

Элементарная эквивалентность групп Шевалле над полями*

Е. И. БУНИНА

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

УДК 512.54+510.67

Ключевые слова: группы Шевалле над кольцами и полями, элементарная эквивалентность, системы корней, весовые решётки.

Аннотация

В работе доказано, что (элементарные) группы Шевалле $G_\pi(\Phi, K)$ и $G_{\pi'}(\Phi', K')$ (или $E_\pi(\Phi, K)$ и $E_{\pi'}(\Phi', K')$) над бесконечными полями K и K' характеристики, отличной от двух, с решётками весов Λ и Λ' соответственно элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда системы корней Φ и Φ' изоморфны, поля K и K' элементарно эквивалентны, решётки Λ и Λ' совпадают.

Abstract

E. I. Bunina, Elementary equivalence of Chevalley groups over fields, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 8, pp. 29–77.

It is proved that (elementary) Chevalley groups $G_\pi(\Phi, K)$ and $G_{\pi'}(\Phi', K')$ (or $E_\pi(\Phi, K)$ and $E_{\pi'}(\Phi', K')$) over infinite fields K and K' of characteristic different from 2, with weight lattices Λ and Λ' , respectively, are elementarily equivalent if and only if the root systems Φ and Φ' are isomorphic, the fields K and K' are elementarily equivalent, and the lattices Λ and Λ' coincide.

Введение

Две модели $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ одного языка первого порядка $\mathcal{L}$ (например, две группы или два кольца) называются *элементарно эквивалентными*, если любое предложение φ языка $\mathcal{L}$ истинно в модели $\mathcal{U}$ тогда и только тогда, когда оно истинно в модели $\mathcal{U}'$. Любые две конечные модели одного языка элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда они изоморфны. Любые две изоморфные модели элементарно эквивалентны, однако для бесконечных моделей обратное неверно. Например, поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел и поле $\overline{\mathbb{Q}}$ алгебраических чисел элементарно эквивалентны, но не изоморфны, так как имеют различную мощность (подробные примеры можно найти в [6]).

*Работа поддержана грантом Президента Российской Федерации МК-904.2006.1 и грантом РФФИ 05-01-01048.

Первые результаты о связи элементарных свойств некоторых моделей с элементарными свойствами производных моделей были получены А. И. Мальцевым в 1961 году в [9]. Он доказал, что группы $G_n(K)$ и $G_m(L)$ (где $G = \text{GL}, \text{SL}, \text{PGL}, \text{PSL}$, $n, m \geq 3$, K, L — поля характеристики 0) элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $m = n$ и поля K и L элементарно эквивалентны.

Изучение этих вопросов было продолжено в 1992 году, когда с помощью конструкции ультрастепени и теоремы об изоморфизме [6] К. И. Бейдар и А. В. Михалёв [24] сформулировали общий подход к проблемам элементарной эквивалентности различных алгебраических структур и обобщили теорему Мальцева на случай, когда K и L — тела и ассоциативные кольца.

В 1998–2004 Е. И. Бунина продолжила изучать некоторые проблемы этого типа (см. [1, 2, 26]). Результаты А. И. Мальцева были обобщены для унитарных линейных групп над телами и ассоциативными кольцами с инволюциями, а также для групп Шевалле над алгебраически замкнутыми полями.

В [3] были анонсированы следующие результаты об элементарной эквивалентности групп Шевалле над полями.

Теорема А. Пусть $G_\pi(\Phi, K)$ и $G_{\pi'}(\Phi', K')$ (или $E_\pi(\Phi, K)$ и $E_{\pi'}(\Phi', K')$) — две (элементарные) группы Шевалле над бесконечными полями K и K' характеристики, отличной от двух. Тогда из элементарной эквивалентности этих групп Шевалле следует, что $\Phi \cong \Phi'$ и $K \equiv K'$.

Теорема В. Пусть $G = G_\pi(\Phi, K)$ и $G' = G_{\pi'}(\Phi', K')$ (или $E_\pi(\Phi, K)$ и $E_{\pi'}(\Phi', K')$) — две (элементарные) группы Шевалле над элементарно эквивалентными полями K и K' , где представления π и π' имеют изоморфные решётки весов. Тогда группы G и G' элементарно эквивалентны.

Данная работа посвящена подробному доказательству этих теорем, а точнее, более строгой *основной теоремы*.

Основная теорема. Пусть $G = G_\pi(\Phi, K)$ и $G' = G_{\pi'}(\Phi', K')$ (или $E_\pi(\Phi, K)$ и $E_{\pi'}(\Phi', K')$) — две (элементарные) группы Шевалле над бесконечными полями K и K' характеристики, отличной от двух, с решётками весов Λ и Λ' соответственно. Тогда группы G и G' элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда системы корней Φ и Φ' изоморфны, поля K и K' элементарно эквивалентны, решётки Λ и Λ' совпадают.

1. Основные сведения о группах Шевалле

1.1. Системы корней

Более подробные сведения о системах корней и их свойствах можно найти в [4, 15].

Конечное непустое множество $\Phi \subset \mathbb{R}^l$ векторов евклидова пространства $\mathbb{R}^l$ называется *системой корней*, если оно порождает $\mathbb{R}^l$, не содержит 0 и удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) $\forall \alpha \in \Phi \ (c \cdot \alpha \in \Phi \iff c = \pm 1)$;
 2) если ввести *коэффициент отражения*

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$$

для $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^l$, то для любых $\alpha, \beta \in \Phi$ имеет место $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$;

- 3) пусть для $\alpha \in \mathbb{R}^l$ w_α — это отражение относительно гиперплоскости, ортогональной вектору α , т. е. для любого $\beta \in \mathbb{R}^l$

$$w_\alpha(\beta) = \beta - \langle \alpha, \beta \rangle \alpha.$$

Тогда для любых $\alpha, \beta \in \Phi$ имеет место $w_\alpha(\beta) \in \Phi$, т. е. множество Φ инвариантно относительно действия всех отражений w_α , $\alpha \in \Phi$.

Если Φ — система корней, то её элементы называются *корнями*.

Группа W , порождённая всеми отражениями w_α , $\alpha \in \Phi$, называется *группой Вейля* системы корней Φ .

Если в пространстве $\mathbb{R}^l$ провести гиперплоскость, не содержащую корней из Φ , то все корни разобьются на два непересекающихся множества *положительных* (Φ^+) и *отрицательных* (Φ^-) корней. *Системой простых корней* называется множество $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset \Phi^+$, такое что любой положительный корень $\beta \in \Phi^+$ единственным образом записывается в виде $n_1\alpha_1 + \dots + n_l\alpha_l$, где $n_1, \dots, n_l \in \mathbb{Z}^+$.

Для любой системы корней Φ существует система простых корней. Число l называется *рангом* системы корней Φ .

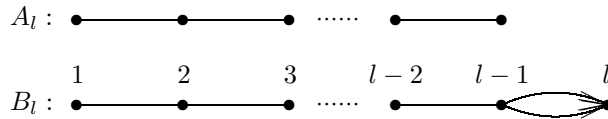
Среди всех систем корней нам наиболее интересны *неразложимые*, т. е. такие, что систему корней Φ нельзя представить в виде объединения $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ двух непересекающихся множеств со взаимно ортогональными корнями.

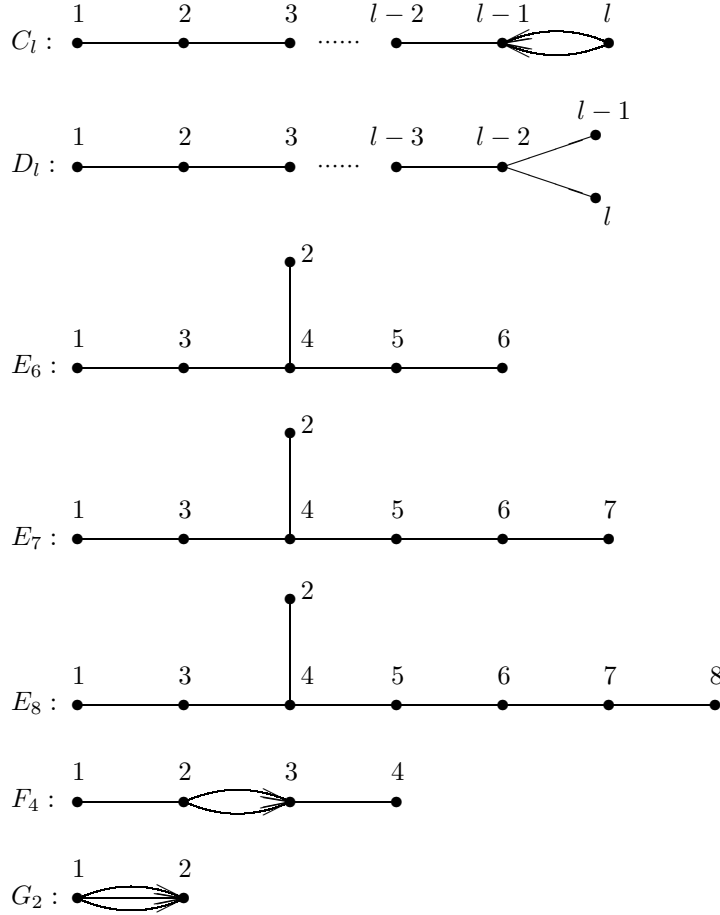
По системе корней можно построить *схему Дынкина*. Это граф, который строится следующим образом: его вершины соответствуют простым корням $\alpha_1, \dots, \alpha_l$; вершины с номерами i и j соединяются ребром, если $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \neq 0$. Если $|\alpha_i| = |\alpha_j|$, то $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$ и количество рёбер между вершинами i и j равно $|\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle|$. Если $|\alpha_i| > |\alpha_j|$, то $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle < \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$ и обязательно $|\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle| = 1$. В этом случае вершины i и j соединяются $|\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle|$ рёбрами и стрелка ставится в направлении от длинного корня к короткому.

По схеме Дынкина можно однозначно восстановить систему корней.

Все неразложимые системы корней с точностью до изоморфизма делятся на четыре бесконечных (*классических*) серии A_l ($l \geq 1$), B_l ($l \geq 2$), C_l ($l \geq 3$) и D_l ($l \geq 4$) и пять отдельных (*исключительных*) случаев E_6 , E_7 , E_8 , F_4 и G_2 .

Приведём схемы Дынкина для систем корней:





1.2. Полупростые алгебры Ли

Более подробные сведения о полупростых алгебрах Ли можно найти в [15].

Алгеброй Ли $\mathcal{L}$ над полем K называется линейное пространство над K , снабжённое операцией умножения $x, y \mapsto [x, y]$ (скобкой Ли), линейной по обоим переменным и удовлетворяющей следующим условиям:

- 1) *антикоммутативность*: $\forall x, y \in \mathcal{L} [x, y] = -[y, x]$;
- 2) *тождество Якоби*: $\forall x, y, z \in \mathcal{L} [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.

Размерность алгебры Ли определяется её размерностью как линейного пространства над K . Так, алгебра Ли называется *конечномерной*, если пространство $\mathcal{L}$ конечномерно.

Подпространство $\mathcal{L}'$ алгебры Ли $\mathcal{L}$ как линейного пространства называется *подалгеброй* алгебры Ли $\mathcal{L}$, если $\forall x, y \in \mathcal{L}' [x, y] \in \mathcal{L}'$. Подалгебра $\mathcal{L}'$ алгебры Ли $\mathcal{L}$ называется её *идеалом*, если $\forall x \in \mathcal{L}' \forall y \in \mathcal{L} [x, y] \in \mathcal{L}'$.

Коммутантом алгебр Ли $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, лежащих в одной алгебре Ли $\mathcal{L}$, называется её подалгебра $\mathcal{L}' = [\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2]$, порождённая всеми элементами $[x, y]$ для $x \in \mathcal{L}_1, y \in \mathcal{L}_2$.

Последовательность

$$\mathcal{L}^0 = \mathcal{L}, \quad \mathcal{L}^1 = [\mathcal{L}, \mathcal{L}^0], \quad \mathcal{L}^2 = [\mathcal{L}, \mathcal{L}^1], \dots, \quad \mathcal{L}^{n+1} = [\mathcal{L}, \mathcal{L}^n], \dots$$

называется *нижним центральным рядом* алгебры Ли $\mathcal{L}$. Если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $\mathcal{L}^n = 0$, то алгебра Ли $\mathcal{L}$ называется *нильпотентной*.

Последовательность

$$\mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{L}, \quad \mathcal{L}^{(1)} = [\mathcal{L}^{(0)}, \mathcal{L}^{(0)}], \quad \mathcal{L}^{(2)} = [\mathcal{L}^{(1)}, \mathcal{L}^{(1)}], \dots, \quad \mathcal{L}^{(n+1)} = [\mathcal{L}^{(n)}, \mathcal{L}^{(n)}], \dots$$

называется *производным рядом* алгебры Ли $\mathcal{L}$. Если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $\mathcal{L}^{(n)} = 0$, то алгебра Ли $\mathcal{L}$ называется *разрешимой*.

Рассмотрим конечномерную алгебру Ли $\mathcal{L}$. Наибольший разрешимый идеал алгебры Ли, равный сумме всех её разрешимых идеалов, называется *радикалом* алгебры Ли. Алгебра Ли, радикал которой равен нулю, называется *полупростой*. Некоммутативная алгебра Ли $\mathcal{L}$ называется *простой*, если она содержит ровно два идеала: 0 и $\mathcal{L}$.

Конечномерная полупростая алгебра Ли над полем $\mathbb{C}$ является прямой суммой простых алгебр Ли.

Нормализатором подалгебры $\mathcal{L}'$ в алгебре $\mathcal{L}$ называется подалгебра

$$N_{\mathcal{L}}(\mathcal{L}') := \{x \in \mathcal{L} \mid \forall y \in \mathcal{L}' [x, y] \in \mathcal{L}'\}.$$

Подалгеброй Картана алгебры Ли $\mathcal{L}$ называется её нильпотентная самонормализуемая подалгебра $\mathcal{H}$. Для полупростой алгебры Ли она абелева и определена с точностью до автоморфизма алгебры.

Пусть $\mathcal{L}$ — полупростая конечномерная алгебра Ли над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, $\mathcal{H}$ — её картановская подалгебра. Рассмотрим пространство $\mathcal{H}^*$. Пусть для $\alpha \in \mathcal{H}^*$

$$\mathcal{L}_{\alpha} := \{x \in \mathcal{L} \mid [h, x] = \alpha(h)x \text{ для любого } h \in \mathcal{H}\}.$$

В этом случае $\mathcal{L}_0 = \mathcal{H}$ и алгебра $\mathcal{L}$ допускает разложение

$$\mathcal{L} = \mathcal{H} \oplus \sum_{\alpha \neq 0} \mathcal{L}_{\alpha},$$

причём если $\mathcal{L}_{\alpha} \neq 0$, то $\dim \mathcal{L}_{\alpha} = 1$, все такие ненулевые $\alpha \in \mathcal{H}^*$, что $\mathcal{L}_{\alpha} \neq 0$, образуют некоторую систему корней Φ . Система корней Φ и полупростая алгебра Ли $\mathcal{L}$ над $\mathbb{C}$ однозначно определяют друг друга.

На алгебре Ли $\mathcal{L}$ можно ввести билинейную форму *Киллинга*

$$\kappa(x, y) = \text{tr}(\text{ad } x \text{ ad } y),$$

где $\text{ad } x \in \text{GL}(\mathcal{L})$, $\text{ad } x: z \mapsto [x, z]$ — *присоединённое представление*. Для полупростой алгебры Ли ограничение формы Киллинга на $\mathcal{H}$ невырождено, поэтому можно отождествить пространства $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}^*$.

Можно выбрать базис $\{h_1, \dots, h_l\}$ в $\mathcal{H}$ и для каждого $\alpha \in \Phi$ элементы $x_\alpha \in \mathcal{L}_\alpha$ так, что

- 1) $\{h_i; x_\alpha\}$ образуют базис в $\mathcal{L}$;
- 2) $[h_i, h_j] = 0$;
- 3) $[h_i, x_\alpha] = \langle \alpha, \alpha_i \rangle x_\alpha$;
- 4) $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha =$ целочисленная линейная комбинация h_i ;
- 5) $[x_\alpha, x_\beta] = N_{\alpha\beta} x_{\alpha+\beta}$, если $\alpha + \beta \in \Phi$ ($N_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$);
- 6) $[x_\alpha, x_\beta] = 0$, если $\alpha + \beta \neq 0$, $\alpha + \beta \notin \Phi$.

Представлением алгебры Ли $\mathcal{L}$ в линейном пространстве V называется линейное отображение $\pi: \mathcal{L} \rightarrow gl(V)$, где

$$\forall x, y \in \mathcal{L} \quad \pi([x, y]) = \pi(x)\pi(y) - \pi(y)\pi(x).$$

Представление называется *точным*, если его ядро равно нулю.

1.3. Элементарные группы Шевалле

Более подробные сведения об элементарных группах Шевалле содержатся в [11].

Пусть $\mathcal{L}$ — полупростая алгебра Ли (над полем $\mathbb{C}$) с системой корней Φ , $\pi: \mathcal{L} \rightarrow gl(V)$ — её конечномерное точное представление. Тогда можно выбрать базис в пространстве V так, чтобы все операторы $\pi(x_\alpha)^n/n!$ для $n \in \mathbb{N}$ были записаны целочисленными (нильпотентными) матрицами. Целочисленную матрицу можно считать также и матрицей над произвольным коммутативным кольцом с единицей. Пусть R — такое кольцо. Рассмотрим матрицы размера $n \times n$ над кольцом R , матрицы $\pi(x_\alpha)^n/n!$ для $\alpha \in \Phi$, $n \in \mathbb{N}$ вложим в $M_n(R)$.

Теперь рассмотрим автоморфизмы свободного модуля R^n вида

$$\exp(tx_\alpha) = x_\alpha(t) = 1 + t\pi(x_\alpha) + t^2\pi(x_\alpha)^2/2 + \dots + t^n\pi(x_\alpha)^n/n! + \dots$$

Так как матрицы $\pi(x_\alpha)$ нильпотентны, то данный ряд конечен. Подгруппа в группе $\text{Aut}(R^n)$, порождённая всеми автоморфизмами вида $x_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, $t \in R$, называется *элементарной группой Шевалле* (обозначение $E_\pi(\Phi, R)$).

