}^2$ и $\tilde{x}^3$, получаем

$$\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \quad 2\lambda\tilde{x}^1 \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{x}^4} - \Xi = 0, \quad \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \quad 2\lambda\tilde{x}^1 \frac{\partial \Xi}{\partial \tilde{x}^4} + \Psi = 0. \quad (4.18.3)$$

4.18.1. Класс $P_{3,18a}$

При $\lambda \neq 0$ решение уравнений (4.18.3) имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi &= C_1(\tilde{x}^1) \cos \frac{\tilde{x}^4}{2\lambda\tilde{x}^1} + C_2(\tilde{x}^1) \sin \frac{\tilde{x}^4}{2\lambda\tilde{x}^1}, \quad \Phi = C_3(\tilde{x}^1), \\ \Xi &= -C_1(\tilde{x}^1) \sin \frac{\tilde{x}^4}{2\lambda\tilde{x}^1} + C_2(\tilde{x}^1) \cos \frac{\tilde{x}^4}{2\lambda\tilde{x}^1}, \quad \Theta = C_4(\tilde{x}^1), \end{aligned} \quad (4.18.4)$$

где $C_k(\tilde{x}^1)$ — произвольные функции.

Утверждение 4.18.1. Класс потенциалов $P_{3,18a}$, инвариантных относительно группы $G_{3,18a}$, соответствующей алгебре $\mathcal{L}_{3,18}$ ($\lambda \neq 0$), задаётся формулами (3.11.9) и (4.18.4) (зависимость между переменными $\{x^i\}$ и $\{\tilde{x}^i\}$ задаётся формулами (3.11.8)).

4.18.2. Класс $P_{3,18b}$

При $\lambda = 0$ решение уравнений (4.18.3) имеет вид

$$\Phi = \Phi(\tilde{x}^1, \tilde{x}^4), \quad \Psi = \Xi = 0, \quad \Theta = \Theta(\tilde{x}^1, \tilde{x}^4), \quad (4.18.5)$$

где функции $\Phi(\tilde{x}^1, \tilde{x}^4)$ и $\Theta(\tilde{x}^1, \tilde{x}^4)$ произвольны. Подставляя (4.18.5) в (3.11.9), получаем следующий результат.

Утверждение 4.18.2. Класс потенциалов $P_{3,18b}$, инвариантных относительно группы $G_{3,18b}$, соответствующей алгебре $\mathcal{L}_{3,18b} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{13}\}$ ($\mathcal{L}_{3,18}$ при $\lambda = 0$), задаётся формулами

$$\begin{aligned} A_1 &= -\tilde{x}^2\Phi(\tilde{x}^1, \tilde{x}^4), \quad A_2 = -\frac{1}{2}((\tilde{x}^2)^2 + (\tilde{x}^3)^2)\Phi(\tilde{x}^1, \tilde{x}^4) + \Theta(\tilde{x}^1, \tilde{x}^4), \\ A_3 &= \tilde{x}^3\Phi(\tilde{x}^1, \tilde{x}^4), \quad A_4 = A_2 - \Phi(\tilde{x}^1, \tilde{x}^4) \end{aligned} \quad (4.18.6)$$

(зависимость между $\{x^i\}$ и $\{\tilde{x}^i\}$ имеет вид (3.11.8)).

4.19. Класс $P_{3,19}$

Группа $G_{3,19}$, соответствующая алгебре $\mathcal{L}_{3,19} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{13} + \lambda e_{24}\}$ ($\lambda \neq 0$) состоит из композиций параболических вращений двух видов и пропорциональных бивращений. Алгебра $\mathcal{L}_{3,19}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{2,11a}$ с помощью вектора $e_{13} + \lambda e_{24}$. Поэтому класс $P_{3,19}$ получается сужением класса $P_{2,11a}$. Уравнение (1.1.2) для вектора $\xi = e_{13} + \lambda e_{24}$ имеет вид

$$XA_1 - A_3 = 0, \quad XA_2 + \lambda A_4 = 0, \quad XA_3 + A_1 = 0, \quad XA_4 + \lambda A_2 = 0, \quad (4.19.1)$$

где $X = x^3\partial_1 + \lambda x^4\partial_2 - x^1\partial_3 + \lambda x^2\partial_4$. Замена (3.11.8) преобразует оператор X в следующий:

$$X = \lambda \tilde{x}^1 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1} - (\tilde{x}^3 + \lambda \tilde{x}^2) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^2} + (\tilde{x}^2 - \lambda \tilde{x}^3) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^3}. \quad (4.19.2)$$

Подставляя (3.11.9) в (4.19.1), (4.19.2) и разделяя переменные с учётом линейной независимости степеней переменных $\tilde{x}^2$ и $\tilde{x}^3$, получаем

$$\begin{aligned} \lambda \left(\tilde{x}^1 \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{x}^1} - \Phi \right) &= 0, \quad \lambda \tilde{x}^1 \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{x}^1} - \Xi = 0, \\ \lambda \left(\tilde{x}^1 \frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{x}^1} + \Theta - \Phi \right) &= 0, \quad \lambda \tilde{x}^1 \frac{\partial \Xi}{\partial \tilde{x}^1} + \Psi = 0. \end{aligned} \quad (4.19.3)$$

Решение системы (4.19.3) имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi &= \tilde{x}^1 C_1(\tilde{x}^4), \quad \Theta = \frac{\tilde{x}^1 C_1(\tilde{x}^4)}{2} + \frac{C_2(\tilde{x}^4)}{\tilde{x}^1}, \\ \Psi &= C_3(\tilde{x}^4) \cos \frac{\ln \tilde{x}^1}{\lambda} + C_4(\tilde{x}^4) \sin \frac{\ln \tilde{x}^1}{\lambda}, \\ \Xi &= -C_3(\tilde{x}^4) \sin \frac{\ln \tilde{x}^1}{\lambda} + C_4(\tilde{x}^4) \cos \frac{\ln \tilde{x}^1}{\lambda}, \end{aligned} \quad (4.19.4)$$

где $C_k(\tilde{x}^4)$ — произвольные функции.

Утверждение 4.19.1. Класс потенциалов $P_{3,19}$, инвариантных относительно группы $G_{3,19}$, задаётся формулами (3.11.9) и (4.19.4), где зависимость между $\{x^i\}$ и $\{\tilde{x}^i\}$ задаётся формулами (3.11.8).

4.20. Класс $P_{3,20}$

Алгебра $\mathcal{L}_{3,20} = L\{e_{12}, e_{13}, e_{23}\}$ соответствует трёхмерной группе $G_{3,20} = \text{SO}(3)$ всех поворотов относительно начала координат в подпространстве $\mathbb{R}_0^3 = \{x \in \mathbb{R}_1^4: x^4 = 0\}$ пространства Минковского. Алгебра $\mathcal{L}_{3,20}$ содержит в себе $\mathcal{L}_{1,2}$ (при $\lambda = \mu = 0$) и является расширением $L\{e_{13}\}$ посредством векторов e_{12} и e_{23} . Поэтому $P_{3,20}$ содержится в $P_{1,2}$ (при $\lambda = \mu = 0$). Уравнение (1.1.2) для векторов e_{12} и e_{23} имеет вид соответственно

$$XA_1 + A_2 = 0, \quad XA_2 - A_1 = 0, \quad XA_3 = 0, \quad XA_4 = 0 \quad (4.20.1)$$

$(X = -x^2\partial_1 + x^1\partial_2)$ и

$$YA_1 = 0, \quad YA_2 + A_3 = 0, \quad YA_3 - A_2 = 0, \quad YA_4 = 0 \quad (4.20.2)$$

$(Y = -x^3\partial_2 + x^2\partial_3)$. Замена (2.2.2) при $\lambda = \mu = 0$

$$x^1 = r \sin \varphi, \quad x^2 = \tilde{x}^2, \quad x^3 = r \cos \varphi, \quad x^4 = \tilde{x}^4 \quad (4.20.3)$$

преобразует операторы X и Y следующим образом:

$$X = -\tilde{x}^2 \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + r \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\tilde{x}^2 \cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (4.20.4)$$

$$Y = \tilde{x}^2 \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - r \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\tilde{x}^2 \sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (4.20.5)$$

Подставляя (2.2.4) в уравнения (4.20.1), (4.20.4) и (4.20.2), (4.20.5), получаем в результате разделения переменных

$$\begin{aligned} -\tilde{x}^2 \frac{\partial C_2}{\partial r} + r \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^2} + A_2 &= 0, \quad -\tilde{x}^2 \frac{\partial C_1}{\partial r} + r \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{C_1 \tilde{x}^2}{r} = 0, \\ -\frac{C_2 \tilde{x}^2}{r} + A_2 &= 0, \quad -\tilde{x}^2 \frac{\partial A_2}{\partial r} + r \frac{\partial A_2}{\partial \tilde{x}^2} - C_2 = 0, \quad C_1 = 0, \\ -\tilde{x}^2 \frac{\partial C_1}{\partial r} + r \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{C_2 \tilde{x}^2}{r} &= 0, \quad -\tilde{x}^2 \frac{\partial A_4}{\partial r} + r \frac{\partial A_4}{\partial \tilde{x}^2} = 0. \end{aligned} \quad (4.20.6)$$

Решение системы (4.20.6) имеет вид

$$C_1 = C_2 = A_2 = 0, \quad A_4 = A_4(\rho, x^4), \quad (4.20.7)$$

$\rho = \sqrt{r^2 + (\tilde{x}^2)^2} = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$. Подстановка (4.20.7) в (2.2.4) приводит к следующему результату.

