Алгебра с конечным базисом Грёбнера и неразрешимой проблемой делителей нуля

И. А. ИВАНОВ-ПОГОДАЕВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: ivanov-pogodaev@mail.ru

УДК 512.552.4+512.532.2

Ключевые слова: базис Грёбнера, делители нуля, алгоритмическая разрешимость, конечно определённые полугруппы.

Аннотация

В настоящей работе строится пример алгебры с идеалом определяющих соотношений, заданным конечным базисом Грёбнера, для которой вопрос, является ли данный элемент делителем нуля, алгоритмически неразрешим. Тем самым даётся отрицательный ответ на вопрос, поставленный В. Н. Латышевым.

Abstract

I. A. Ivanov-Pogodaev, Finite Gröbner basis algebra with unsolvable problem of zero divisors, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 8, pp. 79—96.

This work presents a sample construction of an algebra with the ideal of relations defined by a finite Gröbner basis for which the question whether this element is a zero divisor is algorithmically unsolvable. This gives the negative answer to a question raised by V. N. Latyshev.

Известно, что проблема равенства в конечно определённой полугруппе, а следовательно, и в алгебре алгоритмически неразрешима. С другой стороны, эта проблема разрешима, если идеал соотношений задан конечным базисом Грёбнера, замкнутым относительно композиции [8]. В этой связи В. Н. Латышев в 1980 году поставил вопрос о существовании алгоритма определения, является ли данный элемент делителем нуля или нильпотентным элементом в случае, когда идеал соотношений задан конечным базисом Грёбнера.

В настоящей работе строится пример алгебры с идеалом определяющих соотношений, заданным конечным базисом Грёбнера, для которой вопрос, является ли данный элемент делителем нуля, алгоритмически неразрешим. Тем самым даётся отрицательный ответ на вопрос, поставленный В. Н. Латышевым.

В. Н. Латышевым был поставлен также аналогичный вопрос для мономиальных автоматных алгебр. Для этого случая существование алгоритма проверки, является ли данный элемент нильпотентным, было установлено В. В. Борисенко,

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 8, с. 79—96.

а существование алгоритма для делителей нуля — А. Я. Беловым и В. В. Борисенко [7]. Аналогичный результат для некоторого класса квадратичных алгебр был получен Н. К. Иыуду [2, 3], а также Д. И. Пионтковским [4]. Все эти результаты вытекают из разрешимости системы линейных рекуррент на дереве [1]. Из результата работы [1] вытекает также существование алгоритма для установления делителей нуля для целого класса алгебр со свойством *ограниченной переработки* (аналогичным условию *малых сокращений* в теории групп).

Пусть на мономах алгебры A с фиксированной системой образующих задан порядок, для которого существует *нормальный базис*, т. е. базис из мономов, не представимых в виде линейной комбинации меньших. Алгебра A называется *алгеброй с ограниченной переработкой справа*, если при некотором $d \in \mathbb{N}$ для любого нормального слова W в алгебре A и любой образующей a_i выполняется равенство

$$Wa_i = \bar{W} \cdot \left(\sum_j \lambda_{ij} W_j\right),$$

где $\lambda_j \in \mathbb{F}$ для всех j, W_j — нормальные слова алгебры A, $|W_j| \leqslant 2d$, а слово $\bar{W}$ — начальный кусок слова W длины $|W| - d$.

Если множество слов нормального базиса образует регулярный язык, каждому слову отвечает вершина автомата и все коэффициенты λ_{ij} зависят только от типа вершины графа, отвечающего слову W, то A есть *автоматная алгебра с ограниченной переработкой справа*. Аналогичным образом определяется (*автоматная*) *алгебра с ограниченной переработкой слева*.

Из результата данной статьи следует, что условие ограниченной переработки является необходимым.

Построение основано на подходе, связанным с использованием машины Минского. Для этого в полугруппе конструируется машина Минского, реализующая универсальную машину Тьюринга, одна элементарная операция работы которой соответствует умножению слева на выделенную букву. Остановка машины соответствует обнулению слова.

1. План построения

Пусть $\mathbb{A}$ — алгебра над полем $\mathbb{K}$. Фиксируем конечный алфавит образующих $\{a_1, \ldots, a_N\}$. *Словом в алгебре* называется слово в алфавите образующих. Порядку на образующих отвечает лексикографический порядок на множестве слов.

Слова в алфавите образуют полугруппу. Основной идеей построения является реализация универсальной машины Тьюринга в этой полугруппе с помощью определяющих соотношений. Мы будем использовать универсальную машину Тьюринга, построенную М. Минским. Данная машина имеет семь состояний и использует четырёхцветную ленту. Она полностью задаётся 28 инструкциями, 27 из которых имеют вид

$$(i, j) \to (L, q(i, j), t(i, j)) \quad \text{или} \quad (i, j) \to (R, q(i, j), t(i, j)),$$

где $0 \leqslant i \leqslant 6$ — текущее состояние машины, $0 \leqslant j \leqslant 3$ — цвет текущей клетки, L или R (налево или направо) — направление сдвига головки машины после выполнения данной инструкции, $q(i, j)$ — состояние, в которое переходит машина после выполнения данной инструкции, $t(i, j)$ — цвет, в который красится текущая клетка (из которой головка уходит). Таким образом, инструкция $(2, 3) \to (L, 3, 1)$ означает следующее: если головка машины находится в клетке цвета 3 и машина находится в состоянии 2, клетка перекрашивается в цвет 1, головка перемещается на одну клетку влево, машина переходит в состояние 3.

Последняя инструкция — $(4, 3) \to$ СТОП. Она означает, что если машина находится в состоянии 4, а текущая клетка имеет цвет 3, то машина заканчивает работу.

Для обозначения семи состояний головки машины будем использовать буквы Q_i, $0 \leqslant k \leqslant 6$. Для обозначения цвета текущей клетки будем использовать буквы P_j, где $0 \leqslant j \leqslant 3$.

Действие машины Тьюринга зависит от текущего состояния Q_i и цвета текущей ячейки P_j, т. е. каждой паре Q_i и P_j соответствует одна инструкция машины Тьюринга.

Назовём инструкции, сдвигающие головку влево, левыми, а сдвигающие вправо — правыми. Таким образом, у нас есть левые пары (i, j), соответствующие левым инструкциям, правые пары, соответствующие правым инструкциям, и инструкция СТОП, соответствующая паре $(4, 3)$. Для обозначения левого направления движения в текущий момент будем использовать букву M_0, для обозначения правого — букву M_1.

Будем считать *непустыми клетками* все клетки ненулевого цвета.

Таким образом, имеются два конечных куска ленты, слева и справа от текущей клетки. Пусть $u_0, u_1, \ldots, u_x$ — цвета клеток (справа налево) начиная с ячейки слева от текущей. Таким образом, u_x — цвет крайней слева непустой ячейки (не первого цвета). Аналогично, пусть $v_0, v_1, \ldots, v_y$ — цвета клеток (слева направо) начиная с ячейки справа от текущей. v_y — цвет крайней справа непустой ячейки. Пусть

$$k = u_0 4^0 + u_1 4^1 + \ldots + u_x 4^x, \quad n = v_0 4^0 + v_1 4^1 + \ldots + v_y 4^y.$$

Для хранения k будем использовать степени a и c. Для хранения n — степени b и d.

