О вариационной интегрирующей матрице для гиперболических систем уравнений*

С. Я. СТАРЦЕВ
Институт математики УНЦ РАН
e-mail: startsev@anrb.ru

УДК 517.956.3+517.972.7

Ключевые слова: гиперболические системы уравнений, обратная задача вариационного исчисления, интегралы, высшие симметрии, теорема Нётер, обобщённые инварианты Лапласа.

Аннотация

Получены необходимые и достаточные условия того, что гиперболическая система уравнений с точностью до умножения на некоторую матрицу является системой Эйлера—Лагранжа с лагранжианом первого порядка. Выполнение этих условий позволяет конструктивным образом строить зависящие от произвольной функции семейства высших симметрий по известным интегралам данной системы. Доказано также, что для систем уравнений, удовлетворяющих этим условиям, существование последовательности обобщённых инвариантов Лапласа по одной из характеристик системы гарантирует единственность обобщённых инвариантов Лапласа по другой характеристике.

Abstract

S. Ya. Startsev, On the variational integrating matrix for hyperbolic systems, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 7, pp. 251—262.

We obtain a necessary and sufficient condition for a hyperbolic system to be an Euler–Lagrange system with a first-order Lagrangian up to multiplication by some matrix. If this condition is satisfied and an integral of the system is known to us, then we can construct a family of higher symmetries that depend on an arbitrary function. Also, we consider the systems that satisfy the above criterion and that possess a sequence of the generalized Laplace invariants with respect to one of the characteristics; then we prove that the generalized Laplace invariants with respect to the other characteristic are uniquely defined.

1. Введение

Важным классом систем уравнений вида

$$u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y), \tag{1}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 04-01-00190.

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 7, с. 251—262.

где через u и F обозначены n-мерные вектор и вектор-функция соответственно, являются системы Эйлера—Лагранжа. Однако ответ на вопрос о принадлежности наперёд заданной фиксированной системы вида (1) к классу систем Эйлера—Лагранжа не всегда очевиден. Отчасти это связано с тем, что в подавляющем большинстве интересных случаев систему (1) удаётся записать в виде вариационной производной от некоторого лагранжиана лишь после домножения этой системы на некоторую, нам заранее неизвестную, матрицу.

Действительно, рассмотрим лагранжиан

$$g = A(x,y,u)u_x \cdot u_y + B(x,y,u) \cdot u_x + C(x,y,u) \cdot u_y + D(x,y,u), \tag{2}$$

где A — матрица, B и C — векторы, D — скаляр, а точка $\cdot$ обозначает скалярное произведение. Легко проверить, что вариационная производная $\delta g/\delta u$ лагранжиана g имеет вид $-(A+A^{\mathrm{T}})u_{xy}+\ldots$, где многоточием обозначены слагаемые, не содержащие вторых производных от u, а матрица A^{T} получена транспонированием матрицы A. Поэтому получающаяся из лагранжиана (2) система вида (1) в ситуации общего положения связана с ним формулой

$$Q(x,y,u)\big(u_{xy} - F(x,y,u,u_x,u_y)\big) = \frac{\delta g}{\delta u}, \tag{3}$$

где матрица $Q = -(A+A^{\mathrm{T}})$ нам неизвестна, если мы не знаем соответствующего системе (1) лагранжиана. Матрицу Q в формуле (3), переводящую систему уравнений в образ вариационной производной, естественно называть *вариационной интегрирующей матрицей* (по аналогии с используемым в скалярном случае термином «вариационный интегрирующий множитель»).

В основе настоящей статьи лежит тот факт, что (3) выполнено тогда и только тогда, когда вариационная интегрирующая матрица Q *на решениях системы* (1) удовлетворяет операторному соотношению

$$Q \circ L = L^{\dagger} \circ Q, \tag{4}$$

где L — оператор линеаризации системы (1), а $L^{\dagger}$ получен из L формальным сопряжением. Интегрирующая матрица Q находится достаточно конструктивным образом из этого условия, и поэтому оно может быть полезным при решении обратной задачи задачи вариационного исчисления для систем (1). Однако основное внимание в статье будет сосредоточено на следствиях из (4) при дополнительном условии $\det(Q) \neq 0$. Первое из этих следствий легко получить, заметив, что рассматриваемая нами ситуация является частным случаем описанной в [3] и, следовательно, предложенный в этой работе способ построения симметрий системы (1) по её интегралам применим к системам Эйлера—Лагранжа. Другое следствие связано с развиваемой в последнее время теорией обобщённых инвариантов Лапласа (см. [1,4]) для гиперболических систем уравнений: будет доказано, что существование обобщённых инвариантов Лапласа по обеим характеристикам системы (1) гарантирует их единственность при условии выполнения (4) с невырожденной матрицей Q.

