О классической задаче Бертрана—Дарбу*

Р. Г. СМИРНОВ
Университет Далхаузи, Канада
e-mail: smirnov@mathstat.dal.ca

УДК 514.85

Ключевые слова: уравнение Бертрана—Дарбу, геометрия Картана, гамильтоновы системы, тензоры Киллинга, инварианты, подвижный репер.

Аннотация

Хорошо известная задача классической механики, исследованная Бертраном (1857) и Дарбу (1901), рассматривается в контексте геометрии Картана.

Abstract

R. G. Smirnov, The classical Bertrand–Darboux problem, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 7, pp. 231—250.

The well-known problem of classical mechanics considered by Bertrand (1857) and Darboux (1901) is reviewed in the context of Cartan's geometry.

> ... несомненна одна истина. Она состоит в том, что именно работа Эли Картана о связностях, группах голономии и однородных пространствах служит источником всего интересного в современной дифференциальной геометрии.
>
> *К. Номидзу* (*цитируется по* [12])

1. Введение

В 1901 г. Дарбу рассмотрел [7] задачу классической механики, изучавшуюся изначально Бертраном [3] в 1857 г. (русский перевод статьи Дарбу см. в [1]). Позднее результаты этого исследования были практически дословно включены в классическую работу Уиттакера по аналитической механике [29]. В настоящее время подход Дарбу к этой задаче, ставшей известной благодаря монографии Уиттакера, широко используется в литературе по математической физике, касающейся интегрируемых и суперинтегрируемых гамильтоновых систем (см., например, [16, 25, 31]). Таким образом, идея, использованная Дарбу в [7] для

*Работа частично поддержана грантом «Discovery» Совета по естественным наукам и исследованиям Канады (NSERC).

решения задачи Бертрана—Дарбу, была обобщена для изучения гамильтоновых систем в евклидовых пространствах высших размерностей (см. работу [25] и ссылки в ней). С этой точки зрения можно утверждать, что классическая задача Бертрана—Дарбу есть «тот самый случай, содержащий все ростки общности» (Д. Гильберт). Соответственно, цель этой обзорной статьи — возвращение к классической задаче (только частично решённой Дарбу с использованием метода Дарбу, см. [2]) и получение её решения на основе фундаментальных идей геометрии Картана (см. [15] и приведённые там ссылки). Подход к изучению классических гамильтоновых систем, включая задачу Бертрана—Дарбу для классических гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, основан как на на современных [4, 8, 13, 14, 18—21, 27], так и на классических [9, 30] результатах, включающих геометрию Картана, в частности метод подвижного репера [5, 10, 11, 23, 24].

Более конкретно, мы, используя современные обозначения и термины, сравниваем два подхода к задаче, сформулированной Бертраном и Дарбу, а именно подход Дарбу и метод геометрии Картана. Результаты позволяют заключить, что геометрия Картана есть наиболее общий подход к решению задачи Бертрана—Дарбу и её обобщений.

2. Краткий исторический обзор: задача Бертрана—Дарбу

Чтобы сформулировать задачу Бертрана—Дарбу, обратимся к статье Лиувилля [17], в которой прослеживаются истоки данной задачи. Вспомним, что Лиувилль в [17] изучал канонические гамильтоновы уравнения, описывающие движение частицы по искривлённой поверхности, метрика которой определена в изотермических координатах, под влиянием потенциального поля, зависящего только от координат. Он заметил, что если метрика и потенциал гамильтониана (полной энергии) разделены,

$$H(u, v, p_u, p_v) = \frac{\frac{1}{2}(p_u^2 + p_v^2) + C(u) + D(v)}{A(u) + B(v)}, \tag{2.1}$$

в некоторой системе координат (u, v), то гамильтонова система, определённая из (2.1), может быть решена в квадратурах. Здесь $A(u)$, $B(v)$, $C(u)$ и $D(v)$ — произвольные гладкие функции. В настоящей статье конфигурационное пространство рассматриваемых гамильтоновых систем — двумерное риманово многообразие $(M, \boldsymbol{g})$ (псевдориманов случай может быть рассмотрен аналогично [19, 21, 27]), а фазовое пространство — это кокасательное расслоение T^*M. Отметим, что метрика кинетической части (2.1) принимает тогда ковариантную форму

$$ds^2 = \big(A(u) + B(v)\big)(du^2 + dv^2). \tag{2.2}$$

Выражение (2.1) для гамильтониана задаёт также аддитивное разделение переменных в соответствующих координатах для связанного уравнения Гамильтона—Якоби. Метрика (2.2) и потенциальная энергия в гамильтониане (2.1) имеют лиувиллеву форму. Противоположная задача была рассмотрена в 1881 г. Морерой [22], который показал, что если система гамильтоновых уравнений с двумя степенями свободы, определяемых гамильтонианом

$$H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=\frac{1}{2}g^{ij}p_ip_j+V(\boldsymbol{q}),\quad i,j=1,2,\tag{2.3}$$

может быть решена разделением переменных в рамках метода Гамильтона—Якоби, то её метрика $\boldsymbol{g}$ с компонентами g^{ij}, $i,j=1,2$, и потенциалом $V(\boldsymbol{q})$ принимает лиувиллеву форму в специальных координатах (u,v). Здесь $\boldsymbol{q}=(q_1,q_2)$, $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2)$ — стандартные физические координаты и импульсы. Отметим, что это утверждение не исключает того, что гамильтонова система, определённая (2.3), допускает разделение переменных в какой-либо другой системе координат, в которой метрика $\boldsymbol{g}$ и потенциал $V(\boldsymbol{q})$ не имеют лиувиллевой формы. Морера также показал, что на евклидовой плоскости $\mathbb{E}^2$ разделение переменных для гамильтониана (2.1) в лиувиллевой форме происходит в декартовых, полярных, параболических и эллиптико-гиперболических координатах. Эквивалентность, установленная Морерой, является неполной, так как неизвестно, откуда можно вывести специальные координаты (u,v). Ответ (по крайней мере частичный) на данный вопрос дали Бертран и Дарбу [3,7]. Напомним, что Бертран рассматривал гамильтоновы системы, заданные только физическим гамильтонианом (2.3) и допускающие первые интегралы, удовлетворяющие некоторым условиям. Исходя из этих предположений, он рассматривал уравнения движения частицы на евклидовой плоскости $\mathbb{E}^2$ под действием потенциальной силы, определяемой функцией $V(\boldsymbol{q})$, зависящей от координат $\boldsymbol{q}=(q^1,q^2)$. Таким образом, он предполагал, что гамильтонова система, определяемая (2.3), имеет первый интеграл движения вида

$$F(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=K^{ij}p_ip_j+B^kp_k+U(\boldsymbol{q}),\quad i,j,k=1,2.\tag{2.4}$$

Далее Бертран искал потенциал $V(\boldsymbol{q})$ в (2.3), удовлетворяющий данному условию. Бертран рассмотрел случай $B^1=B^2=0$ и показал, что равенство нулю скобки Пуассона $0=\{H,F\}$ задаёт ещё два условия: *уравнение тензоров Киллинга*

$$[\boldsymbol{g},\boldsymbol{K}]=0\tag{2.5}$$

и *условие совместности*

$$d(\hat{\boldsymbol{K}}\,dV)=0,\tag{2.6}$$

где $[\,,\,]$ обозначает скобку Схоутена [26], а $(1,1)$-тензор $\hat{\boldsymbol{K}}$ задаётся формулой $\hat{\boldsymbol{K}}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{g}^{-1}$.

Замечание 1. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что $B^1=B^2=0$ в (2.4).