В элементарной группе Шевалле можно ввести следующие важные элементы и подгруппы:

- подгруппа U порождается всеми $x_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi^+$, $t \in R$;
- подгруппа V порождается всеми $x_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi^-$, $t \in R$;
- $w_\alpha(t) = x_\alpha(t)x_{-\alpha}(-t^{-1})x_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, $t \in R^*$;
- $h_\alpha(t) = w_\alpha(t)w_\alpha(1)^{-1}$;
- подгруппа N порождается всеми $w_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, $t \in R^*$;
- подгруппа H порождается всеми $h_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, $t \in R^*$;
- $B = HU$.

Известно, что группа N является нормализатором подгруппы H в элементарной группе Шевалле, фактор-группа N/H изоморфна группе Вейля $W(\Phi)$, U нормальна в B .

Элементарные группы Шевалле определяются даже не представлением алгебры Ли, а *решёткой весов* этого представления. Определим это понятие.

Если V — пространство представления полупростой алгебры Ли $\mathcal{L}$ (с картановской подалгеброй $\mathcal{H}$), то функционал $\lambda \in \mathcal{H}^*$ называется *весом* этого представления, если существует ненулевой вектор $v \in V$, такой что для любого $h \in \mathcal{H}$

$$\pi(h)v = \lambda(h)v.$$

Все веса данного представления по сложению порождают решётку (свободную абелеву группу, $\mathbb{Z}$ -базис которой является $\mathbb{C}$ -базисом в $\mathcal{H}^*$), которая называется *решёткой весов* Λ_π .

Элементарная группа Шевалле полностью определяется системой корней Φ , коммутативным кольцом R с единицей и решёткой весов Λ_π .

Среди всех решёток особенным образом мы выделим две: решётку, соответствующую присоединённому представлению и порождающуюся всеми корнями (*присоединённая решётка* Λ_{ad}), и решётку, порождённую всеми весами всех представлений (*универсальная решётка* Λ_{sc}). Для любого точного представления π имеют место включения

$$\Lambda_{\text{ad}} \subseteq \Lambda_\pi \subseteq \Lambda_{\text{sc}}.$$

Соответственно, мы имеем *присоединённую* и *универсальную* элементарные группы Шевалле.

В каждой элементарной группе Шевалле выполняются следующие соотношения:

$$(R1) \quad \forall \alpha \in \Phi \quad \forall t, u \in R \quad x_\alpha(t)x_\alpha(u) = x_\alpha(t+u);$$

$$(R2) \quad \forall \alpha, \beta \in \Phi \quad \forall t, u \in R$$

$$\alpha + \beta \neq 0 \implies [x_\alpha(t), x_\beta(u)] = x_\alpha(t)x_\beta(u)x_\alpha(-t)x_\beta(-u) = \prod x_{i\alpha+j\beta}(c_{ij}t^i u^j),$$

где i, j — целые положительные числа, умножение берётся по всем корням $i\alpha + j\beta$, расположенным в некотором фиксированном порядке; c_{ij} — целые числа, не зависящие от t и u ;

$$(R3) \quad \forall \alpha \in \Phi \quad w_\alpha = w_\alpha(1);$$

$$(R4) \quad \forall \alpha, \beta \in \Phi \quad \forall t \in R^* \quad w_\alpha h_\beta(t) w_\alpha^{-1} = h_{w_\alpha(\beta)}(t);$$

$$(R5) \quad \forall \alpha, \beta \in \Phi \quad \forall t \in R^* \quad w_\alpha x_\beta(t) w_\alpha^{-1} = x_{w_\alpha(\beta)}(ct), \text{ где } c = c(\alpha, \beta) = \pm 1;$$

$$(R6) \quad \forall \alpha, \beta \in \Phi \quad \forall t \in R^* \quad \forall u \in R \quad h_\alpha(t)x_\beta(u)h_\alpha(t)^{-1} = x_\beta(t^{(\beta, \alpha)}u).$$

Через X_α мы будем обозначать группу, порождённую всеми $x_\alpha(t)$ при $t \in R$.

1.4. Группы Шевалле

Более подробные сведения о группах Шевалле можно найти в [11], а также в [5, 27, 34] (см. также ссылки в этих работах).

Подмножество $X \subseteq \mathbb{C}^n$ называется *аффинным многообразием*, если X — это множество общих нулей в $\mathbb{C}^n$ конечной системы полиномов из $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.

Топология аффинного n -пространства, система замкнутых множеств которой совпадает с системой аффинных многообразий, называется *топологией Зарисского*. Многообразие называется *неприводимым*, если оно не может быть представлено в виде объединения двух своих собственных непустых замкнутых подмножеств.

Пусть G — аффинное многообразие, обладающее структурой группы. Если оба отображения

$$\begin{aligned} m: G \times G &\rightarrow G, & m(x, y) &= xy, \\ i: G &\rightarrow G, & i(x) &= x^{-1}, \end{aligned}$$

выражаются полиномами от координат, то G называется *аффинной алгебраической группой*. *Линейной алгебраической группой* называется произвольная алгебраическая подгруппа в $M_n(\mathbb{C})$ (с матричной операцией умножения).

Алгебраическая группа называется *связной*, если она неприводима как многообразие.

Каждая алгебраическая группа G содержит единственную наибольшую связную разрешимую нормальную подгруппу — *радикал* $R(G)$. Связная алгебраическая группа, у которой радикал тривиален, называется *полупростой*.

Полупростые линейные алгебраические группы над полем $\mathbb{C}$ (или любым другим алгебраически замкнутым полем K) это в точности элементарные группы Шевалле $E_\pi(\Phi, K)$ (см. [11, § 5]).

Все такие группы задаются в группе $SL_n(K)$ как общее число нулей полиномов от матричных коэффициентов a_{ij} с целыми коэффициентами (например, в случае системы корней A_l и универсального представления мы имеем $n = l + 1$ и единственный полином $\det(a_{ij}) - 1 = 0$). При этом понятно, что умножение и взятие обратного элемента также задаются полиномами с целыми коэффициентами. Таким образом, эти полиномы можно рассматривать и как полиномы над произвольным коммутативным кольцом с единицей.

Пусть некоторая элементарная группа Шевалле E над $\mathbb{C}$ задаётся в $SL_n(\mathbb{C})$ полиномами $p_1(a_{ij}), \dots, p_m(a_{ij})$. Для коммутативного кольца R с единицей рассмотрим группу

$$G(R) = \{(a_{ij} \in M_n(R) \mid \tilde{p}_1(a_{ij}) = 0, \dots, \tilde{p}_m(a_{ij}) = 0\},$$

где $\tilde{p}_1(\dots), \dots, \tilde{p}_m(\dots)$ — это полиномы, имеющие те же коэффициенты, что и $p_1(\dots), \dots, p_m(\dots)$, но рассматриваемые над кольцом R . Такая группа называется *группой Шевалле* $G_\pi(\Phi, R)$ типа Φ над кольцом R , при этом для любого алгебраически замкнутого поля K она совпадает с элементарной группой Шевалле.

Подгруппа диагональных (в стандартном базисе из весовых векторов) матриц группы Шевалле $G_\pi(\Phi, R)$ называется *стандартным максимальным тором* группы $G_\pi(\Phi, R)$ и обозначается через $T_\pi(\Phi, R)$. Эта группа изоморфна группе $\text{Hom}(\Lambda_\pi, R^*)$.

Обозначим через $h(\chi)$ элемент тора $T_\pi(\Phi, R)$, соответствующий гомоморфизму $\chi \in \text{Hom}(\Lambda(\pi), R^*)$. В частности, $h_\alpha(u) = h(\chi_{\alpha,u})$ ($u \in R^*$, $\alpha \in \Phi$), где $\chi_{\alpha,u}: \lambda \mapsto u^{\langle \lambda, \alpha \rangle}$ ($\lambda \in \Lambda_\pi$).

1.5. Группы Шевалле и элементарные группы Шевалле

Взаимосвязь между группами Шевалле и соответствующими элементарными группами Шевалле составляет значительную проблему в теории групп Шевалле над кольцами. Для элементарных групп Шевалле существует удобная система порождающих $x_\alpha(\xi)$, $\alpha \in \Phi$, $\xi \in R$, и соотношения между этими порождающими легко изучаемы, но ничего подобного невозможно сделать для самих групп Шевалле.

Если K — алгебраически замкнутое поле, то

$$G_\pi(\Phi, R) = E_\pi(\Phi, R)$$

для любого представления π . Это равенство неверно уже в случае полей, не являющихся алгебраически замкнутыми. Однако если G — односвязная группа, а кольцо R *полулокально* (т. е. содержит конечное число максимальных идеалов), то имеет место соотношение

$$G_{\text{sc}}(\Phi, R) = E_{\text{sc}}(\Phi, R)$$

[16, 22, 31, 32]. Кроме того, известно, что группы G_{sc} и E_{sc} совпадают, если кольцо R евклидово, дедекиндово арифметического типа [23, 31], является кольцом многочленов с коэффициентами в поле или в кольце главных идеалов [7, 13, 14, 17, 18, 29, 30, 35].

Покажем различие между группами Шевалле и их элементарными подгруппами в случае, когда кольцо R полулокально, а группа Шевалле не является односвязной. В этом случае $G_\pi(\Phi, R) = E_\pi(\Phi, R)T_\pi(\Phi, R)$ (см. [16, 22, 31]), причём элементы $h(\chi)$ связаны с элементарными порождающими формулой

$$h(\chi)x_\beta(\xi)h(\chi)^{-1} = x_\beta(\chi(\beta)\xi). \quad (1)$$

Известно, что группа элементарных матриц $E_2(R) = E_{\text{sc}}(A_1, R)$ не обязательно нормальна в специальной линейной группе $\text{SL}_2(R) = G_{\text{sc}}(A_1, R)$ (см. [12, 28, 33]). Однако если Φ — неприводимая система корней ранга $l \geq 2$, то $E(\Phi, R)$ всегда нормальна в $G(\Phi, R)$. В случае полулокальных колец из формулы 1 мы видим, что

$$[G(\Phi, R), G(\Phi, R)] \subseteq E(\Phi, R).$$

Если кольцо R к тому же содержит $1/2$, то легко показать, что

$$[G(\Phi, R), G(\Phi, R)] = E(\Phi, R)$$

(мы сделаем это далее).

2. Лёгкая теорема (теорема В)

В этом разделе мы будем предполагать, что кольцо R является бесконечным полем характеристики, отличной от двух.

Мы хотим доказать следующую теорему.

Теорема В. Пусть $G = G_\pi(\Phi, K)$ и $G' = G_{\pi'}(\Phi, K')$ (или $E_\pi(\Phi, K)$ и $E_{\pi'}(\Phi, K')$) — две (элементарные) группы Шевалле над элементарно эквивалентными полями K и K' , где представления π и π' имеют изоморфные решётки весов. Тогда группы G и G' элементарно эквивалентны.

В [6, с. 395] доказано, что элементарная эквивалентность сохраняется при взятии прямых произведений, откуда немедленно вытекает следующее утверждение.

Предложение 1. Если полупростая алгебра Ли $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_k$, где алгебры $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_k$ просты, R, R' — поля (кольца), то из попарной эквивалентности (элементарных) групп Шевалле $G_{\pi|_{\mathcal{L}_1}}(\mathcal{L}_1, R)$ и $G_{\pi|_{\mathcal{L}_1}}(\mathcal{L}_1, R'), \dots, G_{\pi|_{\mathcal{L}_k}}(\mathcal{L}_k, R)$ и $G_{\pi|_{\mathcal{L}_k}}(\mathcal{L}_k, R')$ следует элементарная эквивалентность (элементарных) групп Шевалле $G_\pi(\mathcal{L}, R)$ и $G_\pi(\mathcal{L}, R')$.

Таким образом, нам достаточно доказать теорему для простых алгебр Ли.

Следующая теорема верна для произвольных коммутативных колец с единицей R и R' .

Теорема 1. Если две группы Шевалле $G = G_\pi(\Phi, R)$ и $G' = G_\pi(\Phi, R')$ построены с помощью одной и той же комплексной алгебры Ли типа Φ и одного и того же её представления π , а также с помощью элементарно эквивалентных колец R и R' соответственно, то $G \equiv G'$.

Доказательство. Как мы знаем из определения группы Шевалле,

$$G = \{(a_{ij} \in M_n(R) \mid p_1(a_{ij}) = p_2(a_{ij}) = \dots = p_m(a_{ij}) = 0\},$$

$$G' = \{(a_{ij} \in M_n(R') \mid p_1(a_{ij}) = p_2(a_{ij}) = \dots = p_m(a_{ij}) = 0\},$$

где $p_1, p_2, \dots, p_m$ — некоторые заранее известные полиномы с целыми коэффициентами, n — некоторое заранее известное целое число.

Предположим, что мы имеем некоторое предложение φ группового языка, которое будем рассматривать на группах G и G' . Переведём его в предложение $\tilde{\varphi}$ кольцевого языка следующим образом:

подформула $\forall g \psi(g)$ переходит в подформулу

$$\forall a_{11}^g, \dots, a_{nn}^g (p_1(a_{11}^g, \dots, a_{nn}^g) = 0 \wedge \dots \wedge p_m(a_{11}^g, \dots, a_{nn}^g) = 0 \implies \tilde{\psi}(a_{11}^g, \dots, a_{nn}^g));$$

подформула $\exists g \psi(g)$ переходит в подформулу

$$\exists a_{11}^g, \dots, a_{nn}^g (p_1(a_{11}^g, \dots, a_{nn}^g) = 0 \wedge \dots \wedge p_m(a_{11}^g, \dots, a_{nn}^g) = 0 \wedge \tilde{\psi}(a_{11}^g, \dots, a_{nn}^g));$$

подформула $g = h$ переходит в подформулу

$$a_{11}^g = a_{11}^h \wedge \dots \wedge a_{nn}^g = a_{nn}^h;$$

подформула $g = h \cdot f$ переходит в подформулу

$$\bigwedge_{i,j=1}^n \left(a_{ij}^g = \sum_{k=1}^n a_{ik}^h \cdot a_{kj}^f \right).$$

Очевидно, что $G(R) \models \varphi$ тогда и только тогда, когда $R \models \tilde{\varphi}$.

Таким образом, если кольца R и R' элементарно эквивалентны, то для любого предложения φ группового языка

$$G \models \varphi \iff R \models \tilde{\varphi} \iff R' \models \tilde{\varphi} \iff G' \models \varphi.$$

Значит, $G \equiv G'$. □

Следующая теорема верна для полей, локальных и полулокальных колец R и R' с $1/2$.

Теорема 2. Если две элементарные группы Шевалле $E = E_\pi(R, \Phi)$ и $E' = E_\pi(R', \Phi)$ построены с помощью одной и той же комплексной алгебры Ли типа Φ и одного и того же её представления π , а также с помощью элементарно эквивалентных полулокальных колец R и R' с $1/2$, то $E \equiv E'$.

Эта теорема очевидно следует из предыдущей теоремы и следующего предложения.

Предложение 2. Если кольцо R полулокально и содержит $1/2$, то элементарная подгруппа $E = E_\pi(R, \Phi)$ определима в группе Шевалле $G = G_\pi(R, \Phi)$ без параметров, т. е. существует формула $\varphi_{\pi, \Phi}(x)$ группового языка с одной свободной переменной x , истинная в группе G на элементе $g \in G$ тогда и только тогда, когда $g \in E$.

Доказательство этого предложения содержится в следующем разделе, где доказывается несколько более сильное утверждение.

3. Переход к элементарной присоединённой группе

Теперь мы хотим доказать, что если две (элементарные) группы Шевалле элементарно эквивалентны, то их системы корней совпадают, а исходные поля элементарно эквивалентны и решётки весов изоморфны.

Мы будем делать ровно два предположения относительно рассматриваемых полей:

- 1) они имеют характеристику, отличную от двух, а в случае группы типа G_2 — отличную от трёх;
- 2) они бесконечны.

Первое предположение нам требуется потому, что основная часть доказательства основана на рассмотрении инволюций, а также потому, что в случае полей характеристик 2 и 3 возникают определённые сложности с некоторыми типами групп Шевалле.

Второе предположение ни в какой степени не ограничивает общность результата, так как в случае двух конечных полей K и K' (элементарные) группы Шевалле $G(K)$ и $G(K')$ ($E(K)$ и $E(K')$) конечны, т. е.

$$G(K) \equiv G(K') \implies G(K) \cong G(K').$$

Таким образом, мы можем сослаться на доказанные ранее (например, в [11]) результаты, которые показывают, что в этом случае $\Phi \cong \Phi'$, $K \cong K'$, т. е. $\Phi \cong \Phi'$, $K \equiv K'$.

Для начала покажем, что справедливо следующее утверждение.

Предложение 3. Если две группы Шевалле G и G' элементарно эквивалентны, то их элементарные подгруппы E и E' также элементарно эквивалентны.

Лемма 1. Пусть $G = G_\pi(R, \Phi)$ — группа Шевалле, $E = E_\pi(R, \Phi)$ — её элементарная подгруппа, R — полулокальное кольцо, удовлетворяющее следующим свойствам:

- 1) если $\Phi \cong G_2$ или $\Phi \cong A_1$, то в кольце R существует такой обратимый элемент s , что $s^2 - 1$ обратим;
- 2) если $\Phi \cong B_l$, $\Phi \cong C_l$ или $\Phi \cong F_4$, то либо $1/2 \in R$, либо также в кольце R существует такой обратимый элемент s , что $s^2 - 1$ обратим.

Тогда $E = [G, G]$ и существует такое число N , зависящее от Φ , но не зависящее от R (и даже от представления π), что любой элемент группы E есть произведение не более чем N коммутаторов группы G .

Доказательство. Пусть система корней Φ имеет ранг l .

Если R — это поле, то для любого элемента $g \in E$ имеет место разложение Брюа (см. [11])

$$g = uhwu', \quad u, v \in U, \quad h \in H, \quad w \in W.$$

Если же R — это (полу)локальное кольцо, то для любого элемента $g \in E$ имеет место разложение Гаусса (см. [16])

$$g = uhvu', \quad u, u' \in U, \quad v \in V, \quad h \in H.$$

Известно (см. [11]), что элементы u , u' , v представляются в виде произведения не более чем n (количество положительных корней системы Φ) элементов $x_\alpha(t)$, а элемент h есть произведение не более чем l элементов вида $h_\alpha(t)$, которые, в свою очередь, являются произведениями не более шести элементов $x_\alpha(t)$.