Утверждение 4.20.1. Класс потенциалов $P_{3,20}$, инвариантных относительно группы $G_{3,20}$, имеет вид

$$A_i = (0, 0, 0, A_4(\rho, x^4)), \quad (4.20.8)$$

где $A_4(\rho, x^4)$ — произвольная функция.

4.21. Класс $P_{3,21}$

Алгебре $\mathcal{L}_{3,21} = L\{e_{12}, e_{14}, e_{24}\}$ соответствует группа $G_{3,21}$, порождаемая поворотами в плоскости Ox^1x^2 и псевдовращениями в плоскостях Ox^1x^4 и Ox^2x^4 . Алгебра $\mathcal{L}_{3,21}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{1,3}$ ($\lambda = 0$) посредством векторов e_{12} и e_{14} . Поэтому класс $P_{3,21}$ является подклассом класса $P_{1,3}$ в случае $\lambda = 0$. Уравнение (1.1.2) для вектора e_{12} имеет вид (4.20.1), а для e_{14} —

$$x^4 \partial_1 A_i + x^1 \partial_4 A_i + A_1 \delta_i^4 + A_4 \delta_i^1 = 0. \quad (4.21.1)$$

Замена (2.3.2) при $\lambda = 0$

$$x^1 = \tilde{x}^1, \quad x^2 = r \operatorname{ch} \varphi, \quad x^3 = \tilde{x}^3, \quad x^4 = r \operatorname{sh} \varphi \quad (4.21.2)$$

преобразует оператор $X = -x^2\partial_1 + x^1\partial_2$ следующим образом:

$$X = -r \operatorname{ch} \varphi \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1} + \tilde{x}^1 \operatorname{ch} \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\tilde{x}^1 \operatorname{sh} \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (4.21.3)$$

Подставляя (2.3.4) в (4.20.1), (4.21.3), получаем в результате деления переменных

$$\begin{aligned} C_2 = 0, \quad r \frac{\partial A_1}{\partial \tilde{x}^1} - \tilde{x}^1 \frac{\partial A_1}{\partial r} - C_1 &= 0, \\ r \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^1} - \tilde{x}^1 \frac{\partial C_1}{\partial r} + A_1 &= 0, \quad A_1 + \frac{\tilde{x}^1 C_1}{r} = 0, \\ r \frac{\partial A_3}{\partial \tilde{x}^1} - \tilde{x}^1 \frac{\partial A_3}{\partial r} &= 0, \quad r \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^1} - \tilde{x}^1 \frac{\partial C_1}{\partial r} + \frac{\tilde{x}^1 C_1}{r} = 0. \end{aligned} \quad (4.21.4)$$

Из системы (4.21.4) следует, что

$$A_1 = A_2 = A_4 = 0, \quad A_3 = A_3(u, x^3), \quad (4.21.5)$$

где $u = \sqrt{r^2 + (\tilde{x}^1)^2} = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^4)^2}$. Подстановка (4.21.5) в (4.21.1) приводит к тождествам. Таким образом, получаем следующий результат.

Утверждение 4.21.1. Класс потенциалов $P_{3,21}$, инвариантных относительно группы $G_{3,21}$, имеет вид (4.21.5), где $A_3(u, x^3)$ — произвольная функция.

5. Потенциалы, допускающие четырёхмерные группы

5.1. Класс $P_{4,1}$

Алгебра $\mathcal{L}_{4,1} = L\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ соответствует группе $G_{4,1}$ трансляций пространства Минковского $\mathbf{R}_1^4$. Алгебра $\mathcal{L}_{4,1}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{3,1a}$ с помощью вектора e_4 , поэтому $P_{4,1} \subset P_{3,1a}$. Подставляя $A_i = A_i(x^4)$ в (2.1.2), получаем следующее утверждение.

Утверждение 5.1.1. Класс $P_{4,1}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{4,1}$, состоит из полей A_i , постоянных в галилеевой системе координат: $A_i = \text{const}$.

5.2. Класс $P_{4,2}$

Алгебра $\mathcal{L}_{4,2} = L\{e_{13} + \mu e_4, e_1, e_2, e_3\}$ ($\mu \neq 0$) есть расширение алгебры $\mathcal{L}_{3,3}$ с помощью вектора e_2 , поэтому $P_{4,2} \subset P_{3,3}$. Подставляя (4.3.2) в уравнение (3.1.1), получаем в результате

$$\begin{aligned} A_1 &= C_1 \sin \frac{x^4}{\mu} + C_2 \cos \frac{x^4}{\mu}, \quad A_2 = C_3, \\ A_3 &= C_1 \cos \frac{x^4}{\mu} - C_2 \sin \frac{x^4}{\mu}, \quad A_4 = C_4 \quad (C_k = \text{const}). \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

Утверждение 5.2.1. Класс $P_{4,2}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{4,2}$, состоит из полей A_i вида (5.2.1).

5.3. Класс $P_{4,3}$

Алгебра $\mathcal{L}_{4,3} = L\{e_{13} + \lambda e_2, e_1, e_3, e_4\}$ ($\lambda \neq 0$) является расширением алгебры $\mathcal{L}_{3,2}$ с помощью вектора e_4 , поэтому класс $P_{4,3}$ содержится в $P_{3,2}$. Подставляя (4.2.3) в уравнение (2.1.2), получаем в результате

$$\begin{aligned} A_1 &= C_1 \sin \frac{x^2}{\lambda} + C_2 \cos \frac{x^2}{\lambda}, & A_2 &= C_3, \\ A_3 &= C_1 \cos \frac{x^2}{\lambda} - C_2 \sin \frac{x^2}{\lambda}, & A_4 &= C_4, \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

где $C_k = \text{const}$. При $\lambda = 0$ потенциалы класса $P_{3,2}$ имеют вид (4.2.4). Подставляя (4.2.4) в уравнение (2.1.2), получаем

$$A_1 = A_3 = 0, \quad A_2 = A_2(x^2), \quad A_4 = A_4(x^2). \quad (5.3.2)$$

Утверждение 5.3.1. Класс $P_{4,3}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{4,3}$, состоит из полей вида (5.3.1) при $\lambda \neq 0$ и (5.3.2) при $\lambda = 0$.

5.4. Класс $P_{4,4}$

Алгебра $\mathcal{L}_{4,4} = L\{e_{13} + \lambda e_2, e_1, e_3, e_2 + e_4\}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{3,1c}$ с помощью вектора $e_{13} + \lambda e_2$, поэтому класс $P_{4,4}$ содержится в $C_{3,1c}$. Подставляя $A_i = A_i(x^2 - x^4)$ в (4.2.1) ((1.1.2) для вектора $\xi = e_{13} + \lambda e_2$), получаем систему (4.2.2), решение которой при $\lambda \neq 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} A_1 &= C_1 \sin \frac{x^2 - x^4}{\lambda} + C_2 \cos \frac{x^2 - x^4}{\lambda}, & A_2 &= C_3, \\ A_3 &= C_1 \cos \frac{x^2 - x^4}{\lambda} - C_2 \sin \frac{x^2 - x^4}{\lambda}, & A_4 &= C_4, \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

где $C_k = \text{const}$. При $\lambda = 0$ решение уравнений (4.2.2) в классе полей $A_i(x^2 - x^4)$ имеет вид

$$A_1 = A_3 = 0, \quad A_2 = A_2(x^2 - x^4), \quad A_4 = A_4(x^2 - x^4), \quad (5.4.2)$$

где $A_2(x^2 - x^4)$ и $A_4(x^2 - x^4)$ — произвольные функции.

Утверждение 5.4.1. Класс $P_{4,4}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{4,4}$, состоит из полей вида (5.4.1) при $\lambda \neq 0$ и (5.4.2) при $\lambda = 0$.