Уравнение тензоров Киллинга (2.5) показывает, что функции $K^{ij}=K^{ij}(\boldsymbol{q})$ в (2.4) являются компонентами тензора Киллинга валентности два, определённого на евклидовой плоскости $\mathbb{E}^2$. Конкретнее, решение уравнения тензоров

Киллинга (2.5) в стандартных декартовых координатах и при евклидовой метрике

$$\boldsymbol{g} = \partial_1 \otimes \partial_1 + \partial_2 \otimes \partial_2 \tag{2.7}$$

приводит к виду

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K} = {} & (\beta_1 + 2\beta_4 q_2 + \beta_6 q_2^2)\, \partial_1 \otimes \partial_1 + \\ & + (\beta_3 - \beta_4 q_1 - \beta_5 q_2 - \beta_6 q_1 q_2)\, \partial_1 \otimes \partial_2 + (\beta_2 + 2\beta_5 q_1 + \beta_6 q_1^2)\, \partial_2 \otimes \partial_2, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где $\otimes$ означает симметричное тензорное произведение, $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial q_1}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial q_2}$, а произвольные константы $\beta_1, \ldots, \beta_6$ — постоянные интегрирования. В локальных координатах уравнение тензоров Киллинга (2.5) — переопределённая система уравнений в частных производных, и формула (2.8) показывает, что пространство его решений $\mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2)$ шестимерно: $\dim \mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2) = 6$. Далее Бертран обращает внимание на условие совместности (2.6). В декартовых координатах $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2)$ оно принимает вид

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} \right) (\beta_6 q_1 q_2 + \beta_4 q_1 + \beta_5 q_2 - \beta_3) + \\ & + \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} (\beta_6 q_2^2 - \beta_6 q_1^2 + 2\beta_4 q_2 - 2\beta_5 q_1 + \beta_1 - \beta_2) + \\ & + 3 \frac{\partial V}{\partial q_1} (\beta_6 q_2 + \beta_4) + 3 \frac{\partial V}{\partial q_2} (\beta_6 q_1 + \beta_5) = 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Линейное уравнение второго порядка (2.9) впоследствии было названо *уравнением Бертрана—Дарбу*. Решение (2.9) относительно $V(\boldsymbol{q})$ сводится к нахождению допустимых потенциалов гамильтоновых систем, определённых (2.3), интегрируемость которых вытекает из существования первых интегралов (2.4), квадратичных по импульсам. Бертран рассмотрел решения, имеющие вид

$$V[(q_1 - u)^2 + (q_2 - v)^2], \tag{2.10}$$

таким образом получив известный результат Эйлера и Лагранжа о движении частицы, притягиваемой двумя фиксированными центрами по закону Ньютона.

Основной целью работы Дарбу [7] 1901 г. было показать, что линейное уравнение (2.9) можно решить «в общем виде», т. е. получить общий потенциал V гамильтоновой системы (2.3), совместный с первым интегралом (2.4). Перед решением уравнения (2.9) Дарбу замечает, что оно может быть упрощено без потери общности. Действительно, вращением и сдвигом осей можно упростить общий вид (2.8), приведя его к канонической форме. Отметим, что это преобразование координат никак не влияет на динамику системы. Кроме того, Дарбу исключает случай $\beta_6 = 0$, беря $\beta_6 = \frac{1}{2}$ и предполагая, что тензор Киллинга принимает каноническую форму

$$\boldsymbol{K} = \left(\beta_1 + \frac{1}{2} q_2^2 \right) \partial_1 \otimes \partial_1 - \frac{1}{2} q_1 q_2\, \partial_1 \otimes \partial_2 + \left(\beta_2 + \frac{1}{2} q_1^2 \right) \partial_2 \otimes \partial_2 \tag{2.11}$$

после вращения и трансляции. Обратим внимание на то, что координаты q_1, q_2 и параметры β_1, β_2 в (2.11) равны соответствующим координатам и параметрам в (2.8). Они связаны действием группы изометрии (см. (4.31)), состоящей из вращений и сдвигов подстилающего пространства $\mathbb{E}^2$.

Замечание 2. Каноническая форма тензора Киллинга (2.11) может быть ещё более упрощена. Действительно, введём тензор Киллинга формулой $\tilde{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{K} - \beta_2 \boldsymbol{g}$:

$$\tilde{\boldsymbol{K}} = \left(\beta_1 - \beta_2 + \frac{1}{2}q_2^2\right)\partial_1 \otimes \partial_1 - \frac{1}{2}q_1 q_2\, \partial_1 \otimes \partial_2 + \frac{1}{2}q_1^2\, \partial_2 \otimes \partial_2, \tag{2.12}$$

где $\boldsymbol{K}$ задан в (2.11) и $\boldsymbol{g}$ обозначает контравариантную метрику на евклидовой плоскости $\mathbb{E}^2$; в декартовых координатах $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2)$ (см. (2.7)). Действительно, в терминах гамильтониана H (2.3) и первого интеграла F (2.4), определяемого каноническим тензором Киллинга (2.11), это эквивалентно заданию первого интеграла $\tilde{F}$, квадратичного по импульсу и определяемого формулой $\tilde{F} = F - \beta_2 H$. Теперь разность $\beta_1 - \beta_2$ может оказаться единственным параметром, входящим в формулу (2.12). Более того, без потери общности можно предположить, что $\beta_1 - \beta_2 > 0$.

Далее Дарбу продолжает поиск неизвестной функции V, решая методом характеристик уравнение (2.6), определённое каноническим тензором Киллинга (2.11). Для этого он вводит специальные координаты (u, v), в которых уравнение (2.6) легко решается и даёт общий вид потенциала V в координатах (u, v):

$$V(u, v) = \frac{C(u) + D(v)}{u^2 - v^2}. \tag{2.13}$$

Легко заметить, что потенциал V (2.13) имеет лиувиллеву форму (2.1), равно как и соответствующая метрика. Следовательно, гамильтонова система может быть решена разделением переменных в соответствующем уравнении Гамильтона—Якоби. Более того, разделяющиеся координаты (u, v) — параметры конфокальных коник, связанные с исходными декартовыми координатами $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2)$ по формулам

$$q_1 = k \operatorname{ch} u \cos v, \quad q_2 = k \operatorname{sh} u \sin v, \tag{2.14}$$

где $\beta_1 - \beta_2 = 2/k^2$, а β_1, β_2 те же, что в (2.12). Более конкретно, параметры u и v описывают два семейства софокусных ортогонально пересекающихся эллипсов и гипербол. Именно поэтому данные ортогональные координаты называются *эллиптико-гиперболическими*. С учётом того факта, что они допускают разделение переменных в соответствующем гамильтоновой системе (2.3) уравнении Гамильтона—Якоби, они называются *ортогонально разделяющимися координатами*. В заключение этого краткого обзора результатов Дарбу отметим, что на деле он решил две задачи. Во-первых, он применил (при определённых предположениях) подходящее преобразование, состоящее из сдвигов и вращений пространства $\mathbb{E}^2$, для приведения тензора Киллинга вида (2.8) к канонической форме (2.11). Отметим, что это преобразование $\mathbb{E}^2$ задаёт соответствующее преобразование векторного пространства тензоров Киллинга ранга 2 $\mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2)$ (см. (4.32). Во-вторых, он диагонализовал получаемый в итоге тензор Киллинга, задав тем самым соответствующие ортогонально-разделяющиеся координаты (2.14), порождённые двумя семействами конфокальных коник.

Замечание 3. Метрика $\boldsymbol{g}$ и тензор Киллинга $\boldsymbol{K}$ ранга 2, определяющие гамильтониан H (2.3) и первый интеграл F (2.4), в ортогонально-разделяющихся координатах (u, v) задаются диагональными формами

$$\boldsymbol{g} = \frac{1}{k^2(\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v)}(\partial_u \otimes \partial_u + \partial_v \otimes \partial_v) \tag{2.15}$$

и

$$\boldsymbol{K} = \frac{1}{k^2(\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v)}(\cos^2 v\, \partial_u \otimes \partial_u + \operatorname{ch}^2 u\, \partial_v \otimes \partial_v) \tag{2.16}$$

соответственно, где $\partial_u = \frac{\partial}{\partial u}$, $\partial_v = \frac{\partial}{\partial v}$.