Значит, каждый элемент группы $E_\pi(\mathcal{L}, K)$ есть произведение не более чем $6l + 3n$ элементов $x_\alpha(t)$, где n — количество положительных корней, зависящее от l следующим образом:

тип системы корней	ранг	n
A_l	l	$(l^2 + l)/2$
B_l	l	l^2
C_l	l	l^2
D_l	l	$l^2 - l$
E_6	6	36
E_7	7	63
E_8	8	120
F_4	4	24
G_2	2	6

Осталось показать, что каждое $x_\alpha(t)$ является произведением некоторого ограниченного сверху числа коммутаторов.

Если в кольце R существует такой обратимый элемент s , что $s^2 - 1$ обратим, то $[h_\alpha(s), x_\alpha(t)] = x_\alpha((s^2 - 1)t)$, откуда следует, что любой $x_\alpha(t)$ является коммутатором.

Если мы имеем дело с системами A_l ($l \geq 2$), D_l ($l \geq 4$), E_6 , E_7 или E_8 , то из того, что все корни сопряжены относительно действия группы Вейля, следует, что нам достаточно рассмотреть $x_\alpha(t)$ для некоторого одного корня системы Φ . Пусть это будет корень $\alpha_1 + \alpha_2$, где α_1, α_2 — неортогональные простые корни. Тогда

$$[x_{\alpha_1}(t), x_{\alpha_2}(s)] = x_\alpha(\pm ts),$$

откуда следует, что любой $x_\alpha(t)$ является коммутатором.

Если мы имеем дело с системами B_l ($l \geq 2$), C_l ($l \geq 3$), F_4 , то из того, что все корни одной длины сопряжены относительно действия группы Вейля, следует, что нам достаточно рассмотреть два произвольных корня разной длины. В каждой из этих систем есть подсистема B_2 , поэтому достаточно рассмотреть именно эту систему. В ней корни имеют вид $\pm e_1, \pm e_2$ (короткие) и $\pm e_1 \pm e_2$ (длинные).

Заметим, что $e_1 + e_2 = e_1 + e_2$ и никакая линейная комбинация корней e_1 и e_2 с натуральными коэффициентами, отличная от $e_1 + e_2$, не является корнем, откуда

$$[x_{e_1}(t), x_{e_2}(s)] = x_{e_1+e_2}(\pm 2ts),$$

т. е. $x_{e_1+e_2}(t)$ является коммутатором (так как $1/2 \in R$). Кроме того, $e_1 = (e_1 - e_2) + e_2$, откуда

$$[x_{e_1-e_2}(t), x_{e_2}(s)] = x_{e_1}(\pm 2ts)x_{e_1+e_2}(cts^2),$$

поэтому $x_{e_1}(t)$ является произведением двух коммутаторов.

Значит, любой элемент $x_\alpha(t)$ является произведением не более чем двух коммутаторов. Отсюда мы видим, что любой элемент элементарной группы Шевалле $E_\pi(\Phi, R)$ есть произведение не более чем N коммутаторов группы $G_\pi(\Phi, R)$, где число N зависит только от системы корней Φ . $\square$

Доказательство предложения 3. Рассмотрим множество предложений

$$\text{Define}_N := \forall x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N, z_1, \dots, z_N, t_1, \dots, t_N \exists v_1, \dots, v_N, u_1, \dots, u_N \\ (([x_1, y_1] \cdot \dots \cdot [x_N, y_N]) \cdot ([z_1, t_1] \cdot \dots \cdot [z_N, t_N])) = [u_1, v_1] \cdot \dots \cdot [u_N, v_N]).$$

Каждое такое предложение утверждает, что каждый элемент коммутанта группы, на которой оно рассматривается, есть произведение не более чем N коммутаторов. Мы знаем, что для групп G и G' существует такое N (одно и то же, так как они элементарно эквивалентны), что предложение Define_N выполняется в обеих группах. В этом случае формула

$$\text{Commut}_N(x) := \exists u_1, \dots, u_N, v_1, \dots, v_N (x = [u_1, v_1] \cdot \dots \cdot [u_N, v_N])$$

определяет в обеих группах G и G' подгруппы E и E' соответственно, откуда следует, что эти подгруппы элементарно эквивалентны. $\square$

Естественно, имея две элементарно эквивалентные группы Шевалле E и E' , мы также имеем две элементарно эквивалентные элементарные присоединённые группы Шевалле E_{ad} и E'_{ad} , являющиеся факторами по центру исходных групп.

4. Идентификация в классических случаях

Теперь мы хотим отождествить классические элементарные присоединённые группы Шевалле над полями с некоторыми подгруппами группы $\text{GL}_n(K)$.

A_l . Очевидно, что

$$G_{\text{sc}}(A_l, K) \cong \text{SL}_{l+1}(K),$$

поэтому

$$E_{\text{sc}}(A_l, K) = [G_{\text{sc}}(A_l, K), G_{\text{sc}}(A_l, K)] \cong [\text{SL}_{l+1}(K), \text{SL}_{l+1}(K)] = \text{SL}_{l+1}(K),$$

откуда следует

$$E_{\text{ad}}(A_l, K) \cong \text{PSL}_{l+1}(K).$$

C_l . Аналогично

$$G_{\text{sc}}(C_l, K) \cong \text{Sp}_{2l}(K), \quad E_{\text{sc}}(C_l, K) \cong [\text{Sp}_{2l}(K), \text{Sp}_{2l}(K)] = \text{Sp}_{2l}(K),$$

откуда

$$E_{\text{ad}}(C_l, K) \cong \text{PSp}_{2l}(K).$$

D_l . Для группы $G(D_l, K)$ есть промежуточное представление π , для которого $G_\pi(D_l, K) \cong \text{SO}_{2l}(K)$. При этом группа $E_\pi(D_l, K)$ порождается матрицами $E + tE_{i,j} - tE_{l+j,l+i}$ и $E + tE_{l+i,l+j} - tE_{l+j,l+i}$, где $1 \leq i, j \leq l$.

С другой стороны, мы знаем, что группы $G_\pi(D_l, K)$ и $E_\pi(D_l, K)$ «отличаются на тор», т. е. в их разложениях Брюа T меняется на H , поэтому следует изучить возможные различия между ними. Группа T есть просто группа всех диагональных матриц $D = \text{diag}[d_1, \dots, d_{2n}]$, удовлетворяющих условию $DQD^T = Q$, т. е. T состоит из матриц

$$\text{diag}[d_1, \dots, d_l, 1/d_l, \dots, 1/d_1].$$

Группу H можно вычислить с помощью элементов $h_\alpha(t)$. Эти элементы имеют вид

$$\begin{aligned} & \text{diag}[t_1, 1/t_1, 1, \dots, 1, t_1, 1/t_1], \\ & \text{diag}[s_1, s_1, 1, \dots, 1, 1/s_1, 1/s_1], \\ & \text{diag}[1, t_2, 1/t_2, 1, \dots, 1, t_2, 1/t_2], \\ & \text{diag}[1, s_2, s_2, 1, \dots, 1, 1/s_2, 1/s_2, 1], \\ & \dots \\ & \text{diag}[1, \dots, 1, t_{n-1}, 1/t_{n-1}, t_{n-1}, 1/t_{n-1}, 1, \dots, 1], \\ & \text{diag}[1, \dots, 1, s_{n-1}, s_{n-1}, 1/s_{n-1}, 1/s_{n-1}, 1, \dots, 1]. \end{aligned}$$

Заметим, что мы можем породить $\text{diag}[d_1, 1, \dots, 1, 1/d_1]$ только как

$$\text{diag}[t_1 s_1, s_1/t_1, 1, \dots, 1, t_1/s_1, 1/(t_1 s_1)],$$

откуда $d_1 = t_1^2$, т. е. всё зависит от того, как устроены квадраты в поле K .

Мы получаем, что группа H состоит из всех диагональных матриц

$$\text{diag}[d_1, \dots, d_l, 1/d_l, \dots, 1/d_1],$$

для которых элемент $(d_1 \dots d_l)$ является квадратом в K , следовательно, инволюции в группе $E_\pi(D_l, K)$ совпадают с инволюциями в $G_\pi(D_l, K)$ при $i \in K$, а при $i \notin K$ инволюции с нечётным числом -1 среди первых l элементов диагонали в этой группе отсутствуют.

Чтобы получить после этого нужную нам группу $E_{\text{ad}}(D_l, K)$, остаётся профакторизовать найденную $E_\pi(D_l, K)$ по центру, являющемуся тривиальным при $i \notin K$ и нечётном l и состоящему из $\pm E_{2l}$ в остальных случаях.

B_l . Совершенно аналогично случаю D_l в данном случае группа $E_{\text{ad}}(B_l, K)$ совпадает с $\text{SO}_{2l+1}(K)$, если любой элемент в K является квадратом, и отличается на ту часть тора, которая состоит из элементов

$$\text{diag}[d_1, \dots, d_l, 1, 1/d_l, \dots, 1/d_1],$$

где $(d_1 \dots d_l)$ не является квадратом. Соответственно, при $i \notin K$ пропадают инволюции с нечётным числом -1 среди первых l элементов.

5. Изучение инволюций для классических групп Шевалле

5.1. Изучение инволюций для группы $\text{PSL}_n(K)$

Естественно, любая инволюция в группе $\text{PSL}_n(K)$ либо происходит из инволюции $\text{SL}_n(K)$ (*инволюция первого рода*), либо происходит из такой матрицы $A \in \text{SL}_n(K)$, что $A^2 = \lambda E$ (*инволюция второго рода*).

Сначала рассмотрим инволюции первого рода. Инволюции из $\mathrm{SL}_n(K)$ имеют в некотором базисе вид

$$\mathrm{diag}[\underbrace{-1, \dots, -1}_k, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-k}],$$

k чётно. При чётном n инволюции

$$\mathrm{diag}[\underbrace{-1, \dots, -1}_k, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-k}]$$

и

$$\mathrm{diag}[\underbrace{-1, \dots, -1}_{n-k}, \underbrace{1, \dots, 1}_k]$$

равны в группе $\mathrm{PSL}_n(K)$.

Для каждого чётного k любые инволюции с одинаковым k сопряжены, т. е. для чётного n существует $[n/4]$ классов сопряжённости инволюций первого рода, а для нечётного n — $[n/2]$ классов сопряжённости.

Централизатор инволюции первого рода (при $2k \neq n$) состоит из блоков

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad A \in \mathrm{GL}_k(K), \quad B \in \mathrm{GL}_{n-k}(K), \quad \det A \cdot \det B = 1.$$

Его центр состоит из матриц вида

$$\mathrm{diag}[\underbrace{a, \dots, a}_k, \underbrace{b, \dots, b}_{n-k}], \quad a^k \cdot b^{n-k} = 1.$$

Покажем, что таких матриц бесконечно много.

Если $\mathrm{НОД}(k, n-k) \neq 1$, то заменим k и $n-k$ на $k' = k/\mathrm{НОД}(k, n-k)$ и $l = (n-k)' = (n-k)/\mathrm{НОД}(k, n-k)$. Тогда нам нужно будет доказать, что решений равенства $a^{k'}b^{l'} = 1$ бесконечно много. Для любого $\xi \in K^*$ элементы $a = \xi^{ml}$ и $b = 1/\xi^{mk'}$ при $m > 0$ удовлетворяют условию, поэтому нужно только убедиться, что получается бесконечно много пар (a, b) . Для $\mathrm{char} K = 0$ это очевидно. Пусть $\mathrm{char} K \neq 0$. В любом случае либо l , либо k взаимно просто с $p = \mathrm{char} K$. Пусть это l . Очевидно, что, варьируя ξ и m (причём ξ бесконечно много), мы получим бесконечно много различных a .

Значит, если $2k \neq n$, то центр централизатора инволюции первого рода обязательно бесконечен. Его коммутант состоит из матриц

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad A \in \mathrm{SL}_k(K), \quad B \in \mathrm{SL}_{n-k}(K),$$

профакторизованных по центру, а фактор этого коммутанта по центру есть прямое произведение

$$\mathrm{PSL}_k(K) \times \mathrm{PSL}_{n-k}(K).$$

Пусть теперь $2k = n$, т. е. наша инволюция в некотором базисе имеет вид $\mathrm{diag}[-E_k, E_k]$. Естественно, в этом случае k чётно.

Централизатор этой инволюции состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad A, B \in \mathrm{GL}_k(K), \quad \det A \cdot \det B = 1,$$

а также из матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & C \\ D & 0 \end{pmatrix}, \quad C, D \in \mathrm{GL}_k(K), \quad \det C \cdot \det D = 1.$$

У этого централизатора центр конечен и имеет порядок 2. Его коммутант состоит из матриц

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad A, B \in \mathrm{SL}_k(K),$$

а фактор коммутанта по центру есть

$$\mathrm{PSL}_k(K) \times \mathrm{PSL}_k(K).$$

Теперь перейдём к инволюциям второго рода.

Пусть мы имеем некоторую полуинволюцию в группе $\mathrm{SL}_n(K)$, т. е. матрицу A , для которой $A^2 = \lambda E$. Так как $\mathrm{char} K \neq 2$, то матрица A должна быть диагонализируема (в $\overline{K}$), а значит, её собственные значения равны $\pm\sqrt{\lambda}$. При этом $\lambda^n = 1$.

Нужно рассмотреть различные случаи.

1. $\sqrt{\lambda} \in K$ и $\sqrt{\lambda}^n = 1$. Такая полуинволюция совпадает с обычной инволюцией в $\mathrm{PSL}_n(K)$.

2. $\sqrt{\lambda} \in K$ и $\sqrt{\lambda}^n = -1$. Если n нечётно, то мы можем положить $\lambda' = \sqrt{\lambda}$ и прийти к случаю 1. Поэтому будем считать, что n чётно. В этом случае появляются инволюции вида

$$\mathrm{diag} \left[\underbrace{-\sqrt{\lambda}, \dots, -\sqrt{\lambda}}_k, \underbrace{\sqrt{\lambda}, \dots, \sqrt{\lambda}}_{n-k} \right],$$

k нечётно. Классов сопряжённости таких инволюций появляется ещё $[n/4]$.

Централизатор такой $(k, n-k)$ -инволюции состоит из матриц

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad A \in \mathrm{GL}_k(K), \quad B \in \mathrm{GL}_{n-k}(K), \quad \det A \cdot \det B = 1,$$

а при нечётном $k = n/2$ ещё добавляются матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & C \\ D & 0 \end{pmatrix}, \quad C, D \in \mathrm{GL}_k(K), \quad \det C \cdot \det D = -1.$$

Во всех случаях, кроме последнего, центр централизатора бесконечен, фактор коммутанта централизатора по центру есть

$$\mathrm{PSL}_k(K) \times \mathrm{PSL}_{n-k}(K),$$

если $k = 1$, то это просто $\mathrm{PSL}_{n-1}(K)$.

3. $\sqrt{\lambda} \notin K$, но при этом $\lambda \in K$. Заметим, что тогда собственных значений $+\sqrt{\lambda}$ и $-\sqrt{\lambda}$ должно быть поровну, так как $\mathrm{tr} A \in K$. При этом $(-\lambda)^{n/2} = 1$.

Матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & \lambda & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 & \lambda \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

представляет такую инволюцию. Её можно записать также в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda E \\ E & 0 \end{pmatrix}.$$

5.2. Изучение инволюций для групп типа C_l

Так как центр группы $\mathrm{Sp}_{2l}(K)$ состоит из двух элементов $\pm E$, то инволюции группы $\mathrm{PSp}_{2l}(K)$ — это элементы $\tilde{A}$, такие что $A^2 = E$ (первый тип), и элементы $\tilde{A}$, такие что $A^2 = -E$ (второй тип).

Сначала рассмотрим инволюции первого типа: в некотором базисе инволюция A имеет вид

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix},$$

в этом базисе форма Q принимает вид

$$Q_A = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ -Q_2^T & Q_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда из соотношения $AQ_A A^T = Q_A$ следует

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ -Q_2^T & Q_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ -Q_2^T & Q_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} Q_1 & -Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ -Q_2^T & Q_3 \end{pmatrix} \Rightarrow Q_2 = 0. \end{aligned}$$

Значит, Q_1 и Q_3 — невырожденные кососимметрические матрицы, т. е. имеют чётную размерность.

Очевидно, что для любого чётного $k \leq l$ ($2k, 2(l-k)$)-инволюции первого типа присутствуют в группе $\mathrm{PSp}_{2l}(K)$, так как можно взять матрицы

$$\mathrm{diag}[\underbrace{-1, \dots, -1}_k, \underbrace{1, \dots, 1}_{2(l-k)}, \underbrace{-1, \dots, -1}_k].$$

Централизатор такой инволюции состоит из матриц

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad A \in \mathrm{Sp}_{2k}(K), \quad B \in \mathrm{Sp}_{2(l-k)}(K) \quad \text{или} \quad A \in \mathrm{Sp}_{2k}^-(K), \quad B \in \mathrm{Sp}_{2(l-k)}^-(K)$$

при $2k \neq l$. Его центр конечен и состоит из двух элементов. Коммутант централизатора состоит из матриц

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad A \in \mathrm{Sp}_{2k}(K), \quad B \in \mathrm{Sp}_{2(l-k)}(K),$$

а фактор по центру коммутанта централизатора есть

$$\mathrm{PSp}_{2k}(K) \times \mathrm{PSp}_{2(l-k)}(K).$$

Исключение могут составить случаи малых k : при $k = 1$

$$\mathrm{Sp}_2(K) \cong \mathrm{SL}_2(K),$$

т. е. получается группа

$$\mathrm{PSL}_2(K) \times \mathrm{PSp}_{2l-2}(K).$$

Теперь посмотрим, что происходит при $2k = l$. Пусть $Q_{2l} = \mathrm{diag}[Q_l, Q_l]$, $I = \mathrm{diag}[E_l, -E_l]$. Может появиться соотношение

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_l & 0 \\ 0 & -E_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_l & 0 \\ 0 & E_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

откуда $A = D = 0$, т. е. централизатор состоит из матриц

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad A, D \in \mathrm{Sp}_{l=2k}(K), \quad \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}, \quad B, C \in \mathrm{Sp}_{2k}(K).$$

Его центр состоит из двух элементов, а коммутант состоит из матриц

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad A, D \in \mathrm{Sp}_{2k}(K).$$

Перейдём к инволюциям второго типа. Так как $A^2 = -E$, то в поле $\overline{K}$ инволюция A диагонализируема с собственными значениями $\pm i$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} iE_k & 0 \\ 0 & -iE_{2l-k} \end{pmatrix},$$

при этом форма Q имеет в этом базисе вид

$$Q_A = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ -Q_2^T & Q_3 \end{pmatrix}.$$

Из соотношения

$$\begin{pmatrix} iE_k & 0 \\ 0 & -iE_{2l-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ -Q_2^T & Q_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iE_k & 0 \\ 0 & -iE_{2l-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ -Q_2^T & Q_3 \end{pmatrix}$$

следует, что $Q_1 = Q_3 = 0$, откуда $k = l$. Значит,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} iE_l & 0 \\ 0 & -iE_l \end{pmatrix}, \quad Q_A = \begin{pmatrix} 0 & Q_2 \\ -Q_2^T & 0 \end{pmatrix}.$$

Независимо от того, принадлежит i полю K или нет, такие инволюции есть в группе $\mathrm{PSp}_{2l}(K)$: это, например, инволюция

$$A = Q = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы легко найти централизатор такой инволюции, рассмотрим (если понадобится, то в $\overline{K}$) сопряжённую инволюцию

$$I = \begin{pmatrix} iE & 0 \\ 0 & -iE \end{pmatrix},$$

форма Q имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть мы имеем матрицу

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Тогда возможны два варианта.