Перекрашивание клеток и движение головки мы будем моделировать с помощью вычислений с участием степеней a, b, c и d. Таким образом, процесс перехода от одного состояния машины к другому будет состоять из следующих частей: сначала преобразовываем степень a в степень c и степень b в степень d, меняем состояние головки Q_i, вычисляем новый цвет текущей ячейки P_j, затем переводим степени b и d в степени a и c.

Состояния машины мы будем моделировать словами $La^k b^n Q_i P_j M_\phi H_\alpha R$. Четвёрки чисел (i, j, k, n) достаточно для описания полного состояния машины со всей лентой. При переходе от одного состояния машины к другому необходимо реализовать определённый вычислительный процесс.

1. Если (i, j) — левая пара, нужно поделить k (степень буквы a) на 4 с остатком r. Этот остаток есть цвет клетки слева от головки, и он будет соответствовать новому значению P_j. Если же (i, j) — правая пара, нужно делить n, в этом случае нам нужен цвет клетки справа от головки. Деление производится с помощью преобразования $a^k \to c^{[\frac{k}{4}]}$ (или $b^n \to d^{[\frac{n}{4}]}$).
2. Умножить n (или соответственно k) на 4 (так мы реализуем сдвиг клеток) и добавить к этому $t(i, j)$ — новый цвет перекрасившейся текущей ячейки. Умножение производится с помощью преобразования $b^n \to d^{4n}$ (или $a^k \to c^{4k}$).
3. Заменить Q_i на $Q_{q(i,j)}$ (в соответствии с инструкцией для (i, j)).
4. Заменить P_i на остаток из пункта 1.
5. Заменить M_ϕ на M_0 или M_1 в соответствии с ориентацией новой пары (i, j).
6. Восстановить новые значения степеней a и b: $c^k \to a^k$, $d^n \to b^n$.

Таким образом, весь процесс перехода от одного состояния к другому можно разбить на три этапа: преобразование степени a в степень c, преобразование степени b в степень d и восстановление новых значений степеней a и b по степеням c и d.

Для того чтобы контролировать, какой этап реализуется, будем использовать дополнительный флаг — бит информации: в слове будет буква H_α, где $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$. Эта буква служит индикатором, какая часть процесса в настоящее время реализуется. H_0 означает, что в данный момент степень b преобразуется в степень d, H_1 означает, что в данный момент степень a преобразуется в степень c, H_2 означает, что идёт обратный процесс: степени c и d преобразуются в степени a и b. Все операции будем проводить с помощью слов вида $La^k b^n Q_i P_j M_\phi H_\alpha c^m d^l R$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$. Таким образом, фактически реализуется машина Минского с четырьмя лентами.

В построении особую роль будет играть буквы t и s. Каждое определяющее соотношение будет иметь одну из следующих форм:

$tAB = AtB$, где подслова A, B не содержат t;

$sA = As$, где подслово A не содержит s;

$tA = Bs$, где подслова A, B не содержат t и s.

Таким образом, умножение на t слева играет роль «элементарной операции» и вызывает преобразования над словом $La^k b^n Q_i P_j M_\phi H_\alpha c^m d^l R$: t с помощью соотношений $tAB = AtB$ «продвигается» в слове, затем с помощью $tA = Bs$ происходит преобразование слова в соответствии с вычислительным процессом, указанным выше. В результате с помощью нескольких умножений на t реализуется переход от одного состояния машины Тьюринга в другое.

Переход от одного полного состояния (i_1, j_1, k_1, n_1) к другому (i_2, j_2, k_2, n_2) соответствует последовательности эквивалентных переходов от слова

$$La^{k_1}b^{n_1}Q_{i_1}M_{\phi(i_1,j_1)}P_{j_1}H_0R$$

к слову

$$La^{k_2}b^{n_2}Q_{i_2}M_{\phi(i_2,j_2)}P_{j_2}H_0R.$$

Мы вводим определяющие соотношения таким образом, что переход осуществляется за счёт нескольких умножений на t, т. е. существует такое натуральное N, что

$$t^NLa^{k_1}b^{n_1}Q_{i_1}P_{j_1}M_{\phi(i_1,j_1)}H_0R \equiv a^{k_2}b^{n_2}Q_{i_2}P_{j_2}M_{\phi(i_2,j_2)}H_0Rs^N.$$

2. Универсальная машина Тьюринга и определяющие соотношения

Универсальная машина Тьюринга, построенная Минским, задаётся следующими инструкциями:

$$\begin{array}{llll}
(0,0)\to(L,4,1), & (0,1)\to(L,1,3), & (0,2)\to(R,0,0), & (0,3)\to(R,0,1),\\
(1,0)\to(L,1,2), & (1,1)\to(L,1,3), & (1,2)\to(R,0,0), & (1,3)\to(L,1,3),\\
(2,0)\to(R,2,2), & (2,1)\to(R,2,1), & (2,2)\to(R,2,0), & (2,3)\to(L,4,1),\\
(3,0)\to(R,3,2), & (3,1)\to(R,3,1), & (3,2)\to(R,3,0), & (3,3)\to(L,4,0),\\
(4,0)\to(L,5,2), & (4,1)\to(L,4,1), & (4,2)\to(L,4,0), & (4,3)\to\text{СТОП},\\
(5,0)\to(L,5,2), & (5,1)\to(L,5,1), & (5,2)\to(L,6,2), & (5,3)\to(R,2,1),\\
(6,0)\to(R,0,3), & (6,1)\to(R,6,3), & (6,2)\to(R,6,2), & (6,3)\to(R,3,1).
\end{array}$$

В полугруппе G будем использовать алфавит

$$\{t,\ s,\ L\,a,\ b,\ Q_0,\dots,Q_6,\ P_0,\dots,P_3,\ M_0,\ M_1,\ H_0,\ H_1,\ H_2,\ c,\ d,\ R,\}.$$

Для всех пар, кроме $(4,3)$, определены функции $q(i,j)$ — новое состояние после выполнения инструкции, $t(i,j)$ — цвет, который принимает текущая клетка (головка уходит из неё после выполнения инструкции), $\phi(i,j)$ — ориентация пары (i,j), т. е. $\phi(i,j)=0$, если (i,j) — левая пара или пара $(4,3)$, и $\phi(i,j)=1$, если (i,j) — правая пара.

Введём следующие соотношения:

$$tLa = Lta, \tag{1}$$

$$tLb = Ltb, \tag{2}$$

$$tLQ_i = LtQ_i, \quad 0\leqslant i\leqslant 6, \tag{3}$$

$$ta^5 = ata^4, \tag{4}$$

$$ta^rb = a^rtb, \quad 1\leqslant r\leqslant 4, \tag{5}$$

$$tb^5 = btb^4, \tag{6}$$

$$tb^4Q_iP_jM_0H_0 = Q_iP_jM_0H_0ds, \tag{7}$$

$$tb^rQ_iP_jM_0H_0 = Q_{q(i,j)}P_rM_0H_1s, \quad 1 \leqslant r \leqslant 3, \tag{8}$$
$$ta^rQ_iP_jM_0H_0 = a^rQ_{q(i,j)}P_0M_0H_1s, \quad 0 \leqslant r \leqslant 4, \tag{9}$$
$$ta^4Q_iP_jM_0H_1 = Q_iP_jM_0H_1c^{16}s, \tag{10}$$
$$ta^rQ_iP_jM_0H_1 = Q_iP_jM_{\phi(i,j)}H_2c^{4r+t(i,j)}s, \quad 0 \leqslant r \leqslant 3, \tag{11}$$
$$tb^4Q_iP_jM_1H_0 = Q_iP_jM_1H_0d^{16}s, \tag{12}$$
$$tb^rQ_iP_jM_1H_0 = Q_iP_jM_1H_1d^{4r+t(i,j)}s, \quad 1 \leqslant r \leqslant 3, \tag{13}$$
$$ta^rQ_iP_jM_1H_0 = a^rQ_iP_jH_1M_1d^{t(i,j)}s, \quad 0 \leqslant r \leqslant 4, \tag{14}$$
$$ta^4Q_iP_jM_1H_1 = Q_iP_jM_1H_1cs, \tag{15}$$
$$ta^rQ_iP_jM_1H_1 = Q_{q(i,j)}P_rM_{\phi(i,j)}H_2s, \quad 0 \leqslant r \leqslant 3, \tag{16}$$
$$sc = cs, \tag{17}$$
$$sd = ds, \tag{18}$$
$$sR = Rs, \tag{19}$$
$$ta^rQ_iP_jM_\phi H_2c = a^{r+1}Q_iP_jM_\phi H_2s, \quad \phi = 0,1, \quad 0 \leqslant r \leqslant 4, \tag{20}$$
$$ta^rQ_iP_jM_\phi H_2R = a^rQ_iP_jM_\phi H_0Rs, \quad \phi = 0,1, \quad 1 \leqslant r \leqslant 4, \tag{21}$$
$$ta^rQ_iP_jM_\phi H_2d = a^rbQ_iP_jM_\phi H_2s, \quad \phi = 0,1, \quad 1 \leqslant r \leqslant 4, \tag{22}$$
$$tb^rQ_iP_jM_\phi H_2d = b^{r+1}Q_iP_jM_\phi H_2s, \quad \phi = 0,1, \quad 0 \leqslant r \leqslant 4, \tag{23}$$
$$tb^rQ_iP_jM_\phi H_2R = b^rQ_iP_jM_\phi H_0Rs, \quad \phi = 0,1, \quad 0 \leqslant r \leqslant 4, \tag{24}$$
$$Q_4P_3 = 0. \tag{25}$$

Примечание. В случае, если в соотношении встречаются параметры, оно выписывается для всех указанных значений параметра. В случае, если фигурирует пара (i,j), считается, что это любая пара, кроме $(4,3)$.

Пусть имеется слово $t^NLa^kb^nQ_iP_jM_\phi H_0R$, соответствующее какому-то состоянию описанной машины. Как введённые соотношения помогают нам перейти к следующему состоянию?

Соотношения (1)—(6) служат для того, чтобы можно было провести t с левого края до букв Q_i, P_j, реализующих головку машины. Соотношения (17)—(21) служат для выведения s на правый край слова. Соотношения (7)—(16) и (20)—(24) непосредственно моделируют вычислительный процесс, указанный в плане построения.

1. Если (i,j) — левая пара, поделить k на 4 с остатком r — соотношения (15), (16). Если же (i,j) — правая пара, нужно аналогично делить n — соотношения (7), (8).
2. Умножить n (или соответственно k) на 4 (так мы реализуем сдвиг клеток) и добавить к этому $t(i,j)$ — новый цвет перекрасившейся текущей ячейки. Умножение производится с помощью преобразования $b^n \to d^{4n}$ (или $a^k \to c^{4k}$) — соотношения (12), (13) (для n) и (10), (11) (для k).
3. Заменить Q_i на $Q_{q(i,j)}$ (в соответствии с инструкцией для (i,j)) — соотношения (8) и (16).

4. Заменить P_i на остаток из пункта 1 — соотношения (8) и (16).
5. Заменить M_ϕ на M_0 или M_1 в соответствии с ориентацией новой пары (i, j) — соотношения (11) и (16).
6. Восстановить новые значения степеней a и b: $c^k \to a^k$, $d^n \to b^n$ — соотношения (20)—(24).

Кроме того, соотношение (25) реализует остановку машины.

3. Делители нуля и остановка машины

Ясно, что полное состояние машины (вместе с лентой) описывается четырьмя числами: состоянием головки i, цветом текущей клетки j, числом k, кодирующим состояние клеток слева от головки, и числом n, кодирующим состояние клеток справа от головки. Будем обозначать полное состояние машины как $M(i, j, k, n)$.

Определение 3.1. Будем считать, что полное состояние машины характеризуется четвёркой (i, j, k, n), если в данный момент головка находится в состоянии i, текущая клетка имеет цвет j, $k = \sum\limits_{f=0}^{\infty} a_f 4^f$, $n = \sum\limits_{f=0}^{\infty} b_f 4^f$, где a_f — цвета клеток, перечисленные от головки налево, b_f — цвета клеток, перечисленные от головки направо. Очевидно, что в обеих суммах всегда участвует конечное число ненулевых слагаемых, так как количество непустых ячеек всегда конечно.

Каждое полное состояние однозначно определяет следующее полное состояние и так далее. Будем говорить, что машина переходит из состояния $M(i_1, j_1, k_1, n_1)$ в состояние $M(i_2, j_2, k_2, n_2)$, если машина, начиная работу в состоянии $M(i_1, j_1, k_1, n_1)$, за несколько шагов переходит в состояние $M(i_2, j_2, k_2, n_2)$.

Нашей основной целью будет доказательство следующей теоремы.

Теорема 3.1. *Пусть машина Тьюринга, описанная выше, начинает работу в состоянии $M(i, j, k, n)$. Положим $\phi = 0$, если (i, j) — левая пара или пара $(4, 3)$, и $\phi(i, j) = 1$, если (i, j) — правая пара. Машина останавливается тогда и только тогда, когда слово $La^k b^n Q_i P_j M_\phi H_0 R$ является делителем нуля в алгебре с определяющими соотношениями* (1)—(25).

Сначала докажем несколько предложений.

Предложение 3.1. *Пусть n, k — натуральные числа. В полугруппе G справедливы следующие эквивалентности*:

1) $tLa^k b^n \equiv La^k b^{n-4} tb^4$, *если* $n \geqslant 5$;
2) $tLa^k b^n \equiv La^k tb^n$, *если* $n \leqslant 4$.

Доказательство. Допустим сначала, что $k \geqslant 5$. Тогда, применяя $tLa = Lta$ и несколько раз $ta^5 = ata^4$ (соотношения (1) и (4)), мы приводим слово $tLa^k b^n$ к виду $La^{k-4} ta^4 b$. Далее применяем $ta^4 b = ata^3 b$, $ta^3 b = ata^2 b$, $ta^2 b = atab$,

$tab = atb$ (соотношение (5) при разных r) и получаем $La^k tb^n$. Если $n \leqslant 4$, то на этом останавливаемся (и второе утверждение доказано). Если $n \geqslant 5$, то соответствия пункту 1 мы добиваемся, применяя несколько раз $tb^5 = btb^4$ (соотношение (6)).