5.5. Класс $P_{4,5}$

Алгебра $\mathcal{L}_{4,5} = L\{e_{24}, e_1, e_3, e_2 + e_4\}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{3,1c}$ с помощью вектора e_{24} , поэтому класс $P_{4,5}$ содержится в $P_{3,1c}$. Подставляя

$A_i = A_i(x^2 - x^4)$ в (4.17.1) ((1.1.2) для вектора $\xi = e_{24}$), получаем

$$\begin{aligned} (x^4 - x^2)A'_1 &= 0, & (x^4 - x^2)A'_2 + A_4 &= 0, \\ (x^4 - x^2)A'_3 &= 0, & (x^4 - x^2)A'_4 + A_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.5.1)$$

Решение последней системы имеет вид

$$\begin{aligned} A_1 &= C_1, & A_2 &= C_2(x^2 - x^4) + \frac{C_4}{x^2 - x^4}, \\ A_3 &= C_3, & A_4 &= C_2(x^2 - x^4) - \frac{C_4}{x^2 - x^4} \quad (C_k = \text{const}). \end{aligned} \quad (5.5.2)$$

Утверждение 5.5.1. Класс $P_{4,5}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{4,5}$, состоит из полей вида (5.5.2).

5.6. Класс $P_{4,6}$

Алгебра $\mathcal{L}_{4,6} = L\{e_{24} + \lambda e_3, e_1, e_2, e_4\}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{3,6}$ с помощью вектора e_1 , поэтому класс $P_{4,6}$ содержится в $P_{3,6}$. Подставляя (4.6.2) в (2.1.1) ((1.1.2) для вектора $\xi = e_1$), получаем при $\lambda \neq 0$ следующий результат:

$$\begin{aligned} A_1 &= C_1, & A_2 &= C_2 \operatorname{ch} \frac{x^3}{\lambda} + C_4 \operatorname{sh} \frac{x^3}{\lambda}, \\ A_3 &= C_3, & A_4 &= -C_2 \operatorname{sh} \frac{x^3}{\lambda} - C_4 \operatorname{ch} \frac{x^3}{\lambda}, \end{aligned} \quad (5.6.1)$$

где $C_k = \text{const}$. Пусть $\lambda = 0$. Подставляя (4.6.3) в (2.1.1), получаем

$$A_1 = A_1(x^3), \quad A_2 = 0, \quad A_3 = A_3(x^3), \quad A_4 = 0. \quad (5.6.2)$$

Утверждение 5.6.1. Класс $P_{4,6}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{4,6}$, состоит из полей вида (5.6.1) при $\lambda \neq 0$ и (5.6.2) при $\lambda = 0$.

5.7. Класс $P_{4,7}$

Алгебра $\mathcal{L}_{4,7} = L\{e_{13} + \lambda e_{24}, e_1, e_3, e_2 + e_4\}$ ($\lambda \neq 0$) является расширением алгебры $\mathcal{L}_{3,1c}$ с помощью вектора $e_{13} + \lambda e_{24}$, поэтому $P_{4,7} \subset P_{3,1c}$. Подставляя $A_i = A_i(x^2 - x^4)$ в (2.5.1), (2.5.2) ((1.1.2) для вектора $\xi = e_{13} + \lambda e_{24}$), получаем

$$\begin{aligned} \lambda(x^4 - x^2)A'_1 - A_3 &= 0, & \lambda(x^4 - x^2)A'_2 + \lambda A_4 &= 0, \\ \lambda(x^4 - x^2)A'_3 + A_1 &= 0, & \lambda(x^4 - x^2)A'_4 + \lambda A_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.7.1)$$

Решение системы (5.7.1) имеет вид

$$\begin{aligned}
A_1 &= C_1 \cos \frac{\ln(x^2 - x^4)}{\lambda} + C_3 \sin \frac{\ln(x^2 - x^4)}{\lambda}, \\
A_2 &= C_2(x^2 - x^4) + \frac{C_4}{x^2 - x^4}, \\
A_3 &= C_1 \sin \frac{\ln(x^2 - x^4)}{\lambda} - C_3 \cos \frac{\ln(x^2 - x^4)}{\lambda}, \\
A_4 &= C_2(x^2 - x^4) - \frac{C_4}{x^2 - x^4} \quad (C_k = \text{const}).
\end{aligned} \tag{5.7.2}$$

Утверждение 5.7.1. Класс $P_{4,7}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{4,7}$, состоит из полей вида (5.7.2).

5.8. Класс $P_{4,8}$

Алгебра $\mathcal{L}_{4,8} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_3, e_1, e_2, e_4\}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{3,1b}$ с помощью вектора $e_{12} - e_{14} + \lambda e_3$, поэтому $P_{4,8} \subset P_{3,1b}$. Подставляя $A_i = A_i(x^3)$ в уравнение (1.1.2) для вектора $\xi = e_{12} - e_{14} + \lambda e_3$

$$XA_i - A_1(\delta_i^2 + \delta_i^4) + (A_2 - A_4)\delta_i^1 = 0, \tag{5.8.1}$$

$$X = -(x^2 + x^4)\partial_1 + x^1\partial_2 + \lambda\partial_3 - x^1\partial_4, \tag{5.8.2}$$

получаем

$$\lambda A'_1 + A_2 - A_4 = 0, \quad \lambda A'_2 - A_1 = 0, \quad \lambda A'_3 = 0, \quad \lambda A'_4 - A_1 = 0. \tag{5.8.3}$$

Решение системы (5.8.3) при $\lambda \neq 0$ имеет вид

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{C_2}{\lambda}x^3 + C_3, \quad A_2 = \frac{C_2}{2\lambda^2}(x^3)^2 + \frac{C_3}{\lambda}x^3 + C_4, \\
A_3 &= C_1, \quad A_4 = A_2 + C_2 \quad (C_k = \text{const}),
\end{aligned} \tag{5.8.4}$$

а при $\lambda = 0$ —

$$A_1 = 0, \quad A_2 = A_4 = \Phi(x^3), \quad A_3 = \Psi(x^3), \tag{5.8.5}$$

где $\Phi(x^3)$ и $\Psi(x^3)$ — произвольные функции.

Утверждение 5.8.1. Класс $P_{4,8}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{4,8}$, состоит из полей вида (5.8.4) при $\lambda \neq 0$ и (5.8.5) при $\lambda = 0$.

5.9. Класс $P_{4,9}$

Группа $G_{4,9}$, соответствующая алгебре $\mathcal{L}_{4,9} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_2, e_1, e_3, e_2 - e_4\}$, состоит из композиций параболических винтов (при $\lambda = 0$ параболических вращений) и трансляций в направлениях векторов изотропной гиперплоскости. Решение системы уравнений $L_{e_1}A_i = L_{e_3}A_i = L_{e_2 - e_4}A_i = 0$ имеет вид

$$A_i = A_i(x^2 + x^4). \tag{5.9.1}$$

Подставляя (5.9.1) в уравнение (1.1.2) для вектора $e_{12} - e_{14} + \lambda e_2$

$$XA_i - A_1(\delta_i^2 + \delta_i^4) + (A_2 - A_4)\delta_i^1 = 0, \quad (5.9.2)$$

$$X = -(x^2 + x^4)\partial_1 + (x^1 + \lambda)\partial_2 - x^1\partial_4, \quad (5.9.3)$$

получаем систему (5.8.3). Её решение в классе функций (5.9.1) при $\lambda \neq 0$ имеет вид

$$A_1 = \frac{C_2}{\lambda}(x^2 + x^4) + C_3, \quad A_2 = \frac{C_2}{2\lambda^2}(x^2 + x^4)^2 + \frac{C_3}{\lambda}(x^2 + x^4) + C_4, \quad (5.9.4)$$

$$A_3 = C_1, \quad A_4 = A_2 + C_2 \quad (C_k = \text{const}),$$

а при $\lambda = 0$ —

$$A_1 = 0, \quad A_2 = A_4 = \Phi(x^2 + x^4), \quad A_3 = \Psi(x^2 + x^4), \quad (5.9.5)$$

где $\Phi(x^2 + x^4)$ и $\Psi(x^2 + x^4)$ — произвольные функции.

Утверждение 5.9.1. Класс $P_{4,9}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{4,9}$, состоит из полей вида (5.9.4) при $\lambda \neq 0$ и (5.9.5) при $\lambda = 0$.

5.10. Класс $P_{4,10}$

Алгебра $\mathcal{L}_{4,10} = L\{e_{13}, e_{24}, e_1, e_3, \}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{3,5}$ посредством вектора e_{13} . Поэтому класс $P_{4,10}$ является подклассом класса $P_{3,5}$. Подставляя (4.5.4) в уравнение (1.1.2) для вектора $\xi = e_{13}$

$$x^3\partial_1 A_i - x^1\partial_3 A_i + A_1\delta_i^3 - A_3\delta_i^1 = 0, \quad (5.10.1)$$

совершая в полученных уравнениях замену (4.5.3), получаем в результате

$$\begin{aligned} A_1 &= 0, \quad A_2 = C_1(\rho) \operatorname{ch} \varphi + C_2(\rho) \operatorname{sh} \varphi, \\ A_3 &= 0, \quad A_4 = -C_1(\rho) \operatorname{sh} \varphi - C_2(\rho) \operatorname{ch} \varphi, \end{aligned} \quad (5.10.2)$$

где $C_1(\rho)$ и $C_2(\rho)$ — произвольные функции.

