Почти вполне разложимые группы и кольца

Е. А. БЛАГОВЕЩЕНСКАЯ
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
e-mail: kate@robotek.ru, kblag2002@yahoo.com

УДК 512.541

Ключевые слова: абелевы группы без кручения конечного ранга, почти вполне разложимые группы, кольца эндоморфизмов, идеалы.

Аннотация

Для некоторого класса коммутативных колец с единицей и почти вполне разложимой аддитивной структурой получены теоремы реализации и классификации. Также найдено необходимое и достаточное условие для того, чтобы аддитивные группы рассматриваемых колец были изоморфны.

Abstract

E. A. Blagoveshchenskaya, Almost completely decomposable groups and rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 8, pp. 3—27.

Realization and classification theorems are obtained for a class of commutative rings with identities and almost completely decomposable additive structures. A necessary and sufficient condition for the considered rings to have isomorphic additive structures is also found.

1. Введение

Теория абелевых групп имеет многочисленные связи с теорией колец и модулей. Одной из самых естественных причин этого является то, что любое кольцо как аддитивная структура является абелевой группой.

В целом, кольца эндоморфизмов абелевых групп обладают многими свойствами самих групп. В случае почти вполне разложимых групп основанием для параллельного изучения групп и колец служит тот факт, что кольца эндоморфизмов этих групп также являются почти вполне разложимыми группами по отношению к операции сложения.

Одной из ключевых проблем теории абелевых групп является введение кольцевых структур на группах, что оказывается связанным с проблемой реализации колец. Последняя касается возможности погружения колец в кольца эндоморфизмов некоторых групп. Замечательные результаты, полученные А. Корнером, Р. Бэром, В. Либертом, И. Капланским, Р. Пирсом в связи с этой проблематикой,

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 8, с. 3—27.

отражены в [2, гл. 5]. Решения упомянутых проблем для некоторого класса коммутативных колец без кручения конечного ранга с единицей получены в данной работе.

Мы рассматриваем коммутативные кольца K с единицей, аддитивные группы K^+ которых являются блочно-жёсткими почти вполне разложимыми группами специального вида. Для их определения нам понадобится короткое введение в теорию почти вполне разложимых групп.

Прямая сумма групп без кручения ранга 1 называется *вполне разложимой группой*. *Почти вполне разложимая группа* X — это абелева группа без кручения конечного ранга, которая содержит такую вполне разложимую подгруппу A, что X/A является конечной группой. Ранги групп X и A совпадают и равны числу слагаемых в разложении A в прямую сумму слагаемых ранга 1 (такое разложение определяется однозначно с точностью до почти изоморфизма).

Любая почти вполне разложимая группа X содержит особую вполне разложимую подгруппу $R(X)$ конечного индекса, изоморфную A или даже с ней совпадающую, которая является её вполне характеристической подгруппой и называется *регулятором* X. Не умаляя общности, считаем A регулятором в X, тогда порядок $|X/A| = [X : A]$ конечной группы X/A называется *регуляторным индексом* группы X, а сама фактор-группа X/A называется её *регуляторным фактором* и $e =: \exp X/A$ — *регуляторной экспонентой* группы X (это наименьшее натуральное число e со свойством $e(X/A) = 0$). Порядок элемента c в конечной группе X/A обозначается как $|c|$.

Если X/A является циклической группой, то X называется почти вполне разложимой группой с *циклическим регуляторным фактором* или, коротко, *црф группой*, и для неё $[X : A] = \exp X/A$.

Числовой интервал, содержащий свои границы, обозначается как $[l, s]$. Если целое число p делится на целое q без остатка, мы будем писать $q \mid p$. Для любого элемента a абелевой группы X без кручения и любого натурального числа q существует не более одного элемента $b \in X$, для которого $qb = a$. Если такой элемент b существует, мы обозначаем его $\frac{a}{q}$ и говорим, что a делится на q в X, записывая это как $q \mid a$. Обобщая, для группы Y, такой что $qY = X$, мы вводим обозначение $\frac{X}{q}$.

Наибольшее целое число $k \geqslant 0$, для которого существует $\frac{a}{p^k}$, где p — простое число, будет называться *p-высотой* элемента a в X (см. [9, 2.1]). Другими словами, p^k — это наивысшая степень p, делящая a.

Для группы или кольца, порождённых некоторым множеством элементов, мы используем обозначение $\langle \ldots \rangle$, ранг группы X обозначается $\operatorname{rk} X$. Как обычно, $V \subset X$ означает, что V — подгруппа X (возможно равенство $V = X$), а

$$V_* = \{g \in X \colon \text{существует } n \in \mathbb{N}, \text{ для которого } ng \in V\}$$

обозначает *сервантную оболочку* V в X. Подгруппа V называется *сервантной* подгруппой в X, если $V_* = V$.

Как обычно, $\mathbb{Z}$ — это группа (кольцо) всех целых чисел, $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел, $\mathbb{Q}$ — аддитивная группа (поле) рациональных чисел. *Тип* элемента $g \in X$ ($g \neq 0$), обозначаемый $\mathrm{tp}_X\, g$, можно определить как класс изоморфизма рациональной группы τ, которая изоморфна $\langle g \rangle_*$ в X и содержит $\mathbb{Z}$. Тогда мы можем сказать, что элемент g имеет тип τ, и отождествить $\mathrm{tp}_X\, g$ с группой τ, удовлетворяющей условию $\mathbb{Z} \subset \tau \subset \mathbb{Q}$. Мы рассматриваем $\mathrm{tp}_X\, g$ как тип всей группы, $\mathrm{tp}\, X$, если X — однородная группа (типы всех элементов одинаковы).

Так называемое *множество критических типов* $T = T_{\mathrm{cr}}(X) = T_{\mathrm{cr}}(A)$ групп X и A определяется (изоморфными) разложениями $A = \bigoplus_{\tau \in T} A_\tau$ на однородные компоненты. Если $T = T_{\mathrm{cr}}(X)$ представляет собой антицепь (для любых $\tau \neq \sigma$ из T выполняется, что $\mathrm{Hom}(\tau, \sigma) = 0$ и $\mathrm{Hom}(\sigma, \tau) = 0$), то группы A и X называются *блочно-жёсткими* и существует единственное разложение $A = \bigoplus_{\tau \in T = T_{\mathrm{cr}}(X)} A_\tau$ на τ-однородные компоненты. Если к тому же $\mathrm{rk}\, A_\tau = 1$ для всех $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(X)$, то A и X называются *жёсткими* группами. В общем случае $\mathrm{rk}\, A_\tau$ называется τ-рангом группы A. Заметим, что для блочно-жёсткой почти вполне разложимой группы X с регулятором $A = R(X) = \bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)} A_\tau$ все τ-однородные компоненты A_τ сервантны в X.

Класс блочно-жёстких црф групп представляет особый интерес как источник новых идей и элегантно формулируемых результатов. Значительный прогресс достигнут в изучении их колец эндоморфизмов в случае, когда $T_{\mathrm{cr}}(X)$ состоит из *идемпотентных* типов τ, являющихся типами групп ранга 1, содержащих $\mathbb{Z}$, в которых для любого простого p число 1 либо делится на любую его степень, либо вообще не делится на p (это записывается в виде $\tau(p) = \infty$ или соответственно $\tau(p) = 0$). Сама группа X называется в этом случае группой *кольцевого* типа. Группа H ранга 1, изоморфная группе τ идемпотентного типа, содержащей $\mathbb{Z}$, такая что элемент $a \in H$ делится только на любые степени чисел p, удовлетворяющих условию $\tau(p) = \infty$, будет записываться в виде $H = \tau a$. Ясно, что $\tau = \mathrm{tp}\, H$.

Хорошо известно, что абелевы группы без кручения конечного ранга (в частности, почти вполне разложимые группы) допускают большое разнообразие прямых разложений. Традиционно почти вполне разложимые группы и их прямые разложения классифицируются с точностью до *почти изоморфизма* ($\cong_{\mathrm{nr}}$), эквивалентности, которая слабее, чем изоморфизм ($\cong$), но при этом достаточно точно отражает свойства прямых разложений. А именно, если

$$X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_k = X \cong_{\mathrm{nr}} Y,$$

то существует разложение

$$Y = Y_1 \oplus Y_2 \oplus \ldots \oplus Y_k,$$

такое что $X_i \cong_{\mathrm{nr}} Y_i$ для всех i (теорема Арнольда, [5, 12.9]).

Проблема классификации блочно-жёстких почти вполне разложимых групп с циклическим регуляторным фактором решена в [8, теорема 2.4]. Позднее эти группы были классифицированы с точностью до изоморфизма [6, теорема 3.7].

Данные теоремы классификации будут использованы здесь для определения возможных кольцевых структур на группах.

Традиционно групповые характеристики, применённые к кольцу L, относятся к его аддитивной группе L^+, и только для случая «вполне разложимых колец» мы сделаем исключение, считая, что такое кольцо L является прямой суммой идеалов ранга 1, а не только группа L^+ представляется в виде прямой суммы подгрупп ранга 1. Нам понадобятся блочно-жёсткие почти вполне разложимые кольца L (по отношению к операции сложения), в том числе те, которые имеют вполне разложимые подкольца G конечного индекса (т. е. L^+/G^+ — конечная группа и G — прямая сумма идеалов ранга 1).

Если L — кольцо с единицей I и $I = \sum\limits_{i\in\mathcal{I}} \varepsilon_i$ является суммой конечного числа ненулевых элементов $\varepsilon_i \in L$, таких что $\varepsilon_i\varepsilon_i = \varepsilon_i$ и $\varepsilon_i\varepsilon_j = 0$ для любых $j \neq i$, то множество $\{\varepsilon_i \colon i \in \mathcal{I}\}$ называется *полной системой ортогональных идемпотентов* кольца L. Идемпотент ε_i *примитивен* в L, если он не представляется в виде суммы двух других ненулевых ортогональных идемпотентов кольца L. Прямое произведение колец L_i обозначается $\prod\limits_{i\in\mathcal{I}}^{\otimes} L_i$.

Принятая здесь система обозначений и основные определения согласуются с [2, 4, 9].