Если $1 \leqslant k \leqslant 4$, мы действуем аналогично, но в этом случае соотношение $ta^5 = ata^4$ мы не применяем, пропускаем этот этап. □

Предложение 3.2. *Пусть k, n — неотрицательные целые числа, не равные нулю одновременно, $0 \leqslant t(i,j) \leqslant 3$ — цвет, который принимает текущая клетка после выполнения инструкции (i,j), $0 \leqslant q(i,j) \leqslant 6$ — состояние головки после выполнения инструкции (i,j).*

Тогда, если (i,j) — правая пара, имеет место эквивалентность

$$t^N La^k b^n Q_i P_j M_1 H_0 R \equiv LQ_{q(i,j)} P_r M_{\phi(q,r)} H_2 c^{4k+t(i,j)} d^{[\frac{n}{4}]} Rs^N,$$

где $\phi(q,r) = 0$ или $\phi(q,r) = 1$ в зависимости от того, левая пара (q,r) или правая, $[x]$ — наибольшее целое, не превосходящее x, r — остаток от деления n на 4 и $N = [\frac{k}{4}] + [\frac{n}{4}] + 2$.

Если же (i,j) — левая пара, имеет место эквивалентность

$$t^N La^k b^n Q_i P_j M_0 H_0 R \equiv LQ_{q(i,j)} P_r M_{\phi(q,r)} H_2 c^{[\frac{k}{4}]} d^{4n+t(i,j)} Rs^N,$$

где $\phi(q,r) = 0$ или $\phi(q,r) = 1$ в зависимости от того, левая пара (q,r) или правая, $[x]$ — наибольшее целое, не превосходящее x, r — остаток от деления k на 4 и $N = [\frac{k}{4}] + [\frac{n}{4}] + 2$.

Доказательство. Докажем сначала промежуточные эквивалентности:

$$t^{[\frac{n}{4}]+1} La^k b^n Q_i P_j M_1 H_0 R \equiv La^k Q_{q(i,j)} P_r M_1 H_1 d^{[\frac{n}{4}]} Rs^{[\frac{n}{4}+1]},$$

где $r = n - 4[\frac{n}{4}]$ — остаток при делении n на 4, для правого случая и

$$t^{[\frac{n}{4}]+1} La^k b^n Q_i P_j M_0 H_0 R \equiv La^k Q_i P_j M_0 H_1 d^{4n+t(i,j)} Rs^{[\frac{n}{4}]+1}$$

для левого случая.

Рассмотрим слово

$$t^N La^k b^n Q_i P_j M_\phi H_0 R,$$

где ϕ соответствует ориентации пары (i,j). Возможны три случая: $n = 0$, $1 \leqslant n \leqslant 3$ и $n \geqslant 4$.

Если $n = 0$, нам надо доказать, что

$$tLa^k Q_i P_j M_1 H_0 R \equiv La^k Q_{q(i,j)} M_1 P_0 H_1 Rs$$

для правого случая и

$$tLa^k Q_i P_j M_0 H_0 R \equiv La^k Q_i P_j M_0 H_1 d^{t(i,j)} Rs$$

для левого случая. Для этого применим $tLa = Lta$ (соотношение (1)). Получим слово

$$Lta^k Q_i P_j M_\phi H_0 R.$$

Если $k \leqslant 4$, то в правом случае применим соотношение (9)

$$ta^r Q_i P_j M_1 H_0 \equiv a^r Q_{q(i,j)} P_0 M_1 H_1 s,$$

а в левом случае — соотношение (14)

$$ta^r Q_i P_j M_0 H_0 \equiv a^r Q_i P_j M_0 H_1 d^{t(i,j)} s.$$

Учитывая, что $sR = Rs$, получаем то, что требуется. Если же $k \geqslant 5$, несколько раз применяем $ta^5 = ata^4$ (соотношение (4)) и получаем слово

$$La^{k-4} ta^4 Q_i P_j M_\phi H_0 R.$$

Теперь применяем соотношения (9), (14) (для $r = 4$) и $sR = Rs$, как в случае $k \leqslant 4$.

Если $n \leqslant 3$, то $N = 1$. Применяем вторую часть ($tLa^k b^n \equiv La^k tb^n$) предложения 3.1, получаем

$$La^k tb^n Q_i P_j M_\phi H_0 R.$$

Теперь для правого случая используем соотношение (8)

$$tb^r Q_i P_j M_1 H_0 = Q_{q(i,j)} P_r M_1 H_1 s$$

и получаем

$$La^k Q_{q(i,j)} P_r M_1 H_1 sR,$$

где $r = n$, а для левого случая используем соотношение (13)

$$tb^r Q_i P_j M_0 H_0 = Q_i P_j M_0 H_1 d^{4r+t(i,j)} s$$

и получаем

$$La^k Q_i P_j M_0 H_1 d^{4n+t(i,j)} sR.$$

Теперь, применяя $sR = Rs$ (соотношение (19)) в обоих случаях, приводим оба слова к требуемому виду.

Если $n \geqslant 4$, применяем вторую часть ($tLa^k b^n \equiv La^k b^{n-4} tb^4$) предложения 3.1, получаем

$$La^k b^{n-4} tb^4 Q_i P_j M_\phi H_0 R.$$

Теперь для правого случая используем соотношение (7)

$$tb^4 Q_i P_j M_1 H_0 = Q_i P_j M_1 H_0 ds$$

и получаем

$$t^{N-1} La^k b^{n-4} Q_i P_j M_1 H_0 dsR,$$

где $r = n$, а для левого случая используем соотношение (12)

$$tb^4 Q_i P_j M_0 H_0 = Q_i P_j M_0 H_0 d^{16} s$$

и получаем

$$t^{N-1} La^k b^{n-4} Q_i P_j M_0 H_0 d^{16} sR.$$

Теперь используем $sR = Rs$ в обоих случаях. Повторяя последние операции (предложение 3.1, соотношение $tb^4 Q_i P_j M_1 H_0 = Q_i P_j H_0 ds$ в правом случае и соотношение $tb^4Q_iP_jH_0 = Q_iP_jM_1H_0d^{16}s$ в левом случае), а также используя $sd = ds$ и $sR = Rs$ (соотношения (18) и (19)), мы приводим слова к виду

$$tLa^kb^rQ_iP_jM_1H_0d^{[\frac{n}{4}]}Rs^{[\frac{n}{4}]},$$

где $r < 4$, $r \equiv n \pmod 4$, в правом случае и

$$tLa^kb^rQ_iP_jM_0H_0d^{4[\frac{n}{4}]}Rs^{[\frac{n}{4}]},$$

где $r < 4$, $r \equiv n \pmod 4$, в левом случае. Теперь действуем как в случае $n \leqslant 3$: применяем предложение 3.1 и соотношение $tb^rQ_iP_jM_1H_0 = Q_{q(i,j)}P_rH_1s$ для правого случая и соотношение $tb^rQ_iP_jH_0 = Q_iP_jM_0H_1d^{4r+t(i,j)}s$ для левого случая. С учётом $sd = ds$, $sR = Rs$ получаем слова

$$La^kQ_{q(i,j)}P_rM_1H_1d^{\frac{n}{4}}Rs^{[\frac{n}{4}]+1},$$

где $r = n - 4[\frac{n}{4}]$ — остаток при делении n на 4, для правого случая и

$$La^kQ_iP_jM_0H_1d^{4n+t(i,j)}Rs^{\frac{n}{4}+1}$$

для левого случая.

Примечание. Заметим, что в правом случае уже произошла замена пары Q_iP_j на пару $Q_{q(i,j)}P_r$ и при этом могла смениться ориентация пары. Фиксировать ту ориентацию, что была вначале (правую), нам помогает буква M_1.