2. Обозначения и определения

Под функциями далее мы будем понимать дифференциальные функции, т. е. будем предполагать, что они зависят не только от x и y, но и, вообще говоря, от вектор-функции $u(x, y)$ и конечного числа её частных производных. Все рассуждения носят локальный характер, а функции предполагаются имеющими все требуемые из контекста производные. Через $g_z = \partial g/\partial z$, где g — скалярная функция, z — вектор $(z^1, z^2, \ldots, z^n)^{\mathrm{T}}$, будем обозначать строку $(\partial g/\partial z^1, \partial g/\partial z^2, \ldots, \partial g/\partial z^n)$, а для вектор-функции g через g_z будем обозначать матрицу, строки которой получены применением $\partial/\partial z$ к компонентам вектор-функции.

Часть равенств в этой статье (например, равенство (3)) должны выполняться для любой функции $u(x, y)$. Поэтому введём сначала определения и обозначения, применяемые тогда, когда u считается произвольной функцией от x и y.

Через $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}$ и $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}}$ обозначим полные производные по x и y соответственно. Для любой скалярной функции g эти полные производные задаются формулами

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{dx}} = \frac{\partial g}{\partial x} + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial u_{i,j}} u_{i+1,j}, \quad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{dy}} = \frac{\partial g}{\partial x} + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial u_{i,j}} u_{i,j+1},$$

где

$$u_{i,j} = \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i y^j}.$$

На векторах и матрицах действие полных производных определяется как результат покомпонентного применения этих операций. Для более компактной записи формул здесь и далее мы исходим из соглашения, что нулевые степени любых дифференцирований совпадают с оператором умножения на единицу (тождественным отображением).

Оператором, *формально сопряжённым* к дифференциальному оператору

$$Z = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m} c_{ij} \frac{\mathrm{d}^{i+j}}{\mathrm{dx}^i \mathrm{dy}^j}, \tag{5}$$

где c_{ij} — матрицы, зависящие от x, y, u и конечного числа производных u, будем называть оператор

$$Z^{\dagger} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m} (-1)^{j+j} \frac{\mathrm{d}^{i+j}}{\mathrm{dx}^i \mathrm{dy}^j} \circ c_{ij}^{\mathrm{T}},$$

где символами $\circ$ и T обозначены композиция операторов и операция транспонирования матриц соответственно. Для дальнейших рассуждений важно отметить следующее свойство формального сопряжения: $(P \circ Q)^{\dagger} = Q^{\dagger} \circ P^{\dagger}$ для любых дифференциальных операторов P и Q вида (5).

Действующий на множестве n-мерных вектор-функций оператор

$$g' = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial u_{i,j}}\, \frac{\mathrm{d}^{i+j}}{\mathrm{dx}^i \mathrm{dy}^j}$$

будем называть *производной Фреше* функции g. Отметим, что определение производной Фреше можно применять как к скалярным, так и к вектор-функциям. *Вариационная производная* $\delta g/\delta u$ скалярной функции g в терминах производной Фреше задаётся формулой

$$\frac{\delta g}{\delta u} = (g')^{\dagger}(1).$$

В основном мы будем работать с соотношениями, выполняющимися на решениях системы (1) (т. е. выполняющимися не для произвольной функции $u(x,y)$, а для любого решения (1)). Сужение на решения (1) на практике означает, что все смешанные производные u мы должны исключить из соотношений в силу системы (1) и её дифференциальных следствий. Поэтому в этой ситуации мы можем считать, что все функции зависят лишь от

$$x,\ y,\ u,\ u_i = \frac{\partial^i u}{\partial x^i},\ v_i = \frac{\partial^i u}{\partial y^i}, \quad i = \overline{1,\infty}. \tag{6}$$

Обозначения и определения, приведённые в оставшейся части этого раздела, применяются именно в этой ситуации.