2. Предварительные сведения

Пусть K — коммутативное кольцо с единицей I, такое что K^+ — блочно-жёсткая почти вполне разложимая группа. В дальнейшем примем краткую форму для его групповых характеристик и будем называть такое кольцо *блочно-жёстким коммутативным почти вполне разложимым кольцом с единицей*. Известно, что $\mathrm{End}(K^+)$ содержит в качестве подкольца умножения (слева) на элементы из K. Отождествляя K с его изоморфной копией в $\mathrm{End}(K^+)$, имеем погружение

$$K \subset \mathrm{End}(K^+), \tag{1}$$

которое называется *регулярным представлением* кольца K. Если при этом отождествлении K совпадает с $\mathrm{End}(K^+)$, мы говорим, что K является *E-кольцом* (см. [2, гл. 1, раздел 3]).

Обозначим регулятор аддитивной группы кольца K через $R = R(K^+)$, и пусть $n = \mathrm{rk}\, K^+$. Существует однозначно определённое разложение

$$R = \bigoplus_{\tau\in T} R_\tau, \quad \text{в котором} \quad R_\tau \cong \bigoplus_{\tau\in T} n_\tau \tau,$$

и $T = T_{\mathrm{cr}}(R) = T_{\mathrm{cr}}(K^+)$ представляет собой антицепь. При этом n_τ обозначает ранг τ-однородной компоненты R_τ в R, т. е. R_τ изоморфна прямой сумме n_τ копий группы τ ($\mathbb{Z} \subset \tau \subset \mathbb{Q}$, $n = \sum\limits_{\tau\in T} n_\tau$).

Поскольку R — вполне характеристическая подгруппа в K^+ и $R \subset K^+ \subset \frac{R}{e}$ для числа $e = \exp(K^+/R)$, любой эндоморфизм группы K^+ определяется образами элементов R. Из [9, лемма 8.1.5] известно, что

$$\mathrm{End}(K^+) = \{\phi \in \mathrm{End}(R) \colon (eK)\phi \subset eK\} \subset \mathrm{End}(R). \tag{2}$$

Из [7, предложение 3.1] следует, что

$$e\,\mathrm{End}(R) \subset \mathrm{End}(K^+) \subset \mathrm{End}(R). \tag{3}$$

Концентрируя внимание на операции суммирования в кольцах, мы имеем дело с почти вполне разложимой группой $\mathrm{End}(K^+)$, для которой $T_{\mathrm{cr}}(\mathrm{End}(K^+)) = T_{\mathrm{cr}}(\mathrm{End}(R))$ состоит из идемпотентных типов, так как

$$\mathrm{End}(R) \cong \prod_{i\in\mathcal{I}}^{\otimes} \mathrm{End}(R_\tau)$$

является блочно-жёсткой вполне разложимой группой как аддитивная структура. Комбинируя (1) и (3), мы получаем цепь

$$R \subset K \subset \mathrm{End}(K^+) \subset \mathrm{End}(R). \tag{4}$$

Поскольку тип любого элемента из $\mathrm{End}(R)$ идемпотентен, это верно и для группы R, так как $R \subset \mathrm{End}(R)$. Отсюда следует, что $\mathrm{tp}(R_\tau) = \mathrm{tp}(\mathrm{End}(R_\tau))$ и

$$R_\tau \subset \mathrm{End}(R_\tau), \tag{5}$$

так как $T_{\mathrm{cr}}(R) = T_{\mathrm{cr}}(K^+)$ является антицепью. Это означает, что K^+ — группа кольцевого типа со множеством критических типов $T_{\mathrm{cr}}(K^+) = T_{\mathrm{cr}}(R) = T_{\mathrm{cr}}(\mathrm{End}(R))$.

С этого момента ограничимся рассмотрением црф колец K, для которых K^+/R — циклическая группа, $e = \exp(K/R)$. Пусть $T = T_{\mathrm{cr}}(R)$. Для упрощения обозначений введём группу $X = K^+$. В [8, теорема 3.5; 9, теорема 13.1.6] показано, что существует так называемое *главное разложение* $X = X_1 \oplus Y$, в котором X_1 — жёсткая группа со множеством критических типов $T_{\mathrm{cr}}(X_1) \subset T_{\mathrm{cr}}(X)$, таким что

1) $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(X_1)$, если и только если $m_\tau(X) \neq 1$,
2) $m_\tau(X_1) = m_\tau(X)$ для всех $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(X_1)$,

при этом инварианты почти изоморфизма $m_\tau = m_\tau(X) = m_\tau(X_1)$ введены в [9, определение 12.6.2; 8, определение 2.1] следующим образом.

Пусть $X = \langle R, b\rangle$, где R — регулятор в X и $b \in X$ — элемент, удовлетворяющий условию $eb = a$ для некоторого $a \in R$. Тогда $b + R$ — образующий элемент циклической группы X/R и $eb = \sum\limits_{\tau\in T} v_\tau$ представляется в виде суммы слагаемых $v_\tau \in R_\tau$. Пусть

$$\overline{} \colon R \longmapsto R/eR = \overline{R}$$

обозначает естественный эпиморфизм. Введём в рассмотрение числа

$$m_\tau = m_\tau(X) = |\overline{v_\tau}| = |v_\tau + eR| \tag{6}$$

(если $\tau \notin T_{\mathrm{cr}}(X)$, полагаем $m_\tau = 1$). Заметим, что так определённые числа m_τ, $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(X)$, не зависят от выбора элемента b, поэтому являются инвариантами группы X и удовлетворяют условию

$$|\tau/m_\tau\tau| = m_\tau \quad (\text{или } \gcd(m_\tau, p) = 1), \quad \text{если} \quad \tau(p) = \infty. \tag{7}$$

Критерий почти изоморфизма [8, теорема 2.4; 9, теорема 12.6.5]. *Пусть X и Y — блочно-жёсткие (в частности, жёсткие) црф группы. Тогда $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$, если и только если их регуляторы $R(X)$ и $R(Y)$ изоморфны и $m_\tau(X) = m_\tau(Y)$ для всех типов τ.*

Пусть

$$X = X_1 \oplus Y \text{ —}$$

главное разложение, $T_0 = T_{\mathrm{cr}}(X_1)$, $R_1 = R(X_1)$ и $X_1 = \langle R_1, b\rangle$. Тогда b — элемент из делимой оболочки регулятора группы X_1,

$$R_1 = \bigoplus_{\tau \in T_0} \tau a_\tau,$$

где $a_\tau \in R(X_1)$ имеет p-высоту 0, если $\tau(p) = 0$, и p-высоту ∞, если $\tau(p) = \infty$. В главных разложениях одной и той же группы X слагаемые, обозначенные Y, вполне разложимы и однозначно определены с точностью до изоморфизма, в то время как жёсткие црф слагаемые X_1 определены только с точностью до почти изоморфизма (см. [8, теорема 3.5]). Следовательно, любые две почти изоморфные блочно-жёсткие црф группы изоморфны, если и только если они допускают главные разложения, жёсткие црф слагаемые которых изоморфны. Данная в [6] классификация таких групп базируется на этом факте.

Следуя [8, теорема 3.2, A.1], мы можем сделать подходящий выбор элементов $a_\tau \in R_1$, имеющих типы τ, таких что

$$eb = \sum_{\tau \in T_0} \frac{e}{m_\tau} s_\tau a_\tau, \tag{8}$$

где $e, m_\tau \in \mathbb{N}$ и $s_\tau \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $e = \mathrm{lcm}(m_\tau : \tau \in T_0)$;
2) $\gcd(s_\tau, m_\tau) = 1$ для всех $\tau \in T_0$;
3) $\gcd(p, s_\tau) = 1$ и $\gcd(p, m_\tau) = 1$ для любого простого p со свойством $\tau(p) = \infty$.

Из критерия почти изоморфизма мы видим, что класс изоморфизма жёсткого црф слагаемого X_1 в главном разложении группы X определяется целыми числами s_τ, $\tau \in T_0$, так как m_τ являются инвариантами почти изоморфизма (т. е. они совпадают для почти изоморфных групп).

Определение 2.1. Блочно-жёсткая црф группа X кольцевого типа, допускающая главное разложение (8), в котором $s_\tau = 1$ для всех $\tau \in T_0$, будет называться *правильной црф группой*.

В основном наше обсуждение будет касаться црф групп, которые являются правильными.

Замечание 2.2. Из [6, лемма 3.4, замечание 3.5] видно, что достаточным условием правильности црф группы X является существование для неё главного разложения, характеризуемого числами $s_\tau = 1$ только для типов τ, соответствующих однородным компонентам регулятора R_τ ранга 1 (см. (8)).

Мы знаем, что

$$\mathrm{End}(K^+) \subset \mathrm{End}(R) \cong \prod_{\tau \in T}^{\otimes} \mathrm{End}(R_\tau).$$

Для любого разложения τ-однородной компоненты

$$R_\tau = \bigoplus_{j=1,\ldots,n_\tau} \tau a_j^\tau \tag{9}$$

на слагаемые ранга 1 существует соответствующее матричное представление кольца $\mathrm{End}(R_\tau)$ в виде кольца $M_{n_\tau}(\tau)$, состоящего из $(n_\tau \times n_\tau)$-матриц с элементами из τ (в силу идемпотентности типа τ может рассматриваться как подкольцо в $\mathbb{Q}$, а не только как подгруппа). При этом (ij)-элементы матрицы естественно определяются как элементы из $\mathrm{Hom}(\tau a_j^\tau, \tau a_i^\tau) \cong \tau$. Тогда $\mathrm{End}(R^+)$ изоморфно кольцу M всех $(n \times n)$-матриц блочно-диагональной формы, которые содержат матрицы из $M_{n_\tau}(\tau)$ в качестве τ-блоков.

Пусть $E \cong \mathrm{End}(K^+)$ и $E_R \cong \mathrm{End}(R)$ — матричные представления колец, тогда цепь (3) записывается в виде

$$eE_R \subset E \subset E_R.$$

Обозначим подкольцо диагональных матриц кольца M как D, оно даёт матричное представление кольца

$$\prod_{\tau \in T}^{\otimes} \prod_{j=1,\ldots,n_\tau}^{\otimes} \mathrm{End}(\tau a_j^\tau)$$

с поэлементным сложением и умножением. Легко видеть, что $D^+ \cong R$. Для упрощения обозначений символы K и R будут использоваться не только для обозначения самих колец, но также для соответствующих им матричных колец. Напомним, что $I \in K$, значит, $eI \in R$ для $e = |K/R|$ и, очевидно, $I \in D$, поскольку I рассматривается как тождественное отображение из $\mathrm{End}(R)$. Мы введём класс $\mathcal{K}$ *правильных црф колец* K и покажем, что $K = D \cap E$ при специальном и однозначно определённом выборе разложений (9).