Таким образом, мы доказали промежуточные эквивалентности. Теперь мы докажем, что

$$t^{[\frac{k}{4}]+1}La^kQ_iP_jM_1H_1R \equiv LQ_iP_jM_{\phi(i,j)}H_2c^{4k+t(i,j)}s^{[\frac{k}{4}]+1},$$

где $\phi(i,j) = 0$ или $\phi(i,j) = 1$ в зависимости от ориентации пары (i,j), для правого случая и

$$t^{[\frac{k}{4}]+1}La^kQ_iP_jM_0H_1R \equiv La^kQ_{q(i,j)}P_rM_{\phi(q,r)}H_2c^{[\frac{k}{4}]}s^{[\frac{k}{4}]+1},$$

где $r \equiv k \pmod 4$ и $\phi(i,j) = 0$ или $\phi(i,j) = 1$ в зависимости от ориентации пары (i,j), для левого случая.

Возможны три случая: $k = 0$, $1 \leqslant k \leqslant 3$ и $k \geqslant 4$.

Если $k = 0$, применяя $tLQ_i = LtQ_i$ (соотношение (3)), получаем слово

$$LtQ_iP_jH_1.$$

Теперь в правом случае применим (для $r = 0$) соотношение (11)

$$ta^rQ_iP_jM_1H_1 \equiv Q_iP_jM_{\phi(i,j)}H_2c^{4r+t(i,j)}s,$$

где $\phi(i,j)$ соответствует ориентации пары (i,j), а в левом случае (тоже для $r = 0$) — соотношение (16)

$$ta^rQ_iP_jM_0H_1 \equiv Q_{q(i,j)}P_rM_{\phi(q,r)}H_2s,$$

где $\phi(q,r)$ соответствует ориентации пары (q,r). С учётом $sR = Rs$ получаем то, что требуется.

Если $1 \leqslant k \leqslant 3$, применяя $tLa = Lta$ (соотношение (1)), получаем слово

$$Lta^k Q_i P_j H_1.$$

Теперь в правом случае применим (для $r = k$) соотношение (11)

$$ta^r Q_i P_j M_1 H_1 \equiv Q_i P_j M_{\phi(i,j)} H_2 c^{4r+t(i,j)} s,$$

а в левом случае (тоже для $r = k$) — соотношение (16)

$$ta^r Q_i P_j M_0 H_1 \equiv Q_{q(i,j)} P_r M_{\phi(i,j)} H_2 s.$$

С учётом $sR = Rs$ получаем то, что требуется.

Если $k \geqslant 4$, применяя $tLa = Lta$ (соотношение (1)) и несколько раз $ta^5 = ata^4$ (соотношение (4)), получаем слово

$$t^{[\frac{k}{4}]} La^{k-4} ta^4 Q_i P_j M_\phi H_1.$$

Теперь используем в правом случае соотношение (10)

$$ta^4 Q_i P_j M_1 H_1 \equiv Q_i P_j M_1 H_1 c^{16} s,$$

в левом случае — соотношение (15)

$$ta^4 Q_i P_j M_0 H_1 \equiv Q_i P_j M_0 H_1 cs$$

и получим в правом случае

$$t^{[\frac{k}{4}]} La^{k-4} Q_i P_j M_1 H_1 c^{16} s,$$

а в левом случае

$$t^{[\frac{k}{4}]} La^{k-4} Q_i P_j M_0 H_1 cs.$$

К слову $t^{[\frac{k}{4}]} La^{k-4} Q_i P_j M_\phi H_1$, где $\phi = 0$ или $\phi = 1$, можно применить индукционное предположение (k уменьшилось на 4). С учётом $sc = cs$ и $sR = Rs$ (соотношения (17) и (19)) получаем то, что требуется.

Теперь докажем утверждение предложения. Рассмотрим слово

$$t^N La^k b^n Q_i P_j M_\phi H_0 R,$$

где $\phi = 0$ или $\phi = 1$ и $N = [\frac{k}{4}] + [\frac{n}{4}] + 2$. Применяя первую промежуточную эквивалентность, получаем в правом случае

$$t^{[\frac{k}{4}]+1} La^k Q_{q(i,j)} P_r M_1 H_1 d^{[\frac{n}{4}]} Rs^{[\frac{n}{4}]+1},$$

где $r = n - 4[\frac{n}{4}]$ — остаток при делении n на 4, в левом случае

$$t^{[\frac{k}{4}]+1} La^k Q_i P_j M_0 H_1 d^{4n+t(i,j)} Rs^{[\frac{n}{4}]+1}.$$

Теперь в обоих случаях применим вторые промежуточные эквивалентности: для правого случая

$$t^{[\frac{k}{4}]+1} La^k Q_i P_j M_1 H_1 \equiv LQ_i P_j M_{\phi(i,j)} H_2 c^{4k+t(i,j)} s^{[\frac{k}{4}]+1},$$

где $\phi(i,j)=0$ или $\phi(i,j)=1$ в зависимости от ориентации пары (i,j), а для левого случая

$$t^{[\frac{k}{4}]+1}La^kQ_iP_jM_0H_1 \equiv LQ_{q(i,j)}P_rM_{\phi(q,r)}H_2c^{[\frac{k}{4}]}s^{[\frac{k}{4}]+1},$$

где $r\equiv k \pmod 4$ и $\phi(i,j)=0$ или $\phi(i,j)=1$ в зависимости от ориентации пары (i,j). Получаем в правом случае

$$LQ_{q(i,j)}P_rM_{\phi(i,j)}H_2c^{4k+t(i,j)}s^{[\frac{k}{4}]+1}d^{[\frac{n}{4}]}Rs^{[\frac{n}{4}]+1},$$

где $r=n-4[\frac{n}{4}]$ — остаток при делении n на 4, а в левом случае

$$LQ_{q(i,j)}P_rM_{\phi(q,r)}H_2c^{[\frac{k}{4}]}s^{[\frac{k}{4}]+1}d^{4n+t(i,j)}Rs^{[\frac{n}{4}]+1}.$$

Применив $sd=ds$, $sc=cs$ и $sR=Rs$, получаем то, что требуется в условии предложения. ☐

Предложение 3.3. *Пусть $\phi=0$ или $\phi=1$. Справедлива эквивалентность*

$$t^{n+k+1}LQ_iP_jM_\phi H_2c^kd^nR \equiv La^kb^nQ_iP_jM_\phi H_0Rs^{n+k+1}.$$

Доказательство. Докажем сначала следующие эквивалентности:

1) $tLa^mQ_iP_jM_\phi H_2c \equiv La^{m+1}P_jQ_iM_\phi H_2s$,
2) $tLa^mb^lQ_iP_jM_\phi H_2d \equiv La^kb^{l+1}P_jQ_iM_\phi H_2s$.

1. Если $m=0$, то достаточно применить соотношения (3) и (20) $tLQ_i=LtQ_i$ и $ta^rQ_iP_jM_\phi H_2c=a^{r+1}Q_iP_jM_\phi H_2s$ (для $r=0$). Если $1\leqslant m\leqslant 4$, применяем соотношения (1) и (20) $tLa=Lta$ и $ta^rQ_iP_jM_\phi H_2c=a^{r+1}Q_iP_jM_\phi H_2s$ (для $r=m$). В случае $m\geqslant 5$ применяем $tLa=Lta$, затем несколько раз $ta^5=ata^4$ (соотношение (4)), и всё сводится опять к применению соотношения (20).

2. Если $l=0$, то действуем аналогично пункту 1, только вместо соотношения (20) применяем соотношение (22) $ta^rQ_iP_jM_\phi H_2d=a^rbQ_iP_jM_\phi H_2s$.