1. $MI = IM$ в $\mathrm{Sp}_{2l}(K)$, откуда $B = C = 0$, следовательно, $AD^T = E$. Значит,

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^T)^{-1} \end{pmatrix}, \quad A \in \mathrm{GL}_l(K).$$

2. $MI = -IM$ в $\mathrm{Sp}_{2l}(K)$, откуда $A = D = 0$, следовательно, $BC^T = -E$. Значит,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ -(B^T)^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad B \in \mathrm{GL}_l(K).$$

Если l нечётно, то матрицы второго вида имеют определитель 1, т. е. лежат в нашей группе, откуда следует, что центр централизатора в этом случае состоит из двух элементов. Если l чётно, то матрицы второго вида имеют определитель -1 , т. е. не лежат в нашей группе, откуда следует, что центр централизатора бесконечен.

Коммутант в обоих случаях имеет вид

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^T)^{-1} \end{pmatrix}, \quad A \in \mathrm{SL}_l(K).$$

Фактор по центру коммутанта изоморфен $\mathrm{PSL}_l(K)$.

5.3. Изучение инволюций в группах типа B_l

Как мы уже показали, для случая $E_{\mathrm{ad}}(B_l, K)$ существенно различными являются ситуации $i \in K$ и $i \notin K$. Рассмотрим их по отдельности.

1. $i \in K$. Так как $E_{\mathrm{ad}}(B_l, K)$ — подгруппа группы $\mathrm{SO}_{2l+1}(K)$, то все инволюции в $E_{\mathrm{ad}}(B_l, K)$ являются инволюциями первого рода. Если $i \in K$, то все

инволюции группы $SO_{2l+1}(K)$ содержатся в $E_{ad}(B_l, K)$, поэтому нам надо изучить именно эти инволюции. Инволюции группы $SO_{2l+1}(K)$, очевидно, имеют в некотором базисе вид

$$\text{diag}[\underbrace{-1, \dots, -1}_{2k}, \underbrace{1, \dots, 1}_{2l-2k+1}],$$

есть ровно l классов сопряжённости. Центризатор такой инволюции состоит из матриц

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

$$A \in EO_{2k}(K), \quad B \in EO_{2l-2k+1}(K) \quad \text{или} \quad A \in O_{2k}^-(K), \quad B \in O_{2l-2k+1}^-(K).$$

Если $2k = 2l$, то мы имеем матрицы

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad A \in O_{2l}(K).$$

Если $k = 1$, то получаем матрицы

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}, \quad B \in SO_{2l-1}(K), \quad \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}, \quad B \in O_{2l-1}^-(K).$$

Центр этого центризатора имеет порядок два, как и все остальные центры центризаторов. Факторы по центру коммутантов центризаторов изоморфны $EO_{2l-1}(K)$, $PEO_4(K) \times EO_{2l-3}(K), \dots, PEO_{2l-2}(K) \times EO_3(K)$, $PEO_{2l}(K)$.

2. $i \notin K$. Как мы уже показывали, из $E_{ad}(B_l, K)$ исчезнут те инволюции $SO_{2l+1}(K)$, у которых $2(2i+1)$ элементов -1 на диагонали. Таким образом, останутся инволюции

$$\text{diag}[-1, -1, -1, -1, 1, \dots, 1], \dots, \quad \text{diag}[\underbrace{-1, \dots, -1}_{4k}, 1, \dots, 1], \dots$$

Очевидно, что центры их центризаторов будут также состоять из двух элементов, а факторы по центру коммутантов центризаторов имеют вид

$$PEO_4(K) \times EO_{2l-3}(K), \dots, PEO_{2l-2}(K) \times EO_3(K), PEO_{2l}(K).$$

5.4. Изучение инволюций для групп типа D_l ($l \geq 4$)

В данном случае, как и в предыдущем, различными являются ситуации $i \in K$ и $i \notin K$.

1. $i \in K$. Сначала рассмотрим инволюции первого рода. Это инволюции группы $PSO_{2l}(K)$, прообразы которых являются инволюциями в $SO_{2l}(K)$. Если $i \in K$, то все инволюции группы $SO_{2l}(K)$ содержатся в $EO_{2l}(K)$, поэтому

все инволюции первого рода группы содержатся в $\text{PEO}_{2l}(K)$. Очевидно, что инволюции группы $\text{SO}_{2l}(K)$ в некотором базисе имеют вид

$$\text{diag}[\underbrace{-1, \dots, -1}_{2k}, \underbrace{1, \dots, 1}_{2(l-k)}],$$

есть $[l/2]$ классов сопряжённости.

При $2k = l$ централизатор такой инволюции состоит из матриц

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad A \in \text{EO}_{2k}(K), \quad B \in \text{EO}_{2(l-k)}(K).$$

Его центр состоит из двух элементов: $-E$ и самой инволюции. Фактор по центру коммутанта централизатора есть

$$\text{PEO}_{2k}(K) \times \text{PEO}_{2(l-k)}(K).$$

Исключение могут составить случаи малых k : при $k = 1$

$$\text{PEO}_2(K) \times \text{PEO}_{2(l-1)}(K) \cong \text{PEO}_{2(l-1)}(K).$$

Заметим, кроме того, что тип D_2 совпадает с $A_1 \times A_1$, а тип D_3 — с A_3 .

Теперь посмотрим, что происходит при $2k = l$. Естественно, k чётно. Пусть

$$Q_{2l} = \begin{pmatrix} Q_l & 0 \\ 0 & Q_l \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} E_l & 0 \\ 0 & -E_l \end{pmatrix}.$$

Тогда может добавиться соотношение

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_l & 0 \\ 0 & -E_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_l & 0 \\ 0 & E_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \implies A = D = 0,$$

т. е. весь централизатор состоит из матриц

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad A, D \in \text{SO}_k(K) \quad \text{или} \quad A, D \in \text{O}^-(K),$$

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}, \quad B, C \in \text{SO}_k(K) \quad \text{или} \quad B, C \in \text{O}_k^-(K).$$

Его центр состоит из двух элементов, а коммутант состоит из матриц

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad A, D \in \text{EO}_k(K).$$

Теперь перейдём к инволюциям второго типа. Так как $A^2 = -E$, то в поле K ($i \in K$) инволюция A диагонализуется с собственными значениями $\pm i$, матрица A приводится к виду

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} iE_k & 0 \\ 0 & -iE_{2l-k} \end{pmatrix},$$

при этом форма Q имеет в этом базисе вид

$$Q_A = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} iE_k & 0 \\ 0 & -iE_{2l-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iE_k & 0 \\ 0 & -iE_{2l-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{pmatrix},$$

откуда $Q_1 = Q_3 = 0$, т. е. $k = l$. Значит,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} iE_l & 0 \\ 0 & -iE_l \end{pmatrix}, \quad Q_A = \begin{pmatrix} 0 & Q_2 \\ Q_2^T & 0 \end{pmatrix}.$$

Например,

$$Q_A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}.$$

Централизатор матрицы $\tilde{A}$ состоит из двух множеств:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iE & 0 \\ 0 & -iE \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iE & 0 \\ 0 & -iE \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \Rightarrow \\ & \Rightarrow B = C = 0 \Rightarrow AD^T = E \Rightarrow D = (A^T)^{-1}, \quad A \in \mathrm{GL}_l(K); \\ 2) \quad & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iE & 0 \\ 0 & -iE \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} iE & 0 \\ 0 & -iE \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \Rightarrow \\ & \Rightarrow A = D = 0 \Rightarrow CB^T = E \Rightarrow C = (B^T)^{-1}, \quad B \in \mathrm{GL}_l(K). \end{aligned}$$

Если l чётно, то матрицы второго вида имеют определитель 1, откуда следует, что они лежат в нашей группе, т. е. центр централизатора состоит из двух элементов. Если l нечётно, то матрицы второго вида имеют определитель -1 , т. е. не лежат в нашей группе, откуда следует, что центр централизатора бесконечен.

Фактор по центру коммутанта централизатора в любом случае есть группа $\mathrm{PSL}_l(K)$.

2. $i \notin K$. Как мы помним, в этом случае количество несопряжённых между собой инволюций первого рода в группе резко уменьшается. Именно, из $E_{\mathrm{ad}}(D_l, K)$ исчезнут те инволюции $\mathrm{SO}_{2l}(K)$, у которых $2(2j+1)$ элементов -1 на диагонали. Таким образом, останутся инволюции

$$\mathrm{diag}[-1, -1, -1, -1, 1, \dots, 1], \dots, \quad \mathrm{diag}[\underbrace{-1, \dots, -1}_{4k}, 1, \dots, 1], \dots$$

Очевидно, что центры их централизаторов будут также состоять из двух элементов, а факторы по центру коммутантов централизаторов будут иметь вид

$$\mathrm{PEO}_4(K) \times \mathrm{PEO}_{2l-4}(K), \dots, \quad \mathrm{PEO}_{2l-2}(K) \times \mathrm{PEO}_2(K), \quad \mathrm{PEO}_{2l-4}(K) \times \mathrm{PEO}_4(K).$$

В случае нечётного l все инволюции первого рода остаются, а в случае чётного l половина классов инволюций пропадает.

Если l нечётно, то пропадает инволюция второго рода, сопряжённая к

$$\begin{pmatrix} iE_l & 0 \\ 0 & -iE_l \end{pmatrix}.$$

Если l чётно, то такая инволюция есть: например, это

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

при

$$Q_A = \begin{pmatrix} 0 & E_l \\ E_l & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Формулы, различающие разные классические группы Шевалле

В этом разделе мы покажем, что для любых двух классических групп Шевалле с неизоморфными системами корней существует предложение первого порядка, истинное в одной группе и ложное во второй.

Лемма 2. Существует предложение φ_{A_1} первого порядка, истинное в любой присоединённой группе типа A_1 и ложное во всех присоединённых группах Шевалле других классических типов.

Доказательство. В группе $\mathrm{PSL}_2(K)$ есть всего один класс сопряжённости инволюций: это инволюции, сопряжённые к матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Централизатор такой инволюции состоит из матриц

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \quad -a^2 - b^2 = 1.$$

Коммутант централизатора состоит из матриц

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1,$$

то есть коммутативен.

Посмотрим, существуют ли другие группы Шевалле, удовлетворяющие этому условию: так как у нас всего один класс сопряжённости инволюций, то нужно рассматривать лишь малые размерности.

A_2 — это группа $\mathrm{PSL}_3(K)$, в которой имеется инволюция

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

её централизатор изоморфен $GL_2(K)$, т. е. не удовлетворяет условию, что его коммутант коммутативен.

A_3 — это группа $PSL_4(K)$, в ней имеется инволюция $\text{diag}[-1, -1, 1, 1]$, коммутант централизатора которой есть центральное произведение $SL_2(K)$ на $SL_2(K)$. Естественно, он также не коммутативен.

В группах A_l при $l \geq 4$ есть по крайней мере два класса сопряжённости инволюций, поэтому эти случаи нам не нужно рассматривать.

C_3 — это группа $PSp_6(K)$. Для инволюции $\text{diag}[-1, -1, 1, 1, 1, 1]$ коммутант централизатора точно не коммутативен.

Для групп типа C_l при $l \geq 4$ точно есть по крайней мере две несопряжённые инволюции, поэтому эти типы мы тоже не будем рассматривать.

B_2 — это группа $EO_5(K)$, в ней имеется инволюция $\text{diag}[-1, -1, -1, -1, 1]$, коммутант централизатора которой есть $EO_4(K)$, эта группа не коммутативна. Тем более не коммутативен коммутант централизатора инволюции в группах типа B_l при $l \geq 3$.

D_4 — это группа $PEO_8(K)$, в которой точно имеется инволюция $\text{diag}[-1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1]$, её коммутант централизатора также не коммутативен.

Значит, мы можем предъявить предложение, отличающее группу $PSL_2(K)$ от всех других классических групп:

$$\begin{aligned} \varphi_{A_1} &:= \forall M_1 \forall M_2 \\ &(M_1^2 = M^2 = 1 \wedge M_1 \neq 1 \wedge M_2 \neq 1 \implies \exists X (XM_1X^{-1} = M_2)) \wedge \\ &\wedge \forall X_1 \forall X_2 (\exists Y_1 \exists Y_2 \exists Z_1 \exists Z_2 \exists M (M^2 = 1 \wedge M \neq 1 \wedge \\ &\wedge Y_1M = MY_1 \wedge Y_2M = MY_2 \wedge Z_1M = MZ_1 \wedge Z_2M = MZ_2 \wedge \\ &\wedge X_1 = Y_1Z_1Y_1^{-1}Z_1^{-1} \wedge X_2 = Y_2Z_2Y_2^{-1}Z_2^{-1}) \implies X_1X_2 = X_2X_1). \quad \square \end{aligned}$$

Заметим, что если в некоторой группе Шевалле есть формульное подмножество $\mathcal{N}$, само являющееся классической группой Шевалле, то можно написать формулу, утверждающую, что оно изоморфно группе $PSL_2(K)$.

Эта формула выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_{A_1}^{\mathcal{N}} &:= \forall M_1 \in \mathcal{N} \forall M_2 \in \mathcal{N} \\ &(M_1^2 = M^2 = 1 \wedge M_1 \neq 1 \wedge M_2 \neq 1 \implies \exists X \in \mathcal{N} (XM_1X^{-1} = M_2)) \wedge \\ &\wedge \forall X_1 \in \mathcal{N} \forall X_2 \in \mathcal{N} (\exists Y_1 \in \mathcal{N} \exists Y_2 \in \mathcal{N} \exists Z_1 \in \mathcal{N} \exists Z_2 \in \mathcal{N} \exists M \in \mathcal{N} \\ &(M^2 = 1 \wedge M \neq 1 \wedge \\ &\wedge Y_1M = MY_1 \wedge Y_2M = MY_2 \wedge Z_1M = MZ_1 \wedge Z_2M = MZ_2 \wedge \\ &\wedge X_1 = Y_1Z_1Y_1^{-1}Z_1^{-1} \wedge X_2 = Y_2Z_2Y_2^{-1}Z_2^{-1}) \implies X_1X_2 = X_2X_1). \end{aligned}$$

Лемма 3. Существует предложение φ_{A_2} первого порядка, истинное в любой присоединённой группе типа A_2 и ложное во всех присоединённых группах Шевалле других классических типов.

Доказательство. Эта группа характеризуется тем, что

- 1) у неё есть всего один класс сопряжённости инволюций;
- 2) централизатор любой инволюции имеет бесконечный центр;
- 3) фактор по центру коммутанта централизатора любой инволюции есть группа $\mathrm{PSL}_2(K)$, т. е. группа, удовлетворяющая предложению φ_{A_1} .

Очевидно, что эти три условия полностью характеризуют группу $\mathrm{PSL}_3(K)$. $\square$

Лемма 4. Существует предложение φ_{A_3} первого порядка, истинное в любой присоединённой группе типа A_3 и ложное во всех присоединённых группах Шевалле других классических типов за исключением типа B_2 .

Доказательство. Мы имеем группу $\mathrm{PSL}_4(K)$. В этом случае количество классов сопряжённости инволюций зависит от базисного поля, но точно существует инволюция, фактор по центру коммутанта централизатора которой есть группа $\mathrm{PSL}_2(K) \times \mathrm{PSL}_2(K)$, т. е. такая группа, что существуют такие матрицы X_1, X_2, Y_1, Y_2 , что $X_1Y_1 = Y_1X_1$, $X_1Y_2 = Y_2X_1$, $X_2Y_1 = Y_1X_2$, $X_2Y_2 = Y_2X_2$, централизатор множества $\{X_1, X_2\}$ удовлетворяет формуле φ_{A_1} , централизатор множества $\{Y_1, Y_2\}$ удовлетворяет формуле φ_{A_1} , эти централизаторы коммутируют, любой элемент фактора по центру коммутанта централизатора инволюции представляется в виде произведения элемента из первого централизатора на элемент второго. Например, в качестве X_1, X_2, Y_1, Y_2 могут быть взяты матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что у групп типа A_l нет больше представителей, у которых фактор по центру коммутанта централизатора какой-то инволюции есть $\mathrm{PSL}_2(K) \times \mathrm{PSL}_2(K)$.

В случае типа C_l у группы типа C_3 , т. е. группы $\mathrm{PSp}_6(K)$, у инволюции $\mathrm{diag}[-1, -1, 1, \dots, 1]$ фактор по центру коммутанта централизатора изоморфен $\mathrm{PSL}_2(K) \times \mathrm{PSp}_4(K)$, что не элементарно эквивалентно $\mathrm{PSL}_2(K) \times \mathrm{PSL}_2(K)$, а у инволюции $\mathrm{diag}[i, i, i, -i, -i, -i]$ фактор по центру коммутанта централизатора есть $\mathrm{PSL}_3(K)$, что тоже не может быть элементарно эквивалентно $\mathrm{PSL}_2(K) \times \mathrm{PSL}_2(K)$.

Очевидно, что ситуацию $l > 3$ можно даже не рассматривать, так как там будут получаться произведения групп больших размерностей.