Утверждение 5.10.1. Класс $P_{4,10}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{4,10}$, определяется формулами (5.10.2) и (4.5.3).

5.11. Класс $P_{4,11}$

Алгебра $\mathcal{L}_{4,11} = L\{e_{13}, e_{24}, e_2, e_4, \}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{3,6}$ (при $\lambda = 0$) посредством вектора e_{13} . Поэтому класс $P_{4,11}$ является подклассом класса $P_{3,6}$ ($\lambda = 0$). Подставляя (4.6.3) в (5.10.1), совершая в полученных уравнениях замену

$$x^1 = r \sin \varphi, \quad x^3 = r \cos \varphi, \quad (5.11.1)$$

получаем в результате

$$\begin{aligned} A_1 &= C_1(r) \sin \varphi + C_2(r) \cos \varphi, \quad A_2 = 0, \\ A_3 &= C_1(r) \cos \varphi - C_2(r) \sin \varphi, \quad A_4 = 0, \end{aligned} \quad (5.11.2)$$

где $C_1(r)$ и $C_2(r)$ — произвольные функции.

Утверждение 5.11.1. Класс $P_{4,11}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{4,11}$, определяется формулами (5.11.2) и (5.11.1).

5.12. Класс $P_{4,12}$

Алгебре $\mathcal{L}_{4,12} = L\{e_{12} - e_{14} + \mu e_3, e_{23} + e_{34} + \nu e_2, e_1, e_2 - e_4\}$ соответствует группа $G_{4,12}$, порождаемая двумя одномерными подгруппами параболических винтов и трансляциями в направлениях векторов двумерной изотропной плоскости. Решение системы уравнений (1.1.2) для векторов e_1 и $e_2 - e_4$ имеет вид

$$A_i = A_i(x^2 + x^4, x^3). \quad (5.12.1)$$

Для вектора $e_{12} - e_{14} + \mu e_3$ уравнения (1.1.2) записываются в виде

$$XA_i - A_1(\delta_i^2 + \delta_i^4) + (A_2 - A_4)\delta_i^1 = 0, \quad (5.12.2)$$

$$X = -(x^2 + x^4)\partial_1 + x^1(\partial_2 - \partial_4) + \mu\partial_3, \quad (5.12.3)$$

для вектора $e_{23} + e_{34} + \nu e_2$ — в виде

$$YA_i + A_3(\delta_i^2 + \delta_i^4) - (A_2 - A_4)\delta_i^3 = 0, \quad (5.12.4)$$

$$Y = \nu\partial_2 + (x^2 + x^4)\partial_3 - x^3(\partial_2 - \partial_4). \quad (5.12.5)$$

Подставляя (5.12.1) в (5.12.2), (5.12.3) и (5.12.4), (5.12.5), получаем соответственно

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial A_1}{\partial x^3} + A_2 - A_4 = 0, \quad \mu \frac{\partial A_2}{\partial x^3} - A_1 = 0, \\ \mu \frac{\partial A_3}{\partial x^3} = 0, \quad \mu \frac{\partial A_4}{\partial x^3} - A_1 = 0 \end{aligned} \quad (5.12.6)$$

и

$$\begin{aligned} \nu \frac{\partial A_1}{\partial x^2} + (x^2 + x^4) \frac{\partial A_1}{\partial x^3} = 0, \quad \nu \frac{\partial A_2}{\partial x^2} + (x^2 + x^4) \frac{\partial A_2}{\partial x^3} + A_3 = 0, \\ \nu \frac{\partial A_3}{\partial x^2} + (x^2 + x^4) \frac{\partial A_3}{\partial x^3} - A_2 + A_4 = 0, \quad \nu \frac{\partial A_4}{\partial x^2} + (x^2 + x^4) \frac{\partial A_4}{\partial x^3} + A_3 = 0. \end{aligned} \quad (5.12.7)$$

В результате решения системы уравнений (5.12.6), (5.12.7) получим следующее утверждение.

Утверждение 5.12.1. Класс $P_{4,12}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{4,12}$, определяется следующими формулами

а) при $\mu = \nu = 0$

$$\begin{aligned} A_1 = 0, \quad A_3 = \Psi(x^2 + x^4), \\ A_2 = A_4 = \Phi(x^2 + x^4) - \frac{x^3 \Psi(x^2 + x^4)}{x^2 + x^4}; \end{aligned} \quad (5.12.8)$$

b) при $\mu = 0, \nu \neq 0$

$$\begin{aligned} A_1 &= 0, \quad A_2 = A_4 = \Phi(u) - \frac{x^2 + x^4}{\nu} \Psi(u), \\ A_3 &= \Psi(u), \quad u = x^3 - \frac{(x^2 + x^4)^2}{2\nu}; \end{aligned} \quad (5.12.9)$$

c) при $\mu \neq 0, \nu = 0$

$$\begin{aligned} A_1 &= \Phi(x^2 + x^4), \quad A_3 = -\frac{x^2 + x^4}{\mu} \Phi(x^2 + x^4), \\ A_2 &= A_4 = \frac{x^3}{\mu} \Phi(x^2 + x^4) + \Psi(x^2 + x^4); \end{aligned} \quad (5.12.10)$$

d) при $\mu \neq 0, \nu \neq 0$

$$A_1 = A_3 = 0, \quad A_2 = A_4 = \text{const} \quad (5.12.11)$$

(Φ и Ψ — произвольные функции одной переменной).

5.13. Класс $P_{4,13}$

Алгебре $\mathcal{L}_{4,13} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{24} + \lambda e_1, e_3, e_2 - e_4\}$ соответствует группа $G_{4,13}$, порождаемая гиперболическими винтами, параболическими вращениями и трансляциями в направлениях векторов изотропной плоскости. Решение системы уравнений (1.1.2) для векторов e_3 и $e_2 - e_4$ имеет вид

$$A_i = A_i(x^1, x^2 + x^4). \quad (5.13.1)$$

Подставляя (5.13.1) в уравнение (1.1.2) для вектора $e_{12} - e_{14}$

$$XA_i - A_1(\delta_i^2 + \delta_i^4) + (A_2 - A_4)\delta_i^1 = 0, \quad (5.13.2)$$

$$X = -(x^2 + x^4)\partial_1 + x^1(\partial_2 - \partial_4), \quad (5.13.3)$$

получаем в результате

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{x^1 C_1}{x^2 + x^4} + C_2, \quad A_2 = \frac{(x^1)^2 C_1}{2(x^2 + x^4)} - \frac{x^1 C_2}{x^2 + x^4} + C_3, \\ A_3 &= C_4, \quad A_4 = A_2 + C_1 \quad (C_k = C_k(x^2 + x^4)). \end{aligned} \quad (5.13.4)$$

Подставляя (5.13.4) в (2.3.1) (уравнение (1.1.2) для вектора $e_{24} + \lambda e_1$), получаем

$$\begin{aligned} C_1 &= K_1(x^2 + x^4), \quad C_2 = K_1 \lambda \ln(x^2 + x^4) + K_2, \\ C_3 &= \frac{K_1 \lambda^2 \ln^2(x^2 + x^4) + 2K_2 \lambda \ln(x^2 + x^4)}{2(x^2 + x^4)} - \frac{K_1}{2}(x^2 + x^4) + \frac{K_3}{x^2 + x^4}, \\ C_4 &= K_4 \quad (K_i = \text{const}). \end{aligned} \quad (5.13.5)$$

Утверждение 5.13.1. Класс $P_{4,13}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{4,13}$, определяется формулами (5.13.4) и (5.13.5).

5.14. Класс $P_{4,14}$

Алгебре $\mathcal{L}_{4,14} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{24} + \lambda e_3, e_1 + \nu e_3, e_2 - e_4\}$ соответствует группа $G_{4,14}$, порождаемая гиперболическими винтами, параболическими вращениями и трансляциями в направлениях векторов изотропной плоскости (группы $G_{4,14}$ и $G_{4,13}$ не являются сопряжёнными). Решение системы уравнений (1.1.2) для векторов $e_1 + \nu e_3$ и $e_2 - e_4$ имеет вид

$$A_i = A_i(x^2 + x^4, x^3 - \nu x^1). \quad (5.14.1)$$

5.14.1. Класс $P_{4,14a}$

Пусть $\nu \neq 0$. Подставляя (5.14.1) в (5.13.2), (5.13.3) (уравнение (1.1.2) для вектора $e_{12} - e_{14}$) получаем в результате

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(x^3 - \nu x^1)C_1}{\nu(x^2 + x^4)} + C_2, \\ A_2 &= \frac{(x^3 - \nu x^1)^2 C_1}{2\nu^2(x^2 + x^4)^2} + \frac{(x^3 - \nu x^1)C_2}{\nu(x^2 + x^4)} + C_3, \\ A_3 &= C_4, \quad A_4 = A_2 + C_1 \quad (C_k = C_k(x^2 + x^4)). \end{aligned} \quad (5.14.2)$$

Подставляя (5.14.2) в уравнение

$$x^4 \partial_2 A_i + \nu \partial_3 A_i + x^2 \partial_4 A_i + A_2 \delta_i^4 + A_4 \delta_i^2 = 0 \quad (5.14.3)$$

((1.1.2) для вектора $\xi = e_{24} + \nu e_3$), получаем окончательно

$$\begin{aligned} C_1 &= K_1(x^2 + x^4), \quad C_2 = -\frac{K_1 \lambda}{\nu} \ln(x^2 + x^4) + K_2, \\ C_3 &= \frac{K_1 \lambda^2 \ln^2(x^2 + x^4) - 2K_2 \lambda \nu \ln(x^2 + x^4)}{2\nu^2(x^2 + x^4)} - \frac{K_1}{2}(x^2 + x^4) + \frac{K_3}{x^2 + x^4}, \\ C_4 &= K_4 \quad (K_i = \text{const}). \end{aligned} \quad (5.14.4)$$

Утверждение 5.14.1. Класс $P_{4,14a}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{4,14a}$ ($G_{4,14}$ при $\nu \neq 0$), определяется формулами (5.14.2) и (5.14.4).