В дальнейшем мы опишем указанные выше задачи, решённые Дарбу, с позиций геометрии Картана, а также рассмотрим случаи, которые Дарбу не рассматривал. Следующий пример (см. [20] и приведённые там ссылки) является иллюстрацией применения метода Дарбу для нахождения ортогонально-разделяющихся координат (u, v) в гамильтоновой системе с двумя степенями свободы, допускающей первый интеграл в форме (2.4). Пример показывает, как эта задача решается в квадратурах (это было сделано Лиувиллем [17]).

Пример 1 (второй интегрируемый случай Яцуна). Рассмотрим гамильтонову систему с двумя степенями свободы, заданную на $\mathbb{E}^2$ гамильтонианом

$$H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - 2\left(q_1^4 + 2q_1^2 q_2^2 + \frac{2\lambda}{g_2} q_2^4\right) + \\ + 4(q_1^3 + q_1 q_2^2) - 2(q_1^2 + q_2^2). \tag{2.17}$$

Известно, что гамильтонова система, определённая (2.17), вполне интегрируема, если $g^2 = 2\lambda$; в данном случае это означает наличие следующего первого интеграла, независимого от гамильтониана (2.17), который квадратичен по импульсам:

$$F(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = \left(q_2^2 + \frac{3}{4}\right) p_1^2 - (2q_1 - 1) q_2 p_1 p_2 + \\ + (q_1 - 1) q_1 p_2^2 - 3q_1^4 - 2q_1^2 q_2^2 + q_2^4 + 6q_1^3 + 2q_1 q_2^2 - 3q_1^2. \tag{2.18}$$

Заметим, что тензор Киллинга $\boldsymbol{K}$, определённый (2.18), описывается формулой

$$\boldsymbol{K} = \left(\frac{3}{4} + q_2^2\right) \partial_1 \otimes \partial_1 + \left(\frac{1}{2} q_2 - q_1 q_2\right) \partial_1 \otimes \partial_2 + (-q_1 + q_1^2)\, \partial_2 \otimes \partial_2. \tag{2.19}$$

Сравнив общую формулу (2.8) с формулой (2.19), видим, что в этом случае $\beta_1 = \frac{3}{4}$, $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$, $\beta_5 = -\frac{1}{2}$ и $\beta_6 = 1$. Соответственно, в этом случае уравнение (2.9), полученное из условий совместности (2.6), задаётся формулой

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}-\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\right)\left(q_1q_2-\frac{1}{2}q_2\right)+\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\partial q_2}\left(q_2^2-q_1^2+q_1+\frac{3}{4}\right)+ \\ +3\frac{\partial V}{\partial q_1}q_2+3\frac{\partial V}{\partial q_2}\left(q_1-\frac{1}{2}\right)=0. \quad (2.20)$$

Произведём замену переменных $q_1\to z+\frac{1}{2}$, $q_2\to y$ и получим

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)zy+\frac{\partial^2 V}{\partial z\partial y}(y^2-z^2+1)+\frac{\partial V}{\partial z}3y-\frac{\partial V}{\partial y}3z=0. \quad (2.21)$$

Теперь рассмотрим уравнение характеристик для (2.21):

$$zy(dy^2-dz^2)+(z^2-y^2-1)\,dz\,dy=0. \quad (2.22)$$

Снова вводим новые переменные $u:=z^2$ и $v:=y^2$ и преобразуем (2.22) в уравнение

$$\left(\frac{dv}{du}\right)^2u-v+\frac{dv}{du}(u-v-1)=0, \quad (2.23)$$

т. е. *уравнение Клеро*, имеющее общее решение вида

$$(m+1)(mz^2-y^2)-m=0 \quad (2.24)$$

в исходных переменных z, y. Перепишем (2.24) с новым параметром a и получим

$$\frac{z^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}=1.$$

Заметим, что характеристические кривые уравнения — два семейства конфокальных коник. Следовательно, взяв параметры софокусных гипербол и эллипсов в качестве координат, мы получаем

$$z=ab,\quad y=[(a^2-1)(1-b^2)]^{1/2},$$

или

$$z=\operatorname{ch}u\cos v,\quad y=\operatorname{sh}u\sin v.$$

Запишем уравнение (2.21) в новых координатах a и b:

$$(b^2-a^2)\frac{\partial^2 V}{\partial a\partial b}+2b\frac{\partial V}{\partial a}-2a\frac{\partial V}{\partial b}=0.$$

Это уравнение имеет общее решение

$$V=\frac{C(a)+D(b)}{a^2-b^2}$$

лиувиллевой формы (2.1). Наконец, перейдём к исходным координатам q_1 и q_2, в которых получаем

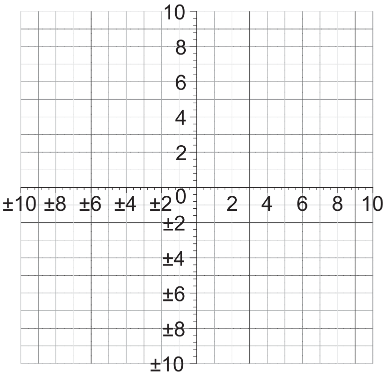
$$q_1=\frac{1}{2}+\operatorname{ch}u\cos v,\quad q_2=\operatorname{sh}u\sin v. \quad (2.25)$$

Следовательно, разделяющиеся координаты имеют *сдвинутый эллиптико-гиперболический тип*. Используя новые координаты, можно решить соответствующее уравнение Гамильтона—Якоби разделением переменных и в итоге полностью решить систему в квадратурах (подробности см. в [20]).

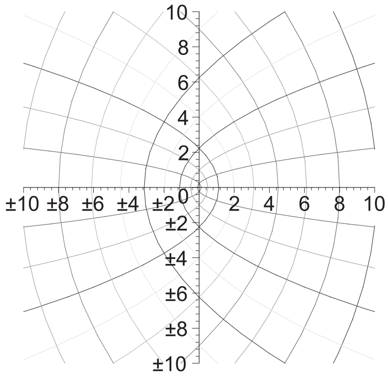
3. Геометрия тензоров Киллинга ранга 2

Хорошо известно, что геометрия упомянутых выше четырёх систем координат, влекущих разделение переменных в уравнении Гамильтона—Якоби гамильтоновой системы, определённой гамильтонианом (2.3) на $\mathbb{E}^2$ и допускающей первый интеграл движения (2.4), порождается геометрией соответствующего тензора Киллинга ранга 2, определяющего (2.4). Более конкретно, четыре системы координат — декартовых, параболических, полярных и эллиптико-гиперболических — порождаются собственными векторами (собственными числами) соответствующего тензора Киллинга ранга 2. Таким образом, в каждом случае оба семейства конфокальных коник — интегральные кривые собственных векторов. В рамках данного подхода мы не рассматриваем тривиальные тензоры Киллинга, являющиеся множителями метрики $\boldsymbol{g}$ и не порождающие ортогональной системы координат. Такие тензоры Киллинга определяют гамильтониан (2.3) и связанные с ним вращения. Любой нетривиальный тензор Киллинга имеет (почти всюду) различные вещественные собственные числа. Другое важное свойство (известное ещё Якоби) четырёх систем координат — это то, что декартовы, полярные и параболические координаты являются вырождениями эллиптико-гиперболической системы координат. Таким образом, в наиболее общем случае система координат, порождённая нетривиальным тензором Киллинга, имеет два фокуса (т. е. точки, в которых собственные числа совпадают). Это частный случай (рассмотренный Дарбу в [7]) эллиптико-гиперболической системы координат. При нулевом расстоянии между фокусами получаются полярные координаты. Случай, когда один фокус бесконечно удалён, соответствует параболической системе координат. И наконец, когда оба фокуса бесконечно удалены, получается декартова система координат. На рисунке показаны четыре системы координат и их преобразования к декартовым координатам.