В случае типа D_l нужно рассмотреть только группу типа D_4 — $\mathrm{PEO}_8(K)$. У инволюции $\mathrm{diag}[-1, -1, 1, \dots, 1]$ этой группы фактор по центру коммутанта централизатора есть $\mathrm{PEO}_6(K)$, что не элементарно эквивалентно $\mathrm{PSL}_2(K) \times \mathrm{PSL}_2(K)$. У инволюции $\mathrm{diag}[-1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1]$ фактор по центру коммутанта централизатора есть $\mathrm{PEO}_4(K) \times \mathrm{PEO}_4(K)$, что не может быть элементарно эквивалентно $\mathrm{PSL}_2(K) \times \mathrm{PSL}_2(K)$. У инволюции $\mathrm{diag}[i, i, i, i, -i, -i, -i, -i]$ фактор по центру коммутанта централизатора есть $\mathrm{PSL}_4(K)$, что тоже нам не подходит.

Очевидно, что для группы типа B_l , $l \geq 3$, т. е. группы $EO_{2l+1}(K)$, ни для какой инволюции фактор по центру коммутанта её централизатора не может быть элементарно эквивалентен $\mathrm{PSL}_2(K) \times \mathrm{PSL}_2(K)$. $\square$

Нам осталось рассмотреть группу типа B_2 , т. е. группу $EO_5(K)$, в которой есть только инволюция $\mathrm{diag}[-1, -1, -1, -1, 1]$, фактор по центру коммутанта централизатора которой есть группа $\mathrm{PEO}_4(K)$. Эта группа в принципе может быть элементарно эквивалентна $\mathrm{PSL}_2(K) \times \mathrm{PSL}_2(K)$, поэтому группы типов A_3 и B_2 нужно различать дополнительными предложениями.

Лемма 5. *Существует предложение $\varphi_{A_3-B_2}$ первого порядка, истинное в любой присоединённой группе типа A_3 и ложное во всех присоединённых группах Шевалле типа B_2 .*

Доказательство. Очевидно, что если инволюции, на которых группы $G(A_3)$ и $G(B_2)$ не различаются, не единственные инволюции в этих группах, то мы легко можем различить эти группы. Поэтому нам нужно рассмотреть только тот случай, когда это единственные (с точностью до сопряжения) инволюции.

Рассмотрим матрицу M , удовлетворяющую формуле

$$\begin{aligned} \mathrm{DDiag}_2(M) := \exists I (I^2 = 1 \wedge I \neq 1 \wedge \\ \wedge \exists M_1 \exists M_2 (M_1 I = I M_1 \wedge M_2 I = I M_2 \wedge M = M_1 M_2 M_1^{-1} M_2^{-1} \wedge \\ \wedge \forall X \forall Y (X M = M Y \wedge Y M = M Y \implies X Y = Y X) \wedge \\ \wedge \forall N \forall X (N I = I N \wedge N M = M N \wedge \\ \wedge (X I = I X \wedge M = X N X^{-1}) \implies X^2 M = M X^2)). \end{aligned}$$

Эта формула утверждает, что существует инволюция I , такая что

- 1) M лежит в коммутанте её централизатора;
- 2) любые матрицы, коммутирующие с M , коммутируют друг с другом;
- 3) для любой матрицы N , коммутирующей с M и I и сопряжённой к M с помощью матрицы X , коммутирующей с I , выполняется условие $X^2 M = M X^2$.

Посмотрим, какие матрицы удовлетворяют формуле $\mathrm{DDiag}_2(M)$ в группе $G(A_3) = \mathrm{PSL}_4(K)$.

Инволюция I имеет в некотором базисе вид $\mathrm{diag}[\xi, \xi, -\xi, -\xi]$, $\xi^4 = 1$. Значит, в этом базисе матрица M имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & e \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix}.$$

Вторая часть формулы в данном случае означает всего лишь, что у матрицы M нет жордановых клеток с совпадающими собственными значениями. Значит, каждая из клеток

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f & e \\ g & h \end{pmatrix}$$

либо диагонализироваема в K^* с разными собственными значениями, либо есть жорданова клетка размера 2×2 .

Пусть

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} -$$

это жорданова клетка

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Выберем

$$N = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эти матрицы противоречат третьей части формулы $\text{DDiag}_2(M)$. Значит, обе клетки должны быть диагонализироваемы. При этом все собственные значения различны. Значит, в группе $\text{PSL}_4(K)$ формула $\text{DDiag}_2(M)$ выделяет диагонализироваемые в $\bar{K}$ матрицы с разными элементами на диагонали и только эти матрицы.

Теперь посмотрим, какие матрицы удовлетворяют этой формуле в группе $G(B_2) = \text{EO}_5(K)$. Инволюция I должна иметь вид $\text{diag}[-1, -1, -1, -1, 1]$ в базисе, в котором форма имеет вид

$$\begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}, \quad Q_1 \in \text{GL}_4(K), \quad Q_1^T = Q_1, \quad q_2 \in K^*.$$

Значит, матрица M имеет вид

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_1 \in \text{SO}_4(K).$$

Приведём её к жордановой форме:

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} \tilde{M}_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим различные варианты.

1. Если матрица $\tilde{M}$ диагональна с различными элементами на диагонали, то легко проверить, что она удовлетворяет формуле $\text{DDiag}_2(M)$.

2. Матрица $\tilde{M} = \text{diag}[\alpha, \alpha, \beta, \gamma, \delta]$ в любом случае не может удовлетворять формуле $\text{DDiag}_2(M)$.

3. Если

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то имеем соотношение

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ q_2 & q_5 & q_6 & q_7 \\ q_3 & q_6 & q_8 & q_9 \\ q_4 & q_7 & q_9 & q_{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ q_2 & q_5 & q_6 & q_7 \\ q_3 & q_6 & q_8 & q_9 \\ q_4 & q_7 & q_9 & q_{10} \end{pmatrix}.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha^2 q_1 + \alpha q_2 + \alpha q_2 + q_5 = q_1, \\ \alpha^2 q_2 + \alpha q_5 = q_2, \\ \alpha \beta q_3 + \beta q_6 = q_3, \\ \alpha \gamma q_4 + \gamma q_7 = q_4, \\ \alpha^2 q_5 = q_5, \\ \alpha \beta q_6 = q_6, \\ \alpha \gamma q_7 = q_7, \\ \beta^2 q_8 = q_8, \\ \gamma \beta q_9 = q_9, \\ \gamma^2 q_{10} = q_{10}. \end{cases}$$

Здесь также нужно рассмотреть разные случаи при различных α, β, γ .

А. Если $\alpha = \pm 1$, то $q_5 = 0$, поэтому $q_2 = 0$, следовательно, $q_6 \neq 0$ или $q_7 \neq 0$. Поэтому $\beta = \alpha$ или $\gamma = \alpha$. Если $\beta = \alpha = \pm 1$, $\gamma \neq \alpha$, то $q_6 = q_7 = 0$, что невозможно. Если $\gamma = \beta = \pm 1$, то матрица не удовлетворяет формуле $\text{DDiag}_2(M)$.

Б. Если $\alpha \neq \pm 1$, то $q_1 = q_2 = q_5 = 0$. Значит, или $q_6 \neq 0$, или $q_7 \neq 0$. Это означает, что или $\beta = 1/\alpha$, или $\gamma = 1/\alpha$. Пусть $\beta = 1/\alpha$, $\gamma \neq 1/\alpha$. Тогда $q_7 = 0$, $q_6 = 0$, что невозможно.

Значит, матрица $\tilde{M}$ не может иметь указанный вид.

4. Пусть

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Получаем соотношение

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ q_2 & q_5 & q_6 & q_7 \\ q_3 & q_6 & q_8 & q_9 \\ q_4 & q_7 & q_9 & q_{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ q_2 & q_5 & q_6 & q_7 \\ q_3 & q_6 & q_8 & q_9 \\ q_4 & q_7 & q_9 & q_{10} \end{pmatrix}.$$

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha^2 q_1 + \alpha q_2 + \alpha q_2 + q_5 = q_1, \\ \alpha^2 q_2 + \alpha q_5 = q_2, \\ \alpha \beta q_3 + \beta q_6 + \alpha q_4 + q_7 = q_3 \\ \alpha \beta q_4 + \beta q_7 = q_4, \\ \alpha^2 q_5 = q_5, \\ \alpha \beta q_6 + \alpha q_7 = q_6, \\ \alpha \beta q_7 = q_7, \\ \beta^2 q_8 + 2\beta q_9 + q_{10} = q_8, \\ \beta^2 q_9 + \beta q_{10} = q_9, \\ \beta^2 q_{10} = q_{10}. \end{cases}$$

А. Если $\alpha, \beta \neq \pm 1$, $\alpha\beta \neq 1$, то $q_7 = q_{10} = 0$, откуда $q_2 = 0$, поэтому $q_6 = 0$, что невозможно.

Б. Пусть $\alpha, \beta \neq \pm 1$, $\alpha\beta = 1$. Тогда $q_5 = q_{10} = 0$, следовательно, $q_9 = q_2 = q_7 = q_1 = q_8 = 0$, поэтому

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q & \beta \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ q & \alpha & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы в этом базисе должны удовлетворять соотношению

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tilde{Q} \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} = Q.$$

Значит, в этом базисе имеются матрицы

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} q & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} (A^T)^{-1} \begin{pmatrix} q & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}^{-1},$$

где A произвольна. Отсюда следует, что матрица $\tilde{M}$ не удовлетворяет последней части условия $\text{DDiag}_2(M)$.

В. Пусть $\alpha = \pm 1$, $\beta \neq \pm 1$. Тогда $q_7 = q_{10} = q_9 = q_4 = 0$, что невозможно.

Г. Пусть $\alpha, \beta = \pm 1$, $\alpha\beta = -1$. Тогда $q_7 = q_4 = q_6 = q_3 = q_5 = q_2 = 0$, что невозможно.

Д. Пусть $\alpha, \beta = \pm 1$, $\alpha\beta = 1$. Тогда имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} q_1 \pm 2q_2 + q_5 = q_1, \\ q_2 \pm q_5 = q_2, \\ q_3 \pm q_6 \pm q_4 + q_7 = q_3 \\ q_4 \pm q_7 = q_4, \\ q_5 = q_5, \\ q_6 \pm q_7 = q_6, \\ q_7 = q_7, \\ q_8 \pm 2q_9 + q_{10} = q_8, \\ q_9 \pm q_{10} = q_9, \\ q_{10} = q_{10}. \end{cases}$$

Таким образом, $q_5 = q_7 = q_{10} = q_2 = q_9 = 0$, $q_6 = -q_4$, т. е.

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & q_3 & q_4 \\ 0 & 0 & -q_4 & 0 \\ q_3 & -q_4 & q_8 & 0 \\ q_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно напрямую проверить, что матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & f & 0 & h \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \frac{q_8 - q_1}{2q_4}, \quad f = \frac{-2q_3}{q_4}, \quad h = \frac{q_1 - q_8}{2q_4},$$

и

$$\begin{pmatrix} 0 & b' & -1/2 & d \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 2 & 0 & 0 & h' \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b' = \frac{q_1 - q_8/4}{q_4}, \quad h' = \frac{q_8 - 4q_1}{4q_4}, \quad d = \frac{q_4}{q_3},$$

лежат в нашей группе, не коммутируют друг с другом, но при этом коммутируют с матрицей $\tilde{M}$. Значит, матрица $\tilde{M}$ не удовлетворяет нашей формуле.

Таким образом, мы показали, что в обеих группах формула $\text{DDiag}_2(M)$ выделяет диагонализующие в $\overline{K}$ матрицы с различными элементами на диагонали. Матрицы, перестановочные с M , образуют в нашей группе подгруппу диагонализующих в одном базисе матриц, а фактор нормализатора этой группы по ней самой изоморфен группе Вейля W группы G . В первом случае это группа S_4 , а во втором — произведение групп S_2 и $(\mathbb{Z}_2)^2$. Значит, можно написать предложение, различающее группы типов A_3 и B_2 . $\square$

Таким образом, благодаря леммам 4 и 5, мы нашли предложения, отделяющие присоединённые группы типа A_3 от других классических групп.

Лемма 6. Для каждого $l \geq 4$ существует предложение φ_{A_l} первого порядка, истинное в любой присоединённой группе типа A_l и ложное во всех присоединённых группах Шевалле других классических типов.

Доказательство. Все группы Шевалле типа A_l , $l \geq 4$, характеризуются тем, что в них существуют по крайней мере две несопряжённые инволюции, у которых центры централизаторов бесконечны (имеют порядок, больший 2).

Можно легко отделить их друг от друга с помощью групп меньших размерностей (фактор по центру коммутанта централизатора инволюции есть либо $\mathrm{PSL}_k(K) \times \mathrm{PSL}_{m-k}(K)$, либо $\mathrm{PSL}_{m-1}(K)$). $\square$

Лемма 7. Для каждого $l \geq 2$ существует предложение φ_{B_l} первого порядка, истинное в любой присоединённой группе типа B_l и ложное во всех присоединённых группах Шевалле других классических типов.

Доказательство. Группу $\mathrm{EO}_5(K)$ (т. е. присоединённую группу типа B_2) мы уже отличили от всех остальных, когда занимались группой $\mathrm{PSL}_4(K)$ (лемма 5).

Рассмотрим группу $\mathrm{EO}_7(K)$ (тип B_3). Если в данной группе существует инволюция $\mathrm{diag}[-1, -1, 1, \dots, 1]$, то группа однозначно характеризуется тем, что в ней имеется инволюция, для которой фактор по центру коммутанта её централизатора есть $\mathrm{EO}_5(K)$. Если такой инволюции нет, то в этой группе есть только один класс сопряжённости инволюций: $\mathrm{diag}[-1, -1, -1, -1, 1, 1, 1]$. При этом данная группа точно не является ни группой типа A_l (по леммам 2–6), ни группой типа B_2 . Она не может иметь тип B_l ($l > 3$), так как тогда будет больше одного класса сопряжённости инволюций. Группа не может иметь тип C_l ($l \geq 3$) и D_l ($l \geq 4$). Таким образом, остаётся только сам тип B_3 .

Теперь рассмотрим $l > 3$. В таких группах уже существуют инволюции (вида $\mathrm{diag}[-1, -1, -1, -1, 1, \dots, 1]$), для которых фактор по центру коммутанта централизатора есть $\mathrm{EO}_{2l-3}(K) \times \mathrm{EO}_4(K)$. Предложение, характеризующее $\mathrm{EO}_{2l-3}(K)$, у нас уже есть. Так как ни в каких других случаях эта группа появиться не может, то тип B_l можно считать выделенным. $\square$

Лемма 8. Для каждого $l \geq 3$ существует предложение φ_{C_l} первого порядка, истинное в любой присоединённой группе типа C_l и ложное во всех присоединённых группах Шевалле других классических типов.

Доказательство. Сначала надо рассмотреть группы $\mathrm{PSp}_6(K)$ (т. е. группы типа C_3). Согласно леммам 2–7 нам нужно только отличить группу типа C_3 от групп типов C_l и D_l , $l \geq 4$. В ней существует инволюция, для которой фактор по центру коммутанта централизатора есть $\mathrm{PSL}_3(K)$. Остальные рассматриваемые группы таким свойством обладать не могут.

Теперь рассмотрим общий случай групп $\mathrm{PSp}_{2l}(K)$ ($l \geq 4$). Здесь уже можно действовать рекурсивно: существует инволюция, для которой фактор по центру коммутанта централизатора есть

$$\mathrm{PSp}_{2(l-1)}(K) \times \mathrm{PSL}_2(K). \quad \square$$

Лемма 9. Для каждого $l \geq 4$ существует предложение φ_{D_l} первого порядка, истинное в любой присоединённой группе типа D_l и ложное во всех присоединённых группах Шевалле других классических типов.

Доказательство. Согласно леммам 2—8 нам нужно только различить группы типов D_l и D_m для $l \neq m$. Для чётных l имеется инволюция, у которой фактор по центру коммутанта централизатора есть $\mathrm{PSL}_l(K)$, а для нечётных l — $\mathrm{PEO}_{2(l-1)}(K)$. Таким образом, мы можем различить все группы типа D_l . $\square$

Из лемм 2—9 следует, что никакие две присоединённые элементарные группы Шевалле с различными системами корней не могут быть элементарно эквивалентны.

В следующих разделах мы установим этот результат для исключительных систем корней.

7. Группа Шевалле типа G_2

Чтобы понять, как устроена группа Шевалле типа G_2 , мы должны рассмотреть алгебру Ли типа G_2 . Корни этой алгебры можно рассматривать как линейные комбинации базисных векторов трёхмерного пространства, а именно

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= e_1 - e_2, & \alpha_2 &= -e_1 + e_2 + e_3, & \alpha_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 = e_3 - e_1, \\ \alpha_4 &= 2\alpha_1 + \alpha_2 = e_3 - e_2, & \alpha_5 &= 3\alpha_1 + \alpha_2 = -2e_2 + e_1 + e_3, \\ \alpha_6 &= 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2e_3 - e_1 - e_2.\end{aligned}$$

Таким образом, имеется два простых корня α_1 и α_2 , шесть положительных корней $\alpha_1, \dots, \alpha_6$, общее количество корней равно 12. Теперь заполним таблицу, в которую поместим значения $\langle \alpha, \beta \rangle = 2(\alpha, \beta)/(\beta, \beta)$ для простых корней β и положительных корней α .

	α_1	α_2		α_1	α_2
α_1	2	-1	α_4	1	0
α_2	-3	2	α_5	3	-1
α_3	-1	1	α_6	0	1

Существует точное представление алгебры Ли типа G_2 в $\mathrm{SL}_7(\mathbb{C})$, которое мы сейчас приведём. Для этого нам достаточно выписать матрицы, соответствующие элементам X_α для корней α системы G_2 . Мы будем обозначать через X_i матрицу, соответствующую элементу X_{α_i} для положительного корня α_i , и через X_{-i} матрицу, соответствующую отрицательному корню $-\alpha_i$. Вот эти 12 матриц:

$$\begin{aligned}X_1 &= -ie_{13} + 2ie_{21} + ie_{46} - ie_{75}, & X_{-1} &= -ie_{12} + 2ie_{31} - ie_{57} + ie_{64}, \\ X_2 &= e_{37} - e_{62}, & X_{-2} &= -e_{26} + e_{73}, \\ X_3 &= ie_{17} - ie_{35} + ie_{42} - 2ie_{61}, & X_{-3} &= -ie_{16} - ie_{24} + ie_{53} + 2ie_{71}, \\ X_4 &= -ie_{15} + i2e_{27} + 2ie_{41} - ie_{63}, & X_{-4} &= -ie_{14} - ie_{36} + 2ie_{51} + ie_{72},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_5 &= -e_{27} + e_{43}, & X_{-5} &= e_{34} - e_{72}, \\ X_6 &= -e_{47} + e_{65}, & X_{-6} &= e_{56} - e_{74}. \end{aligned}$$

По этой алгебре Ли можно построить группу Шевалле типа G_2 . В случае, когда $i \in K$, существует представление этой группы в группе $\mathrm{GL}_7(K)$, в противном случае — в группе $\mathrm{GL}_{14}(K)$.