5.14.2. Класс $P_{4,14b}$

При $\nu = 0$ аналогично предыдущему пункту получим следующий результат.

Утверждение 5.14.2. Класс $P_{4,14b}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{4,14b}$ ($G_{4,14}$ при $\nu = 0$), определяется формулами

$$\begin{aligned} A_1 &= 0, \quad A_3 = \Psi(x^3 - \lambda \ln(x^2 + x^4)), \\ A_2 &= A_4 = \frac{\Phi(x^3 - \lambda \ln(x^2 + x^4))}{x^2 + x^4}, \end{aligned} \quad (5.14.5)$$

где Φ и Ψ — произвольные функции одной переменной.

5.15. Класс $P_{4,15}$

Алгебра $\mathcal{L}_{4,15} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{24} + \lambda e_1, e_2 - e_4\}$ является расширением $\mathcal{L}_{2,11a}$ с помощью векторов $e_{24} + \lambda e_1$ и $e_2 - e_4$. Поэтому $P_{4,15} \subset P_{2,11a}$. Подставляя (3.11.9), (3.11.8) в уравнение

$$L_{e_2 - e_4} A_i = \partial_2 A_i - \partial_4 A_i = 2\tilde{x}^1 \frac{\partial A_i}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \quad (5.15.1)$$

получаем

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{x^1 C_1}{x^2 + x^4} + C_2, \quad A_2 = -\frac{((x^1)^2 + (x^3)^2) C_1}{2(x^2 + x^4)^2} - \frac{x^1 C_2 + x^3 C_3}{x^2 + x^4} + C_4, \\ A_3 &= \frac{x^3 C_1}{x^2 + x^4} + C_3, \quad A_4 = A_2 - C_1 \quad (C_k = C_k(x^2 + x^4)). \end{aligned} \quad (5.15.2)$$

Подставляя (5.15.2) в (2.3.1) (уравнение (1.1.2) для $e_{24} + \lambda e_1$), получаем

$$\begin{aligned} C_1 &= K_1(x^2 + x^4), \quad C_2 = -K_1 \lambda \ln(x^2 + x^4) + K_2, \quad C_3 = K_3, \\ C_4 &= \frac{-K_1 \lambda^2 \ln^2(x^2 + x^4) + 2K_2 \lambda \ln(x^2 + x^4)}{2(x^2 + x^4)} + \frac{K_1}{2}(x^2 + x^4) + \frac{K_4}{x^2 + x^4} \\ &\quad (K_i = \text{const}). \end{aligned} \quad (5.15.3)$$

Утверждение 5.15.1. Класс $P_{4,15}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{4,15}$, определяется формулами (5.15.2) и (5.15.3).

5.16. Класс $P_{4,16}$

Алгебра $\mathcal{L}_{4,16} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_3, e_{23} + e_{34} + \lambda e_1, e_{13}, e_2 - e_4\}$ является расширением $\mathcal{L}_{3,14}$ (в случае замены $\mu \mapsto \lambda$, $\nu \mapsto \lambda$ и $\lambda \mapsto 0$) с помощью вектора e_{13} . Поэтому $P_{4,16} \subset P_{3,14}$ при соответствующих значениях параметров. Вместо замены (4.14.4) будем иметь

$$u = x^2 + x^4, \quad \varphi = \frac{\lambda x^1 + u x^3}{u^2 + \lambda^2}, \quad \psi = \frac{\lambda x^3 - x^1 u}{u^2 + \lambda^2}. \quad (5.16.1)$$

Подставляя (4.14.8), (5.16.1) в (5.10.1) (уравнение (1.1.2) для вектора e_{13}), получаем следующий результат.

Утверждение 5.16.1. Класс $P_{4,16}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{4,16}$, имеет вид

$$A_1 = A_3 = 0, \quad A_2 = A_4 = \Phi(x^2 + x^4), \quad (5.16.2)$$

где $\Phi(u)$ — произвольная функция.

5.17. Класс $P_{4,17}$

Алгебра $\mathcal{L}_{4,17} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{13} + \lambda e_{24}, e_2 - e_4\}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{3,19}$ с помощью вектора $e_2 - e_4$. Поэтому класс $P_{4,17}$ получается

сужением класса $P_{3,19}$. Подставляя (3.11.9), (4.19.4) в уравнение (5.15.1), получаем в результате

$$\begin{aligned} A_1 &= K_1 x^1 + \Psi, \\ A_2 &= -\frac{K_1((x^1)^2 + (x^3)^2)}{2(x^2 + x^4)} - \frac{x^1 \Psi + x^3 \Xi}{x^2 + x^4} + \frac{K_1}{2}(x^2 + x^4) + \frac{K_2}{x^2 + x^4}, \\ A_3 &= K_1 x^3 + \Xi, \quad A_4 = A_2 - K_1(x^2 + x^4), \end{aligned} \quad (5.17.1)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi &= K_3 \cos \frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda} + K_4 \sin \frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda}, \\ \Xi &= -K_3 \sin \frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda} + K_4 \cos \frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda} \quad (K_i = \text{const}). \end{aligned} \quad (5.17.2)$$

Утверждение 5.17.1. Класс $P_{4,17}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{4,17}$, определяется формулами (5.17.1) и (5.17.2).

5.18. Класс $P_{4,18}$

Алгебра $\mathcal{L}_{4,18} = L\{e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_4\}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{3,20}$ посредством вектора e_4 , поэтому класс $P_{4,18}$ содержится в $P_{3,20}$. Подставляя (4.20.8) в уравнение (2.1.2), получаем следующее утверждение.

Утверждение 5.18.1. Класс $P_{4,18}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{4,18}$, имеет вид

$$A_i = (0, 0, 0, A_4(\rho)), \quad (5.18.1)$$

где $\rho = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$, а $A_4(\rho)$ — произвольная функция.

5.19. Класс $P_{4,19}$

Алгебра $\mathcal{L}_{4,19} = L\{e_{12}, e_{14}, e_{24}, e_3\}$ является расширением $\mathcal{L}_{3,21}$ посредством вектора e_3 , поэтому $P_{4,19} \subset P_{3,21}$. Подставляя (4.21.5) в уравнение (3.8.1), получаем следующий результат.

Утверждение 5.19.1. Класс $P_{4,19}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{4,19}$, имеет вид

$$A_i = (0, 0, C(u), 0), \quad (5.19.1)$$

где $u = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^4)^2}$, а $C(u)$ — произвольная функция.

5.20. Класс $P_{4,20}$

Алгебра $\mathcal{L}_{4,20} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{13}, e_{24}\}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{3,17}$ посредством вектора e_{13} . Поэтому $P_{4,20} \subset P_{3,17}$. Подставляя (3.11.9), (4.17.3) в (4.18.1), (4.18.2) (при $\lambda = 0$), получаем после возвращения к координатам $\{x^i\}$ следующий результат.

Утверждение 5.20.1. Класс $P_{4,20}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{4,20}$, имеет вид

$$\begin{aligned} A_1 &= x^1 C(\tilde{x}^4), \quad A_3 = x^3 C(\tilde{x}^4), \\ A_2 &= \frac{C(\tilde{x}^4)}{2} \left(x^2 + x^4 - \frac{(x^1)^2 + (x^3)^2}{x^2 + x^4} \right) + \frac{D(\tilde{x}^4)}{x^2 + x^4}, \\ A_4 &= A_2 - (x^2 + x^4) C(\tilde{x}^4), \end{aligned} \quad (5.20.1)$$

где $\tilde{x}^4 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2$, а $C(\tilde{x}^4)$ и $D(\tilde{x}^4)$ — произвольные функции.