3. Теоремы реализации и классификации

Пусть K — коммутативное кольцо с почти вполне разложимой аддитивной структурой, единицей I и регулятором $R = R(K^+)$. Существует цепь

$$R \subset K \subset \mathrm{End}(K^+) \subset \mathrm{End}(R)$$

(см. (4)). Следовательно, мы можем рассматривать умножения на элементы из R как отображения из $\mathrm{End}(K^+)$.

Поскольку R — вполне характеристическая подгруппа в K, мы можем взять сужения этих эндоморфизмов на R и относиться к ним как к элементам из $\mathrm{End}(R)$. Значит, R — коммутативное кольцо, подкольцо в K. С этого момента мы естественно называем кольцо R *регулятором кольца* K. До сих пор определялся только регулятор R^+ почти вполне разложимой группы K^+.

Определение 3.1. Пусть K — коммутативное кольцо с почти вполне разложимой группой K^+ и регулятором R. Оно будет называться *правильным* почти вполне разложимым кольцом, если R допускает разложение в прямую сумму идеалов ранга 1.

В соответствии с этим определением мы вводим класс $\mathcal{K}$ *правильных блочно-жёстких почти вполне разложимых колец с единицей и циклическим регуляторным фактором* K^+/R^+. Пусть $e = \exp(K^+/R)$.

Поскольку мы имеем дело только с кольцами эндоморфизмов групп, запись $\mathrm{End}(F)$ всегда будет означать $\mathrm{End}(F^+)$ для любого кольца F, и мы можем иногда опускать символ $+$.

Из того, что $R \subset K \subset \frac{R}{e}$ и $R \subset K \subset \mathrm{End}(R)$, следует, что $K \subset R_*^{E_R}$, если обозначить $\mathrm{End}(R)$ как E_R для краткости. Это будет использоваться в доказательстве следующей теоремы реализации.

Теорема 3.2. *Пусть $K \in \mathcal{K}$ — кольцо с регулярным представлением $K \subset \subset \mathrm{End}(K^+)$, и пусть R — регулятор в K. Тогда существует единственное разложение*
$$R^+ = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} R_i$$
на группы ранга 1, *такое что*
$$K = \mathrm{End}(K^+) \cap \prod_{i \in \mathcal{I}}^{\otimes} \mathrm{End}(R_i).$$

Доказательство. Как и раньше, обозначим $T = T_{\mathrm{cr}}(K^+)$, тогда $R^+ = \bigoplus_{\tau \in T} R_\tau$ — разложение регулятора на однородные компоненты, $e = \exp(K/R)$, $E_R = \mathrm{End}(R^+)$, и пусть $R' = R_*^{E_R}$ — сервантная оболочка группы R во вполне разложимой группе E_R^+ (для удобства обозначение E_R будет использоваться наряду с $\mathrm{End}(R^+)$). Очевидно, R' является подкольцом в E_R, так как $R \subset E_R$ и
$$R' = \{r \in E_R \colon \text{существует натуральное } k \text{ со свойством } kr \in R\}.$$
В (5) было показано, что $R_\tau \subset \mathrm{End}(R_\tau)$, откуда следует, что
$$K \subset R' = \bigoplus_{\tau \in T} (R_\tau)_*,$$
и из $eI \in R$ мы получаем
$$I = \sum_{\tau \in T} I_\tau,$$

где $I_\tau \in (R_\tau)_*$ (сервантная оболочка берётся в E_R). Значит, $R'_\tau = (R_\tau)_*$ — прямое слагаемое группы E_R^+, потому что это сервантная подгруппа её τ-однородной компоненты (см. [4, лемма 86.8]). Таким образом, каждая R'_τ является τ-однородной вполне разложимой группой, отсюда $R' = \bigoplus\limits_{\tau \in T} R'_\tau$ также является вполне разложимой группой по отношению к операции сложения и одновременно коммутативным кольцом с единицей, подкольцом в E_R.

Имеем цепь колец $R \subset K \subset R' \subset E_R$. Пусть $(R)\varepsilon$ (или просто $R\varepsilon$) является образом аддитивной группы R^+ при отображении $\varepsilon \in E_R$. В частности, если $\varepsilon \in K$, мы отождествляем это отображение с умножением (слева) на ε, т. е. образ R при отображении ε есть εR. Это обозначение обобщается на R', потому что $\varepsilon \in E_R$ однозначно продолжается до отображения на R'^+ по формуле $(\frac{r}{l})\varepsilon = \frac{r\varepsilon}{l}$, где $r \in R$, $l \in \mathbb{N}$ и $\frac{r}{l} \in R'$. Умножение в R' коммутативно, но для удобства читателя $\varepsilon R'$ означает умножение на элемент $\varepsilon \in R'$, в то время как $(R')\varepsilon$ (или $R'\varepsilon$, если опустить скобки) является образом R' при отображении $\varepsilon \in \mathrm{End}(R^+)$, продолженном до R'. В некоторых случаях нам приходится различать $\varepsilon R'$ и $(R')\varepsilon$, когда речь идёт об элементах из E_R, но не обязательно из R'.

Для любого $\varepsilon \in E_R$ выполняется, что

$$(R')\varepsilon = (R_*^{E_R})\varepsilon \subset ((R)\varepsilon)_*^{E_R}, \tag{10}$$

в частности,

$$(R')\varepsilon = ((R)\varepsilon)_*^{E_R}, \tag{11}$$

если $(R')\varepsilon$ сервантна в E_R.

Очень важно, что кольцо $R' = \bigoplus\limits_{i \in \mathcal{I}} L_i$ однозначно разложимо в прямую сумму ненулевых неразложимых идеалов L_i, следовательно, $I = \sum\limits_{i \in \mathcal{I}} \varepsilon_i$ и $L_i = \varepsilon_i R'$, где $\varepsilon_i \in R'$, $i \in \mathcal{I}$, являются однозначно определёнными примитивными попарно ортогональными идемпотентами (см. [1, гл. 4, теорема 11]).

Поскольку K — правильное кольцо, существует разложение

$$R = \bigoplus_{j \in \mathcal{I}'} (R)\varepsilon'_j, \quad |\mathcal{I}'| = \mathrm{rk}\, R, \tag{12}$$

с примитивными идемпотентами $\varepsilon'_j \in E_R$, такое что

$$I = \sum_{j \in \mathcal{I}'} \varepsilon'_j$$

и его слагаемые — идеалы в R ранга 1 (см. [4, гл. XV, § 106]).

Из (10) для любого $j \in \mathcal{I}'$ мы получаем, что

$$(R')\varepsilon'_j = (R_*^{E_R})\varepsilon'_j \subset (R\varepsilon'_j)_*^{E_R} \subset (R)_*^{E_R} = R',$$

так как $R\varepsilon'_j \subset R$. Имеем

$$R'I = R'\left(\sum_{i \in \mathcal{I}}\right) = \sum_{i \in \mathcal{I}} R'\varepsilon'_j,$$

где $R'\varepsilon'_j \subset R'$. Значит,

$$R' = \bigoplus_{j\in\mathcal{I}'} (R')\varepsilon'_j \text{ — }$$

разложение группы на слагаемые ранга 1. Следовательно, все $(R')\varepsilon'_j$ сервантны в R' и также в E_R, т. е.

$$(R\varepsilon'_j)_*^{E_R} = (R')\varepsilon'_j \tag{13}$$

в соответствии с (11), и $(R')\varepsilon'_j$ являются идеалами в R', так как $(R)\varepsilon'_j$ — идеалы в R, причём $\operatorname{rk}(R')\varepsilon'_j = \operatorname{rk}(R)\varepsilon'_j = 1$.

Отсюда следует, что множество $\{\varepsilon'_j : j \in \mathcal{I}'\}$ совпадает с однозначно определённым множеством $\{\varepsilon_i : i \in \mathcal{I}\}$ идемпотентов в R'. Значит, вышеупомянутое разложение

$$R' = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} L_i \tag{14}$$

является разложением на идеалы ранга 1. Следовательно, разложение (12) совпадает с разложением

$$R = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} (R)\varepsilon_i, \quad \text{где} \quad \varepsilon_i \in R'. \tag{15}$$

Заметим, что $|\mathcal{I}| = \operatorname{rk} R = \operatorname{rk} K^+$. Поскольку $R \subset R'$ — коммутативные кольца и все ε_i принадлежат R', мы можем рассматривать их действия как умножения, т. е. $(R)\varepsilon_i = \varepsilon_i R$ для любого $i \in \mathcal{I}$, и разложение (15) является однозначно определённым прямым разложением кольца R на идеалы $R_i = (R)\varepsilon_i$ ранга 1.

Имеем

$$R_i = \varepsilon_i R = \varepsilon_i\varepsilon_i R = \varepsilon_i R \varepsilon_i$$

по отношению к умножению в R'. Очевидно,

$$\varepsilon_i R \varepsilon_i \subset \varepsilon_i(\operatorname{End}(R^+))\varepsilon_i,$$

потому что $R \subset \operatorname{End}(R^+)$. Из того, что

$$R = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} R_i = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} \varepsilon_i R \varepsilon_i,$$

мы заключаем, что $\varepsilon_i R \varepsilon_i$ является подкольцом в $\varepsilon_i \operatorname{End}(R^+)\varepsilon_i$, причём последнее отождествляется с $\operatorname{End}(R_i^+)$ в соответствии с [4, гл. XV, § 106], следовательно, $R_i \subset \operatorname{End}(R_i^+)$.