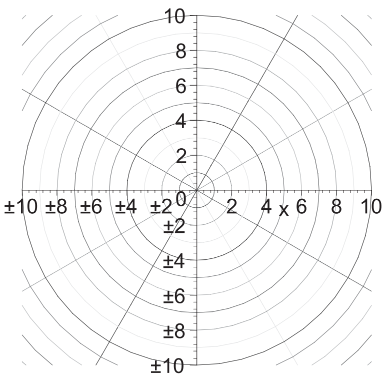
В заключение отметим, что в своей известной статье [7] Дарбу проанализировал только наиболее общий случай, а именно ортогональное разделение переменных в эллиптико-гиперболической системе координат, не рассматривая какие-либо её вырождения. При рассмотрении всех случаев, включая вырожденные, возникает *проблема эквивалентности*, которая для данной гамильтоновой системы, определённой (2.3) на $\mathbb{E}^2$ и допускающей первый интеграл, квадратичный по импульсу, является первым шагом в определении типа системы координат, порождающей соответствующий тензор Киллинга ранга 2. Далее тензор Киллинга и его ортогональная система координат приводятся к канонической форме. Как было показано в примере 2.17, за счёт существования нетривиального потенциала V в (2.3) система координат, допускающая разделение



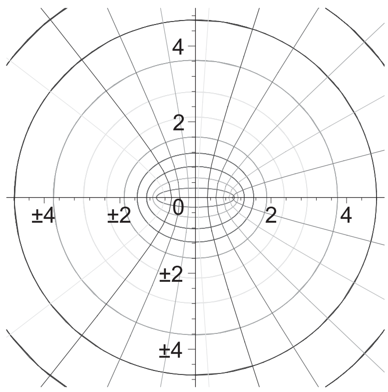
а) Декартовы координаты
$q_1 = u$, $q_2 = v$



б) Параболические координаты
$q_1 = 1/2(u^2 - v^2)$, $q_2 = uv$



в) Полярные координаты
$q_1 = u \cos v$, $q_2 = u \sin v$



г) Эллиптико-гиперболические координаты $q_1 = k \operatorname{ch} u \cos v$, $q_2 = k \operatorname{sh} u \sin v$

Семейства конфокальных коник

переменных, может не иметь канонической формы. Соответственно, эллиптико-гиперболическая система координат, полученная в примере 2.17, сдвигается изометрически (вдоль оси q_1), что обусловленно действием соответствующей группы изометрии. Приведение какого-либо элемента класса эквивалентности к соответствующей канонической форме производится за счёт отображения подвижного репера. Заметим, что наиболее подходящий язык для решения задач эквивалентности и нахождения канонических форм — геометрия Картана. Это наблюдение убедительно показывает нам, что наиболее общее решение классической задачи Бертрана—Дарбу может быть получено в рамках геометрии Картана.

4. Геометрия Картана и задача Бертрана—Дарбу

Пусть $I(\mathbb{E}^2)$ обозначает группу Ли (сохраняющих ориентацию) изометрий $\mathbb{E}^2$. Она является полупрямым произведением $\mathrm{SO}(2)$ (подгруппы сохраняющих ориентацию вращений) и $\mathbb{T}_2$ (подгруппы трансляций). Так как действие $I(\mathbb{E}^2) \circlearrowright \mathbb{E}^2$ транзитивно, то $\mathbb{E}^2$ есть фактор $I(\mathbb{E}^2)/\mathrm{SO}_x(2)$, $x \in \mathbb{E}^2$. Действие $I(\mathbb{E}^2) \circlearrowright \mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2)$ (произвольный элемент шестимерного векторного пространства $\mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2)$ задан формулой (2.8)) нетранзитивно. Решение задачи эквивалентности и приведение к канонической форме в данном случае эквивалентно анализу орбит на векторном пространстве $\mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2)$ при действии $I(\mathbb{E}^2)$. Рассуждения раздела 3 показывают, что существует четыре типа орбит, порождаемых нетривиальными тензорами Киллинга в векторном пространстве $\mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2)$. Исключим из рассмотрения 0-мерные орбиты, порождаемые тривиальными элементами $\mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2)$ (так как они не порождают систем координат и никак не связаны с гамильтоновой механикой). Пространство орбит $\mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2)/I(\mathbb{E}^2)$ имеет довольно сложную структуру, так как оно содержит нуль-, одно-, дву- и трёхмерные орбиты (см. ниже). Топология на фактор-пространстве задаёт локальную структуру дифференцирования. В дополнение проекция $\pi\colon \mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2) \to \mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2)/I(\mathbb{E}^2)$ является гладким расслоением. Правое действие $I(\mathbb{E}^2) \circlearrowright \mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2)$ (локально) свободно. Для любой точки $x \in \mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2)$ соответствующая орбита $\mathcal{O}_x \in \mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2)/I(\mathbb{E}^2)$ — погружённое многообразие в $\mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2)$. Таким образом, $\xi = \big(\mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2), \pi, \mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2)/I(\mathbb{E}^2), I(\mathbb{E}^2)\big)$ — главное $I(\mathbb{E}^2)$-расслоение. Для каждой орбиты $\mathcal{O}_x$, проходящей через нетривиальный элемент $x \in \mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2)$, рассмотрим расслоение ортонормированных реперов из собственных векторов (собственных форм) векторов $\mathcal{O}_x$. Действие группы изометрии на расслоении ортонормированных реперов $\mathcal{O}_x$ транзитивно. Следовательно, мы можем применять методы геометрии Картана, а именно метод подвижного репера [5, 10, 11, 23, 24], для решения задачи эквивалентности и приведения к канонической форме в случае действия $I(\mathbb{E}^2) \circlearrowright \mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2)$.

Пусть $x \in \mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2)$ — нетривиальный ковариантный тензор Киллинга $\boldsymbol{K}$ ранга 2. Напомним [4], что относительно жёсткого подвижного репера ортонормированных собственных векторов E^1, E^2 тензора $\boldsymbol{K}$ компоненты метрики $\boldsymbol{g}$ на $\mathbb{E}^2$ и тензор Киллинга $\boldsymbol{K}$ задаются формулами

$$g_{ab} = \delta_{ab} E^a \otimes E^b, \quad K_{ab} = \lambda_a \delta_{ab} E^a \otimes E^b, \quad a, b = 1, 2, \tag{4.1}$$

где δ_{ab} — дельта-функция Кронекера и λ_a, $a = 1, 2,$ — собственные числа тензора $\boldsymbol{K}$. Двойственные векторы E_1, E_2 — собственные векторы тензора $\boldsymbol{K}$. В заданной точке $x \in \mathbb{E}^2$ два набора $\{E^1, E^2\}$ и $\{E_1, E_2\}$ образуют некоординатные базисы в кокасательном и касательном пространствах соответственно.

Замечание 4. В контексте задачи описания орбит выбор метода подвижного репера эквивалентен выбору подходящего сечения (см. ниже). Следовательно, эта техника позволяет задать канонические формы орбит действия $I(\mathbb{E}^2) \circlearrowright \mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2)$.

Продолжим вводить основные уравнения геометрии Картана. Уравнения для структурных функций ${C^c}_{ab}$, $a, b, c = 1, 2$, задаются в виде

$$[E_a, E_b] = {C^c}_{ab} E_c \quad \text{или} \quad dE^a = \frac{1}{2} {C^a}_{bc}\, E^b \wedge E^c. \tag{4.2}$$

Введём коэффициенты связности Γ следующим образом:

$$\nabla_{E_a} E_b = {\Gamma_{ab}}^c E_c, \quad \nabla_{E_c} E^b = -{\Gamma_{cd}}^b E^d, \tag{4.3}$$

где ∇ означает связность Леви-Чивита, ассоциированную с метрикой $\boldsymbol{g}$.

Замечание 5. Выбор связности не случаен. Как хорошо известно из римановой геометрии, задав связность ∇ на многообразии M, можно сравнивать движущиеся реперы. Для любого пути τ между двумя точками M параллельный перенос вдоль τ определяет линейное отображение $L(\tau)$ между касательными пространствами в двух точках. Это линейное отображение — изометрия, если связность ∇ — связность Леви-Чивита. Очевидно, что линейное отображение $L(\tau)$, порождённое связностью Леви-Чивита ∇, отображает ортогональный репер в ортогональный репер.