Если $1\leqslant l\leqslant 4$, то, применяя предложение 3.1, получаем слово

$$La^mtb^lQ_iP_jM_\phi H_2d.$$

Теперь, используя соотношение (23)

$$tb^rQ_iP_jM_\phi H_2d=b^{r+1}Q_iP_jM_\phi H_2s$$

(для $r=l$), получаем требуемое.

Если $l\geqslant 5$, то, используя предложение 3.1, получаем слово

$$La^mb^{l-4}tb^4Q_iP_jM_\phi H_2d.$$

Снова применяя соотношение (23) (для $r=4$), получаем требуемое.

Теперь докажем утверждение предложения. Рассмотрим слово

$$t^{n+k+1}LQ_iP_jM_\phi H_2c^kd^nR.$$

Пусть сначала $n=0$. Если $k=0$, то, применяя

$$tb^rQ_iP_jM_\phi H_2R=b^rQ_iP_jM_\phi H_0Rs$$

(соотношение (24) для $r = 0$), получаем то, что требуется. Пусть $k \geqslant 1$. Применяя к слову $t^{k+1}LQ_iP_jM_\phi H_2c^kd^nR$ несколько раз первую доказанную эквивалентность для $m = 0, \ldots, k-1$, попутно используя $sc = cs$ и $sR = Rs$, получим $tLa^kQ_iP_jM_\phi H_2R$. Теперь применим $tLa = Lta$ и несколько раз $ta^5 = ata^4$ (соотношения (1) и (4)). В получившемся слове $La^{k-4}ta^4Q_iP_jM_\phi H_2R$ достаточно применить соотношение (21) $ta^rQ_iP_jM_\phi H_2R = a^rQ_iP_jM_\phi H_0Rs$ (для $r = 4$), и мы получаем то, что требуется.

Пусть $n \geqslant 1$. Рассмотрим слово

$$t^{n+k+1}LQ_iP_jM_\phi H_2c^kd^nR.$$

Используя несколько раз первую доказанную эквивалентность для $m = 0, \ldots, k-1$, попутно учитывая $sc = cs$, $sd = ds$, $sR = Rs$, получим

$$t^{n+1}La^kQ_iP_jM_\phi H_2d^nRs^k.$$

Теперь несколько раз применим вторую доказанную эквивалентность для $l = 0, \ldots, n-1$, попутно используя $sd = ds$ и $sR = Rs$. Получаем

$$tLa^kb^nQ_iP_jM_\phi H_2Rs^{n+k}.$$

Теперь, применяя предложение 3.1 и $tb^rQ_iP_jM_\phi H_2R = b^rQ_iP_jM_\phi H_0Rs$ (соотношение (24)) окончательно получаем требуемую эквивалентность. □

Предложение 3.4. *Рассмотрим один шаг работы описанной выше машины. Пусть её текущее состояние $M(i,j,k,n)$, а следующее — $M(\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k},\hat{n})$. Пусть также ϕ соответствует ориентации пары (i,j), т. е. $\phi = 0$, если пара левая, и $\phi = 1$, если пара правая, и $\hat{\phi}$ соответствует ориентации пары $(\hat{\imath},\hat{\jmath})$. Тогда существует такое натуральное N, что*

$$t^NLa^kb^nQ_iP_jM_\phi H_0R \equiv La^{\hat{k}}b^{\hat{n}}Q_{\hat{\imath}}P_{\hat{\jmath}}M_{\hat{\phi}}H_0Rs^N.$$

Доказательство. Рассмотрим слово $La^kb^nQ_iP_jM_\phi H_0R$. Допустим, (i,j) — правая пара. Тогда $\phi = 1$. Используя предложение 3.2, находим такое N_1, что

$$t^{N_1}La^kb^nQ_iP_jM_\phi H_0R \equiv LQ_{q(i,j)}P_rM_{\phi(q,r)}H_2c^{4k_1+t(i,j)}d^{[\frac{n}{4}]}Rs^{N_1},$$

где r — остаток от деления n_1 на 4, $\phi(q,r) = 0$ или $\phi(q,r) = 1$ в зависимости от того, левая пара (q,r) или правая. Теперь к слову

$$LQ_{q(i,j)}P_rM_{\phi(q,r)}H_2c^{4k+t(i,j)}d^{[\frac{n}{4}]}R$$

применим предложение 3.3 и найдём такое N_2, что

$$t^{N_2}LQ_{q(i,j)}P_rM_{\phi(q,r)}H_2c^{4k+t(i,j)}d^{[\frac{n}{4}]}R \equiv La^{4k+t(i,j)}b^{[\frac{n}{4}]}Q_{q(i,j)}P_rM_{\phi(q,r)}H_0Rs^{N_2}.$$

Таким образом, имеет место эквивалентность

$$t^{N_1+N_2}La^kb^nQ_iP_jM_1H_0R \equiv La^{4k+t(i,j)}b^{[\frac{n}{4}]}Q_{q(i,j)}P_rM_{\phi(q,r)}H_0Rs^{N_1+N_2}.$$

Так как (i,j) — правая пара и $t(i,j)$ — новый цвет ячейки, из которой головка уходит, новое значение $\hat{k}$ будет равно $4k + t(i,j)$. Цвет новой текущей ячейки мы находим как остаток от деления n на 4. А новое значение $\hat{n}$ есть целочисленный результат этого деления: $\hat{n} = [\frac{n}{4}]$. Таким образом, мы получили требуемую эквивалентность.

Случай, когда (i, j) — левая пара, рассматривается аналогично. □

Предложение 3.5. *Перенесём в левую часть все слова в каждом из соотношений* (1)—(25). *Левые части получившихся равенств образуют базис Грёбнера в порождаемом ими идеале относительно лексикографического порядка, соответствующего порядку букв*

$$\{t,\ s,\ L\,a,\ b,\ Q_0, \ldots, Q_6,\ P_0, \ldots, P_3,\ M_0,\ M_1,\ H_0,\ H_1,\ H_2,\ c,\ d,\ R,\}.$$

Доказательство. Заметим, что во всех соотношениях в левой части стоит более старший моном. Проверим отсутствие зацеплений среди старших мономов. Все старшие мономы начинаются с букв t или s. Кроме того, эти буквы входят только в качестве первых букв мономов. Следовательно, единственной возможностью зацепления является ситуация, когда один моном является началом другого. Легко убедится, что таких мономов нет. □

Определяющие соотношения естественно рассматривать как редукции — линейные операторы, переводящие моном в левой части соотношения в моном в правой части, а остальные мономы оставляющие на месте. При данных определяющих соотношениях моном всегда редуцируется либо в моном, либо в нуль.

Предложение 3.6. *Положим $\phi(i, j) = 1$, если пара (i, j) правая, и $\phi(i, j) = 0$, если она левая. Следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Описанная выше машина Тьюринга, начав работу в состоянии $M(i, j, k, n)$, через несколько шагов останавливается, т. е. приходит в состояние с $i = 4$, $j = 3$.*
2. *Существует такое натуральное N, что $t^N La^k b^n Q_i P_j M_\phi H_0 R \equiv 0$.*

Доказательство. Сначала докажем, что из первого утверждения следует второе. Пусть наша машина Тьюринга, начав работу в состоянии $M(i, j, k, n)$, через несколько шагов приходит в состояние с $i = 4$, $j = 3$.