Ограничения $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}$ и $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}}$ на решения системы (1) (т. е. полные производные по x и y в силу (1)) обозначим через D_x и D_y соответственно. Для любой функции g эти полные производные задаются формулами

$$D_x(g) = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u} u_1 + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\partial g}{\partial u_i} u_{i+1} + \frac{\partial g}{\partial v_i} D_y^{i-1}(F)\right),$$
$$D_y(g) = \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial u} v_1 + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\partial g}{\partial v_i} v_{i+1} + \frac{\partial g}{\partial u_i} D_x^{i-1}(F)\right).$$

Для операторов

$$Z = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m} c_{ij} D_x^i D_y^j, \tag{7}$$

где c_{ij} — матрицы, зависящие от конечного числа переменных из набора (6), операция формального сопряжения задаётся формулой, аналогичной использованной для операторов вида (5):

$$Z^{\dagger} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m} (-1)^{j+j} D_x^i D_y^j \circ c_{ij}^{\mathrm{T}}.$$

Ясно, что свойство $(P \circ Q)^{\dagger} = Q^{\dagger} \circ P^{\dagger}$ выполняется также и для любых дифференциальных операторов P и Q вида (7).

Действующий на множестве n-мерных вектор-функций оператор

$$L = D_x D_y - F_{u_x} D_x - F_{u_y} D_y - F_u \tag{8}$$

будем называть *оператором линеаризации системы* (1). С учётом введённых обозначений и соглашений будем говорить, что вектор-функция f является *симметрией системы* (1), если выполнено соотношение $L(f) = 0$.

3. Вариационная интегрирующая матрица

Утверждение 1. *Система* (1) *связана соотношением* (3) *с некоторым лагранжианом вида* (2) *тогда и только тогда, когда матрица* $Q(x,y,u)$ *является симметрической и удовлетворяет условию*

$$Q(x,y,u) \circ L = L^{\dagger} \circ Q(x,y,u), \tag{9}$$

где L *— оператор линеаризации системы* (1)*, заданный формулой* (8)*.*

Соотношение (9) *равносильно системе уравнений*

$$D_x(Q) + (F_{u_y})^{\mathrm{T}} Q + Q F_{u_y} = 0, \tag{10}$$

$$D_y(Q) + (F_{u_x})^{\mathrm{T}} Q + Q F_{u_x} = 0, \tag{11}$$

$$H^{\mathrm{T}} Q = Q K, \tag{12}$$

где $H = F_u + F_{u_y} F_{u_x} - D_x(F_{u_x})$, $K = F_u + F_{u_x} F_{u_y} - D_y(F_{u_y})$.

Заметим, что при $n = 1$ формула (12) переходит в условие $H = K$, характеризующее скалярные уравнения Эйлера—Лагранжа вида (1). В частном случае $Q = 1$ это условие для скалярных уравнений было получено в [11].

Доказательство. Согласно [15] вектор-функция лежит в образе вариационной производной тогда и только тогда, когда её производная Фреше является самосопряжённой (современную версию этого утверждения можно найти, например, в [5]). Поэтому для доказательства нам достаточно обосновать равносильность условия (9) и условия $f' = (f')^{\dagger}$, где $f = Q\big(u_{xy} - F(x,y,u,u_x,u_y)\big)$.

Обозначим i-ю компоненту вектора u через u^i. Через Δ обозначим матрицу, i-й столбец Δ_i которой задаётся формулой

$$\Delta_i = \frac{\partial Q}{\partial u^i}\big(u_{xy} - F(x,y,u,u_x,u_y)\big).$$

Тогда $f' = Q \circ \Lambda + \Delta$, где

$$\Lambda = \big(u_{xy} - F(x,y,u,u_x,u_y)\big)' = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dxdy}} - F_{u_x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} - F_{u_y}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}} - F_u,$$

и условие $f' = (f')^{\dagger}$ записывается в виде

$$Q \circ \Lambda + \Delta = \Lambda^{\dagger} \circ Q^{\mathrm{T}} + \Delta^{\mathrm{T}}. \tag{13}$$

Поскольку (13) должно выполняться для любой функции $u(x,y)$, оно будет верно и для любого решения системы (1). Нетрудно видеть, что при таком ограничении $\Delta = 0$ и
$$Q \circ \Lambda = \Lambda^\dagger \circ Q^{\mathrm{T}}$$
на решениях системы (1).