Исчезновение тензора кручения ${T^a}_{bc}$ задаётся условием

$${T^a}_{bc} = {\Gamma_{bc}}^a - {\Gamma_{cb}}^a - {C^a}_{bc} = 0, \tag{4.4}$$

в то время как компоненты тензора римановой кривизны ${R^a}_{bcd}$ по отношению в подвижному реперу определяются следующим образом:

$${R^a}_{bcd} = E_c {\Gamma_{db}}^a + {\Gamma_{db}}^e {\Gamma_{ce}}^a - E_d {\Gamma_{cb}}^a - {\Gamma_{cb}}^e \Gamma^a_{de} - {C^e}_{cd} {\Gamma_{eb}}^a. \tag{4.5}$$

Теперь определим матрицу 1-форм ${\omega^a}_b$, называемую 1-*формой связности*:

$${\omega^a}_b := {\Gamma_{cb}}^a E^c. \tag{4.6}$$

Определим

$$\omega_{ab} := g_{ad} {\omega^d}_b.$$

Из приведённых выше формул для 1-формы связности очевидно, что ω_{ab} кососимметричны. Они удовлетворяют структурным уравнениям Картана

$$dE^a + {\omega^a}_b \wedge E^b = 0, \tag{4.7}$$

$$d{\omega^a}_b + {\omega^a}_c \wedge {\omega^c}_b = {\Theta^a}_b, \tag{4.8}$$

где мы вводим 2-*форму кривизны* ${\Theta^a}_b := \frac{1}{2} {R^a}_{bcd} E^c \wedge E^d$. Взяв внешнюю производную от (4.7) и (4.8), получаем первое

$${\Theta^a}_b \wedge E^b = 0 \tag{4.9}$$

и второе

$$d{\Theta^a}_b + {\omega^a}_c \wedge {\Theta^c}_b - {\Theta^a}_c \wedge {\omega^c}_b = 0 \tag{4.10}$$

тождества Бьянки соответственно. Кроме того, для тензора Киллинга $\boldsymbol{K}$ ранга $(0,2)$ имеем уравнение тензоров Киллинга

$$K_{(ab;c)} = 0, \tag{4.11}$$

где ; обозначает ковариантную производную, определённую соотношением

$$K_{ab;c} := E_c K_{ab} - K_{db}\Gamma_{ca}{}^{d} - K_{ad}\Gamma_{cb}{}^{d}. \tag{4.12}$$

Отметим, что уравнение (4.11) — ковариантная запись уравнения тензоров Киллинга, заданная в терминах тензора Схоутена для контравариантного тензора Киллинга (2.5).

Теперь мы адаптируем уравнения геометрии Картана, приведённые выше, для изучения векторного пространства $\mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2)$. Положим $\Gamma_{abc} := g_{cd}\Gamma_{ab}{}^{d}$, $C_{abc} := g_{ad}C^{d}{}_{bc}$ и $R_{abcd} := g_{ae}R^{e}{}_{bcd}$. В случае двумерного (псевдо)риманова многообразия $(M, \boldsymbol{g})$ существуют только два линейно независимых коэффициента связности — Γ_{112} и Γ_{212} — и одна компонента тензора Римана R_{1212}. Для удобства положим $\gamma := \Gamma_{112}$ и $\delta := \Gamma_{212}$. В нашем случае $(M, \boldsymbol{g}) = \mathbb{E}^2$, и условие плоскостности $R_{1212} = 0$ применяется к (4.5), что в новых обозначениях даёт

$$R_{1212} = -E_1\delta + E_2\gamma - \gamma^2 - \delta^2 = 0. \tag{4.13}$$

Уравнения (4.2) и (4.7) преобразуются соответственно к виду

$$[E_1, E_2] = -\gamma E_1 - \delta E_2 \tag{4.14}$$

и

$$dE^1 = \gamma E^1 \wedge E^2, \quad dE^2 = \delta E^1 \wedge E^2. \tag{4.15}$$

Сходным образом уравнение тензоров Киллинга (4.11) даёт уравнения

$$E_2\lambda_1 = 2\gamma(\lambda_1 - \lambda_1), \quad E_1\lambda_1 = 2\delta(\lambda_2 - \lambda_1), \quad E_1\lambda_1 = E_2\lambda_2 = 0, \tag{4.16}$$

где используется (4.4). Условия Фробениуса для E_1 и E_2 следуют из (4.15):

$$E^a \wedge dE^a = 0, \quad a = 1, 2. \tag{4.17}$$

Следовательно, по теореме Фробениуса существуют такие функции f, g и переменные u, v, что

$$E^1 = f du, \quad E^1 = g dv. \tag{4.18}$$

Кроме того, применяя $[E_1, E_2]$ к собственным числам λ_1 и λ_2, мы получаем условия интегрируемости

$$E_1\gamma = -3\gamma\delta, \quad E_2\delta = 3\gamma\delta. \tag{4.19}$$

Легко показать (см. [4]), что

$$\gamma = -\frac{1}{fg}\,\frac{\partial f}{\partial u}, \quad \delta = \frac{1}{fg}\,\frac{\partial g}{\partial v}. \tag{4.20}$$

Более того, $f = g$ и

$$f^2(u, v) = A(u) + B(v). \tag{4.21}$$

Теперь, чтобы получить выражения для канонических форм четырёх орбит, рассмотрим следующие три изометрически инвариантных случая.

$$
\begin{array}{lll}
\text{Случай 1:} & \gamma=\delta=0 & \iff \lambda_1 \text{ и } \lambda_2 \text{ постоянны.}\\
\text{Случай 2:} & \gamma=0,\ \delta\neq 0\ (\gamma\neq 0,\ \delta=0) & \iff \lambda_1 \text{ постоянно } (\lambda_2 \text{ постоянно}).\\
\text{Случай 3:} & \gamma\delta\neq 0 & \iff \lambda_1 \text{ и } \lambda_2 \text{ непостоянны.}
\end{array}
\tag{4.22}
$$

Сначала необходимо решить уравнения (4.16) относительно переменных u и v, что сводится к нахождению соответствующих выражений для собственных чисел λ_1 и λ_2.

При интегрировании, сопоставляя формулы (4.20) и (4.21) в (4.16) и затем преобразовывая результат к контравариантной форме, мы получаем следующую фундаментальную формулу [4]:

$$\boldsymbol{K}=\ell_1\boldsymbol{K}_c+\ell_2\boldsymbol{g},\quad \ell_1,\ell_2\in\mathbb{R}, \tag{4.23}$$

где

$$\boldsymbol{K}_c=\frac{1}{A(u)+B(v)}(B(v)\partial_u\otimes\partial_u-A(u)\partial_v\otimes\partial_v) \tag{4.24}$$

и

$$\boldsymbol{g}=\frac{1}{A(u)+B(v)}(\partial_u\otimes\partial_u+\partial_v\otimes\partial_v) \tag{4.25}$$

для некоторых гладких функций $A(u)$ и $B(v)$ — тех же, что в (2.2). Формула (4.23) — решение уравнения тензоров Киллинга в жёстком подвижном репере из собственных векторов (собственных чисел) неизвестного $\boldsymbol{K}$. Отметим, что ситуация не зависит от кривизны подстилающего пространства. Важно, что (4.23) представляет канонические формы орбит действий $\mathcal{K}^2(M)/I(M)$, где $(M,\boldsymbol{g})$ — двумерное риманово многообразие постоянной кривизны, $\mathcal{K}^2(M)$ — векторное пространство тензоров Киллинга ранга 2, определённых на $(M,\boldsymbol{g})$, и $I(M)$ — соответствующая группа изометрии.