Из (13) для любого i получаем, что $L_i = (R_i)_*^{E_R}$. Значит, существует наименьшее целое положительное число m_i, для которого $m_i\varepsilon_i \in R_i$. Напомним, что $\{\varepsilon_i : i \in \mathcal{I}\}$ — полная система ортогональных идемпотентов в R' и ε_i является единицей соответствующего кольца $L_i = \varepsilon_i R'$, которое по отношению к сложению изоморфно одной из групп τ, составляющих $T_{\mathrm{cr}}(K^+)$, следовательно, $L_i = \tau\varepsilon_i$. Получаем кольцевой изоморфизм

$$m_i\tau\varepsilon_i = R_i \cong m_i \operatorname{End}(R_i^+), \quad \text{где} \quad \tau \cong R_i^+. \tag{16}$$

Ясно, что $\langle R, I\rangle^+$ является црф группой и $R \subset \langle R, I\rangle \subset K \subset R'$, причём $\exp R'/R = \mathrm{lcm}(m_i\colon i \in \mathcal{I}) = \exp(\langle R, I\rangle/R)$. Легко видеть, что не существует никакой другой почти вполне разложимой группы $K' \subset R'$ с регулятором R и циклической фактор-группой K'/R, удовлетворяющей условию $\langle R, I\rangle \subset K'$. Значит, имеем равенство $K = \langle R, I\rangle$ и $e = \exp(K/R) = \mathrm{lcm}(m_i\colon i \in \mathcal{I})$.

Сконцентрировавшись на аддитивной структуре кольца K, положим $X = K^+$, $a_i = m_i\varepsilon_i \in R_i$ и $b = I$. Пусть

$$X = \left\langle \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} \langle a_i\rangle_*^R, b \right\rangle, \quad \text{где} \quad eb = \sum_{i\in\mathcal{I}} \frac{e}{m_i} a_i$$

и $R_i^+ = \langle a_i\rangle_*^R = \tau a_i$ для группы τ из $T_{\mathrm{cr}}(X)$, изоморфной R_i^+. Из (6) немедленно следует, что числа

$$m_\tau = \mathrm{lcm}(m_i\colon R_i^+ \cong \tau,\ i \in \mathcal{I}) \tag{17}$$

являются инвариантами почти изоморфизма группы X, $\tau \in T$. Заметим, что если q^t делит m_τ для простого числа q, натурального t и некоторого $\tau \in T$, то существует по крайней мере ещё один критический тип $\sigma \in T$, для которого m_σ делится на q^t, иначе группа R_τ не была бы сервантной в K, что противоречило бы условию на R быть регулятором в X.

Очевидно,

$$\prod_{i\in\mathcal{I}}^{\otimes} \mathrm{End}(\langle a_i\rangle_*^R) \subset \mathrm{End}(R^+).$$

В соответствии с (2) любой элемент

$$F \in \mathrm{End}(X) \cap \prod_{i\in\mathcal{I}}^{\otimes} \mathrm{End}(\langle a_i\rangle_*^R)$$

может рассматриваться как элемент кольца

$$\prod_{i\in\mathcal{I}}^{\otimes} \mathrm{End}(\langle a_i\rangle_*^R),$$

такой что $(eb)F$ делится на e в X. Это означает, что существуют числа $k \in \mathbb{Z}$ и $\rho_i \in \tau$ со свойством $\tau \cong R_i^+$, такие что

$$(eb)F = k(eb) + e\sum_{i\in\mathcal{I}} \rho_i a_i = k\sum_{i\in\mathcal{I}} \frac{e}{m_i} a_i + \sum_{i\in\mathcal{I}} e\rho_i a_i = \sum_{i\in\mathcal{I}} \frac{e}{m_i}(k + m_i\rho_i)a_i.$$

Мы доказали, что $a_iF = (k + m_i\rho_i)a_i$ для любого i, а значит,

$$F = kI + \sum_{i\in\mathcal{I}} m_i\rho_i\varepsilon_i, \tag{18}$$

где $I = \sum\limits_{i\in\mathcal{I}} \varepsilon_i$ является единичным отображением на R и $a_i\varepsilon_i = a_i$ для всех i.

С другой стороны, любое целое число k и множество рациональных чисел ρ_i, $i \in \mathcal{I}$, удовлетворяющее условиям, данным выше, определяют элемент из

$$\mathrm{End}(X) \cap \prod_{i\in\mathcal{I}}^{\otimes} \mathrm{End}(\langle a_i\rangle_*^R).$$

Используя (16), имеем, что $m_i\rho_i\varepsilon_i \in R_i \subset \mathrm{End}(\langle a_i\rangle_*^R)$ и $R_i = m_i\tau\varepsilon_i$, где $R_i^+ \cong \tau \in T$. Следовательно, кольцо

$$\mathrm{End}(X) \cap \prod_{i\in\mathcal{I}}^{\otimes} \mathrm{End}(\langle a_i\rangle_*^R),$$

состоящее из отображений F, совпадает с кольцом $K = \langle R, I\rangle$ (см. (18)). Принимая во внимание, что $R_i^+ = \langle a_i\rangle_*^R$ для любого i и $X = K^+$, мы получаем требуемое равенство

$$K = \mathrm{End}(K^+) \cap \prod_{i\in\mathcal{I}}^{\otimes} \mathrm{End}(R_i^+)$$

и завершаем доказательство.

Поскольку

$$\mathrm{End}(K^+) = \mathrm{End}(K^+) \cap \prod_{i\in\mathcal{I}}^{\otimes} \mathrm{End}(R_i^+)$$

для жёсткого кольца K, из теоремы следует, что жёсткое кольцо $K \in \mathcal{K}$ является E-кольцом, [2, гл. 1, 6; 7, 10].

Замечание 3.3. Для блочно-жёсткого, не обязательно правильного, коммутативного кольца K с единицей из любого разложения его регулятора $R = \bigoplus_{j\in\mathcal{I}'} \tilde{R}_j$ на идеалы следует соответствующее разложение $R' = \bigoplus_{j\in\mathcal{I}'} \tilde{R}'_j$ в прямую сумму идеалов $\tilde{R}'_j = (\tilde{R}_j)_*^{E_R}$ (см. соотношения (10)—(13) в отсутствии предположения о рангах слагаемых).

Отсюда получается, что разложение регулятора R в прямую сумму идеалов ранга 1 однозначно определено для любого блочно-жёсткого правильного коммутативного кольца K с единицей, не обязательно с циклической группой K^+/R^+.

Замечание 3.4. Пусть K — блочно-жёсткое коммутативное кольцо с единицей, содержащее подкольцо G конечного индекса, не обязательно совпадающее с регулятором, которое представимо в виде прямой суммы идеалов ранга 1. Тогда $G \subset R$ и R/G — конечная группа, как подгруппа конечной группы K/G. Имеем $R' = R_*^{E_R} = G_*^{E_R}$. В доказательстве предыдущей теоремы формулы (10)—(14) остаются верными, даже если вместо R взять G в предположении, что отображения ε, ε'_j принадлежат $\mathrm{End}(G^+)$ (а не $\mathrm{End}(R^+)$). Это означает, что и при этом более слабом, чем в теореме, условии R' (однозначно) разложимо в прямую сумму идеалов ранга 1.

Заметим, что отображения (18) составляют кольцо

$$\Big\langle \prod_{i\in\mathcal{I}}^{\otimes} m_i \,\mathrm{End}(R_i^+), I \Big\rangle,$$

которое совпадает с K, если последнее рассматривается как подкольцо в $\mathrm{End}(R^+)$, что сделано выше. В общем случае, когда K не отождествляется со своей изоморфной копией в $\mathrm{End}(R^+)$, из предыдущей теоремы вытекает следствие.

Следствие 3.5. *Пусть $K \in \mathcal{K}$ — кольцо с единицей I, регулятором R и $T = T_{\mathrm{cr}}(K^+)$. Тогда*

1) *существует единственное разложение $R = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} R_i$ на неразложимые идеалы и все они имеют ранг 1;*
2) *$K = \langle R, I\rangle$;*
3) *существуют однозначно определённые положительные целые числа m_i, $i \in \mathcal{I}$, такие что*
$$K \cong \Big\langle \prod_{i\in\mathcal{I}}^{\otimes} m_i \,\mathrm{End}(R_i^+), I \Big\rangle,$$
где I — единичное отображение на прямой сумме групп R_i^+ ранга 1; более того, $R_i \cong m_i \,\mathrm{End}(R_i^+)$ для любого i и $e = \mathrm{lcm}(m_i \colon i \in \mathcal{I})$ — наименьшее положительное число со свойством $eI \in R$;
4) *инварианты почти изоморфизма m_τ, $\tau \in T$, группы K^+ совпадают с соответствующими числами $\mathrm{lcm}(m_i \colon R_i^+ \cong \tau,\ i \in \mathcal{I})$;*
5) *погружение*
$$\Big\langle \prod_{i\in\mathcal{I}}^{\otimes} m_i \,\mathrm{End}(R_i^+), I \Big\rangle \subset \mathrm{End}(K^+)$$
является регулярным представлением K.

Нам придётся делать различие между кольцом R и группой R^+. Однозначно определённое разложение регулятора кольца $K \in \mathcal{K}$ на идеалы ранга 1,
$$R = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} R_i, \tag{19}$$
будем называть его *каноническим разложением*. Будем говорить, что изоморфизм
$$K \cong \Big\langle \prod_{i\in\mathcal{I}}^{\otimes} m_i \,\mathrm{End}(R_i^+), I \Big\rangle, \quad \text{где} \quad \mathrm{rk}(R_i) = 1, \tag{20}$$
является *каноническим представлением* правильного кольца $K = \langle R, I\rangle$. Множества $M_\tau(K) = \{m_i \colon R_i^+ \cong \tau,\ i \in \mathcal{I}\}$, определённые с помощью $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(K^+)$, будут называться *множествами кольцевых τ-инвариантов* кольца K.

Следуя [3, гл. 1, предложение 3], мы комбинируем аддитивную и мультипликативную записи для регулятора,
$$R = R(K) = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} R_i \cong \prod_{i\in\mathcal{I}}^{\otimes} m_i \,\mathrm{End}(R_i^+), \quad \text{где} \quad R_i \cong m_i \,\mathrm{End}(R_i^+), \tag{21}$$
а значит, и для самого кольца K.