Так как равенство операторов равносильно равенству коэффициентов при соответствующих степенях дифференцирований, (13) распадается на равенства
$$Q = Q^{\mathrm{T}},$$
$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{dx}} + (F_{u_y})^{\mathrm{T}} Q + Q F_{u_y} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{dy}} + (F_{u_x})^{\mathrm{T}} Q + Q F_{u_x} = 0, \tag{14}$$
$$\Lambda^\dagger(Q) + Q F_u + \Delta^{\mathrm{T}} - \Delta = 0 \tag{15}$$
для коэффициентов при $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dxdy}}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}$ и нулевой степени дифференцирования соответственно. Отметим, что эти равенства в точности совпадают с результатом применения приведённых в [10] необходимых и достаточных условий принадлежности вектор-функции, зависящей не более чем от вторых производных u, образу вариационной производной. Уравнение (15) в силу (14) можно переписать в виде
$$\hat{H}^{\mathrm{T}} Q - Q\hat{K} + \Delta - \Delta^{\mathrm{T}} = 0, \tag{16}$$
где
$$\hat{H} = F_u + F_{u_y} F_{u_x} - \frac{\mathrm{d}F_{u_x}}{\mathrm{dx}}, \quad \hat{K} = F_u + F_{u_x} F_{u_y} - \frac{\mathrm{d}F_{u_y}}{\mathrm{dy}}.$$
Аналогичные рассуждения дают нам эквивалентность (9) и (10)—(12). Поэтому доказательство утверждения сводится обоснованию равносильности (10)—(12) и (14), (16). Так как $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}}$ на функциях от x, y и u совпадают с D_x, D_y, условия (10), (11) совпадают с условиями (14). Остаётся доказать, что (12) равносильно (16).

Для этого докажем, что из (14) следует равенство матриц $R = \hat{R}$, где
$$R = H^{\mathrm{T}} Q - QK, \quad \hat{R} = \hat{H}^{\mathrm{T}} Q - Q\hat{K} + \Delta - \Delta^{\mathrm{T}}.$$
Разность этих матриц задаётся формулой
$$\hat{R} - R = \Delta - \Delta^{\mathrm{T}} + \sum_{s=1}^{n} (Q(F_{u_y})_{u_x^s} - (F_{u_x})^{\mathrm{T}}_{u_y^s} Q)(u^s_{xy} - F^s),$$
где F^s — s-я компонента вектор-функции $F(x,y,u,u_x,u_y)$. Обозначив через $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2, \ldots, \gamma^n)^{\mathrm{T}}$ вектор QF, последнее равенство можно переписать как
$$\hat{R} - R = \Delta - \Delta^{\mathrm{T}} + \sum_{s=1}^{n} \big((\gamma_{u_y})_{u_x^s} - (\gamma_{u_x})^{\mathrm{T}}_{u_y^s}\big)(u^s_{xy} - F^s).$$
Дифференцируя (14) по u_x^j и u_y^j, получим
$$-Q_{u^j} = (\gamma_{u_y})_{u_x^j} + (\gamma_{u_y})^{\mathrm{T}}_{u_x^j} = (\gamma_{u_x})_{u_y^j} + (\gamma_{u_x})^{\mathrm{T}}_{u_y^j}.$$

Обозначая элемент матрицы Z на пересечении i-й строки и j-го столбца через Z^i_j, перейдём к покомпонентному анализу полученных соотношений. Последнее из них записывается в виде

$$-(Q^i_s)_{u^j} = \gamma^i_{u^j_x u^s_y} + \gamma^s_{u^j_x u^i_y} = \gamma^i_{u^s_x u^j_y} + \gamma^s_{u^i_x u^j_y}. \tag{17}$$