Чтобы задать формулу (4.23) на евклидовой плоскости $\mathbb{E}^2$, применим условие плоскостности (4.13) и найдём соответствующие $A(u)$ и $B(v)$ в каждом из трёх случаев (4.22). Задача сводится к решению соответствующих дифференциальных уравнений, определённых (4.13). Случаи 1 и 2 дают по одному решению, в то время как случай 3 даёт два различных решения. Таким образом, как и ожидалось, мы приходим к четырём формулам для $\boldsymbol{K}_c$, соответствующим различным типам орбит в пространстве орбит $\mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2)/I(\mathbb{E}^2)$ [4]:

$$
\begin{array}{ll}
\text{декартовы:} & \boldsymbol{K}_c^{\mathrm{C}}=\partial_u\otimes\partial_u,\\
\text{полярные:} & \boldsymbol{K}_c^{\mathrm{P}}=\partial_v\otimes\partial_v,\\
\text{параболические:} & \boldsymbol{K}_c^{\mathrm{PB}}=\dfrac{v^2\partial_u\otimes\partial_u-u^2\partial_v\otimes\partial_v}{u^2+v^2},\\
\text{эллиптико-гиперболические:} & \boldsymbol{K}_c^{\mathrm{EH}}=\dfrac{\cos^2 v\partial_u\otimes\partial_u+\operatorname{ch}^2 u\partial_v\otimes\partial_v}{k^2(\operatorname{ch}^2 u-\cos^2 v)}.
\end{array}
\tag{4.26}
$$

Метрика (4.25), присутствующая в общей формуле для канонических форм (4.23), в этих четырёх случаях задаётся следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\text{декартовы:} && \boldsymbol{g}^{\mathrm{C}} = \partial_u \otimes \partial_u + \partial_v \otimes \partial_v,\\
&\text{полярные:} && \boldsymbol{g}^{\mathrm{P}} = \partial_u \otimes \partial_u + \frac{1}{u^2}\partial_v \otimes \partial_v,\\
&\text{параболические:} && \boldsymbol{g}^{\mathrm{PB}} = \frac{\partial_u \otimes \partial_u + \partial_v \otimes \partial_v}{u^2+v^2},\\
&\text{эллиптико-гиперболические:} && \boldsymbol{g}^{\mathrm{EH}} = \frac{\partial_u \otimes \partial_u + \partial_v \otimes \partial_v}{k^2(\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v)}.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Сравним метрику (2.7), заданную в декартовых координатах (q_1, q_2), с соответствующими четырьмя метриками, задаваемыми (4.27) в координатах (u, v), и применим метод, представленный в [14], чтобы получить в каждом случае преобразование из координат (u, v) в декартовы координаты (q_1, q_2):

$$\begin{aligned}
&\text{декартовы:} && q_1 = u, && q_2 = v,\\
&\text{полярные:} && q_1 = u\cos v, && q_2 = u\sin v,\\
&\text{параболические:} && q_1 = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), && q_2 = uv,\\
&\text{эллиптико-гиперболические:} && q_1 = k\operatorname{ch} u\cos v, && q_2 = k\operatorname{sh} u\sin v.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Наконец, применим формулы (4.28) для преобразования канонических тензоров Киллинга, заданных в (4.26), в декартовы координаты (q_1, q_2):

$$\begin{aligned}
&\text{декартовы:} && \boldsymbol{K}_c^{\mathrm{C}} = \partial_1 \otimes \partial_1,\\
&\text{полярные:} && \boldsymbol{K}_c^{\mathrm{P}} = q_2^2\,\partial_1 \otimes \partial_1 - q_1 q_2\,\partial_1 \otimes \partial_2 + q_1^1\,\partial_2 \otimes \partial_2,\\
&\text{параболические:} && \boldsymbol{K}_c^{\mathrm{PB}} = q_2\,\partial_1 \otimes \partial_2 - 2q_1\,\partial_2 \otimes \partial_2,\\
&\text{эллиптико-гиперболические:} && \boldsymbol{K}_c^{\mathrm{EH}} = (k^2 + q_2^2)\,\partial_1 \otimes \partial_1 - q_1 q_2\,\partial_1 \otimes \partial_2 + q_1^2\,\partial_2 \otimes \partial_2.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Теперь мы можем описать канонические формы орбит любого типа. Например, общую формулу для канонических форм орбит, элементы которых порождают эллиптико-гиперболическую систему координат, можно получить, подставив в формулу (4.23) соответствующее выражение для канонического тензора Киллинга $\boldsymbol{K}_c^{\mathrm{EH}}$, заданного (4.29) ввиду формулы (2.7) для $\boldsymbol{g}$. Следовательно, в декартовых координатах (q_1, q_2) канонические формы эллиптико-гиперболических орбит задаются следующим семейством тензоров Киллинга:

$$\boldsymbol{K}^{\mathrm{EH}} = \ell_1 \boldsymbol{K}_c^{\mathrm{EH}} + \ell_2 \boldsymbol{g}, \quad \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}, \tag{4.30}$$

где $\boldsymbol{K}_c^{\mathrm{EH}}$ и $\boldsymbol{g}$ задаются (4.29) и (2.7) соответственно. Уже отсюда видно, что, например, тензор Киллинга (2.12) входит в семейство (4.30) при $\ell_1 = 1$, $\ell_2 = 0$, $\beta_1 - \beta_2 = k^2$ и представляет каноническую форму соответствующих эллиптико-гиперболических орбит (см. [18]).

Замечание 6. Отметим, что для применения этих результатов к изучению гамильтоновых систем достаточно рассматривать только часть $\boldsymbol{K}_c$ формулы (4.23). Действительно, если гамильтонова система, определённая гамильтонианом H (2.3), допускает первый интеграл F (2.4), то она также допускает первый интеграл вида $\ell_1 H + \ell_2 F$, $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, и наоборот.

Мы решили задачу построения канонических форм для пространства орбит $\mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2)/I(\mathbb{E}^2)$. Более конкретно, для каждого типа орбит мы получили наиболее общий вид канонической формы. Однако, как видно из примера 1, в таких применениях, как задача Бертрана—Дарбу, нетривиальные тензоры Киллинга могут иметь неканоническую форму (конечно, за исключением случая $V = 0$ в (2.3)). Следовательно, необходимо уметь решать задачу эквивалентности для наперёд заданного нетривиального тензора Киллинга (который может быть не в канонической форме) и *инвариантно* определять, какому типу орбиты он принадлежит. Когда всё это проделано, нужно найти метод для систематического приведения нетривиальных тензоров Киллинга к канонической форме, как в формуле (4.23).

Для достижения поставленной цели применим другую версию метода подвижного репера, представленную в [10, 11, 23]. В нашем случае смысл состоит в том, чтобы идентифицировать расслоение реперов собственных чисел нетривиальных тензоров Киллинга ранга 2 в групповом действии $I(\mathbb{E}^2) \circlearrowright \mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2)$ (так как группа действует транзитивно на расслоении реперов) и далее работать с самой группой. Начнём с определения действия группы Ли $I(\mathbb{E}^2)$ на векторном пространстве $\mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2)$, заданного произвольным элементом (2.8). Это действие обусловлено действием $I(\mathbb{E}^2) \circlearrowright \mathbb{E}^2$, которое задано соотношением

$$\tilde{q}_1 = q_1 \cos p_3 - q_2 \sin p_3 + p_1, \quad \tilde{q}_2 = q_1 \sin p_3 + q_2 \cos p_3 + p_2, \tag{4.31}$$