Обсуждая кольца из класса $\mathcal{K}$, наряду с определением $K = \langle R, I\rangle$ будем использовать их канонические представления (20), поскольку последние лучше раскрывают их кольцевые свойства. Обычно I обозначает единицу кольца и рассматривается как тождественное отображение на $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{I}} R_i^+$ в каноническом представлении. Пусть ε_i обозначают элементы разбиения $I = \sum\limits_{j\in\mathcal{I}} \varepsilon_i$ в делимых оболочках обоих изоморфных колец (20). Это соглашение делает возможными некоторые улучшения записи последующих доказательств. Поскольку $m_i\varepsilon_i \in R_i$, группа R_i^+ может заменять аддитивную группу кольца $m_i \operatorname{End}(R_i^+)$, что позволяет использовать R^+ в качестве аддитивной группы кольца $\prod\limits_{i\in\mathcal{I}}^{\otimes} m_i \operatorname{End}(R_i^+)$. Последнее изоморфно регулятору кольца K, поэтому множество $\{m_i \colon i \in \mathcal{I}\}$ предполагается удовлетворяющим некоторым условиям в соответствии с (7), (17).

Определение 3.6. Пусть $R = \bigoplus\limits_{i\in\mathcal{I}} R_i$ — блочно-жёсткая вполне разложимая группа и все её слагаемые R_i ранга 1 имеют идемпотентные типы. Множество $\{m_i \colon i \in \mathcal{I}\}$ натуральных чисел будет называться *τ-правильным множеством* относительно R, если оно обладает следующими свойствами:

1) если q^t делит $\operatorname{lcm}(m_i \colon R_i^+ \cong \tau,\ i \in \mathcal{I})$ для простого q, натурального t и некоторого $\tau \in T_{\mathrm{cr}}\Big(\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{I}} R_i\Big)$, то существует тип $\sigma \neq \tau$, $\sigma \in T_{\mathrm{cr}}\Big(\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{I}} R_i\Big)$, для которого $q^t \mid \operatorname{lcm}(m_i \colon R_i^+ \cong \sigma,\ i \in \mathcal{I})$;
2) $|R_i/m_iR_i| = m_i$ для любого $i \in \mathcal{I}$.

Когда мы говорим, что

$$K \cong \Big\langle \prod_{i\in\mathcal{I}}^{\otimes} m_i \operatorname{End}(R_i^+), I \Big\rangle$$

является кольцом из класса $\mathcal{K}$, мы имеем в виду, что $T_{\mathrm{cr}}\Big(\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{I}} R_i\Big)$ является антицепью, каждая группа R_i имеет ранг 1 и идемпотентный тип и, наконец, множество $\{m_i \colon i \in \mathcal{I}\}$ τ-правильное. Основное свойство кольца быть коммутативным црф кольцом с единицей следует из этого канонического представления.

Как и раньше, мы можем опускать символ $+$, подразумевая, что $\operatorname{End}(R_i)$, $i \in \mathcal{I}$, обозначает кольцо эндоморфизмов аддитивной группы R_i^+ ранга 1. Это не вызывает никакой путаницы ещё и потому, что существует только тривиальный эндоморфизм кольца R_i ранга 1, который отображает его единицу на неё же. Обобщая, имеем, что кольца $l\tau$ и $k\tau$, определённые натуральным числами l, k, не делящимися на простые p со свойством $\tau(p) = \infty$, изоморфны тогда и только тогда, когда $k = l$, и если изоморфизм существует, то он определяется однозначно (здесь мы понимаем под τ кольцо ранга 1 с единицей). Используем это в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 3.7 (критерий изоморфизма). *Пусть $K, K' \in \mathcal{K}$. Тогда кольца K и K' изоморфны, если и только если аддитивные группы их регуляторов $R^+(K)$ и $R^+(K')$ изоморфны и $M_\tau(K) = M_\tau(K')$ для каждого $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(K) = T_{\mathrm{cr}}(K')$.*

Доказательство. Используем канонические представления (20) колец $K = \langle R, I\rangle$ и K'. Обозначим $R = R(K)$ и $R' = R(K')$.

По условию для канонических разложений регуляторов $R = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} R_i$ и $R' = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} R'_i$ верно, что $R_i \cong R_i^+$, $i \in \mathcal{I}$ (см. (19)). Применяя равенства $M_\tau(K) = M_\tau(K')$ для $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(K) = T_{\mathrm{cr}}(K')$ (при необходимости после подходящей перенумерации слагаемых в данных разложениях), мы получаем изоморфизмы колец

$$m_i \operatorname{End}(R_i^+) \cong R_i \cong R'_i \cong m_i \operatorname{End}({R'_i}^+)$$

для всех i, которые обеспечивают кольцевой изоморфизм $\phi\colon R \to R'$. Он естественно отображает единицу $\varepsilon_i \in \operatorname{End}(R_i^+)$ на единицу $\varepsilon_i\phi$ кольца $\operatorname{End}(R_i^+)$ для каждого i.

Рассматривая ϕ как элемент из $\operatorname{Hom}(R, R')$ и продолжая его с R на всю делимую оболочку, $\phi\colon \mathbb{Q}R \to \mathbb{Q}R'$, мы видим, что ϕ отображает единицу $I = \sum_{i\in\mathcal{I}} \varepsilon_i$ кольца K на $I\phi = \sum_{i\in\mathcal{I}} \varepsilon_i\phi$, единицу в K'. Этого достаточно, чтобы сделать заключение, что $K \cong K' = \langle R', I\phi\rangle$.

Необходимость условия с очевидностью следует из того факта, что $K^+ \cong K'^+$ влечёт $R^+ \cong R'^+$. Поскольку числовые множества $M_\tau(K)$ и $M_\tau(K')$, $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(K) = T_{\mathrm{cr}}(K')$, однозначно определены в канонических представлениях колец по следствию 3.5, для изоморфных колец они совпадают.

Доказательство завершено.

Следствие 3.8. *Пусть $K, K' \in \mathcal{K}$. Тогда кольца K и K' изоморфны, если и только если их регуляторы $R(K)$ и $R(K')$ изоморфны (как кольца).*

Теперь мы покажем, что кольцо $K \in \mathcal{K}$ может быть неразложимым (не представляющимся в виде прямой суммы двух ненулевых идеалов) в случае, когда его аддитивная группа разложима.

Теорема 3.9 (критерий разложимости). *Кольцо*

$$K \cong \left\langle \prod_{i\in\mathcal{I}}^{\otimes} m_i \operatorname{End}(R_i^+), I \right\rangle \in \mathcal{K}$$

разложимо в прямую сумму ненулевых идеалов, $K = K_1 \oplus K_2$, если и только если при некотором разбиении $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$ числа $\operatorname{lcm}(m_i\colon i \in \mathcal{I}_1)$ и $\operatorname{lcm}(m_i\colon i \in \mathcal{I}_2)$ являются взаимно простыми.

Доказательство. Пусть $K = \langle R, I\rangle = K_1 \oplus K_2$ и $R = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} R_i$ — каноническое разложение регулятора. Тогда $K^+ = \langle R^+, I\rangle = K_1^+ \oplus K_2^+$ — разложение црф группы, в которой R^+ является вполне характеристической подгруппой, а значит, тоже разложимой, $R^+ = \tilde{R}_1 \oplus \tilde{R}_2$, где $\tilde{R}_1 = K_1 \cap R$ и $\tilde{R}_2 = K_2 \cap R$ (см. [4, том 1, гл. II, лемма 9.3]. По следствию 3.5 кольцо R однозначно разложимо на неразложимые идеалы и все эти слагаемые имеют ранг 1, поэтому существует разбиение $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$, для которого

$$\tilde{R}_1 = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}_1} R_i, \quad \tilde{R}_2 = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}_2} R_i.$$

Из очевидного равенства $K/R = K_1/\tilde{R}_1 \oplus K_2/\tilde{R}_2$ следует, что числа $e_1 = \exp(K_1/\tilde{R}_1)$ и $e_2 = \exp(K_2/\tilde{R}_2)$ являются взаимно простыми и $e = e_1 e_2$, так как $|K/R| = |K_1/\tilde{R}_1| \oplus |K_2/\tilde{R}_2|$ — разложение циклической группы. Имеем $eI \in R = \tilde{R}_1 \oplus \tilde{R}_2$, где $e = \exp(K/R) = \operatorname{lcm}(m_i \colon i \in \mathcal{I})$.

Из канонического представления следует, что $I = \sum\limits_{i \in \mathcal{I}} \varepsilon_i$, причём слагаемые являются единицами соответствующих колец, $\varepsilon_i \in \operatorname{End}(R_i^+)$. Напомним, что $R = \bigoplus\limits_{i \in \mathcal{I}} R_i$, где $R_i \cong m_i \operatorname{End}(R_i^+) = \tau m_i \varepsilon_i$, следовательно,

$$\tilde{R}_1 \cong \prod_{i \in \mathcal{I}_1}^{\otimes} m_i \operatorname{End}(R_i^+), \quad \tilde{R}_2 \cong \prod_{i \in \mathcal{I}_2}^{\otimes} m_i \operatorname{End}(R_i^+). \tag{22}$$

Обозначим

$$I_1 = \sum_{i \in \mathcal{I}_1} \varepsilon_i, \quad I_2 = \sum_{i \in \mathcal{I}_2} \varepsilon_i. \tag{23}$$

По построению $eI_1 \in \tilde{R}_1$, $eI_2 \in \tilde{R}_2$ и $K_1^+ = (\tilde{R}_1)_*^K$, $K_2^+ = (\tilde{R}_2)_*^K$, значит, $I_1 \in (\tilde{R}_1)_*^K$, $I_2 \in (\tilde{R}_2)_*^K$. Из $I = I_1 + I_2$ следует, что $K_1 = \langle \tilde{R}_1, I_1 \rangle$ и $K_2 = \langle \tilde{R}_2, I_2 \rangle$.

Получаем, что

$$eI = eI_1 + eI_2 = e_2\left(e_1 \sum_{i \in \mathcal{I}_1} \varepsilon_i\right) + e_1\left(e_2 \sum_{i \in \mathcal{I}_2} \varepsilon_i\right)$$

и

$$e_1 \sum_{i \in \mathcal{I}_1} \varepsilon_i \in \tilde{R}_1, \quad e_2 \sum_{i \in \mathcal{I}_2} \varepsilon_i \in \tilde{R}_2$$

по определению чисел e_1 и e_2. Поскольку они естественным образом совпадают с числами $\operatorname{lcm}(m_i \colon i \in \mathcal{I}_1)$ и $\operatorname{lcm}(m_i \colon i \in \mathcal{I}_2)$, последние являются взаимно простыми, как и требовалось.