Разность матриц $\hat{R}$ и R задаётся формулой

$$\hat{R}^i_j - R^i_j = \Delta^i_j - \Delta^j_i + \sum_{s=1}^{n} (\gamma^i_{u^s_x u^j_y} - \gamma^j_{u^i_x u^s_y})(u^s_{xy} - F^s) =$$
$$= \sum_{s=1}^{n} \big((Q^i_s)_{u^j} - (Q^j_s)_{u^i} + \gamma^i_{u^s_x u^j_y} - \gamma^j_{u^i_x u^s_y}\big)(u^s_{xy} - F^s).$$

Но в силу (17)

$$(Q^i_s)_{u^j} - (Q^j_s)_{u^i} = \gamma^j_{u^i_x u^s_y} + \gamma^s_{u^i_x u^j_y} - \gamma^i_{u^s_x u^j_y} - \gamma^s_{u^i_x u^j_y} = \gamma^j_{u^i_x u^s_y} - \gamma^i_{u^s_x u^j_y}.$$

Поэтому $\hat{R}^i_j - R^i_j = 0$. □

Таким образом, для нахождения интегрирующей матрицы Q надо решить систему линейных алгебраических уравнений (12), а затем уточнить это решение, подставив полученное выражение для Q в (10), (11). Если удалось удовлетворить всем соотношениям (10)—(12), то соответствующий системе лагранжиан g можно (с точностью до образов $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}$ и $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}}$) восстановить по известной [5, 15] формуле гомотопии

$$g = \int_0^1 u \cdot Q(x, y, \lambda u)\big(\lambda u_{xy} - F(x, y, \lambda u, \lambda u_x, \lambda u_y)\big)\, d\lambda.$$

Замечание. Легко видеть, что частичный аналог утверждения 1 верен для любого уравнения и произвольного лагранжиана. Действительно, введём запись $z[u]$ для обозначения того, что z зависит от $x = (x^1, x^2, \ldots, x^i)^{\mathrm{T}}$, n-мерного вектора $u(x)$ и конечного числа частных производных u. Пусть m-мерная вектор-функция $\mathcal{E}[u]$, скалярная функция $g[u]$ и матрица $Q[u]$ размера $n \times m$ связаны соотношением

$$Q[u]\mathcal{E}[u] = \frac{\delta g[u]}{\delta u}. \tag{18}$$

Повторяя рассуждения из первых двух абзацев доказательства утверждения 1, нетрудно получить, что необходимым условием для (18) является выполнение операторного соотношения

$$Q \circ \mathcal{E}' = (\mathcal{E}')^{\dagger} \circ Q^{\mathrm{T}}$$

на решениях системы уравнений $\mathcal{E}[u] = 0$. Однако, в отличие от ситуации утверждения 1, для лагранжиана произвольного порядка мы не можем гарантировать, например, что Q не обратится в нуль на решениях системы $\mathcal{E}[u] = 0$.

4. Теорема Нётер для систем, допускающих интегралы

В оставшейся части статьи мы будем рассматривать только соотношения, выполняющиеся в силу системы (1). Соответственно, все рассматриваемые далее функции будут зависеть от конечного числа переменных из набора (6). Пользуясь симметрией $x \leftrightarrow y$ формулы (1), далее мы будем приводить лишь одно из двух «симметричных» определений и утверждений.

Определение 1. Функцию w будем называть *y-интегралом* системы (1), если $D_x(w) = 0$. Если w зависит только от y, то w будем называть *тривиальным* y-интегралом.

Нетрудно видеть, что y-интеграл не может зависеть от переменных u_i. Порядок старшей из частных производных v_i, от которых интеграл зависит, будем называть *порядком интеграла*.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$w_* = \frac{\partial w}{\partial u} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial w}{\partial v_i} D_y^i.$$

В [3] было доказано, что для любого нетривиального y-интеграла w порядка k оператор $(w_*)^\dagger$ делится без остатка на оператор $D_y + (F_{u_x})^{\mathrm{T}}$, т. е. найдётся дифференциальный оператор

$$P = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i D_y^i, \tag{19}$$

где α_i — n-мерные вектор-функции, такой что

$$(w_*)^\dagger = (D_y + (F_{u_x})^{\mathrm{T}}) \circ P. \tag{20}$$

При этом оператор P, полученный в результате такого деления, переводит любой y-интеграл в ядро оператора $L^\dagger$, формально сопряжённого к оператору (8) линеаризации системы (1).