где p_1, p_2 и p_3 — параметры группы изометрии $I(\mathbb{E}^2)$. Используя (4.31) и применяя стандартные правила преобразования тензоров к произвольному тензору Киллинга (2.8), получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}_1 &= \beta_1 \cos^2 p_3 - 2\beta_3 \cos p_3 \sin p_3 + \beta_2 \sin^2 p_3 - 2p_2\beta_4 \cos p_3 - \\
&\quad - 2p_2\beta_5 \sin p_3 + \beta_6 p_2^2, \\
\tilde{\beta}_2 &= \beta_1 \sin^2 p_3 - 2\beta_3 \cos p_3 \sin p_3 + \beta_2 \cos^2 p_3 - 2p_1\beta_5 \cos p_3 + \\
&\quad + 2p_1\beta_4 \sin p_3 + \beta_6 p_1^2, \\
\tilde{\beta}_3 &= (\beta_1 - \beta_2) \sin p_3 \cos p_3 + \beta_3(\cos^2 p_3 - \sin^2 p_3) + \\
&\quad + (p_1\beta_4 + p_2\beta_5) \cos p_3 + (p_1\beta_5 - p_2\beta_4) \sin p_3 - \beta_6 p_1 p_2, \\
\tilde{\beta}_4 &= \beta_4 \cos p_3 + \beta_5 \sin p_3 - \beta_6 p_2, \\
\tilde{\beta}_5 &= \beta_5 \cos p_3 - \beta_4 \sin p_3 - \beta_6 p_1, \\
\tilde{\beta}_6 &= \beta_6.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Формулы (4.32) изначально были получены в [30] и позже независимо переоткрыты в [20]. Используя стандартную технику из теории групп Ли, опишем инфинитезимальное действие группы $I(\mathbb{E}^2)$ в векторном пространстве $\mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2)$, заданное следующими образующими её алгебры Ли [20]:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{V}_1 &= -2\beta_5 \frac{\partial}{\partial \beta_2} - \beta_4 \frac{\partial}{\partial \beta_3} + \beta_6 \frac{\partial}{\partial \beta_5},\\
\boldsymbol{V}_2 &= 2\beta_4 \frac{\partial}{\partial \beta_1} - \beta_5 \frac{\partial}{\partial \beta_3} + \beta_6 \frac{\partial}{\partial \beta_4},\\
\boldsymbol{V}_3 &= -2\beta_3 \left(\frac{\partial}{\partial \beta_1} - \frac{\partial}{\partial \beta_2}\right) + (\beta_1 - \beta_2)\frac{\partial}{\partial \beta_3} + \beta_5 \frac{\partial}{\partial \beta_4} - \beta_4 \frac{\partial}{\partial \beta_5}.
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

Из формул (4.33) следует, что размерность орбит, которая определяется в каждой точке количеством линейно независимых векторных полей (4.33), меняется от 0 до 3. Например, когда $\beta_1 = \beta_2$ и $\beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 0$, размерность орбит, очевидно, равна 0.

Для полного решения задачи эквивалентности используем подход, представленный в [8] (см. также [18]). Сначала мы выбираем сечение K, пересекающее трёхмерные орбиты трансверсально, на котором группа действует свободно и регулярно:

$$
K = \{\beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0\}. \tag{4.34}
$$

Далее заметим, что выбор сечения при таком подходе эквивалентен выбору жёсткого подвижного репера в предыдущих рассуждениях, в которых мы применяли классическую версию метода подвижного репера. Более того, точки пересечения — это канонические формы с координатами, заданными инвариантами действия группы $I(\mathbb{E}^2) \circlearrowright \mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2)$, которые являются функциями параметров $\beta_1, \ldots, \beta_6$, остающимися неизменными при действии группы (см. [20]). Мы получаем отображение подвижного репера $\gamma\colon \mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2) \to I(\mathbb{E}^2)$ для уравнений нормировки, соответствующих сечению (4.34):

$$
\tilde{\beta}_3 = \tilde{\beta}_4 = \tilde{\beta}_5 = 0. \tag{4.35}
$$

Действительно, решая (4.35) для групповых параметров p_1, p_2 и p_3, получаем [8]

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{\beta_5 \cos p_3 - \beta_4 \sin p_3}{\beta_6},\\
p_2 &= \frac{\beta_4 \cos p_3 + \beta_5 \sin p_3}{\beta_6},\\
p_3 &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2(\beta_3\beta_6 + \beta_4\beta_5)}{\beta_6(\beta_1 - \beta_2) - \beta_4^2 + \beta_5^2}.
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

Заметим, что отображение подвижного репера $\gamma\colon \mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2) \to I(\mathbb{E}^2)$, заданное (4.36), отображает элементы, соответствующие орбитам, в соответствующие им канонические формы. Из (4.32) мы теперь видим, что

$$
\Delta_1 = \beta_6 \tag{4.37}
$$

является $I(\mathbb{E}^2)$-инвариантом векторного пространства $\mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2)$. Подставляя выражения для p_1, p_2 и p_3 в первые две формулы в (4.32), приходим к двум дополнительным фундаментальным $I(\mathbb{E}^2)$-инвариантам:

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \beta_6(\beta_1+\beta_2)-\beta_4^2-\beta_5^2,\\ \Delta_3 &= (\beta_6(\beta_1-\beta_2)-\beta_4^2+\beta_5^2)^2+4(\beta_6\beta_3+\beta_4\beta_5)^2.\end{aligned} \tag{4.38}$$

Напомним, что фундаментальные инварианты Δ_1 и Δ_3 были впервые получены в [30] и позже повторно открыты с использованием метода инфинитезимальных генераторов в [20] (см. также [6] по поводу других методов). Фундаментальные инварианты Δ_1 и Δ_3 могут быть использованы для различения орбит [18,20,30]. Приведём их классификацию:

$$\begin{array}{ll}\text{декартовы:} & \Delta_1=0,\ \ \Delta_3=0,\\ \text{полярные:} & \Delta_1\neq 0,\ \ \Delta_3=0,\\ \text{параболические:} & \Delta_1=0,\ \ \Delta_3\neq 0,\\ \text{эллиптико-гиперболические:} & \Delta_1\neq 0,\ \ \Delta_3\neq 0.\end{array} \tag{4.39}$$

Фундаментальные инварианты Δ_1 и Δ_3 в случае, когда они оба отличны от нуля, имеют любопытный геометрический смысл. Расстояние k между фокусами эллиптико-гиперболической системы координат, порождённой нетривиальным тензором Киллинга, очевидно, является $I(\mathbb{E}^2)$-инвариантом. Следовательно, k — функция фундаментальных инвариантов, описанных выше. Соответствующая формула была выведена в [20]:

$$k=\frac{\sqrt{\Delta_3}}{\Delta_1^2}. \tag{4.40}$$

Задавая нетривиальный тензор Киллинга $\boldsymbol{K}=\mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2)$, мы сравниваем его с общей формой (2.8) и получаем значения, соответствующие параметрам $\beta_1,\ldots,\beta_6$, а затем вычисляем фундаментальные $I(\mathbb{E}^2)$-инварианты Δ_1 и Δ_3. Задача определения типа орбиты для $\boldsymbol{K}$ решается непосредственно с использованием классификации (4.39). Если $\boldsymbol{K}$ порождает эллиптико-гиперболическую систему координат, то мы вычисляем соответствующее отображение подвижного репера (4.36), находим групповые параметры p_1, p_2, p_3 и затем подставляем их в формулы для действия группы (4.31). Полученное преобразование отображает тензор $\boldsymbol{K}$ в его каноническую форму.

Оставшиеся три случая, а именно декартовы, полярные и параболические координаты, следует рассматривать с осторожностью. Действие группы $I(\mathbb{E}^2) \circlearrowright \mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2)$ глобально не регулярно. Так, например, обращение в нуль Δ_3 показывает, что размерность орбит падает с 3 до 2. Если, кроме того, $\Delta_1=0$, то размерность орбит становится равной 1. С другой стороны, сравнивая выражения для генераторов алгебры Ли группы изометрии $I(\mathbb{E}^2)$ (4.33) с формулами для канонических форм (4.29), приходим к выводу, что декартовы орбиты одномерны, полярные двумерны, а орбиты параболического и эллиптико-гиперболического типа трёхмерны. Очевидно, для построения подвижных реперов для одномерных, двумерных и трёхмерных орбит непараболического типа необходимо выбирать различные сечения (см. [18,28]).

И наконец, решим задачу, сходную с задачей в примере 1, используя результаты, полученные в этом разделе.