Допустим, $M(i, j, k, n)$ переходит в $M(4, 3, \hat{k}, \hat{n})$ за один шаг. Тогда согласно предложению 3.4 существует такое N, что имеет место эквивалентность

$$t^N La^k b^n Q_i P_j M_\phi H_0 R \equiv La^{\hat{k}} b^{\hat{n}} Q_4 P_3 M_0 H_0 R s^N.$$

Теперь можно применить $Q_4 P_3 = 0$ (соотношение (25)) и привести слово к нулю.

Пусть утверждение доказано для переходов с не более чем m шагами. Пусть наша машина, начав с состояния $M(i, j, k, n)$, останавливается на $m + 1$ шаге. Рассмотрим первый переход в этой цепочке. Пусть это переход от $M(i, j, k, n)$ к $M(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}, \hat{n})$. Применяя для этого перехода предложение 3.4, получаем, что существует такое N_1, что $t^{N_1} La^k b^n Q_i P_j M_\phi H_0 R \equiv La^{\hat{k}} b^{\hat{n}} Q_{\hat{\imath}} P_{\hat{\jmath}} M_{\hat{\phi}} H_0 R s^{N_1}$. К состоянию $M(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}, \hat{n})$, применимо предположение индукции, т. е. существует такое N_2, что $t^{N_2} La^{\hat{k}} b^{\hat{n}} Q_{\hat{\imath}} P_{\hat{\jmath}} M_{\hat{\phi}} H_0 R \equiv 0$. Но тогда

$$t^{N_1+N_2}La^kb^nQ_iP_jM_\phi H_0R \equiv t^{N_2}La^{\hat{k}}b^{\hat{n}}Q_{\hat{\imath}}P_{\hat{\jmath}}M_{\hat{\phi}}H_0Rs^{N_1} \equiv 0.$$

Теперь докажем, что из второго утверждения следует первое. Пусть

$$t^NLa^kb^nQ_iP_jM_\phi H_0R \equiv 0.$$

Допустим, что наша машина, начав с состояния $M(i,j,k,n)$, не останавливается. Пусть следующее состояние машины $M(\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k},\hat{n})$. Согласно предложению 3.4 существует такое натуральное $N_1 \geqslant 1$, что

$$t^{N_1}La^kb^nQ_iP_jM_\phi H_0R \equiv La^{\hat{k}}b^{\hat{n}}Q_{\hat{\imath}}P_{\hat{\jmath}}M_{\hat{\phi}}H_0Rs^{N_1},$$

т. е. с помощью степени t^{N_1} мы перешли к слову, соответствующему следующему состоянию. К этому слову $La^{\hat{k}}b^{\hat{n}}Q_{\hat{\imath}}P_{\hat{\jmath}}M_{\hat{\phi}}H_0R$ можно опять применить предложение 3.4 и найти $N_2 \geqslant 1$ для перехода к следующему состоянию. Продолжая аналогичным способом, за конечное число шагов мы получаем $N_1 + N_2 + \ldots + N_x = \hat{N} > N$. При этом за x шагов машина переходит в состояние $M(i_x,j_x,k_x,n_x)$, причём за всё время перехода состояние с $(i,j) = (4,3)$ не встретилось, так как это бы означало, что машина останавливается. Значит, верна эквивалентность $t^{\hat{N}}La^kb^nQ_iP_jM_\phi H_0R \equiv La^{k_x}b^{n_x}Q_{i_x}P_{j_x}M_{\phi_x}H_0Rs^{\hat{N}}$. Получившееся слово не равно нулю: к нему не применима ни одна редукция. Но нулевое слово $t^NLa^kb^nQ_iP_jM_\phi H_0R$ является его подсловом. Получили противоречие. □

Теперь с помощью нескольких предложений докажем, что слово

$$La^kb^nQ_iP_jM_\phi H_0R$$

является делителем нуля, только если наша машина, начав с соответствующего состояния, останавливается.

Предложение 3.7. *Пусть слово W не приводится к нулю с помощью соотношений* (1)—(25). *Тогда ни для какого натурального m слова Wt^m и s^mW также не приводятся к нулю.*

Доказательство. Допустим, Wt^m приводится к нулю. Заметим, что если в каком-либо соотношении используется t, то справа от t обязательно встречаются другие буквы. Таким образом, m букв на правом конце слова не могут участвовать ни в одном эквивалентном переходе. Тогда если Wt^m можно привести к нулю, то и с W можно было бы сделать то же самое.

Допустим, s^mW приводится к нулю. Обозначим через D левое начало слова s^mW, состоящее из букв s, R, d, c. Пусть $DX = s^mW$ — лексикографическое равенство. Тогда X — подслово W. Заметим, что соотношения $sR = Rs$, $sc = cs$, $sd = ds$ не меняют длину и состав букв в слове D. Остальные соотношения вообще не могут затрагивать слово D, так как их левые и правые части начинаются не с букв s, R, d, c. Таким образом, каждое соотношение меняет либо слово X, либо слово D. Но тогда если s^mW можно привести к виду, содержащему Q_4P_3, то аналогичное можно проделать со словом X, а значит, и со словом W. □

Предложение 3.8. *Пусть A, B — ненулевые слова. Тогда если слово вида $ALa^kb^nQ_iP_jM_\phi H_0RB$, где $\phi=\phi(i,j)$, приводится к нулю, то существует такое N, что*

$$t^NLa^kb^nQ_iP_jM_\phi H_0R\equiv 0.$$

Доказательство. Обозначим $a^kb^nQ_iP_jM_\phi H_0$ через U и рассмотрим слово $ALURB$. Заметим, что ни одно наше соотношение не меняет количества букв L и R в слове. Если мы преобразуем слово с помощью соотношения, не содержащего L, то это преобразование проходит внутри A или URB. Если же соотношение затрагивает L, то это $tLa=Lta$, $tLb=Ltb$ или $tLQ_i=LtQ_i$. Эти соотношения могут добавить (или убрать) t к концу слова A (через L проходит только t). Аналогично, если соотношение затрагивает R, то это $ta^rQ_iP_jM_\phi H_2R=$ $=a^rQ_iP_jM_\phi H_0Rs$, или $tb^rQ_iP_jM_\phi H_2R=b^rQ_iP_jM_\phi H_0Rs$, или $sR=Rs$. Эти соотношения могут добавить (или убрать) s к началу слова B (через R проходит только s). Если $ALURB$ приводится к нулю, значит, это слово можно привести к виду, содержащему Q_4P_3. Это подслово может образоваться либо слева от буквы L, либо между L и R, либо справа от R.

Пусть подслово Q_4P_3 образовалось слева от L. Учитывая высказанное выше соображение (через L проходит только t), можно заключить, что существует такое m, что $At^m\equiv 0$. Тогда согласно предложению 3.7 $A\equiv 0$, т. е. приходим к противоречию с условием. Аналогично разбирается случай, когда Q_4P_3 образовалось справа от R.

Остаётся случай, когда подслово Q_4P_3 образуется в центре слова, между буквами L и R. Учитывая, что через L проходит только t и через R проходит только s, заключаем, что существуют такие m и l, что $t^mLURs^l\equiv 0$.