Если уравнение (9) выполнено для невырожденной матрицы Q, то его можно записать в виде

$$L \circ S(x, y, u) = S(x, y, u) \circ L^\dagger,$$

где $S = Q^{-1}$. Это означает, что матрица S переводит ядро $L^\dagger$ в ядро L, т. е. $SP(\Omega)$ является симметрией системы (1) для любого её y-интеграла Ω. Отметим, что возникающие в контексте настоящей статьи требования невырожденности и симметричности матрицы S не являются необходимыми для вывода этой формулы для симметрий и в [3] не использовались.

Учитывая полученную во введении формулу $Q = -(A + A^{\mathrm{T}})$, приходим к следующему частному случаю утверждения из работы [3].

Утверждение 2. *Пусть система* (1) *допускает нетривиальный y-интеграл w порядка k и связана формулой* (3) *с лагранжианом* (2), *таким что матрица*

$A + A^{\mathrm{T}}$ является невырожденной. Тогда $f = (A + A^{\mathrm{T}})^{-1}P(\Omega)$, где P находится по формуле (20), *— симметрия системы* (1) *для любого её y-интеграла Ω.*

Фактически утверждение 2 является специальной версией теоремы Нётер, учитывающей специфику систем, допускающих интегралы. Действительно, несколько модифицировав рассуждения, использованные в [14] для частного случая систем вида (1), получим из теоремы Нётер, что

$$f = (A + A^{\mathrm{T}})^{-1} P\left(\frac{\delta\Omega}{\delta w}\right), \quad \frac{\delta\Omega}{\delta w} = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i D_x^i \left(\frac{\partial\Omega}{\partial w_i}\right)$$

является симметрией (1) для любой функции Ω от конечного числа переменных y, $w_0 = w$, $w_i = D_y^i(w)$. Заметив, что $\delta(\xi(y)w)/\delta w = \xi(y)$ и $P\big(\xi(y)\big)$, где P имеет вид (19), является симметрией для любой функции $\xi(y)$ тогда и только тогда, когда P переводит любой y-интеграл в симметрию, придём к утверждению 2 другим путём. Аналогичное утверждение для гамильтоновых систем (1) получено в [2], однако, в отличие от утверждения 2, оно не гарантирует локальности как оператора, переводящего интегралы в симметрии, так и получающихся симметрий.

5. Инварианты Лапласа систем Эйлера—Лагранжа

Важным объектом для системы уравнений (1) являются инварианты Лапласа. Будучи давно [12,13] и хорошо [7] известными для скалярных линейных уравнений, инварианты Лапласа сравнительно недавно нашли применение и при изучении нелинейных уравнений (см., например, [4, 6, 8, 9, 11]). Предложенное в [4] определение инвариантов Лапласа для систем (1), которого мы здесь будем придерживаться, позволяет надеяться, что некоторые из известных в скалярном случае результатов удастся перенести на случай систем.

В случае выполнения соотношения (9) с невырожденной матрицей Q инварианты Лапласа системы (1) обладают некоторыми специфическими свойствами. Описанию этих свойств будет посвящена оставшаяся часть статьи. Как следует из утверждения 1, этими свойствами обладают, в частности, инварианты Лапласа систем Эйлера—Лагранжа.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$M = D_x D_y + aD_x + bD_y + c, \tag{21}$$

где a, b и c — квадратные матрицы, зависящие от конечного числа переменных из набора (6). Оператор (21) можно записать как в виде

$$M = (D_x + b) \circ (D_y + a) - H, \tag{22}$$

так и в виде

$$M = (D_y + a) \circ (D_x + b) - K.$$

Матрицы H и K назовём *главными инвариантами Лапласа* оператора (21). Нетрудно проверить, что

$$H = D_x(a) + ba - c, \quad K = D_y(b) + ab - c.$$

Заметим, что в случае, когда в качестве M взят оператор линеаризации (8) системы (1), эти формулы задают K и H в уравнении (12).