Обратно, предположим, что существует разбиение $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$, для которого числа $\operatorname{lcm}(m_i \colon i \in \mathcal{I}_1)$ и $\operatorname{lcm}(m_i \colon i \in \mathcal{I}_2)$ являются взаимно простыми. Легко видеть, что $K = K_1 \oplus K_2$ и кольца $K_1 = \langle \tilde{R}_1, I_1 \rangle$ и $K_2 = \langle \tilde{R}_2, I_2 \rangle$ определяются множествами $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$, как и выше (см. (22), (23)).

Доказательство завершено.

Следствие 3.10. *Любое прямое слагаемое кольца $K \in \mathcal{K}$ также принадлежит классу $\mathcal{K}$.*

Пусть $S = \{r_j \colon j \in \mathcal{J}\}$ — конечное множество целых положительных чисел. Будем говорить, что множество S *связно*, если для любого его разбиения

$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$ числа $\operatorname{lcm}(r_j \colon j \in \mathcal{J}_1)$ и $\operatorname{lcm}(r_j \colon j \in \mathcal{J}_2)$ не являются взаимно простыми. Если существует $j \in \mathcal{J}$, для которого $r_j = 1$, тогда S не является связным. Очевидно, любое множество S однозначно представляется в виде объединения своих связных компонент (подмножеств).

Поскольку проблема разложимости кольца $K \in \mathcal{K}$ сведена к проблеме представления множества $\{m_i \colon i \in \mathcal{I}\}$ в виде объединения связных компонент, из теоремы 3.9 следует, что *существует единственное разложение кольца K в прямую сумму неразложимых идеалов* (в отличие от группы K^+, в общем случае обладающей неизоморфными прямыми разложениями (см. [8])). Это согласуется с [1, гл. 4, теорема 11]. Мы также видим, что неразложимость кольца K не связана с неразложимостью его аддитивной группы K^+, так как последняя может быть неразложимой только в случае, когда она жёсткая (см. [8, теорема 3.7]). Подводя итог, мы устанавливаем следующий критерий.

Критерий неразложимости *Кольцо*

$$K \cong \left\langle \prod_{i \in \mathcal{I}}^{\otimes} m_i \operatorname{End}(R_i^+), I \right\rangle \in \mathcal{K}$$

неразложимо в том и только том случае, когда множество $\{m_i \colon i \in \mathcal{I}\}$ связно.

4. Другие классы коммутативных почти вполне разложимых колец с циклическим регуляторным фактором с единицей

В последней части статьи мы покажем, что правильными кольцами не исчерпываются все коммутативные црф кольца с единицей. Пусть K — блочно-жёсткое коммутативное црф кольцо с единицей, подкольцо кольца $E_R = \operatorname{End}(R^+)$, где $R = R(K^+)$ — регулятор в K. Как и раньше, $K \subset \operatorname{End}(K^+) \subset E_R$ и $R' = R_*^{E_R}$. Мы будем использовать следующее определение.

Определение 4.1. Пусть H — кольцо без кручения конечного ранга. Если существует разложение $H = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} H_i$ на идеалы ранга 1, то H называется *вполне разложимым кольцом*.

В замечании 3.4 говорится, что если K содержит вполне разложимое подкольцо конечного индекса, то R' также раскладывается в прямую сумму идеалов ранга 1 и это разложение однозначно определено. Верно и обратное. В самом деле, если

$$R' = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} R'\varepsilon_i = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} L_i,$$

где $\operatorname{rk} L_i = 1$, то $R \subset K \subset R' \subset \operatorname{End}(R^+)$ и $T_{\mathrm{cr}}(R) = T_{\mathrm{cr}}(\operatorname{End}(R))$. Значит, каждая группа L_i^+ изоморфна одной из групп множества $T_{\mathrm{cr}}(R)$, содержащей $\mathbb{Z}$, скажем σ. Следовательно, $L_i = \sigma\varepsilon_i$, где $\varepsilon_i \in R'$ определены разложением $I = \sum\limits_{i\in\mathcal{I}} \varepsilon_i$. По построению $R' = K_*^{E_R}$, отсюда для каждого $i \in \mathcal{I}$ существует наименьшее положительное целое число m_i со свойством $m_i\varepsilon_i \in K$. Определим

$$G = G(K) = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} m_i L_i \text{ — } \tag{24}$$

подкольцо в R, для которого $G^+ \cong R'^+$. Заметим, что $G(K)$ является максимальным подкольцом в K, разложимым в прямую сумму идеалов ранга 1. Оно определено однозначно, поскольку данное выше разложение кольца R' и выбор чисел m_i единственны (см. [1, гл. 4, теорема 11].

Полуправильные кольца

Пусть $K = \langle G(K), I\rangle$ — блочно-жёсткое коммутативное кольцо, имеющее вполне разложимое подкольцо $G(K)$. Поскольку любое кольцо ранга 1 изоморфно подкольцу кольца эндоморфизмов некоторой группы ранга 1, кольцо K имеет следующее представление:

$$K \cong \left\langle \prod_{i\in\mathcal{I}}^{\otimes} m_i \operatorname{End}(R_i), I \right\rangle,$$

где R_i — группы ранга 1 идемпотентных типов, которые образуют антицепь $T = T_{\mathrm{cr}}\Big(\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{I}} R_i\Big)$. Множество $\{m_i\colon i \in \mathcal{I}\}$ не обязательно удовлетворяет условию 1), но удовлетворяет условию 2) определения 3.6, следовательно, оно может не быть τ-правильным относительно R.

Обобщая определение 3.1 правильных црф колец и используя их канонические представления, мы вводим более широкий класс колец.

Определение 4.2. Блочно-жёсткое коммутативное црф кольцо

$$K \cong \left\langle \prod_{i\in\mathcal{I}}^{\otimes} m_i \operatorname{End}(R_i^+), I \right\rangle,$$

определённое группами R_i ранга 1 идемпотентных типов, множеством натуральных чисел $\{m_i\colon i \in \mathcal{I}\}$ со свойством $|R_i/m_iR_i| = m_i$ для любого i и единицей $I \in \operatorname{End}\Big(\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{I}} R_i\Big)$, называется *полуправильным* кольцом с множествами $M_\tau(K) = \{m_i\colon R_i^+ \cong \tau,\ i \in \mathcal{I}\}$ *кольцевых τ-инвариантов* для $\tau \in T_{\mathrm{cr}}\Big(\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{I}} R_i\Big)$.

Обозначим $\tilde{\mathcal{K}}$ класс полуправильных колец. Из данного определения и (20) следует, что $\tilde{\mathcal{K}}$ содержит класс $\mathcal{K}$ правильных блочно-жёстких коммутативных црф колец с единицей, удовлетворяющих ещё одному условию 1) определения 3.6.

Теорема 4.3. *Пусть $K \in \tilde{\mathcal{K}}$. Тогда группа K^+ является правильной црф группой.*

Доказательство. В соответствии с определением 4.2 рассматриваем

$$K = \left\langle \prod_{i\in\mathcal{I}}^{\otimes} m_i \operatorname{End}(R_i^+), I \right\rangle.$$

Пусть

$$G = \prod_{i\in\mathcal{I}}^{\otimes} m_i \operatorname{End}(R_i),$$

тогда $K = \langle G, I\rangle$, где G — вполне разложимое кольцо. Имеем погружение колец

$$G \subset \prod_{i\in\mathcal{I}}^{\otimes} \operatorname{End}(R_i),$$

в котором последнее является коммутативным кольцом с единицей I. Напомним, что его разложение на идеалы ранга 1 однозначно определяется разбиением $I = \sum\limits_{i\in\mathcal{I}} \varepsilon_i$ на элементы $\varepsilon_i \in \operatorname{End}(R_i)$ и числа m_i являются наименьшими целыми со свойством $m_i\varepsilon_i \in K$, $i \in \mathcal{I}$.

Обозначим $T = T_{\mathrm{cr}}(G) = T_{\mathrm{cr}}(K)$, $b = I$ и $b_i = m_i\varepsilon_i$. Отождествляя группы $\langle G^+, b\rangle$ и K^+, имеем

$$G^+ = \bigoplus_{\tau\in T}\Biggl(\bigoplus_{i\in\mathcal{I}\colon R_i\cong\tau} \tau b_i\Biggr)$$

и

$$eb = \sum_{i\in\mathcal{I}} \frac{e}{m_i} b_i, \quad \text{причём} \quad e = \operatorname{lcm}(m_i\colon i\in\mathcal{I}). \tag{25}$$

Предположим, что множество $\{m_i\colon i\in\mathcal{I}\}$ не является τ-правильным относительно $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{I}} R_i$, т. е. существует $\tau \in T$ со свойством, что q^t делит $\operatorname{lcm}(m_i\colon R_i^+ \cong \tau,\ i\in\mathcal{I})$ для простого числа q и натурального t, при этом $\operatorname{lcm}(m_i\colon R_i^+ \cong \sigma,\ i\in\mathcal{I})$ не делится на q^t ни для какого $\sigma \neq \tau$. Пусть q^s — наибольшая степень q, делящая $\operatorname{lcm}(m_i\colon R_i^+ \ncong \tau,\ i\in\mathcal{I})$, $0 \leqslant s < t$. Легко видеть, что

$$eb = \sum_{i\in\mathcal{I}} \alpha_i b_i \tag{26}$$

для натуральных $\alpha_i = \frac{e}{m_i}$, делимых на q^{t-s} для всех $i\in\mathcal{I}$, таких что $R_i \ncong \tau$. Поскольку $q^{t-s} \mid e$, получаем, что

$$q^{t-s} \ \text{ делит } \sum_{i\in\mathcal{I}\colon R_i\cong\tau} \alpha_i b_i \ \text{ в } \ K^+. \tag{27}$$

Отсюда следует, что τ-однородная компонента $G_\tau = \bigoplus\limits_{i\in\mathcal{I}\colon R_i\cong\tau} \tau b_i$ из канонического разложения группы $G = \bigoplus\limits_{\tau\in T_{\mathrm{cr}}(G^+)} G_\tau$ не сервантна в K^+, и G не совпадает с регулятором $R = R(K^+)$, потому что однородные компоненты R_τ последнего должны быть сервантны в K^+, что означает, что $R = \bigoplus\limits_{\tau\in T_{\mathrm{cr}}(G^+)} R_\tau$, где $R_\tau = (G_\tau)_*^K$.