Теперь к слову $t^mLa^kb^nQ_iP_jM_\phi H_0Rs^l$ будем применять редукции — определяющие соотношения. Каждая редукция понижает ранг слова. Заметим, что применяемые нами редукции не будут затрагивать l крайних справа букв s, так как редукции с участием s предполагают наличие другой буквы справа от s, т. е. фактически редукции применяются к слову $t^mLa^kb^nQ_iP_jM_\phi H_0R$. Поскольку мы в результате получаем нуль, это доказывает предложение. □

Предложение 3.9. *Пусть $\phi=\phi(i,j)$, $A=\sum\limits_{f=1}^{m}\alpha_ft^{p_f}\neq 0$, $B=\sum\limits_{f=1}^{l}\beta_fs^{q_f}\neq 0$ и $ALa^kb^nQ_iP_jM_\phi H_0RB\equiv 0$. Тогда существует такое N, что*

$$t^NLa^kb^nQ_iP_jM_\phi H_0R\equiv 0.$$

Доказательство. Обозначим $La^kb^nQ_iP_jM_\phi H_0R$ через U. В выражении AUB раскроем скобки и будем применять редукции к получившейся сумме мономов. Каждая редукция переводит моном в моном или в нуль. Если один из мономов редуцируется к нулю, то, учитывая предложение 3.8, получаем требуемое.

Допустим, таких мономов не найдётся. Заметим, что, используя определяющие соотношения (редукции) в доказательствах предложений 3.1, 3.2, мы можем привести все мономы к виду, не содержащему t. Таким образом, AUB редуцируется к виду $\sum_{f=1}^{m} \alpha_f U_f s^{p_f} B$. Слова U_f не содержат t и s, и к ним больше нельзя применить редукции. Так как сумма равна нулю, слагаемые можно разбить на группы (совокупности) подобных с нулевыми суммами коэффициентов в одной группе. Рассмотрим одну такую группу подобных мономов. Для соответствующих номеров f все слова U_f равны. Но тогда равны и соответствующие степени t^{p_f}. Так как это верно для любой группы, то для общей суммы верно $A = \sum_{f=1}^{m} \alpha_f t^{p_f} = 0$, что противоречит условию. □

Предложение 3.10. *Пусть слово $La^k b^n Q_i P_j M_\phi H_0 R$, где ϕ определяется парой (i, j), является делителем нуля. Тогда существует такое N, что*

$$t^N La^k b^n Q_i P_j M_\phi H_0 R \equiv 0.$$

Доказательство. Пусть $La^k b^n Q_i P_j M_\phi H_0 R$ — делитель нуля. Тогда существуют такие ненулевые элементы алгебры A и B, что $ALa^k b^n Q_i P_j M_\phi H_0 RB \equiv 0$. Если оба элемента A и B — мономы, используем предложение 3.8. Иначе выберем такие A и B, что их записи в виде суммы мономов (с коэффициентами) содержат минимальное число ненулевых мономов:

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_U, \quad B = B_1 + B_2 + \ldots + B_V.$$

Каждый моном A_u запишем в виде $A_u = X_u t^{p_u}$, где p_u — неотрицательное целое число. Аналогично каждый моном B_v запишем в виде $B_v = s^{q_v} Y_v$, где q_v — неотрицательное целое число (в обоих случаях лексикографическое равенство). Таким образом, мы выделяем степень t справа от мономов A_u и степень s слева от мономов B_v. Можно считать, что X_u и Y_v уже представлены в нормальном виде, не допускающем дальнейших редукций. Тогда

$$\sum_{\substack{1 \leqslant u \leqslant U \\ 1 \leqslant v \leqslant V}} X_u t^{p_u} La^k b^n Q_i P_j M_\phi H_0 R s^{q_v} Y_v = 0.$$

Рассмотрим произвольный моном $Xt^p La^k b^n Q_i P_j M_\phi H_0 R s^q Y$ в этой сумме. Допустим, что его можно привести к нулю. Тогда, учитывая предложение 3.8, получаем утверждение предложения. Значит, данный моном можно с помощью редукций привести к нормальному виду (не допускающему дальнейших редукций). X в начале слова уже в нормальной форме. Заметим, что все редукции, применимые к содержащим L словам, затрагивают слева от L только t. Таким образом, X в начале слова вообще не затрагивается редукциями и нормальная форма всего слова начинается с X. Поскольку это верно для любого монома в сумме, а вся сумма равна нулю, получаем, что все X_u могут быть разделены на несколько групп подобных мономов. Если можно выбрать несколько (но не все) подобных мономов $X_{u_1}, \ldots, X_{u_s}$ так, что

$$\sum_{f=1}^{s} X_{u_f} t^{p_{u_f}} La^k b^n Q_i P_j M_\phi H_0 R s^q \hat{B} = 0,$$

то получаем противоречие с минимальностью выбора $\hat{A}$ и $\hat{B}$, так как вместо $\hat{A}$ можно взять $\sum\limits_{f=1}^{s} X_{u_f} t^{p_{u_f}}$. Значит, несколько таких мономов выбрать нельзя и группа мономов одна, т. е. все мономы X_u подобны. Тогда их можно вынести за скобки. Внутри скобок остаётся $\sum\limits_{f=1}^{s} t^{p_{u_f}}$, т. е. ситуация сводится к случаю, рассмотренному в предложении 3.9. □

Итак, из предложений 3.6 и 3.10 следует, что слово $La^k b^n Q_i P_j M_\phi H_0 R$ является делителем нуля тогда и только тогда, когда машина, начав с состояния $M(i,j,k,n)$, останавливается. Теорема (3.1) доказана.

Таким образом, из алгоритмической неразрешимости проблемы остановки универсальной машины следует алгоритмическая неразрешимость вопроса, является ли элемент в алгебре $\mathbb{A}$ делителем нуля.

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям доктору физико-математических наук А. Я. Белову и доктору физико-математических наук, профессору А. В. Михалёву за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также доктору физико-математических наук, профессору В. Н. Латышеву за полезные обсуждения.

Литература

[1] Белов А. Я. Линейные рекуррентные уравнения на дереве // Мат. заметки. — 2005. — Т. 78, № 5. — С. 643—651.

[2] Иыуду Н. К. Алгоритмическая разрешимость проблемы распознавания делителей нуля в одном классе алгебр // Фундамент. и прикл. мат. — 1995. — Т. 2, вып. 1. — С. 541—544.

[3] Иыуду Н. К. Стандартные базисы и распознаваемость свойств алгебр, заданных копредставлением: Дис.... канд. физ.-мат. наук — М., 1996.

[4] Пионтковский Д. И. Базис Грёбнера и когерентность мономиальной ассоциативной алгебры // Фундамент. и прикл. мат. — 1996. — Т. 2, вып. 2. — С. 501—509.

[5] Пионтковский Д. И. Некоммутативные базисы Грёбнера, когерентность ассоциативных алгебр и делимость в полугруппах // Фундамент. и прикл. мат. — 2001. — Т. 7, вып. 2. — С. 495—513.

[6] Уфнаровский В. А. Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре. — М.: ВИНИТИ, 1990. — С. 5—177. — (Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. математики. Фундаментальные направления; Т. 57).

[7] Belov A. J., Borisenko V. V., Latyshev V. N. Monomial Algebras. — New York: Plenum, 1997.

[8] Bergman G. The diamond lemma for ring theory // Adv. Math. — 1978. — Vol. 29, no. 2. — P. 178—218.

[9] Gateva-Ivanova T., Latyshev V. On recognisable properties of associative algebras // J. Symbolic Comput. — 1988. — Vol. 6, no. 2/3. — P. 371—388.

[10] Minsky M. L. Computation: Finite and Infinite Machines. — 1967.