С помощью элементов $x_1(t), \dots, x_6(t), x_{-1}(t), \dots, x_{-6}(t)$ найдём матрицы, соответствующие $w_1(t), \dots, w_6(t)$ и $h_1(t), \dots, h_6(t)$:

$$\begin{aligned} w_1(t) &= -e_{11} + t^2 e_{23} + t^{-2} e_{32} + ite_{46} - it^{-1} e_{57} + it^{-1} e_{64} - ite_{75}, \\ w_2(t) &= e_{11} + t^{-1} e_{26} + t^3 e_{37} + e_{44} + e_{55} - te_{62} - t^{-1} e_{73}, \\ w_3(t) &= -e_{11} - it^{-1} e_{24} + ite_{35} - ite_{42} + it^{-1} e_{53} + t^2 e_{67} + t^{-2} e_{76}, \\ w_4(t) &= -e_{11} - ite_{27} + it^{-1} e_{36} + t^2 e_{45} + t^{-2} e_{54} + ite_{63} - it^{-1} e_{72}, \\ w_5(t) &= e_{11} - te_{25} - t^{-1} e_{34} + te_{43} + t^{-1} e_{52} + e_{66} + e_{77}, \\ w_6(t) &= e_{11} + e_{22} + e_{33} - te_{47} - t^{-1} e_{56} + te_{65} + t^{-1} e_{74}, \\ h_1(t) &= [1, t^2, t^{-2}, t, t^{-1}, t^{-1}, t], \\ h_2(t) &= [1, t^{-1}, t, 1, 1, t, t^{-1}], \\ h_3(t) &= [1, t^{-1}, t, t^{-1}, t, t^2, t^{-2}], \\ h_4(t) &= [1, t, t^{-1}, t^2, t^{-2}, t, t^{-1}], \\ h_5(t) &= [1, t, t^{-1}, t, t^{-1}, 1, 1], \\ h_6(t) &= [1, 1, 1, t, t^{-1}, t, t^{-1}]. \end{aligned}$$

Таким образом, подгруппа H группы G (совпадающая с тором T , так как G односвязна) состоит из диагональных матриц, имеющих на диагонали собственные значения $[1, u, u^{-1}, uv, u^{-1}v^{-1}, v, v^{-1}]$. В этой группе есть только три неединичных инволюции: $[1, 1, 1, -1, -1, -1, -1]$, $[1, -1, -1, -1, -1, 1, 1]$ и $[1, -1, -1, 1, 1, -1, -1]$.

Группа Вейля этой группы Шевалле изоморфна диэдральной группе порядка 12. Её представляют матрицы

$$\begin{aligned} e, \quad w_1(1), \quad w_2(1), \quad w_3(1), \quad w_4(1), \quad w_5(1), \quad w_6(1), \\ w_1(1)w_2(1) &= -e_{11} + e_{27} - e_{36} - ie_{42} + ie_{53} + ie_{64} - ie_{75}, \\ w_1(1)w_3(1) &= e_{11} + ie_{25} - ie_{34} + ie_{47} - ie_{56} + e_{62} + e_{73}, \\ w_1(1)w_4(1) &= e_{11} + ie_{26} - ie_{37} - e_{43} - e_{52} + ie_{65} - ie_{74}, \\ w_1(1)w_5(1) &= -e_{11} - e_{24} - e_{35} - ie_{46} + ie_{57} - ie_{63} + ie_{72}, \\ w_1(1)w_6(1) &= -e_{11} + e_{23} + e_{32} - ie_{45} + ie_{54} + ie_{67} - ie_{76}. \end{aligned}$$

Лемма 10. Существует предложение φ_{G_2} первого порядка, истинное в любой присоединённой группе типа G_2 и ложное во всех классических присоединённых группах Шевалле.

Доказательство. Из представления группы Вейля мы сразу же видим, что её элемент $w_1(1)w_6(1)$ является инволюцией и коммутирует со всеми инволюциями группы H и что такой элемент группы Вейля единствен. Также очевидно, что его произведения с инволюциями группы H тоже коммутируют со всеми перечисленными выше элементами и являются инволюциями.

Покажем, что элементы $h_2(-1)$ и $w_1(1)w_6(1)h_2(-1)$ сопряжены. Действительно,

$$\begin{aligned} x_{-6}(-1/2)h_2(-1)x_{-6}(1/2) &= x_{-6}(-1)h_2(-1), \\ x_6(1)x_{-6}(-1)h_2(-1)x_6(-1) &= (x_6(1)x_{-6}(-1)x_6(-1))(x_6(1)h_2(-1)x_6(-1)) = \\ &= x_6(1)x_{-6}(-1)x_6(-1)x_6(2)h_2(-1) = \\ &= x_6(1)x_{-6}(-1)x_6(1)h_2(-1) = w_6(1)h_2(-1), \\ x_{-1}(-1/2)w_6(1)h_2(-1)x_{-1}(1/2) &= x_{-1}(-1)w_6(1)h_2(-1), \\ x_1(1)x_{-1}(-1)w_6(1)h_2(-1)x_1(-1) &= w_1(1)w_6(1)h_2(-1). \end{aligned}$$

Таким образом, как легко видеть, элементы $h_1(-1)$, $h_2(-1)$, $h_3(-1)$, $w_1(1)w_6(1)h_1(-1)$, $w_1(1)w_6(1)h_2(-1)$ и $w_1(1)w_6(1)h_3(-1)$ сопряжены.

Кроме того, в случае, когда $i \in K$, с помощью $h_1(i)$ сопряжены элементы $w_1(1)w_6(1)$ и $w_1(1)w_6(1)h_1(-1)$, т. е. все перечисленные инволюции.

Отсюда мы видим, что имеется множество из семи коммутирующих друг с другом инволюций, из которых либо все семь, либо шесть сопряжены. Очевидно, что все централизаторы этих инволюций изоморфны между собой. Посмотрим, чему равен централизатор инволюции $h_1(-1)$.

Пусть $x \in G$ лежит в централизаторе элемента $h_1 = h_1(-1)$. Из разложения Брюа (см. [11]) следует, что любой элемент группы G можно однозначно представить в виде

$$x_1(t_1)x_2(t_2)x_3(t_3)x_4(t_4)x_5(t_5)x_6(t_6)hw_1(u_1)x_2(u_2)x_3(u_3)x_4(u_4)x_5(u_5)x_6(u_6),$$

где $h \in H$, w — один из 12 перечисленных элементов группы Вейля, $u_i = 0$ для всех i , для которых $w(\alpha_i) \in \Phi^+$. Так как $h_1xh_1^{-1} = x$, то

$$\begin{aligned} &x_1(t_1)x_2(-t_2)x_3(-t_3)x_4(-t_4)x_5(-t_5)x_6(t_6)h(h_1(-1)wh_1(-1)) \times \\ &\times x_1(u_1)x_2(-u_2)x_3(-u_3)x_4(-u_4)x_5(-u_5)x_6(u_6) = \\ &= x_1(t_1)x_2(-t_2)x_3(-t_3)x_4(-t_4)x_5(-t_5)x_6(t_6)hh'w \times \\ &\times x_1(u_1)x_2(-u_2)x_3(-u_3)x_4(-u_4)x_5(-u_5)x_6(u_6) = \\ &= x_1(t_1)x_2(t_2)x_3(t_3)x_4(t_4)x_5(t_5)x_6(t_6)hw \times \\ &\times x_1(u_1)x_2(u_2)x_3(u_3)x_4(u_4)x_5(u_5)x_6(u_6), \end{aligned}$$

где h' — некоторый элемент группы H . Из единственности разложения Брюа следует, что $t_2 = t_3 = t_4 = t_5 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = 0$, $h' = 1$, т. е. $h_1(-1)wh_1(-1) = w$. Простой проверкой получаем, что либо $w = 1$, либо $w = w_1(1)$, либо $w = w_6(1)$, либо $w = w_1(1)w_6(1)$. Таким образом, централизатор инволюции $h_1(-1)$ есть произведение группы H , группы X_1 , порождённой элементами $x_1(t)$ и $x_{-1}(t)$, и группы X_6 , порождённой элементами $x_6(t)$ и $x_{-6}(t)$.

Коммутант рассматриваемой группы порождается группами X_1 и X_6 . Взяв фактор этого коммутанта по его центру, мы получим прямое произведение двух экземпляров группы $\mathrm{PSL}_2(K)$.

Как мы помним, кроме группы типа G_2 , этому свойству могут удовлетворять только группы $\mathrm{PSL}_4(K)$ и $\mathrm{EO}_5(K)$.

Мы уже показали, что коммутант централизатора инволюции $h_1(-1)$ порождён группами X_1 и X_6 . Аналогично коммутант централизатора инволюции $h_2(-1)$ порождён группами X_2 и X_4 , а коммутант централизатора инволюции $h_3(-1) = h_1(-1)h_2(-1)$ порождён группами X_3 и X_5 . Заметим, что пары групп X_1 и X_2 , X_1 и X_3 , X_1 и X_4 , X_1 и X_5 , X_2 и X_3 , X_3 и X_4 , X_3 и X_6 , X_4 и X_5 , X_4 и X_6 порождают всю группу G , а пары групп X_2 и X_5 , X_2 и X_6 , X_5 и X_6 порождают лишь собственную подгруппу группы G , являющуюся группой Шевалле типа A_2 .

Ни группа $\mathrm{PSL}_4(K)$, ни группа $\mathrm{EO}_5(K)$ не удовлетворяют этом свойству. Понятно, что это свойство можно записать в виде предложения первого порядка, поэтому группа Шевалле типа G_2 не может быть элементарно эквивалентна никакой классической группе Шевалле. $\square$

8. Группы Шевалле типа F_4

В системе корней F_4 имеется 48 корней, из которых 24 корня положительные. Эти положительные корни порождены четырьмя простыми корнями

$$\alpha_1 = e_2 - e_3, \quad \alpha_2 = e_3 - e_4, \quad \alpha_3 = e_4, \quad \alpha_4 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4).$$

Первые два корня являются длинными, последние два — короткими. Перечислим остальные положительные корни:

$$\begin{aligned} \alpha_5 &= \alpha_1 + \alpha_2, & \alpha_6 &= \alpha_2 + \alpha_3, & \alpha_7 &= \alpha_3 + \alpha_4, & \alpha_8 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \\ \alpha_9 &= \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_3, & \alpha_{10} &= \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, & \alpha_{11} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \\ \alpha_{12} &= \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_3 + \alpha_4, & \alpha_{13} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_3, \\ \alpha_{14} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_3, & \alpha_{15} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_3 + \alpha_4, \\ \alpha_{16} &= \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_4, & \alpha_{17} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_3 + \alpha_4, \\ \alpha_{18} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_3 + \alpha_3 + \alpha_4, & \alpha_{19} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_4, \\ \alpha_{20} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_4, \\ \alpha_{21} &= \alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2 + \alpha + 2 + \alpha_3 + \alpha_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_4, \\ \alpha_{22} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_4, \\ \alpha_{23} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_3 + \alpha_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_4, \\ \alpha_{24} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_3 + \alpha_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_4. \end{aligned}$$

Лемма 11. Существует предложение φ_{F_4} первого порядка, истинное в любой присоединённой группе типа F_4 и ложное во всех классических присоединённых группах Шевалле, а также в группах Шевалле типа G_2 .

Доказательство. Найдём централизатор инволюции $h_1(-1)$. Пусть

$$Z(h_1) \ni x = x_1(t_1) \dots x_{24}(t_{24}) h w x_1(u_1) \dots x_{24}(u_{24}),$$

где $h \in H$, w — произведение некоторого количества элементов $w_i(1)$. Тогда

$$h_1(-1) x h_1(-1) = x_1(\pm t_1) \dots x_{24}(\pm t_{24}) h h' w x_1(\pm u_1) \dots x_{24}(\pm u_{24}),$$

причём $h_1(-1) x_i(s) h_1(-1) = x_i(s)$ тогда и только тогда, когда $i = 1, 3, 4, 7, 14, 17, 18, 19, 20, 24$. Значит,

$$\begin{aligned} x = & x_{\alpha_1}(t_1) x_{\alpha_3}(t_3) x_{\alpha_4}(t_4) x_{\alpha_3+\alpha_4}(t_7) x_{\alpha_{14}}(t_{14}) x_{\alpha_{14}+\alpha_4}(t_{17}) x_{\alpha_{14}+\alpha_3+\alpha_4}(t_{18}) \times \\ & \times x_{\alpha_{14}+\alpha_4+\alpha_4}(t_{19}) x_{\alpha_{14}+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_4}(t_{20}) x_{\alpha_{14}+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_4}(t_{24}) h w \times \\ & \times x_1(u_1) x_3(u_3) x_4(u_4) x_7(u_7) x_{14}(u_{14}) x_{17}(u_{17}) x_{18}(u_{18}) x_{19}(u_{19}) x_{20}(u_{20}) x_{24}(u_{24}). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что инволюция $h_1(-1)$ должна коммутировать с w . Вспомним, что $w_\alpha(1) h_\beta(-1) w_\alpha(1)^{-1} = h_{w_\alpha(\beta)}(-1)$. Таким образом, чтобы $w_{i_1}(1) \dots w_{i_m}(1)$ коммутировало с $h_1(-1)$, необходимо и достаточно, чтобы $w_{\alpha_{i_1}} \dots w_{\alpha_{i_m}}(\alpha_1) = \pm \alpha_1$.

Очевидно, любое произведение элементов $w_1(1)$, $w_3(1)$, $w_4(1)$ и $w_{14}(1)$ коммутирует с $h_1(-1)$. Легко показать, что другие представители группы Вейля не коммутируют с инволюцией $h_1(-1)$. Отсюда следует, что централизатор инволюции $h_1(-1)$ есть произведение группы H и подгруппы в G , порождённой X_1 , X_3 , X_4 и X_{14} , т. е. есть произведение группы H , группы Шевалле типа A_1 и группы Шевалле типа C_3 . Как и выше, можно показать, что его коммутант есть центральное произведение группы Шевалле типа A_1 на группу Шевалле типа C_3 , т. е. групп $SL_2(K)$ и $Sp_6(K)$, а фактор по центру этого коммутанта изоморфен $PSL_2(K) \times PSp_6(K)$.

Аналогично централизатор инволюции $h_3(-1)$ порождён группой H и подгруппами X_1 , X_2 , X_3 , X_{16} , т. е. есть произведение группы H и группы Шевалле типа B_4 , а фактор по центру коммутанта изоморфен $EO_9(K)$.

Чтобы написать предложение, отличающее группу Шевалле типа F_4 от всех рассмотренных нами групп Шевалле, теперь достаточно заметить, что мы не встречали ещё группы Шевалле, у которой для одной инволюции фактор по центру коммутанта централизатора изоморфен $PSL_2(K) \times PSp_6(K)$, а для другой — $EO_9(K)$. $\square$

9. Группа Шевалле типа E_6

В системе корней E_6 имеется 72 корня, из которых 36 корней положительные. Эти положительные корни порождены шестью простыми корнями

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{2}(e_1 + e_8 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7), & \alpha_2 &= e_1 + e_2, \\ \alpha_3 &= e_2 - e_1, & \alpha_4 &= e_3 - e_2, & \alpha_5 &= e_4 - e_3, & \alpha_6 &= e_5 - e_4.\end{aligned}$$

Перечислим остальные положительные корни, для простоты вместо α_i записывая просто число i :

$$\begin{aligned}\alpha_7 &= 1 + 3, & \alpha_8 &= 3 + 4, & \alpha_9 &= 4 + 5, & \alpha_{10} &= 5 + 6, & \alpha_{11} &= 1 + 3 + 4, \\ \alpha_{12} &= 3 + 4 + 5, & \alpha_{13} &= 2 + 4, & \alpha_{14} &= 2 + 3 + 4, & \alpha_{15} &= 2 + 4 + 5, \\ \alpha_{16} &= 1 + 2 + 3 + 4, & \alpha_{17} &= 2 + 3 + 4 + 5, & \alpha_{18} &= 1 + 3 + 4 + 5, \\ \alpha_{19} &= 3 + 4 + 5 + 6, & \alpha_{20} &= 2 + 4 + 5 + 6, & \alpha_{21} &= 2 + 3 + 4 + 4 + 5, \\ \alpha_{22} &= 2 + 3 + 4 + 5 + 6, & \alpha_{23} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5, & \alpha_{24} &= 1 + 3 + 4 + 5 + 6, \\ \alpha_{25} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5, & \alpha_{26} &= 1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5, \\ \alpha_{27} &= 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6, & \alpha_{28} &= 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6, \\ \alpha_{29} &= 1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6, & \alpha_{30} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6, \\ \alpha_{31} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6, & \alpha_{32} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6, \\ \alpha_{33} &= 4 + 5 + 6, & \alpha_{34} &= 1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6, \\ \alpha_{35} &= 1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6, \\ \alpha_{36} &= 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6.\end{aligned}$$

Лемма 12. Существует предложение φ_{E_6} первого порядка, истинное в любой присоединённой группе типа E_6 и ложное во всех классических присоединённых группах Шевалле, а также в группах Шевалле типов G_2 и F_4 .

Доказательство. Найдём централизатор инволюции h_1 . Пусть

$$Z(h_1) \ni x = x_1(t_1) \dots x_{36}(t_{36}) h w x_1(u_1) \dots x_{36}(u_{36}),$$

где $h \in H$, w — произведение некоторого количества элементов $w_i(1)$. Тогда

$$h_1 x h_1 = x_1(\pm t_1) \dots x_{36}(\pm t_{36}) h h' w x_1(\pm u_1) \dots x_{36}(\pm u_{36}),$$

причём $h_1(-1)x_i(s)h_1(-1) = x_i(s)$ тогда и только тогда, когда $i = 1, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 13, 15, 20, 26, 29, 33, 34, 35, 36$. Кроме того, инволюция $h_1(-1)$ должна коммутировать с w . Как мы помним из предыдущего раздела, чтобы $w_{i_1}(1) \dots w_{i_m}(1)$ коммутировало с $h_1(-1)$, необходимо и достаточно, чтобы $w_{\alpha_{i_1}} \dots w_{\alpha_{i_m}}(\alpha_1) = \pm \alpha_1$.