Введём числа

$$l_i = \gcd(m_i, \operatorname{lcm}(m_j\colon R_j^+ \ncong R_i^+,\ j \in \mathcal{I})), \quad e' = \operatorname{lcm}(l_i\colon i \in \mathcal{I}), \tag{28}$$

$k_i = \frac{m_i}{l_i}$ для каждого $i \in \mathcal{I}$, $k_\tau = \operatorname{lcm}(k_i\colon R_i \cong \tau,\ i \in \mathcal{I})$, $l_\tau = \operatorname{lcm}(l_i\colon R_i \cong \tau,$ $i \in \mathcal{I})$ и $k'_\tau = \operatorname{lcm}(k_i\colon R_i \ncong \tau,\ i \in \mathcal{I})$ для $\tau \in T$. По построению $\gcd(k_\tau, k_\sigma) = 1$ для всех $\tau \neq \sigma$, так как если простое q делит k_τ, то существует i со свойством $R_i \cong \tau$, такое что q^t делит m_i для некоторого $t \in \mathbb{N}$, но ни одно m_j не делится на q^t, если $R_j \ncong \tau$, следовательно, k_σ не делится на q при условии $\tau \neq \sigma$.

Из (25), (28) легко получаем, что $e' = \operatorname{lcm}(l_\tau\colon \tau \in T)$ и

$$e = \operatorname{lcm}(l_\tau\colon \tau \in T)\operatorname{lcm}(k_\tau\colon \tau \in T) = e' \prod_{\tau \in T} k_\tau.$$

Очевидно, $e = k_\tau k'_\tau e'$ для любого τ. Учитывая изложенное выше (в частности, (27)), имеем, что $e'b \in R$ и e' — наименьшее натуральное число с этим свойством. Это означает, что црф группа K^+ имеет регуляторную экспоненту $e' = \exp(K/R)$ и инварианты почти изоморфизма $l_\tau = l_\tau(K^+)$, определяемые как

$$l_\tau = \operatorname{lcm}(l_i\colon R_i \cong \tau,\ i \in \mathcal{I}). \tag{29}$$

Заметим, что условие 1) определения 3.6 выполняется для множества $\{l_i\colon i \in \mathcal{I}\}$. В самом деле, если $p^s \mid l_i$ для простого p и некоторого $t \in \mathbb{N}$, то существует m_j со свойством $R_j \ncong R_i$, такое что $p^s \mid m_j$. Значит, $p^s \mid l_j$, поскольку $p^s \mid m_i$ (см. (28)). Таким образом, это множество является τ-правильным относительно R.

Если множество $\{i \in \mathcal{I}\colon R_i \cong \tau\}$ состоит из одного элемента, т. е. $R_i = R_\tau$, то $l_i = l_\tau$ и $k_i = k_\tau$. В этом случае ввиду (27) существует элемент $b_\tau = \frac{b_i}{k_i} = \frac{b_i}{k_\tau} \in R_\tau$, так как $\alpha_i = \frac{e}{m_i}$ и k_i являются взаимно простыми числами. Следовательно,

$$\alpha_i b_i = \frac{e}{m_i} b_i = \frac{e'(k_\tau k'_\tau)}{\frac{m_i}{k_\tau}} \frac{b_i}{k_\tau} = \frac{e'(k_\tau k'_\tau)}{l_\tau} b_\tau$$

(см. (26)). Из (25) мы получаем

$$e'b = \sum_{\tau\colon\ \operatorname{rk} R_\tau = 1} \frac{e'}{l_\tau} b_\tau + c \quad \text{для некоторого} \quad c \in \bigoplus_{\tau\colon\ \operatorname{rk} R_\tau > 1} R_\tau.$$

По замечанию 2.2 получаем, что K^+ — правильная црф группа в соответствии с определением 2.1, что и требовалось.

Замечание 4.4. В доказательстве этой теоремы показано, что аддитивная группа полуправильного кольца

$$K \cong \left\langle \prod_{i \in \mathcal{I}}^{\otimes} m_i \operatorname{End}(R_i^+), I \right\rangle$$

имеет инварианты почти изоморфизма (29) и регуляторную экспоненту $e' = \operatorname{lcm}(l_i\colon i \in \mathcal{I})$, где $l_i = \gcd(m_i, \operatorname{lcm}(m_j\colon R_j \ncong \tau,\ j \in \mathcal{I}))$. Если, в частности, K — правильное кольцо, то $m_i = l_i$ для всех $i \in \mathcal{I}$.

Если $K \in \tilde{\mathcal{K}}$ не является правильным кольцом, то его подкольцо $G(K) \cong \prod\limits_{i\in\mathcal{I}}^{\otimes} m_i \operatorname{End}(R_i^+)$ изоморфно его регулятору $R(K)$ по отношению к сложению и $G(K) \subset R(K)$, но $G(K) \neq R(K)$. Заметим, что

$$G^+(K) \cong R^+(K) \cong \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} R_i^+.$$

Поскольку кольца из $\tilde{\mathcal{K}}$ являются правильными црф группами как аддитивные структуры, почти изоморфизм для них влечёт изоморфизм, так как они изоморфны правильной црф группе из их класса почти изоморфизма. Используя критерий почти изоморфизма (см. раздел 2), мы получаем необходимое и достаточное условие изоморфизма для полуправильных (в частности, правильных) колец, которое раскрывает возможные кольцевые структуры на црф группах. Оно следует из предыдущей теоремы и не нуждается в доказательстве.

Следствие 4.5. *Пусть*

$$K \cong \left\langle \prod_{i\in\mathcal{I}}^{\otimes} m_i \operatorname{End}(R_i^+), I \right\rangle, \quad K' \cong \left\langle \prod_{j\in\mathcal{I}'}^{\otimes} m_j' \operatorname{End}({R_i'}^+), I' \right\rangle -$$

кольца из класса $\tilde{\mathcal{K}}$ с единицами I и I' соответственно, и пусть

$$l_i = \gcd(m_i, \operatorname{lcm}(m_j\colon R_j^+ \ncong R_i^+,\ j \in \mathcal{I})),$$
$$l_i' = \gcd(m_i', \operatorname{lcm}(m_j\colon R_j^+ \ncong {R_i'}^+,\ j \in \mathcal{I})).$$

Тогда $K^+ \cong {K'}^+$, если и только если $R^+ = \bigoplus\limits_{i\in\mathcal{I}} R_i$ и ${R'}^+ = \bigoplus\limits_{i\in\mathcal{I}'} R_i'$ изоморфны (т. е. после перестановки слагаемых ранга 1 получается, что $R_i^+ \cong {R_i'}^+$, $i \in \mathcal{I} = \mathcal{I}'$), и

$$\operatorname{lcm}(l_i\colon R_i^+ \cong \tau,\ i \in \mathcal{I}) = \operatorname{lcm}(l_i'\colon {R_i'}^+ \cong \tau,\ i \in \mathcal{I})$$

для всех $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(R) = T_{\mathrm{cr}}(R')$.

Для того чтобы распространить некоторые результаты с $\mathcal{K}$ на класс $\tilde{\mathcal{K}}$, положим $G(K) = R(K)$ для правильного кольца K, что соответствует совпадению в нём регулятора и максимального вполне разложимого кольца конечного индекса. Следуя этому соглашению, мы заменяем кольцо $R(K)$ на $G(K)$ в доказательствах теорем 3.7, 3.9 и получаем критерии изоморфизма и разложимости для полуправильных колец.

Теорема 4.6 (критерий изоморфизма полуправильных колец). *Пусть*

$$K \cong \left\langle \prod_{i\in\mathcal{I}}^{\otimes} m_i \operatorname{End}(R_i^+), I \right\rangle, \quad K' \cong \left\langle \prod_{j\in\mathcal{I}'}^{\otimes} m_j' \operatorname{End}({R_i'}^+), I' \right\rangle -$$

кольца из класса $\tilde{\mathcal{K}}$ с единицами I и I' соответственно. Тогда кольца K и K' изоморфны, если и только если группы $R^+ = \bigoplus\limits_{i\in\mathcal{I}} R_i$ и ${R'}^+ = \bigoplus\limits_{i\in\mathcal{I}'} R_i'$ изоморфны и $M_\tau(K) = M_\tau(K')$ для каждого $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(K) = T_{\mathrm{cr}}(K')$.

Теорема 4.7 (критерий разложимости полуправильных колец). *Кольцо*

$$K \cong \left\langle \prod_{i\in\mathcal{I}}^{\otimes} m_i \operatorname{End}(R_i^{+}), I \right\rangle \in \tilde{\mathcal{K}}$$

имеет разложение $K = K_1 \oplus K_2$ в прямую сумму ненулевых идеалов, если и только если для некоторого разбиения $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$ числа $\operatorname{lcm}(m_i\colon i \in \mathcal{I}_1)$ и $\operatorname{lcm}(m_i\colon i \in \mathcal{I}_2)$ являются взаимно простыми.

Доказательство этой теоремы заимствуется из теоремы 3.9 и базируется на том факте, что разложение $K = K_1 \oplus K_2 \in \tilde{\mathcal{K}}$ влечёт не только соответствующее разложение регулятора, но также разложение $G = (G \cap K_1) \oplus (G \cap K_2)$, так как из $R = \tilde{R}_1 \oplus \tilde{R}_2$ ($\tilde{R}_1 = R \cap K_1$, $\tilde{R}_2 = R \cap K_2$) следует, что $R' = (\tilde{R}_1)_*^{E_R} \oplus (\tilde{R}_2)_*^{E_R} = R_1' \oplus R_2'$ по замечанию 3.3. Следовательно, $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$, где $\varepsilon_i \in R_j'$ и $m_i\varepsilon_i \in \tilde{R}_j \subset K_j$, когда $i \in \mathcal{I}_j$ при $j = 1, 2$ (как обычно, $I = \sum\limits_{i\in\mathcal{I}} \varepsilon_i$).