6. Потенциалы, допускающие пятимерные группы

6.1. Класс $P_{5,1}$

Алгебра $\mathcal{L}_{5,1} = L\{e_{24}, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{4,1}$ посредством вектора e_{24} . Поэтому $P_{5,1} \subset P_{4,1}$. Подставляя $A_i = \text{const}$ в (2.3.1) (при $\lambda = 0$), получаем следующее утверждение.

Утверждение 6.1.1. Класс $P_{5,1}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{5,1}$, имеет вид

$$A_i = (0, A, 0, B) \quad (A, B = \text{const}). \quad (6.1.1)$$

6.2. Класс $P_{5,2}$

Алгебра $\mathcal{L}_{5,2} = L\{e_{13} + \lambda e_{24}, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{4,1}$ посредством вектора $e_{13} + \lambda e_{24}$. Поэтому $P_{5,2} \subset P_{4,1}$. Подставляя $A_i = \text{const}$ в (2.5.1), (2.5.2) ($\lambda \neq 0$), получаем, что $A_i = 0$, т. е. класс $P_{5,2}$ пуст.

6.3. Класс $P_{5,3}$

Алгебра $\mathcal{L}_{5,3} = L\{e_{12} - e_{14}, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{4,1}$ посредством вектора $e_{12} - e_{14}$. Поэтому $P_{5,3} \subset P_{4,1}$. Подставляя $A_i = \text{const}$ в (2.4.1), (2.4.2) ($\lambda = \mu = 0$), получаем следующее утверждение.

Утверждение 6.3.1. Класс $P_{5,3}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{5,3}$, имеет вид

$$A_i = (0, A, B, A) \quad (A, B = \text{const}). \quad (6.3.1)$$

6.4. Класс $P_{5,4}$

Алгебра $\mathcal{L}_{5,4} = L\{e_{13}, e_{24}, e_1, e_3, e_2 + e_4\}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{4,5}$ посредством вектора e_{13} . Поэтому $P_{5,4} \subset P_{4,5}$. Подставляя (5.5.2) в (2.2.1)

($\lambda = \mu = 0$), получаем

$$\begin{aligned} A_1 &= 0, & A_2 &= K_1(x^2 - x^4) + \frac{K_2}{x^2 - x^4}, \\ A_3 &= 0, & A_4 &= K_1(x^2 - x^4) - \frac{K_2}{x^2 - x^4}, \end{aligned} \quad (6.4.1)$$

где K_1 и K_2 — произвольные константы.

Утверждение 6.4.1. Класс $P_{5,4}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{5,4}$, имеет вид (6.4.1).

6.5. Класс $P_{5,5}$

Алгебра $\mathcal{L}_{5,5} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34} + \lambda e_2, e_1, e_3, e_2 - e_4\}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{4,9}$ ($\lambda = 0$) посредством вектора $e_{23} + e_{34} + \lambda e_2$. Поэтому $P_{5,4} \subset P_{4,9}$. Подставляя (5.9.5) в (5.12.4), (5.12.5) ($\nu \mapsto \lambda$), получаем следующее утверждение.

Утверждение 6.5.1. Класс $P_{5,5}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{5,5}$, при $\lambda = 0$ имеет вид

$$A_i = (0, \Phi(x^2 + x^4), 0, \Phi(x^2 + x^4)) \quad (6.5.1)$$

(Φ — произвольная функция), а при $\lambda \neq 0$ —

$$A_1 = 0, \quad A_2 = A_4 = -\frac{K_1}{\lambda}(x^2 + x^4) + K_2, \quad A_3 = K_1, \quad (6.5.2)$$

где K_1 и K_2 — произвольные постоянные.

6.6. Класс $P_{5,6}$

Алгебра $\mathcal{L}_{5,6} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{24} + \lambda e_3, e_1, e_2, e_4\}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{4,6}$ посредством вектора $e_{12} - e_{14}$. Поэтому $P_{5,6} \subset P_{4,6}$. Подставляя (5.6.1) или (5.6.2) в (2.4.1), (2.4.2) ($\lambda = \mu = 0$), получаем соответственно

$$A_1 = 0, \quad A_2 = A_4 = K_1 e^{-x^3/\lambda}, \quad A_3 = K_2 \quad (K_1, K_2 = \text{const}) \quad (6.6.1)$$

или

$$A_i = (0, 0, \Phi(x^3), 0). \quad (6.6.2)$$

Утверждение 6.6.1. Класс $P_{5,6}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{5,6}$, состоит из полей вида (6.6.1) при $\lambda \neq 0$ и (6.6.2) при $\lambda = 0$.

6.7. Класс $P_{5,7}$

Алгебра $\mathcal{L}_{5,7} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{24}, e_1, e_3, e_2 - e_4\}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{4,13}$ посредством вектора e_1 . Поэтому $P_{5,7} \subset P_{4,13}$. Подставляя (5.13.4), (5.13.5) в (2.1.1), получаем следующее утверждение.

Утверждение 6.7.1. Класс $P_{5,7}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{5,7}$, состоит из полей вида

$$A_i = \left(0, \frac{B}{x^2 + x^4}, C, \frac{B}{x^2 + x^4} \right), \quad (6.7.1)$$

где B и C — произвольные константы.

6.8. Класс $P_{5,8}$

Алгебра $\mathcal{L}_{5,8} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{24} + \lambda e_3, e_1, e_2 - e_4\}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{4,12a}$ ($\mathcal{L}_{4,12}$ при $\mu = \nu = 0$) посредством вектора $e_{24} + \lambda e_3$. Поэтому $P_{5,8} \subset P_{4,12a}$. Подставляя (5.12.8) в (3.12.1), получаем следующее утверждение.

Утверждение 6.8.1. Класс $P_{5,8}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{5,8}$, состоит из полей вида

$$A_i = (0, \Phi(x^2 + x^4), 0, \Phi(x^2 + x^4)), \quad (6.8.1)$$

где Φ — произвольная функция одной переменной.

6.9. Класс $P_{5,9}$

Алгебра $\mathcal{L}_{5,9} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{13}, e_{24}, e_2 - e_4\}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{4,20}$ посредством вектора $e_2 - e_4$. Поэтому $P_{5,9} \subset P_{4,20}$. Подставляя (5.20.1) в (3.6.1), получаем

$$\begin{aligned} A_1 &= Cx^1, & A_2 &= \frac{C}{2} \left(x^2 + x^4 - \frac{(x^1)^2 + (x^3)^2}{x^2 + x^4} \right) + \frac{D}{x^2 + x^4}, \\ A_3 &= Cx^3, & A_4 &= A_2 - C(x^2 + x^4) \quad (C, D = \text{const}). \end{aligned} \quad (6.9.1)$$

Утверждение 6.9.1. Класс $P_{5,9}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{5,9}$, состоит из полей вида (6.9.1).

7. Потенциалы, допускающие шестимерные группы

7.1. Класс $P_{6,1}$

Алгебра $\mathcal{L}_{6,1} = L\{e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_{14}, e_{24}, e_{34}\}$ соответствует группе Лоренца. Она является расширением алгебры $\mathcal{L}_{3,20}$ посредством векторов e_{14} , e_{24} и e_{34} . Поэтому класс $P_{6,1}$ содержится в $P_{3,20}$. Подставляя (4.20.8) в (2.3.1) ($\lambda = 0$), получаем, что $A_i = 0$, т. е. класс потенциалов, соответствующий группе $G_{6,1}$, пуст.

7.2. Класс $P_{6,2}$

Алгебра $\mathcal{L}_{6,2} = L\{e_{13}, e_{24}, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{5,1}$ посредством вектора e_{13} . Поэтому класс $P_{6,2}$ содержится в $P_{5,1}$. Подставляя (6.1.1) в (2.2.1) ($\lambda = \mu = 0$), получаем, что $A_i = 0$, т. е. класс потенциалов, соответствующий группе $G_{6,2}$, пуст.

7.3. Класс $P_{6,3}$

Алгебра $\mathcal{L}_{6,3} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ является расширением $\mathcal{L}_{5,3}$ посредством вектора $e_{23} + e_{34}$. Поэтому класс $P_{6,3}$ содержится в $P_{5,3}$. Подставляя (6.3.1) в (3.11.7), получаем следующее утверждение.

Утверждение 7.3.1. *Класс $P_{6,3}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{6,3}$, имеет вид*

$$A_i = (0, A, 0, A) \quad (A = \text{const}). \quad (7.3.1)$$

7.4. Класс $P_{6,4}$

Алгебра $\mathcal{L}_{6,4} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{24}, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ является расширением $\mathcal{L}_{5,1}$ посредством $e_{12} - e_{14}$. Поэтому $C_{6,4} \subset C_{5,1}$. Подставляя (6.1.1) в (2.4.1), (2.4.2) ($\lambda = \mu = 0$), получаем следующий результат.

Утверждение 7.4.1. *Класс $P_{6,4}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{6,4}$, имеет вид (7.3.1).*

Замечание. Из утверждений 7.3.1 и 7.4.1 следует, что (7.3.1) допускает более широкую подгруппу, чем $G_{6,3}$ и $G_{6,4}$.