Очевидно, что любое произведение элементов $w_1(1)$, $w_2(1)$, $w_4(1)$, $w_5(1)$, $w_6(1)$ и $w_{26}(1)$ коммутирует с $h_1(-1)$. Несложно показать, что другие представители группы Вейля не коммутируют с инволюцией $h_1(-1)$. Отсюда следует, что централизатор инволюции $h_1(-1)$ есть произведение группы H и подгруппы в G , порождённой X_1 , X_2 , X_4 , X_5 , X_6 и X_{26} . Группа X_1 коммутирует со всеми остальными порождающими подгруппами, а подгруппы X_2 , X_4 , X_5 , X_6 и X_{26} порождают группу Шевалле типа A_5 . Таким образом, централизатор инволюции h_1 есть произведение групп H и центрального произведения групп Шевалле типов

A_1 и A_5 , а коммутант этого централизатора есть просто центральное произведение групп Шевалле типов A_1 и A_5 . Следовательно, фактор по центру коммутанта централизатора инволюции h_1 есть группа $\mathrm{PSL}_2(K) \times \mathrm{PSL}_6(K)$.

Централизатор инволюции $h_1 h_2$ порождён группой H и группой, порождённой подгруппами X_1, X_2, X_5, X_6 и X_8 , которая имеет тип D_5 , а фактор по центру этого коммутанта изоморфен группе $\mathrm{PEO}_{10}(K)$.

Теперь мы должны научиться отличать группу Шевалле типа E_6 от всех классических групп Шевалле. Это очень просто, если заметить, что не бывает классических групп Шевалле, для которых для некоторой инволюции фактор по центру коммутанта централизатора этой инволюции есть группа, элементарно эквивалентная группе $\mathrm{PSL}_2(K) \times \mathrm{PSL}_6(K)$, а для некоторой другой инволюции фактор по центру коммутанта её централизатора есть группа, элементарно эквивалентная группе $\mathrm{PEO}_{10}(K)$. Это же не может выполняться и для групп типов G_2 и F_4 . $\square$

10. Группа Шевалле типа E_7

В системе корней E_7 имеется 126 корней, из которых 63 корня положительные. Эти положительные корни порождены семью простыми корнями

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2}(e_1 + e_8 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7), & \alpha_2 &= e_1 + e_2, \\ \alpha_3 &= e_2 - e_1, & \alpha_4 &= e_3 - e_2, & \alpha_5 &= e_4 - e_3, & \alpha_6 &= e_5 - e_4, & \alpha_7 &= e_6 - e_5. \end{aligned}$$

Перечислим остальные положительные корни:

$$\begin{aligned} \alpha_8 &= 1 + 3, & \alpha_9 &= 3 + 4, & \alpha_{10} &= 4 + 5, & \alpha_{11} &= 5 + 6, & \alpha_{12} &= 6 + 7, \\ \alpha_{13} &= 1 + 3 + 4, & \alpha_{14} &= 2 + 4, & \alpha_{15} &= 3 + 4 + 5, & \alpha_{16} &= 2 + 3 + 4, \\ \alpha_{17} &= 2 + 4 + 5, & \alpha_{18} &= 4 + 5 + 6, & \alpha_{19} &= 5 + 6 + 7, & \alpha_{20} &= 4 + 5 + 6 + 7, \\ \alpha_{21} &= 1 + 2 + 3 + 4, & \alpha_{22} &= 2 + 3 + 4 + 5, & \alpha_{23} &= 3 + 4 + 5 + 6 + 7, \\ \alpha_{24} &= 2 + 4 + 5 + 6 + 7, & \alpha_{25} &= 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7, & \alpha_{26} &= 1 + 3 + 4 + 5, \\ \alpha_{27} &= 3 + 4 + 5 + 6, & \alpha_{28} &= 2 + 4 + 5 + 6, & \alpha_{29} &= 2 + 3 + 4 + 4 + 5, \\ \alpha_{30} &= 2 + 3 + 4 + 5 + 6, & \alpha_{31} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5, & \alpha_{32} &= 1 + 3 + 4 + 5 + 6, \\ \alpha_{33} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5, & \alpha_{34} &= 1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5, \\ \alpha_{35} &= 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6, & \alpha_{36} &= 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6, \\ \alpha_{37} &= 1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6, & \alpha_{38} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6, \\ \alpha_{39} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6, & \alpha_{40} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6, \\ \alpha_{41} &= 1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6, \\ \alpha_{42} &= 1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6, \\ \alpha_{43} &= 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6, \\ \alpha_{44} &= 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 4 + 4 + 4 + 4 + 5 + 5 + 5 + 6 + 6 + 7, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{45} &= 1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7, & \alpha_{46} &= 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 7, \\
\alpha_{47} &= 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6 + 7, & \alpha_{48} &= 1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 7, \\
\alpha_{49} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7, & \alpha_{50} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 7, \\
\alpha_{51} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6 + 7, \\
\alpha_{52} &= 1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6 + 7, \\
\alpha_{53} &= 1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6 + 7, \\
\alpha_{54} &= 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6 + 7, \\
\alpha_{55} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6 + 6 + 7, \\
\alpha_{56} &= 1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6 + 6 + 7, \\
\alpha_{57} &= 1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6 + 6 + 7, \\
\alpha_{58} &= 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6 + 6 + 7, \\
\alpha_{59} &= 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6 + 6 + 7, \\
\alpha_{60} &= 1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 4 + 5 + 5 + 5 + 6 + 6 + 7, \\
\alpha_{61} &= 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 4 + 5 + 5 + 5 + 6 + 6 + 7, \\
\alpha_{62} &= 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 4 + 4 + 5 + 5 + 5 + 6 + 6 + 7, \\
\alpha_{63} &= 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 4 + 4 + 4 + 4 + 5 + 5 + 5 + 6 + 6 + 7.
\end{aligned}$$

Лемма 13. Существует предложение φ_{E_7} первого порядка, истинное в любой присоединённой группе типа E_7 и ложное во всех классических присоединённых группах Шевалле, а также в присоединённых группах Шевалле типов G_2 , F_2 , E_6 .

Доказательство. Пусть

$$Z(h_1) \ni x = x_1(t_1) \dots x_{63}(t_{63}) h w x_1(u_1) \dots x_{63}(u_{63}),$$

где $h \in H$, w — произведение некоторого количества элементов $w_i(1)$. Тогда

$$h_1 x h_1 = x_1(\pm t_1) \dots x_{63}(\pm t_{63}) h h' w x_1(\pm u_1) \dots x_{63}(\pm u_{63}),$$

причём $h_1(-1)x_i(s)h_1(-1) = x_i(s)$ тогда и только тогда, когда $i = 1, 2, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14, 17, 18, 19, 20, 24, 28, 34, 37, 41, 42, 43, 48, 52, 53, 54, 56, 57, 58, 60, 61, 62$. Кроме того, $h_1(-1)$ должен коммутировать с w . Чтобы $w_{i_1}(1) \dots w_{i_m}(1)$ коммутировало с $h_1(-1)$, нужно, чтобы $w_{\alpha_{i_1}} \dots w_{\alpha_{i_m}}(\alpha_1) = \pm \alpha_1$.

Очевидно, любое произведение элементов $w_1(1)$, $w_2(1)$, $w_4(1)$, $w_5(1)$, $w_6(1)$, $w_7(1)$ и $w_{34}(1)$ коммутирует с $h_1(-1)$, а другие представители группы Вейля не коммутируют с инволюцией $h_1(-1)$. Отсюда следует, что централизатор инволюции $h_1(-1)$ есть произведение группы H и подгруппы в G , порождённой X_1 , X_2 , X_4 , X_5 , X_6 , X_7 и X_{34} , откуда получаем, что фактор по центру коммутанта централизатора $h_1(-1)$ изоморфен группе $\text{PSL}_2(K) \times \text{PEO}_{12}(K)$. Посмотрим, существует ли ещё какая-то группа Шевалле, для которой фактор по центру коммутанта централизатора некоторой инволюции изоморфен этой группе.

Очевидно, что такое невозможно ни для групп G_2 , F_4 , E_6 , ни для групп типов A_l , C_l , D_l . Единственным возможным вариантом является группа $\text{EO}_{15}(K)$ — группа типа B_7 . Однако в этой группе существует инволюция $\text{diag}[\underbrace{-1, \dots, -1}_8, \underbrace{1, \dots, 1}_7]$, у которой фактор по центру коммутанта централизатора изоморфен $\text{PEO}_8(K) \times \text{EO}_7(K)$, что невозможно для группы Шевалле типа E_7 , так как в ней нет подгруппы $\text{EO}_7(K)$ (так как никакие корни системы E_7 не образуют подсистему B_3).

Таким образом, группа Шевалле типа E_7 не может быть элементарно эквивалентна группе Шевалле типа B_7 , а значит, никакой из рассмотренных групп. $\square$

11. Группа Шевалле типа E_8

В системе корней E_8 имеется 240 корней, из которых 120 корней положительные. Эти положительные корни порождены восемью простыми корнями

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2}(e_1 + e_8 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7), & \alpha_2 &= e_1 + e_2, & \alpha_3 &= e_2 - e_1, \\ \alpha_4 &= e_3 - e_2, & \alpha_5 &= e_4 - e_3, & \alpha_6 &= e_5 - e_4, & \alpha_7 &= e_6 - e_5, & \alpha_8 &= e_7 - e_6. \end{aligned}$$

Перечислим остальные положительные корни (для краткости пропуская знаки +):

$$\begin{aligned} \alpha_9 &= 13, & \alpha_{10} &= 24, & \alpha_{11} &= 34, & \alpha_{12} &= 45, & \alpha_{13} &= 56, & \alpha_{14} &= 67, & \alpha_{15} &= 78, \\ \alpha_{16} &= 134, & \alpha_{17} &= 234, & \alpha_{18} &= 245, & \alpha_{19} &= 1234, & \alpha_{20} &= 345, & \alpha_{21} &= 456, \\ \alpha_{22} &= 1345, & \alpha_{23} &= 567, & \alpha_{24} &= 2456, & \alpha_{25} &= 3456, & \alpha_{26} &= 678, & \alpha_{27} &= 4567, \\ \alpha_{28} &= 13456, & \alpha_{29} &= 2345, & \alpha_{30} &= 23445, & \alpha_{31} &= 23456, & \alpha_{32} &= 12345, \\ \alpha_{33} &= 23567, & \alpha_{34} &= 123445, & \alpha_{35} &= 123456, & \alpha_{36} &= 34567, & \alpha_{37} &= 1233445, \\ \alpha_{38} &= 45678, & \alpha_{39} &= 234456, & \alpha_{40} &= 1234456, & \alpha_{41} &= 134567, & \alpha_{42} &= 5678, \\ \alpha_{43} &= 234567, & \alpha_{44} &= 1234567, & \alpha_{45} &= 245678, & \alpha_{46} &= 2344556, \\ \alpha_{47} &= 12344556, & \alpha_{48} &= 345678, & \alpha_{49} &= 12334456, & \alpha_{50} &= 1345678, \\ \alpha_{51} &= 2344567, & \alpha_{52} &= 12344567, & \alpha_{53} &= 2345678, & \alpha_{54} &= 23445567, \\ \alpha_{55} &= 123344556, & \alpha_{56} &= 23445566778, & \alpha_{57} &= 23445678, & \alpha_{58} &= 1233444556, \\ \alpha_{59} &= 234455667, & \alpha_{60} &= 12345678, & \alpha_{61} &= 123445567, & \alpha_{62} &= 1234455667, \\ \alpha_{63} &= 123445678, & \alpha_{64} &= 12233444556, & \alpha_{65} &= 123344567, & \alpha_{66} &= 1233445567, \\ \alpha_{67} &= 12334445567, & \alpha_{68} &= 12334455667, & \alpha_{69} &= 1233445678, \\ \alpha_{70} &= 122334445567, & \alpha_{71} &= 234455678, & \alpha_{72} &= 2344556678, \\ \alpha_{73} &= 1234455678, & \alpha_{74} &= 12344556678, & \alpha_{75} &= 123344455678, \\ \alpha_{76} &= 123344455667, & \alpha_{77} &= 12334455678, & \alpha_{78} &= 123445566778, \\ \alpha_{79} &= 123344556678, & \alpha_{80} &= 1233445566778, & \alpha_{81} &= 1233444556678, \end{aligned}$$

$\alpha_{82} = 123344455566778, \quad \alpha_{83} = 1233444555667, \quad \alpha_{84} = 12334445556678,$
 $\alpha_{85} = 123344455566778, \quad \alpha_{86} = 1233444555666778, \quad \alpha_{87} = 1223344455678,$
 $\alpha_{88} = 1223344455667, \quad \alpha_{89} = 12233444556678, \quad \alpha_{90} = 122334445566778,$
 $\alpha_{91} = 12233444555667, \quad \alpha_{92} = 1223344455566778, \quad \alpha_{93} = 1223344455566778,$
 $\alpha_{94} = 12233444555666778, \quad \alpha_{95} = 122334444555667,$
 $\alpha_{96} = 122334444555666778, \quad \alpha_{97} = 12233444455566778,$
 $\alpha_{98} = 122334444555666778, \quad \alpha_{99} = 122334444555666778,$
 $\alpha_{100} = 1223334444555667, \quad \alpha_{101} = 12233344445556678,$
 $\alpha_{102} = 122333444455566778, \quad \alpha_{103} = 1223334444555666778,$
 $\alpha_{104} = 1223334444555666778, \quad \alpha_{105} = 12233344444555666778,$
 $\alpha_{106} = 122233344444555666778, \quad \alpha_{107} = 11223334444555667,$
 $\alpha_{108} = 112233344445556678, \quad \alpha_{109} = 1122333444455566778,$
 $\alpha_{110} = 11223334444555666778, \quad \alpha_{111} = 11223334444555666778,$
 $\alpha_{112} = 112233344444555666778, \quad \alpha_{113} = 112233344444555666778,$
 $\alpha_{114} = 1122233344444555666778, \quad \alpha_{115} = 1122233344444555666778,$
 $\alpha_{116} = 11222333444444555666778, \quad \alpha_{117} = 11222333444444555666778,$
 $\alpha_{118} = 112223334444445556666778, \quad \alpha_{119} = 112223334444445556666778,$
 $\alpha_{120} = 11222333444444555666677788.$

Лемма 14. Существует предложение φ_{E_8} первого порядка, истинное в любой присоединённой группе типа E_8 и ложное во всех присоединённых группах Шевалле других типов.

Доказательство. Рассмотрим централизатор инволюции h_1 . Пусть

$$Z(h_1) \ni x = x_1(t_1) \dots x_{120}(t_{63}) h w x_1(u_1) \dots x_{120}(u_{120}),$$

где $h \in H$, w — произведение некоторого количества элементов $w_i(1)$. Тогда

$$h_1 x h_1 = x_1(\pm t_1) \dots x_{120}(\pm t_{120}) h h' w x_1(\pm u_1) \dots x_{120}(\pm u_{120}),$$

причём $h_1(-1)x_i(s)h_1(-1) = x_i(s)$ тогда и только тогда, когда $i = 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 18, 19, 21, 23, 24, 26, 27, 33, 37, 38, 42, 45, 49, 55, 58, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 75, 76, 77, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 113, 115, 116, 117, 118, 119, 120$.

Очевидно, любое произведение элементов $w_1(1), w_2(1), w_4(1), w_5(1), w_6(1), w_7(1), w_8(1)$ и $w_{37}(1)$ коммутирует с $h_1(-1)$, а другие представители группы Вейля не коммутируют, поэтому централизатор инволюции $h_1(-1)$ есть произведение группы H и подгруппы в G , порождённой $X_1, X_2, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8$ и X_{37} .

Фактор по центру коммутанта централизатора этой инволюции изоморфен группе $\text{PSL}_2(K) \times G(E_7, K)$, откуда сразу следует, что группа типа E_8 не может быть элементарно эквивалентна никакой другой группе Шевалле. $\square$

Из лемм 2—14 вытекает следующее утверждение.

Предложение 4. *Если две (элементарные) группы Шевалле над бесконечными полями характеристики, не равной 2, элементарно эквивалентны, то соответствующие системы корней совпадают.*

12. Определимость поля в группах Шевалле

Чтобы доказать, что в каждой из групп Шевалле определимо поле, нам достаточно доказать определимость поля в присоединённой группе Шевалле типа A_1 (т. е. в $\mathrm{PSL}_2(K)$).

Лемма 15. *Если группы $\mathrm{PSL}_2(K)$ и $\mathrm{PSL}_2(K')$ (K, K' — бесконечные поля характеристики, отличной от двух) элементарно эквивалентны, то поля K, K' элементарно эквивалентны.*

Доказательство. Пусть мы имеем группу $\mathrm{PSL}_2(K)$. Рассмотрим матрицы, удовлетворяющие формуле

$$\mathrm{Cell}(M) := M^2 \neq 1 \wedge \exists X ((XMX^{-1})M = M(XMX^{-1}) \wedge X^2M \neq MX^2).$$

Покажем, что эти матрицы имеют в некотором базисе вид

$$A = \pm \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть матрица M диагонализирована в поле $\overline{K}$. Тогда в некотором базисе она имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1/\alpha \end{pmatrix}.$$

Матрица такого вида либо коммутирует с диагональной матрицей, либо возможна ситуация $AB = -BA$ в группе $\mathrm{SL}_2(K)$, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

но в этом случае $A^2 = 1$ в группе $\mathrm{PSL}_2(K)$, откуда следует, что $M^2 = 1$, а это противоречит первому условию формулы Cell .

Любая матрица M , сопряжённая к матрице вида

$$A = \pm \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

удовлетворяет формуле Cell (можно выбрать матрицу X диагональной с разными элементами на диагонали, при этом не равными в квадрате ± 1).