Замечание 4.8. Полуправильное кольцо

$$K \cong \left\langle \prod_{i\in\mathcal{I}}^{\otimes} m_i \operatorname{End}(R_i), I \right\rangle \tag{30}$$

может естественно рассматриваться как подкольцо правильного кольца

$$K' \cong \left\langle \prod_{i\in\mathcal{I}}^{\otimes} l_i \operatorname{End}(R_i), I \right\rangle, \tag{31}$$

где $l_i = \gcd(m_i, \operatorname{lcm}(m_j\colon R_j \not\cong \tau,\ j \in \mathcal{I}))$, поскольку $l_i \mid m_i$ и $m_i \operatorname{End}(R_i) \subset l_i \operatorname{End}(R_i)$ для всех i. По следствию 4.5 $K^+ \cong {K'}^+$. Отождествляя эти группы и их регуляторы, имеем

$$R^+ = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} R_i = R(K^+) = R({K'}^+),$$

отсюда получаем цепь

$$\left\langle \prod_{i\in\mathcal{I}}^{\otimes} m_i \operatorname{End}(R_i), I \right\rangle \subset \left\langle \prod_{i\in\mathcal{I}}^{\otimes} l_i \operatorname{End}(R_i), I \right\rangle \subset \\ \subset \operatorname{End}({K'}^+) = \operatorname{End}(K^+) \subset \operatorname{End}(R^+),$$

содержащую регулярное представление кольца K' (см. (31)). Таким образом, получаем регулярное представление

$$K \cong \left\langle \prod_{i\in\mathcal{I}}^{\otimes} m_i \operatorname{End}(R_i), I \right\rangle \subset \operatorname{End}(K^+)$$

кольца K в соответствии с (30).

Пример 4.9. Пусть

$$K = \left\langle \prod_{i\in[1,5]}^{\otimes} m_i \operatorname{End}(R_i), I \right\rangle -$$

полуправильное кольцо, определённое с помощью групп R_i, $i \in [1,5]$, ранга 1, имеющих идемпотентные типы. Предположим, что $\operatorname{tp} R_i = \tau$, $i = 1,2,3,4$, и $\operatorname{tp} R_5 = \sigma$, при этом τ и σ — несравнимые типы. Пусть $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 15$, $m_5 = 5$ и $\tau(3) \neq \infty$, $\tau(5) \neq \infty$, $\sigma(3) \neq \infty$, $\sigma(5) \neq \infty$.

Как и раньше, $\varepsilon_i \in \operatorname{End}(R_i)$ — единичное отображение для любого i. Тогда

$$\prod_{i\in[1,5]}^{\otimes} \operatorname{End}(R_i) = \{(s_1\varepsilon_1, s_2\varepsilon_2, s_3\varepsilon_3, s_4\varepsilon_4, t\varepsilon_5)\}$$

с произвольными числами $s_i \in \tau$, $i = 1,2,3,4$, и $t \in \sigma$ и покомпонентным сложением и умножением. Продолжая каждое ε_i на всю группу $R = \bigoplus\limits_{i\in[1,5]} R_i$ нулём на R_j при $j \neq i$ и концентрируя внимание на аддитивной структуре, имеем

$$\prod_{i\in[1,5]}^{\otimes} \operatorname{End}(R_i) \cong \tau\varepsilon_1 \oplus \tau\varepsilon_2 \oplus \tau\varepsilon_3 \oplus \tau\varepsilon_4 \oplus \sigma\varepsilon_5,$$

следовательно,

$$K^+ = \langle G, I\rangle = \langle 15\tau\varepsilon_1 \oplus 15\tau\varepsilon_2 \oplus 15\tau\varepsilon_3 \oplus 15\tau\varepsilon_4 \oplus 5\sigma\varepsilon_5, I\rangle,$$

где $I = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5)$. Мы видим, что $15I = (15\varepsilon_1, 15\varepsilon_2, 15\varepsilon_3, 15\varepsilon_4, 3(5\varepsilon_5))$. Ясно, что элемент $(15\varepsilon_1, 15\varepsilon_2, 15\varepsilon_3, 15\varepsilon_4, 0)$ делится на 3 в K, значит, группа $K^+ = \langle R, I\rangle$ имеет регулятор

$$R(K^+) = \left\langle 15\tau\varepsilon_1 \oplus 15\tau\varepsilon_2 \oplus 15\tau\varepsilon_3 \oplus 15\tau\varepsilon_4, \frac{(15\varepsilon_1, 15\varepsilon_2, 15\varepsilon_3, 15\varepsilon_4)}{3}\right\rangle \oplus 5\sigma\varepsilon_5,$$

который является прямой суммой своих τ-однородной компоненты ранга 4 и σ-однородной компоненты ранга 1. Мы видим, что $5I \in R(K)$.

Очевидно, K является подкольцом правильного кольца

$$K' = \left\langle \prod_{i\in[1,5]}^{\otimes} l_i \operatorname{End}(R_i), I\right\rangle,$$

где $l_i = 5$, $i = 1,2,3,4,5$, с такой же аддитивной структурой $K^+ \cong K'^+$.

Мы завершаем исследование црф колец, содержащих вполне разложимые подкольца конечного индекса, показывая, что не все они являются полуправильными. Вернемся к только что рассмотренным кольцам.

Пусть $\tilde{K} = \langle \tilde{R}, I\rangle$, где

$$\tilde{R} = \left\langle 15\tau\varepsilon_1 \oplus 15\tau\varepsilon_2 \oplus 15\tau\varepsilon_3 \oplus 15\tau\varepsilon_4, \frac{(15\varepsilon_1, 15\varepsilon_2)}{3}\right\rangle \oplus 5\sigma\varepsilon_5.$$

Мы видим, что $\frac{(15\varepsilon_3, 15\varepsilon_4)}{3} \in \tilde{K}$, значит, $K \subset \tilde{K} \subset K'$ (равенства исключены) и $5I \in \tilde{R}$. Как и выше, $\tilde{K}^+ \cong K^+ \cong K'^+$, но никакие два из этих колец не являются изоморфными.

Пусть $\mathcal{G}$ — класс блочно-жёстких коммутативных црф колец с единицей, содержащих вполне разложимые подкольца конечного индекса. Ясно, что

$$\mathcal{K} \subset \tilde{\mathcal{K}} \subset \mathcal{G}.$$

Рассмотренный пример убеждает нас в том, что для любого кольца $\tilde{K} \in \mathcal{G} \setminus \tilde{\mathcal{K}}$ существуют полуправильное кольцо K и правильное кольцо K', такие что $K \subset \tilde{K} \subset K'$, и все эти кольца изоморфны как абелевы группы. Более того, кольца K' и K могут быть выбраны таким образом, что правильное кольцо является минимальным возможным и полуправильное — максимальным возможным из колец, удовлетворяющих соответствующим условиям.

Неправильные кольца

До сих пор мы рассматривали только кольца из класса $\tilde{\mathcal{G}}$. В заключение покажем, что ими не исчерпывается множество блочно-жёстких коммутативных црф колец с единицей. Сохраняя обозначения, приведём пример кольца K, такого что кольцо $R' = K_*^{E_R}$ не является вполне разложимым. Это необходимое и достаточное условие для того, чтобы K не содержало вполне разложимых колец конечного индекса (см. замечание 3.4 и (3.4)). Построим матричное представление такого кольца как аддитивной структуры, понимая под умножением в нём обычное умножение матриц.

Пример 4.10. Пусть

$$R' = \tau \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \oplus \tau \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \oplus \sigma \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

и

$$R = \tau \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \oplus \tau \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \oplus \sigma \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda \end{array}\right),$$

где τ и σ — несравнимые типы, причём $\tau(\lambda) \neq \infty$, $\sigma(\lambda) \neq \infty$ для некоторого натурального λ (как всегда, типы групп отождествляются с группами ранга 1, содержащими $\mathbb{Z}$).

Введём коммутативное црф кольцо $K = \langle R, I \rangle$ ранга 3 с единичной матрицей I. Очевидно, $\lambda I \in R$ и $R = R_\tau \oplus R_\sigma$ является регулятором в K. Напомним, что E_R — это кольцо блочно-диагональных матриц, в котором в данном случае один из блоков является кольцом $M_2(\tau)$ квадратных матриц порядка 2, а другой, $M_1(\sigma)$, состоит из (1×1)-матриц, т. е. чисел (см. раздел 2).

Таким образом, τ-однородная компонента R_τ ранга 2 группы R представлена в виде прямой суммы групп ранга 1 (и группа $R'_\tau = (R_\tau)_*^{E_R}$ также разложима), но легко видеть, что не существует разложений колец R_τ и R'_τ на идеалы ранга 1.

Назовём коммутативное кольцо с единицей, аддитивная группа которого является блочно-жёсткой црф группой, *неправильным кольцом*, если оно не содержит никакого вполне разложимого кольца в качестве подкольца конечного индекса. Мы вправе обозначить класс таких колец через $\overline{\mathcal{G}}$, поскольку он является дополнением класса $\mathcal{G}$ во всём рассмотренном классе коммутативных блочно-жёстких црф колец с единицей.

Литература

[1] Джекобсон Н. Теория колец. — М., 1947.

[2] Крылов П. А., Михалёв А. В., Туганбаев А. А. Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов. — Томск, 2002.

[3] Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Мир, 1971.

[4] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1974, 1977.

[5] Arnold D. Finite Rank Torsion Free Abelian Groups and Rings. — Springer, 1982. — (Lect. Notes Math.; Vol. 931).

[6] Blagoveshchenskaya E. Classification of a class of almost completely decomposable groups // A. Facchini (ed.) et al. Rings, Modules, Algebras, and Abelian Groups. Proc. Algebra Conf., Venezia 2002, Venice, Italy, June 3–8, 2002. — New York: Marcel Dekker, 2004. — (Lect. Notes Pure Appl. Math.; Vol. 236). — P. 45—54.

[7] Blagoveshchenskaya E., Ivanov G., Schultz P. The Baer–Kaplansky theorem for almost completely decomposable groups // Contemp. Math. — 2001. — Vol. 273. — P. 85—93.

[8] Blagoveshchenskaya E., Mader A. Decompositions of almost completely decomposable abelian groups // Contemp. Math. — 1994. — Vol. 171. — P. 21—36.

[9] Mader A. Almost Completely Decomposable Abelian Groups. — Amsterdam: Gordon and Breach, 1999. — (Algebra, Logic and Applications; Vol. 13).

[10] Schultz H. The endomorphism ring of the additive group of a ring // J. Austral. Math. Soc. — 1973. — Vol. 15. — P. 60—69.