Пример 2 (второй интегрируемый случай Яцуна). На этот раз мы не будем искать решение, используя уравнение Бертрана—Дарбу (2.9) относительно потенциала V. Вместо этого мы будем использовать только тензор Киллинга. Материал раздела 4 показывает, что после нахождения тензора Киллинга (2.4) решение уравнения Бертрана—Дарбу (2.9) относительно V излишне. Действительно, сравнивая тензор Киллинга (2.19) с общей выражением (2.8), получаем, что

$$\beta_1 = \frac{3}{4}, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 0, \quad \beta_4 = -\frac{1}{2}, \quad \beta_5 = 0, \quad \beta_6 = 1.$$

Подставляя эти данные в формулы для Δ_1 (4.37) и Δ_3 (4.38), находим, что

$$\Delta_1 = 1 \neq 0, \quad \Delta_3 = \frac{1}{4} \neq 0.$$

Отсюда сразу видно, что тензор Киллинга (2.19) порождает эллиптико-гиперболические координаты. Более того, из (4.40) можно определить расстояние между фокусами, $k = 1$. Далее вычислим отображение подвижного репера (4.36):

$$p_1 = -\frac{1}{2}, \quad p_2 = p_3 = 0.$$

Принимая во внимание формулы (4.31) ($q_1 = \tilde{q}_1 + \frac{1}{2}$) и (4.28) (для эллиптико-гиперболических координат), приходим к выводу, что, как и ожидалось, преобразование к разделяющимся координатам задаётся формулой (2.25). Таким образом, мы решили ту же задачу, что и в примере 1, не решая уравнение Бертрана—Дарбу (2.9)! Более того, процесс решения, основанный на методе подвижного репера, полностью алгоритмизуется и, следовательно, может быть реализован в системе компьютерной алгебры «Killing Tensor Package» Хорвуда.

Заключение

Приведённый выше анализ (сравнение примеров 1 и 2) показывает, что задача Бертрана—Дарбу (и её обобщения [13]) может быть решена в рамках геометрии Картана. В частности, наиболее важным является метод подвижного репера. Более того, подход, основанный на методе подвижного репера, алгоритмизуется и не зависит от кривизны или сигнатуры подстилающего псевдориманова многообразия $(M, \boldsymbol{g})$, а также легко адаптируется к различным геометрическим параметрам.

Автор с благодарностью отмечает, что изучил классическую формулировку метода подвижного репера по работам Р. Макленахана, а современную — по работам П. Олвера.

Литература

[1] Борисов А. Б., Мамаев И. С. Классическая динамика в неевклидовых пространствах. — М.: Ин-т матем. моделирования, 2004.

[2] Ankiewicz A., Pask C. The complete Whittaker theorem for two-dimensional integrable systems and its applications // J. Phys. A. — 1983. — Vol. 16. — P. 4203—4208.

[3] Bertrand J. M. Mémoire sur quelques-unes des forms les plus simples que puissent présenter les intégrales des équations différentielles du mouvement d'un point matériel // J. Math. Pures Appl. — 1857. — Vol. 2. — P. 113—140.

[4] Bruce A. T., McLenaghan R. G., Smirnov R. G. A geometrical approach to the problem of integrability of Hamiltonian systems by separation of variables // J. Geom. Phys. — 2001. — Vol. 39, no. 4. — P. 301—322.

[5] Cartan É. La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus, et les espaces généralisés. — Paris: Hermann, 1935.

[6] Chanu C., Degiovanni L., McLenaghan R. G. Geometrical classification of Killing tensors on bidimensional flat manifolds // Quaderni del Departimento di Matematica, Universita di Torino. — 2005. — Vol. 18.

[7] Darboux G. Sur un probléme de mècanique // Arch. Néerlandaises Sci. — 1901. — Vol. 6. — P. 371—376.

[8] Deeley R. J., Horwood J. T., McLenaghan R. G., Smirnov R. G. Theory of algebraic invariants of vector spaces of Killing tensors: Methods for computing the fundamental invariants // Proc., Fifth Int. Conf. «Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics-2003» / A. G. Nikitin, V. M. Boyko, Ro. O. Popovych, I. A. Yehorchenko, eds. — Proc. of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — 2004. — Vol. 50. — P. 1079—1086.

[9] Eisenhart L. P. Separable systems of Stäckel // Ann. Math. — 1934. — Vol. 35. — P. 371—305.

[10] Fels M., Olver P. J. Moving coframes. I. A practical algorithm // Acta Appl. Math. — 1998. — Vol. 51. — P. 161—213.

[11] Fels M., Olver P. J. Moving coframes. II. Regularization and theoretical foundations // Acta Appl. Math. — 1999. — Vol. 55. — P. 127—208.

[12] Guggenheimer H. W. Differential Geometry. — New York: Dover, 1977.

[13] Horwood J. T., McLenaghan R. G., Smirnov R. G. Invariant classification of othogonally separable Hamiltonian systems in Euclidean space // Comm. Math. Phys. — 2005. — Vol. 259. — P. 679—709.

[14] Horwood J. T., McLenaghan R. G. Transformations to pseudo-Cartesian coordiantes in locally flat pseudo-Riemannian spaces. — Preprint. — University of Waterloo, 2006.

[15] Ivey T. A., Landsberg J. M. Cartan for Beginners: Differential Geometry via Moving Frames and Exterior Differential Forms. — Providence: Amer. Math. Soc., 2003.

[16] Kalnins E. G., Kress J. M., Miller W., Jr. Second order superintegrable systems in conformally flat spaces. III. Three-dimensional classical structure theory // J. Math. Phys. — 2005. — Vol. 46, no. 10. — 103507.

[17] Liouville J. Sur quelques cas particuliers où les équations de mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer // J. Math. Pures Appl. — 1846. — Vol. 11. — P. 345—378.

[18] MacArthur J. D. The Equivalence Problem in Differential Geometry. — MSc thesis. — Halifax: Dalhousie University, 2005.

[19] McLenaghan R. G., Smirnov R. G. Intrinsic characterization of orthogonal separability for natural Hamiltonians with scalar potentials on pseudo-Riemannian spaces // J. Nonlinear Math. Phys. — 2002. — Vol. 9, suppl. 1. — P. 140—151.

[20] McLenaghan R. G., Smirnov R. G., The D. Group invariant classification of separable Hamiltonian systems in the Euclidean plane and the $O(4)$-symmetric Yang—Mills theories of Yatsun // J. Math. Phys. — 2002. — Vol. 43. — P. 1422—1440.

[21] McLenaghan R. G., Smirnov R. G., The D. An extension of the classical theory of invariants to pseudo-Riemannian geometry and Hamiltonian mechanics // J. Math. Phys. — 2004. — Vol. 45. — P. 1079—1120.

[22] Morera G. Sulla separazione delle variabili nelle equazioni del moto di un punto materiale su una superficie // Atti Sci. di Torino. — 1881. — Vol. 16. — P. 276—295.

[23] Olver P. J. Classical Theory of Invariatns. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.

[24] Olver P. J. A survey of moving frames // Computer Algebra and Geometric Algebra with Applications / H. Li, P. J. Olver, G. Sommer, eds. — New York: Springer, 2005. — (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 3519). — P. 105—138.

[25] Rauch-Wojciechowski S., Waksjö C. What an effective criterion of separability says about the Calogero type systems? // J. Nonlinear Math. Phys. — 2005. — Vol. 12. — P. 535—547.

[26] Schouten J. A. Über Differentialkomitanten zweier kontravarianter Grössen // Proc. Konink. Nederl. Akad. Wetensch. — 1940. — Vol. 43. — P. 449—452.

[27] Smirnov R. G., Yue J. Covariants, joint invariants and the problem of equivalence in the invariant theory of Killing tensors defined in pseudo-Riemannian manifolds of constant curvature // J. Math. Phys. — 2004. — Vol. 45. — P. 4141—4163.

[28] The D. Notes on complete sets of group-invariants in $\mathcal{K}^2(\mathbb{E}^2)$ and $\mathcal{K}^3(\mathbb{E}^2)$. — Preprint. — McGill University, 2003.

[29] Whittaker E. T. A Tretise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies. — London: Cambridge Univ. Press, 1937.

[30] Winternitz P., Friš I. Invariant expansions of relativistic amplitudes and subroups of the proper Lorenz group // Sov. J. Nuclear Phys. — 1965. — Vol. 1. — P. 636—643.

[31] Wojciechowski S. Separability of an integrable case of the Hénon—Heiles system // Phys. Lett. A. — 1984. — Vol. 100, no. 6. — P. 277—278.