Фиксируем некоторую матрицу A , удовлетворяющую формуле Cell . Рассмотрим все матрицы, коммутирующие с A . Пусть для данной матрицы A это множество обозначается через $\mathcal{X}_A$. Это матрицы, которые в одном и том же базисе

приводятся к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in K.$$

Нормализатор $N(\mathcal{X}_A)$ множества $\mathcal{X}_A$ состоит из матриц, имеющих в данном базисе вид

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1/\alpha \end{pmatrix}.$$

Выберем одну матрицу B из $N(\mathcal{X}_A) \setminus \mathcal{X}_A$ и все коммутирующие с ней матрицы. Обозначим выбранное множество через $\mathcal{D}_{A,B}$. Можно выбрать базис, в котором матрицы из $\mathcal{D}_{A,B}$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1/\alpha \end{pmatrix},$$

а матрицы из $\mathcal{X}_A$ имеют вид

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, рассмотрим множество $\mathcal{E}_{A,B}$ матриц, нормализующих $\mathcal{D}_{A,B}$, но не принадлежащих $\mathcal{D}_{A,B}$. Они имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -1/\gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

Через $\mathcal{Y}_{A,B}$ обозначим матрицы, сопряжённые матрицам из $\mathcal{X}_A$ с помощью матриц из $\mathcal{E}_{A,B}$. Они имеют вид

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь введём формулу

$$\varphi(M, N) := (M \in \mathcal{X}_A) \wedge (N \in \mathcal{Y}_{A,B}) \wedge (MNM \in \mathcal{E}_{A,B}).$$

Если для матрицы

$$M = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

выполнено $\varphi(M, N)$ для некоторой N , то

$$N = M^\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/t & 1 \end{pmatrix}.$$

Будем писать

$$E_t := \mathcal{E}(A_t) = A_t A_t^\varphi A_t = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -1/t & 0 \end{pmatrix}.$$

Фиксируем

$$A_u = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$E_t E_u^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -1/t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -u \\ 1/u & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t/u & 0 \\ 0 & u/t \end{pmatrix},$$

то

$$E_{ts/u} = E_t E_u^{-1} E_s.$$

Заметим, что так как мы имеем дело с группой $\mathrm{PSL}_2(K)$, то отображение $\mathcal{E}: \mathcal{X}_A \rightarrow \mathcal{E}_{A,B}$, $\mathcal{X}_A \mapsto \mathcal{E}(\mathcal{X}_A)$, необратимо (а именно не мономорфно), так как $\mathcal{E}(A_t) = \mathcal{E}(A_{-t})$ в группе $\mathrm{PSL}_2(K)$.

Предположим, что мы имеем A_t и A_s и хотим найти $A_t \otimes A_s = A_{ts/u}$. В этом случае отображение $A_t \mapsto t/u$ будет изоморфизмом между множеством $\mathcal{X}_A$ (с операцией сложения $A_t \oplus A_s = A_t A_s$ и операцией умножения $\otimes$) и полем K . Так как $E_{ts/u} = \mathcal{E}(A_t) \mathcal{E}(A_u)^{-1} \mathcal{E}(A_s)$, то нам остаётся только восстановить $A_{ts/u}$ по $E_{ts/u}$. Имеются два кандидата, $A_{ts/u}$ и $A_{-ts/u}$, и нам нужно выбрать из них правильный.

Мы имеем следующее соотношение:

$$A_t A_{ts/u} = A_{t(1+s/u)} = A_{t/u(s+u)} = A_t \otimes (A_s A_u),$$

откуда

$$\mathcal{E}(A_t A_{ts/u}) = \mathcal{E}(A_t) \mathcal{E}(A_u)^{-1} \mathcal{E}(A_s A_u)$$

при $t, s \neq 0$. При этом имеем

$$A_t A_{-ts/u} = A_{t/u(u-s)}.$$

Соотношение

$$\mathcal{E}(A_t A_{-ts/u}) = \mathcal{E}(A_t) \mathcal{E}(A_u)^{-1} \mathcal{E}(A_s A_u)$$

при $t, s \neq 0$, как легко проверить, выполняться не может, поэтому искомую формулу умножения можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned} A_w = A_t \otimes A_s &\iff (A_t = 1 \wedge A_w = 1) \vee (A_s = 1 \wedge A_w = 1) \vee \\ &\vee (A_s \neq 1 \wedge A_t \neq 1 \wedge \\ &\wedge \mathcal{E}(A_w) = \mathcal{E}(A_t) \mathcal{E}(A_u)^{-1} \mathcal{E}(A_s) \wedge \mathcal{E}(A_t A_w) = \mathcal{E}(A_t) \mathcal{E}(A_u)^{-1} \mathcal{E}(A_s A_u)). \end{aligned}$$

Таким образом, искомый изоморфизм построен. Теперь мы видим, что поле K определимо в группе $\mathrm{PSL}_2(K)$, т. е. существуют такие формулы $\varphi(X_1, X_2, \dots, X_l; Y)$, $\psi(X_1, \dots, X_l)$, $\mathrm{Add}(Y_1, Y_2, Y_3)$, $\mathrm{Mult}(Y_1, Y_2, Y_3)$, что для любых $X_1, \dots, X_l$, удовлетворяющих формуле $\psi(\dots)$, все такие Y , что $\varphi(X_1, \dots, X_l; Y)$, с операциями сложения и умножения, заданными формулами $\mathrm{Add}(\dots)$ и $\mathrm{Mult}(\dots)$, образуют поле, изоморфное полю K .

Следовательно, если группы $\mathrm{PSL}_2(K)$ и $\mathrm{PSL}_2(K')$ элементарно эквивалентны, то поля K , K' элементарно эквивалентны. $\square$

Предложение 5. Если две присоединённые элементарные группы Шевалле $G(\Phi, K)$ и $G(\Phi, K')$ (K , K' — бесконечные поля характеристики, отличной от двух) элементарно эквивалентны, то поля K , K' элементарно эквивалентны.

Доказательство. Для данной системы корней Φ рассмотрим фактор по центру коммутанта централизатора подходящей инволюции (см. леммы 2–14) и выберем в нём ту из компонент прямого произведения, которая изоморфна $\mathrm{PSL}_2(K)$. После этого воспользуемся леммой 15. $\square$

13. Изоморфизм решёток весов

Нам осталось доказать следующее утверждение.

Предложение 6. *Если две (элементарные) группы Шевалле элементарно эквивалентны, то их решётки весов совпадают.*

Доказательство. Сразу перейдём к элементарным группам Шевалле. Заметим, что если две группы Шевалле элементарно эквивалентны, то их центры изоморфны, так как конечны. Центр группы Шевалле является фактор-группой её решётки весов по решётке корней. Мы уже знаем, что две элементарные группы Шевалле имеют один и тот же тип. Тогда фактор решётки весов по решётке корней полностью определяет саму решётку весов, за исключением единственного случая: когда мы имеем дело с группой Шевалле типа D_{2m} , $m \geq 3$, и такой промежуточной решёткой, что порядок фактора решётки весов по решётке корней равен 2. В этом случае могут возникать две неизоморфные группы Шевалле: одна из них — $\mathrm{SO}_{4m}(K)$ (коммутант этой группы в элементарном случае), а другая — так называемая «полуспинорная группа».

Напомним (см. [4]), что корни системы D_{2m} — это векторы $\pm e_i \pm e_j$, $i \neq j$, в ортонормированном базисе $e_1, \dots, e_{2m}$ $2m$ -мерного евклидова пространства, решётка весов этой системы состоит из векторов с чётной суммой целочисленной координат, универсальная решётка имеет вид

$$\bigoplus_{i=1}^{2m} \mathbb{Z}e_i + \mathbb{Z}\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2m} e_i\right),$$

первая («ортогональная») промежуточная решётка Λ_1 имеет вид

$$\bigoplus_{i=1}^{2m} \mathbb{Z}e_i,$$

вторая («полуспинорная») решётка Λ_2 — вид

$$\bigoplus_{i=1}^{2m-1} \mathbb{Z}(e_i - e_{i+1}) \oplus \mathbb{Z}(e_{2m-1} + e_{2m}) + \mathbb{Z}\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2m} e_i\right).$$

Предположим сначала, что мы имеем дело с группой типа D_{2m} , $m \geq 4$. Тогда мы можем рассмотреть (выделить формулой) такую инволюцию j , у которой фактор по центру коммутанта централизатора имеет тип $D_6 \times D_{2m-6}$ (например, это инволюция $h_{\alpha_1}(-1)h_{\alpha_3}(-1)h_{\alpha_5}(-1)$). Коммутант централизатора инволюции j есть центральное произведение группы типа D_6 на группу

типа D_{2m-6} , при этом тип весовой решётки у подгруппы типа D_6 будет тем же, что и у изначальной группы (если изначально была ортогональная группа, то и подгруппа будет ортогональной, если изначально была полуспинорная группа, то и подгруппа будет полуспинорной). Поэтому перейдём к подгруппе типа D_6 , будем определять её тип решётки.

Пусть нам изначально дана группа G типа D_6 с промежуточной решёткой. Будем считать, что либо $G = G_1 = \mathrm{SO}_{12}(K)'$, либо $G = G_2$ — полуспинорная группа (фактор группы $\mathrm{Spin}_{12}(K)$ по центральной подгруппе из двух элементов).

У каждой из групп G_1, G_2 центр состоит из двух элементов и факторизация по центру даёт присоединённую группу $\mathrm{PSO}_{12}(K)'$, уже изученную нами.

Подгруппа $H_1 = H(G_1)$ порождается элементами

$$h_{\alpha_1}(t_1), \quad h_{\alpha_2}(t_2), \quad h_{\alpha_3}(t_3), \quad h_{\alpha_4}(t_4), \quad h_{\alpha_5}(t_5), \quad h_{\alpha_6}(t_6)$$

с соотношением

$$h_{\alpha_5}(-1)h_{\alpha_6}(-1) = 1,$$

а подгруппа $H_2 = H(G_2)$ порождается теми же элементами с соотношением

$$h_{\alpha_1}(-1)h_{\alpha_3}(-1)h_{\alpha_5}(-1) = 1.$$

В группе $\mathrm{PSO}_{12}(K)$ при $i \notin K$ в подгруппе H имеется 16 инволюций, которые порождаются элементами

$$h_{\alpha_1}(-1), \quad h_{\alpha_2}(-1), \quad h_{\alpha_3}(-1), \quad h_{\alpha_4}(-1).$$

Максимальное же множество коммутирующих между собой инволюций состоит из 2^9 инволюций, которые порождаются перечисленными элементами, а также элементами

$$\begin{aligned} w_{e_1-e_2}w_{e_1+e_2}, \quad w_{e_2-e_3}w_{e_2+e_3}, \quad w_{e_3-e_4}w_{e_3+e_4}, \\ w_{e_4-e_5}w_{e_4+e_5}, \quad w_{e_5-e_6}w_{e_5+e_6} = w_{\alpha_5}w_{\alpha_6}. \end{aligned}$$

Если к тому же $i \in K$, то добавляется коммутирующая со всеми перечисленными элементами инволюция $h_{\alpha_5}(i)h_{\alpha_6}(i)$ и мы получаем множество из 2^{10} (больше в группе $\mathrm{PSO}_{12}(K)$ никак не может быть!) инволюций.

Теперь заметим, что в группе $G_1 = \mathrm{SO}_{12}(K)$ прообразы этих инволюций также остаются инволюциями, так как в этой группе по-прежнему выполняется соотношение $h_{e_i-e_{i+1}}(-1) = h_{e_i+e_{i+1}}(-1)$, $i = 1, \dots, 5$. Кроме того, добавляется центральная инволюция $-1 = h_{\alpha_1}(-1)h_{\alpha_3}(-1)h_{\alpha_5}(-1)$.

В полуспинорной группе G_2 соотношение $h_{e_i-e_{i+1}}(-1) = h_{e_i+e_{i+1}}(-1)$ перестаёт выполняться, поэтому

$$(w_{e_i-e_{i+1}}w_{e_i+e_{i+1}})^2 = h_{e_i-e_{i+1}}(-1)h_{e_i+e_{i+1}}(-1) \neq 1.$$

Аналогично

$$(h_{\alpha_5}(i)h_{\alpha_6}(i))^2 = h_{\alpha_5}(-1)h_{\alpha_6}(-1) \neq 1.$$

Таким образом, прообразы только 16 инволюций из присоединённой группы являются инволюциями в полуспинорной группе.

Итак, легко пишется предложение, различающее группы G_1 и G_2 , т. е. они не являются элементарно эквивалентными.

Значит, у элементарно эквивалентных групп Шевалле решётки весов совпадают. $\square$

Из теоремы 1 и предложений 3, 4, 5, 6 следует основная теорема.

Основная теорема. Пусть $G = G_\pi(\Phi, K)$ и $G' = G_{\pi'}(\Phi', K')$ (или $E_\pi(\Phi, K)$ и $E_{\pi'}(\Phi', K')$) — две (элементарные) группы Шевалле над бесконечными полями K и K' характеристики, отличной от двух, с решётками весов Λ и Λ' соответственно. Тогда группы G и G' элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда системы корней Φ и Φ' изоморфны, поля K и K' элементарно эквивалентны, решётки Λ и Λ' совпадают.

Литература

- [1] Бунина Е. И. Элементарная эквивалентность унитарных линейных групп над кольцами и телами // Успехи мат. наук. — 1998. — Т. 53, № 2. — С. 137—138.
- [2] Бунина Е. И. Элементарная эквивалентность групп Шевалле // Успехи мат. наук. — 2001. — Т. 56, № 1. — С. 157—158.
- [3] Бунина Е. И. Группы Шевалле над полями и их элементарные свойства // Успехи мат. наук. — 2004. — Т. 59, № 5. — С. 952—953.
- [4] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса, группы, порождённые отражениями, системы корней. — М.: Мир, 1972.
- [5] Голубков А. Ю. Первичный радикал классических групп над ассоциативными кольцами: Дис... канд. физ.-мат. наук. — М., 2001.
- [6] Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. — М.: Мир, 1977.
- [7] Копейко В. И. Стабилизация симплектических групп над кольцом полиномов // Мат. сб. — 1978. — Т. 106, № 1. — С. 94—107.
- [8] Копейко В. И. Унитарные и ортогональные группы над кольцами с инволюцией // Алгебра и дискретная математика. — Элиста: Калмыцкий гос. ун-т, 1985. — С. 3—14.
- [9] Мальцев А. И. Об элементарных свойствах линейных групп // Проблемы математики и механики. — Новосибирск, 1961. — С. 110—132.
- [10] Постников М. М. Лекции по геометрии. Группы и алгебры Ли. Семестр V. — М.: Наука, 1982.
- [11] Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. — М.: Мир, 1975.
- [12] Суслин А. А. Одна теорема Кона // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. — 1976. — Т. 64. — С. 127—130.
- [13] Суслин А. А. О структуре специальной линейной группы над кольцом полиномов // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1977. — Т. 41, № 2. — С. 235—252.
- [14] Суслин А. А., Копейко В. И. Квадратичные модули и ортогональные группы над кольцами полиномов // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. — 1977. — Т. 71. — С. 216—250.
- [15] Хамфрис Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. — М.: МЦНМО, 2003.

- [16] Abe E. Chevalley groups over local rings // *Tôhoku Math. J.* — 1969. — Vol. 21, no. 3. — P. 474–494.
- [17] Abe E. Whitehead groups of Chevalley groups over Laurent polynomial rings // *Comm. Algebra.* — 1983. — Vol. 11, no. 12. — P. 1271–1308.
- [18] Abe E. Whitehead groups of Chevalley groups over Laurent polynomial rings. — Preprint. — Univ. Tsukuba, 1988.
- [19] Abe E. Normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings // *Algebraic K-Theory and Algebraic Number Theory. Proc. Semin., Honolulu/Hawaii 1987.* — Amer. Math. Soc., 1989. (Contemp. Math.; Vol. 83). — P. 1–17.
- [20] Abe E. Automorphisms of Chevalley groups over commutative rings // *Алгебра и анализ.* — 1993. — Т. 5, № 3. — С. 74–90.
- [21] Abe E., Hurley J. Centers of Chevalley groups over commutative rings // *Comm. Algebra.* — 1988. — Vol. 16, no. 1. — P. 57–74.
- [22] Abe E., Suzuki K. On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings // *Tôhoku Math. J.* — 1976. — Vol. 28, no. 1. — P. 185–198.
- [23] Bass H., Milnor J., Serre J.-P. Solution of the congruence subgroup problem for SL_n ($n \geq 3$) and Sp_{2n} ($n \geq 2$) // *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* — 1967. — No. 33. — P. 59–137.
- [24] Beidar C. I., Mikhalev A. V. On Malcev's theorem on elementary equivalence of linear groups // *Contemp. Math.* — 1992. — Vol. 131. — P. 29–35.
- [25] Borel A. Properties and linear representations of Chevalley groups // *Semin. Algebr. Groups Related Finite Groups, Princeton 1968/69.* — Berlin: Springer, 1970. — (Lect. Notes Math.; Vol. 131). — P. 1–55.
- [26] Bunina E. I., Mikhalev A. V. Combinatorial and logical aspects of linear groups and Chevalley groups // *Acta Appl. Math.* — 2005. — Vol. 85, nos. 1–3. — P. 57–74.
- [27] Chevalley C. Certains schémas de groupes semi-simples // *Sem. Bourbaki.* — 1960–1961. — Vol. 219. — P. 1–16.
- [28] Cohn P. On the structure of the GL_2 of a ring // *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* — 1966. — No. 30. — P. 365–413.
- [29] Costa D. L. Zero-dimensionality and the GE_2 of polynomial rings // *J. Pure Appl. Algebra.* — 1988. — Vol. 50. — P. 223–229.
- [30] Grünewald F., Mennicke J., Vaserstein L. N. On symplectic groups over polynomial rings // *Math. Z.* — 1991. — Vol. 206, no. 1. — P. 35–56.
- [31] Matsumoto H. Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés // *Ann. Sci. École Norm. Sup., 4eme ser.* — 1969. — Vol. 2. — P. 1–62.
- [32] Stein M. R. Surjective stability in dimension 0 for K_2 and related functors // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1973. — Vol. 178, no. 1. — P. 165–191.
- [33] Swan R. Generators and relations for certain special linear groups // *Adv. Math.* — 1971. — Vol. 6. — P. 1–77.
- [34] Vavilov N. A., Plotkin E. B. Chevalley groups over commutative rings. I. Elementary calculations // *Acta Appl. Math.* — 1996. — Vol. 45. — P. 73–113.
- [35] Vorst T. The general linear group of polynomial rings over regular rings // *Comm. Algebra.* — 1981. — Vol. 9, no. 5. — P. 499–509.