7.5. Класс $P_{6,5}$

Алгебра $\mathcal{L}_{6,5} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{13} + \lambda e_2, e_1, e_3, e_2 - e_4\}$ является расширением $\mathcal{L}_{5,5}$ ($\lambda = 0$) посредством $e_{13} + \lambda e_2$. Поэтому $P_{6,5} \subset P_{5,5}$ ($\lambda = 0$). Подставляя (6.5.1) в (2.2.1) ($\mu = 0$), получаем $\lambda \Phi' = 0$, откуда следует утверждение 7.5.1.

Утверждение 7.5.1. *Класс $P_{6,5}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{6,5}$, имеет вид (6.5.1) при $\lambda = 0$ и (7.3.1) при $\lambda \neq 0$.*

7.6. Класс $P_{6,6}$

Алгебра $\mathcal{L}_{6,6} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{24}, e_1, e_3, e_2 - e_4\}$ является расширением $\mathcal{L}_{5,5}$ ($\lambda = 0$) посредством e_{24} . Поэтому $P_{6,6} \subset P_{5,5}$ ($\lambda = 0$). Подставляя (6.5.1) в (2.3.1) ($\lambda = 0$), получаем

$$A_i = \left(0, \frac{B}{x^2 + x^4}, 0, \frac{B}{x^2 + x^4}\right), \quad B = \text{const}. \quad (7.6.1)$$

Утверждение 7.6.1. Класс $P_{6,6}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{6,6}$, имеет вид (7.6.1).

7.7. Класс $P_{6,7}$

Алгебра $\mathcal{L}_{6,7} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{13} + \lambda e_{24}, e_1, e_3, e_2 - e_4\}$ является расширением $\mathcal{L}_{5,5}$ ($\lambda = 0$) посредством $e_{13} + \lambda e_{24}$. Поэтому $P_{6,7} \subset P_{5,5}$ ($\lambda = 0$). Подставляя (6.5.1) в (2.5.1), (2.5.2), получаем следующий результат.

Утверждение 7.7.1. Класс $P_{6,7}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{6,7}$, имеет вид (7.6.1).

Замечание. Из утверждений 7.6.1 и 7.7.1 следует, что (7.6.1) допускает более широкую подгруппу, чем $G_{6,6}$ и $G_{6,7}$.

7.8. Класс $P_{6,8}$

Алгебра $\mathcal{L}_{6,8} = L\{e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_1, e_2, e_3\}$ является расширением $\mathcal{L}_{3,20}$ посредством e_1, e_2 и e_3 . Поэтому $P_{6,8} \subset P_{3,20}$. Подставляя (4.20.8) в уравнения $\partial_1 A_i = \partial_2 A_i = \partial_3 A_i = 0$, получаем следующее утверждение.

Утверждение 7.8.1. Класс $P_{6,8}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{6,8}$, имеет вид $A_i = (0, 0, 0, \Phi(x^4))$, где $\Phi(x^4)$ — произвольная функция.

7.9. Класс $P_{6,9}$

Алгебра $\mathcal{L}_{6,9} = L\{e_{12}, e_{14}, e_{24}, e_1, e_2, e_4\}$ является расширением $\mathcal{L}_{3,21}$ посредством e_1, e_2 и e_4 . Поэтому $P_{6,9} \subset P_{3,21}$. Подставляя (4.21.5) в уравнения $\partial_1 A_i = \partial_2 A_i = \partial_4 A_i = 0$, получаем следующий результат.

Утверждение 7.9.1. Класс $P_{6,9}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{6,9}$, имеет вид $A_i = (0, 0, \Phi(x^3), 0)$, где $\Phi(x^3)$ — произвольная функция.

8. Семь классов пространств Максвелла, допускающих нетривиальные группы симметрий

Проведённая классификация потенциальных структур позволила уточнить классификацию пространств Максвелла, описанную в [3, 4]. Ниже приведены классы пространств Максвелла, соответствующие алгебрам $\mathcal{L}_{3,19}$, $\mathcal{L}_{4,16}$, $\mathcal{L}_{4,17}$, $\mathcal{L}_{4,20}$, $\mathcal{L}_{5,9}$, $\mathcal{L}_{6,5}$ и $\mathcal{L}_{6,7}$, которые ранее [3] считались пустыми.

8.1. Класс $C_{3,19}$

Алгебре $\mathcal{L}_{3,19} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{13} + \lambda e_{24}\}$ ($\lambda \neq 0$) соответствует группа $G_{3,19}$, состоящая из композиций параболических вращений двух видов и пропорциональных бивращений.

Утверждение 8.1.1. *Пространство Максвелла класса $C_{3,19}$ задаётся тензором F_{ij} вида*

$$\begin{aligned} F_{12} &= -\frac{\tilde{x}^1 \Phi_2}{2} (1 + (\tilde{x}^2)^2 - (\tilde{x}^3)^2) - \tilde{x}^1 \tilde{x}^2 \tilde{x}^3 \Phi_1 + \frac{\Phi_3}{\tilde{x}^1} - \tilde{x}^2 \Phi_5, \\ F_{13} &= \tilde{x}^1 (\tilde{x}^2 \Phi_1 - \tilde{x}^3 \Phi_2), \quad F_{14} = F_{12} + \tilde{x}^1 \Phi_2, \\ F_{23} &= -\frac{\tilde{x}^1 \Phi_1}{2} (1 - (\tilde{x}^2)^2 + (\tilde{x}^3)^2) - \tilde{x}^1 \tilde{x}^2 \tilde{x}^3 \Phi_2 - \frac{\Phi_4}{\tilde{x}^1} - \tilde{x}^3 \Phi_5, \\ F_{24} &= \tilde{x}^1 (\tilde{x}^2 \Phi_2 + \tilde{x}^3 \Phi_1) + \Phi_5, \quad F_{34} = -F_{23} - \tilde{x}^1 \Phi_1, \end{aligned} \quad (8.1.1)$$

где $\Phi_k = \Phi_k(\tilde{x}^4)$ ($k = 1, 2, 5$) — произвольные функции,

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= \Phi_3(\tilde{x}^4) = \int \left(\frac{1}{2\lambda} \Phi_1(\tilde{x}^4) - \frac{\tilde{x}^4}{2} \Phi_2'(\tilde{x}^4) - \Phi_2(\tilde{x}^4) \right) d\tilde{x}^4, \\ \Phi_4 &= \Phi_4(\tilde{x}^4) = \int \left(-\frac{1}{2\lambda} \Phi_2(\tilde{x}^4) + \frac{\tilde{x}^4}{2} \Phi_1'(\tilde{x}^4) + \Phi_1(\tilde{x}^4) \right) d\tilde{x}^4, \end{aligned} \quad (8.1.2)$$

а связь между координатами задаётся формулами (3.11.8).

Пример. Полагая в формулах (3.11.9), (4.19.4) $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ и $C_4 = \varphi(\tilde{x}^4) = \varphi$, получаем потенциал

$$\begin{aligned} A_1 &= \varphi(\tilde{x}^4) \sin \frac{\ln \tilde{x}^1}{\lambda}, \quad A_3 = \varphi(\tilde{x}^4) \cos \frac{\ln \tilde{x}^1}{\lambda}, \\ A_2 &= A_4 = \tilde{x}^2 \varphi(\tilde{x}^4) \sin \frac{\ln \tilde{x}^1}{\lambda} - \tilde{x}^3 \varphi(\tilde{x}^4) \cos \frac{\ln \tilde{x}^1}{\lambda}. \end{aligned} \quad (8.1.3)$$

Подставляя (8.1.3), (3.11.8) в (1.1.1), получаем

$$\begin{aligned} F_{12} &= -\left(\frac{2(x^1)^2 \varphi' + \varphi}{x^2 + x^4} + 2x^2 \varphi' \right) \sin \frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda} - \frac{2\lambda x^1 x^3 \varphi' + \varphi}{\lambda(x^2 + x^4)} \cos \frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda}, \\ F_{13} &= 2\varphi' \cdot \left(x^1 \cos \frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda} - x^3 \sin \frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda} \right), \\ F_{14} &= F_{12} + 2(x^2 + x^4) \varphi' \cdot \sin \frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda}, \\ F_{23} &= \left(\frac{2(x^3)^2 \varphi' + \varphi}{x^2 + x^4} + 2x^2 \varphi' \right) \cos \frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda} + \frac{2\lambda x^1 x^3 \varphi' - \varphi}{\lambda(x^2 + x^4)} \sin \frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda}, \\ F_{24} &= -2\varphi' \cdot \left(x^1 \sin \frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda} + x^3 \cos \frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda} \right), \\ F_{34} &= -F_{23} + 2(x^2 + x^4) \varphi' \cdot \cos \frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda}. \end{aligned} \quad (8.1.4)$$

Утверждение 8.1.2. Если $\varphi' = \varphi'(\tilde{x}^4) \neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором F_{ij} вида (8.1.4), допускает трёхмерную группу $G_S = G_{3,19}$.