Определение 2. *Обобщёнными y-инвариантами Лапласа* оператора (21) называются матрицы Y_i, заданные рекуррентными формулами

$$Y_{i+1} = H_{i+1}Y_i, \quad H_{i+1} = D_x(a_i) + [b, a_i] - D_y(b) + H_i, \tag{23}$$

где $Y_1 = H_1 = H$, а матрицы a_i находятся из уравнения

$$D_y(Y_i) - Y_i a + a_i Y_i = 0. \tag{24}$$

Аналогично обобщёнными x-инвариантами Лапласа оператора (21) называются матрицы X_i, заданные рекуррентными формулами

$$X_{i+1} = K_{i+1}X_i, \quad K_{i+1} = D_y(b_i) + [a, b_i] - D_x(a) + K_i,$$

где $X_1 = K_1 = K$, а матрицы b_i находится из уравнения

$$D_x(X_i) - X_i b + b_i X_i = 0.$$

Инвариантами Лапласа системы (1) будем называть инварианты Лапласа её оператора линеаризации (8).

Ясно, что в случае вырожденных инвариантов Лапласа уравнения для нахождения матриц a_i и b_i могут быть неразрешимы, а при наличии решений матрицы a_i и b_i определены неоднозначно. Таким образом, существование и единственность последовательности инвариантов Лапласа не гарантированы для произвольной системы (1). Условия существования и единственности инвариантов Лапласа описаны в [4]. Здесь мы будем обсуждать только условия единственности.

Обозначим через $\hat{X}_i$ и $\hat{Y}_i$ соответственно x- и y-инварианты Лапласа оператора $M^\dagger$, формально сопряжённого к (21). Через $\hat{b}_i$ и $\hat{a}_i$ обозначим задающие эти инварианты решения уравнений

$$D_x(\hat{X}_i) - \hat{X}_i b^{\mathrm{T}} + \hat{b}_i \hat{X}_i = 0, \quad D_y(\hat{Y}_i) - \hat{Y}_i a^{\mathrm{T}} + \hat{a}_i \hat{Y}_i = 0.$$

В [1] доказано, что $\hat{X}_i = (Y_i)^{\mathrm{T}}$ и $\hat{Y}_i = (X_i)^{\mathrm{T}}$ для всех i, для которых существуют соответствующие инварианты Лапласа. Следствием из этого факта является следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть для всех $i < m$ существуют y-инварианты Лапласа Y_i оператора* (21) *и x-инварианты Лапласа $\hat{X}_i$ оператора $M^\dagger$, формально сопряжённого к* (21). *Тогда для всех $i < m$ инварианты Лапласа Y_i и $\hat{X}_i$ определены однозначно, т. е. не зависят от выбора a_j, $\hat{b}_j$ для всех $j < i$.*

Доказательство. Равенство $\hat{X}_i = (Y_i)^{\mathrm{T}}$ выполняется при любом выборе задающих эти инварианты матриц a_j, $\hat{b}_j$, $j < i$. Зафиксировав все a_j, мы видим, что $\hat{X}_i$ не будет меняться при изменении $\hat{b}_r$ для любого $r < i$. Аналогично доказывается независимость Y_i от выбора a_j. $\square$

Лемма 2. *Пусть для всех $i < m$ существуют y-инварианты Лапласа Y_i оператора* (21)*. Тогда для любой невырожденной матрицы T, зависящей от конечного числа переменных из набора* (6)*, y-инварианты Лапласа $\tilde{Y}_i$ оператора $\tilde{M} = T^{-1} \circ M \circ T$ существуют для всех $i < m$ и могут быть выбраны так, что $\tilde{Y}_i = T^{-1} Y_i T$.*

Доказательство. Из (22) легко следует, что

$$\tilde{M} = (D_x + \tilde{b}) \circ (D_y + \tilde{a}) - \tilde{H},$$

где

$$\begin{aligned}
&D_x + \tilde{b} = T^{-1} \circ (D_x + b) \circ T \implies \tilde{b} = T^{-1}\big(bT + D_x(T)\big),\\
&D_y + \tilde{a} = T^{-1} \circ (D_y + a) \circ T \implies \tilde{a} = T^{-1}\big(aT + D_y(T)\big),\\
&\tilde{H} = T^{-1} H T \implies \tilde{Y}_1 = \tilde{H}_1 = T^{-1} H_1 T = T^{-1} Y_1 T.
\end{aligned}$$

Стартуя с этих формул, индукцией по i нетрудно доказать, что задающая инвариант Лапласа $\tilde{Y}_i$ матрица $\tilde{a}_{i-1}$ существует и может быть выбрана так, что $\tilde{H}_i = T^{-1} H_i T$, $\tilde{Y}_i = T^{-1} Y_i T$. Действительно, непосредственной проверкой убеждаемся, что из (24) и предположения индукции вытекает выполнение соотношения

$$D_y(\tilde{Y}_i) - \tilde{Y}_i \tilde{a} + \tilde{a}_i \tilde{Y}_i = 0,$$

где $\tilde{a}_i = T^{-1}\big(a_i T + D_y(T)\big)$. Подставляя предположение индукции и выражения для $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{a}_i$ в формулу (23), получим $\tilde{H}_{i+1} = T^{-1} H_{i+1} T$ и $\tilde{Y}_{i+1} = \tilde{H}_{i+1} \tilde{Y}_i = T^{-1} Y_{i+1} T$. $\square$

Из лемм 1 и 2 вытекает следующее утверждение.

Утверждение 3. *Пусть для оператора* (21) *выполнено соотношение*

$$Q \circ M = M^{\dagger} \circ Q,$$

где Q — невырожденная матрица, зависящая от конечного числа переменных из набора (6)*, и пусть для всех $i < m$ существуют y-инварианты Лапласа Y_i этого оператора. Тогда y-инварианты Лапласа $\hat{Y}_i$ оператора $M^{\dagger}$ существуют для всех $i < m$. Если при этом существуют x-инварианты Лапласа X_i оператора M, то X_i и Y_i определены однозначно и связаны равенством $QY_i = (X_i)^{\mathrm{T}} Q$ для всех $i < m$, для которых существуют X_i.*

Автор благодарен В. В. Соколову за полезные обсуждения.

Литература

[1] Гурьева А. М., Жибер А. В. Инварианты Лапласа двумеризованных открытых цепочек Тоды // Теор. и матем. физ. — 2004. — Т. 138, № 3. — С. 401—421.

[2] Демской Д. К. Об одном классе систем лиувиллевского типа // Теор. и матем. физика. — 2004. — Т. 141, № 2. — С. 208—227.

[3] Демской Д. К., Старцев С. Я. О построении симметрий по интегралам гиперболических систем уравнений // Фундамент. и прикл. мат. — 2004. — Т. 10, № 1. — С. 29—37.

[4] Жибер А. В., Соколов В. В. Точно интегрируемые уравнения лиувиллевского типа // Успехи мат. наук. — 2001. — Т. 56, № 1. — С. 63—106.

[5] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989.

[6] Старцев С. Я. О гиперболических уравнениях, допускающих дифференциальные подстановки // Теор. и матем. физ. — 2001. — Т. 127, № 1. — С. 63—74.

[7] Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. — М.: Изд. иностр. лит., 1957.

[8] Ферапонтов Е. В. Преобразования Лапласа систем гидродинамического типа в инвариантах Римана // Теор. и матем. физ. — 1997. — Т. 110, № 1. — С. 86—98.

[9] Царев С. П. Факторизация линейных дифференциальных операторов с частными производными и метод Дарбу интегрирования нелинейных уравнений с частными производными // Теор. и матем. физ. — 2000. — Т. 122, № 1. — С. 144—160.

[10] Anderson I. M., Dutchamp T. On the existence of global variational principles // Amer. J. Math. — 1980. — Vol. 102. — P. 781—868.

[11] Anderson I. M., Kamran N. The variational bicomplex for second order scalar partial differential equations in the plane. — Preprint. — Centre de Recherches Mathématiques de l'Université de Montréal, 1994.

[12] Darboux G. Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications geometriques du calcul infinitesimal. Vol. 2. — Paris: Gauthier-Villars, 1915.

[13] Goursat E. Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. Vols. 1,2. — Paris: Hermann, 1896; 1898.

[14] Kiselev A. V. On conservation laws for the Toda equations // Acta Appl. Math. — 2004. — Vol. 83, no. 1—2. — P. 175—182.

[15] Volterra V. Leçons sur les fonctions de lignes. — Paris: Gauthier-Villars, 1913.