8.2. Класс $C_{4,16}$

Алгебре $\mathcal{L}_{4,16} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_3, e_{23} + e_{34} + \lambda e_1, e_{13}, e_2 - e_4\}$ соответствует группа $G_{4,16}$, порождаемая двумя одномерными подгруппами параболических винтов, подгруппами псевдовращений и трансляций в изотропном направлении.

Утверждение 8.2.1. Пространство Максвелла класса $C_{4,16}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{aligned} F_{12} = F_{14} &= -\varphi\Phi_1(u) + \psi\Phi_2(u), & F_{13} &= \Phi_1(u), \\ F_{23} = -F_{34} &= \varphi\Phi_2(u) + \psi\Phi_1(u), & F_{24} &= \Phi_2(u), \end{aligned} \quad (8.2.1)$$

где $\Phi_1(u) = K/(u^2 + \lambda^2)$, $K = \text{const}$, $\Phi_2(u)$ — произвольная функция и

$$u = x^2 + x^4, \quad \varphi = \frac{\lambda x^1 + u x^3}{u^2 + \lambda^2}, \quad \psi = \frac{\lambda x^3 - x^1 u}{u^2 + \lambda^2}. \quad (8.2.2)$$

Пример. Подставим (8.2.2) в (8.2.1) и положим $\Phi_2(u) = 0$:

$$\begin{aligned} F_{12} = F_{14} &= -\frac{K(\lambda x^1 + (x^2 + x^4)x^3)}{((x^2 + x^4)^2 + \lambda^2)^2}, & F_{13} &= \frac{K}{(x^2 + x^4)^2 + \lambda^2}, \\ F_{23} = -F_{34} &= \frac{K(\lambda x^3 - x^1(x^2 + x^4))}{((x^2 + x^4)^2 + \lambda^2)^2}, & F_{24} &= 0. \end{aligned} \quad (8.2.3)$$

Утверждение 8.2.2. Если $K \neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором (8.2.3), допускает четырёхмерную группу $G_S = G_{4,16}$.

8.3. Класс $C_{4,17}$

Алгебре $\mathcal{L}_{4,17} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{13} + \lambda e_{24}, e_2 - e_4\}$ соответствует группа $G_{4,17}$, порождаемая двумя одномерными подгруппами параболических вращений, группами пропорциональных бивращений и трансляций вдоль изотропной прямой.

Утверждение 8.3.1. Пространство Максвелла класса $C_{4,17}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{aligned} F_{12} = F_{14} &= \frac{1}{x^2 + x^4} \left(A \cos \frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda} + B \sin \frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda} + C x^1 \right), \\ F_{23} = -F_{34} &= \frac{1}{x^2 + x^4} \left(B \cos \frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda} - A \sin \frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda} - C x^3 \right), \\ F_{13} &= 0, \quad F_{24} = C \quad (A, B, C = \text{const}). \end{aligned} \quad (8.3.1)$$

Утверждение 8.3.2. Если 1) $C \neq 0$ и 2) $A \neq 0$ (или $B \neq 0$), то пространство Максвелла, определяемое тензором F_{ij} вида (8.3.1), допускает четырёхмерную группу $G_S = G_{4,17}$.

8.4. Класс $C_{4,20}$

Алгебре $\mathcal{L}_{4,20} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{13}, e_{24}\}$ соответствует группа $G_{4,20}$, порождаемая двумя одномерными подгруппами параболических вращений, одномерной группой поворотов и одномерной группой псевдовращений.

Утверждение 8.4.1. Пространство Максвелла класса $C_{4,20}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{aligned} F_{12} = F_{14} = \frac{x^1 \Phi}{x^2 + x^4}, \quad F_{13} = 0, \quad F_{23} = -F_{34} = -\frac{x^3 \Phi}{x^2 + x^4}, \\ F_{24} = \Phi \quad (\Phi = \Phi(\tilde{x}^4) = \Phi((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2)). \end{aligned} \quad (8.4.1)$$

Утверждение 8.4.2. Если $\Phi'(\tilde{x}^4) \neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором (8.4.1), допускает четырёхмерную группу $G_S = G_{4,20}$.

Замечание. В [4] класс $C_{4,20}$ непустой, но он заужен по сравнению с вышеприведённым.

8.5. Класс $C_{5,9}$

Алгебре $\mathcal{L}_{5,9} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{13}, e_{24}, e_2 - e_4\}$ соответствует группа $G_{5,9}$, порождаемая двумя одномерными группами параболических вращений, одномерными группами поворотов, псевдовращений и трансляций в изотропном направлении. Алгебра $\mathcal{L}_{5,9}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{4,20}$ посредством вектора $e_2 - e_4$. Поэтому $C_{5,9} \subset C_{4,20}$.

Утверждение 8.5.1. Пространство Максвелла класса $C_{5,9}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{aligned} F_{12} = F_{14} = \frac{Cx^1}{x^2 + x^4}, \quad F_{13} = 0, \quad F_{24} = C, \\ F_{23} = -F_{34} = -\frac{Cx^3}{x^2 + x^4} \quad (C = \text{const}). \end{aligned} \quad (8.5.1)$$

Утверждение 8.5.2. Если $C \neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором (8.5.1), допускает пятимерную группу $G_S = G_{5,9}$.

8.6. Класс $C_{6,5}$

Алгебре $\mathcal{L}_{6,5} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{13} + \lambda e_2, e_1, e_3, e_2 - e_4\}$ соответствует группа $G_{6,5}$, порождаемая двумя одномерными группами параболических вращений, одномерной группой эллиптических винтов и группой трансляций в направлениях векторов трёхмерного изотропного подпространства.

Утверждение 8.6.1. *Пространство Максвелла класса $C_{6,5}$ при $\lambda \neq 0$ задаётся тензором F_{ij} вида*

$$\begin{aligned} F_{12} = F_{14} &= C_1 \sin \frac{x^2 + x^4}{\lambda} + C_2 \cos \frac{x^2 + x^4}{\lambda}, \\ F_{23} = -F_{34} &= C_1 \cos \frac{x^2 + x^4}{\lambda} - C_2 \sin \frac{x^2 + x^4}{\lambda}, \\ F_{13} = F_{24} &= 0 \quad (C_1, C_2 = \text{const}). \end{aligned} \quad (8.6.1)$$

Если $\lambda = 0$, то $F_{ij} = 0$.

Утверждение 8.6.2. *Если $C_1 \neq 0$ или $C_2 \neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором (8.6.1), допускает шестимерную группу $G_S = G_{6,5}$.*

8.7. Класс $C_{6,7}$

Алгебре $\mathcal{L}_{6,7} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{13} + \lambda e_{24}, e_1, e_3, e_2 - e_4\}$ соответствует группа $G_{6,7}$, порождаемая двумя одномерными группами параболических вращений, одномерной группой пропорциональных бивращений и группой трансляций в направлениях векторов трёхмерного изотропного подпространства.

Утверждение 8.7.1. *Пространство Максвелла класса $C_{6,7}$ задаётся тензором F_{ij} вида*

$$F_{12} = F_{14} = \Phi, \quad F_{13} = F_{24} = 0, \quad F_{23} = -F_{34} = \Psi, \quad (8.7.1)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{x^2 + x^4} \left(a_1 \cos \frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda} - a_2 \sin \frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda} \right), \\ \Psi &= \frac{1}{x^2 + x^4} \left(a_1 \sin \frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda} + a_2 \cos \frac{\ln(x^2 + x^4)}{\lambda} \right) \end{aligned} \quad (8.7.2)$$

($a_1, a_2 = \text{const}$).

Утверждение 8.7.2. *Если $a_1 \neq 0$ или $a_2 \neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором (8.7.1), (8.7.2), допускает шестимерную группу $G_S = G_{6,7}$.*

Литература

- [1] Белько И. В. Подгруппы группы Лоренца—Пуанкаре // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1971. — № 1. — С. 5—13.
- [2] Воробьёв А. И. Классификация потенциальных структур, инвариантных относительно гиперболических винтов // Математика и её приложения: Журн. Иванов. мат. об-ва. — 2004. — № 1. — С. 41—50.
- [3] Паринов М. А. Пространства Эйнштейна—Максвелла и уравнения Лоренца. — Иваново: Изд-во ИвГУ, 2003.

- [4] Паринов М. А. Классы пространств Максвелла, допускающих подгруппы группы Пуанкаре // *Фундамент. и прикл. мат.* — 2004. — Т. 10, № 1. — С. 183—237.
- [5] Полежаева Н. С., Паринов М. А. Групповая классификация 4-потенциалов, допускающих параболические вращения. — Иваново: Изд-во ИвГУ, 2003. — Деп. в ВИНТИ 31.07.2003, № 1489-B2003.

