

Условия регулярности полугрупп изотонных преобразований счётных цепей

В. И. КИМ, И. Б. КОЖУХОВ

Московский институт электронной техники

УДК 512.534.5

Ключевые слова: полугруппа изотонных преобразований, линейно упорядоченное множество, регулярная полугруппа.

Аннотация

Пусть Γ — линейно упорядоченное множество (цепь), $O(\Gamma)$ — полугруппа изотонных преобразований (преобразований, сохраняющих порядок) цепи Γ . Найдены некоторые необходимые и некоторые достаточные условия на цепь Γ , чтобы полугруппа $O(\Gamma)$ была регулярной. Например, если Γ — полная цепь с максимальным и минимальным элементами, то $O(\Gamma)$ регулярна. В частности, для конечной цепи Γ полугруппа $O(\Gamma)$ регулярна. Для счётной цепи Γ получены необходимые и достаточные условия регулярности полугруппы $O(\Gamma)$.

Abstract

V. I. Kim, I. B. Kozhukhov, Regularity conditions for semigroups of isotone transformations of countable chains, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 8, pp. 97–104.

Let Γ be a linearly ordered set (a chain), $O(\Gamma)$ be the semigroup of all isotone transformations of Γ (i.e., order-preserving transformations). We find some necessary and some sufficient conditions on the chain Γ for the semigroup $O(\Gamma)$ to be regular. For example, if Γ is a complete chain with the maximal element and the minimal one, then $O(\Gamma)$ is regular. In particular, $O(\Gamma)$ is regular if Γ is finite. We find necessary and sufficient conditions for the regularity of $O(\Gamma)$ in the case where Γ is countable.

Обозначим через $T(X)$ полугруппу преобразований множества X , т. е. множество всех отображений $\alpha: X \rightarrow X$ с умножением, определённым по формуле $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$. Эта полугруппа имеет важное значение в теории полугрупп, в частности, благодаря хорошо известному факту, что всякая полугруппа изоморфно вкладывается в полугруппу $T(X)$ для некоторого множества X . Алгебраическое строение полугруппы $T(X)$, её идеалы и классы отношений Грина хорошо известны (см., например, [4]). Полугруппа $T(X)$ регулярна, т. е.

$$\forall \alpha \in T(X) \exists \beta \in T(X) \alpha\beta\alpha = \alpha.$$

Если множество X наделено некоторой структурой (например, на нём задана совокупность отношений, операции или топология), то естественно рассматривать такие преобразования, которые согласованы с этой структурой. Часто такие

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 8, с. 97–104.

© 2006 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

преобразования образуют полугруппу, и многие работы посвящены различным аспектам этих полугрупп. Е. С. Ляпин в [5] нашёл абстрактную характеристику полугруппы всех преобразований, сохраняющих некоторую (произвольную) совокупность отношений.

Для частично упорядоченного множества X пусть $O(X)$ обозначает *полугруппу изотонных преобразований* множества X , т. е. полугруппу всех преобразований $\alpha \in T(X)$, сохраняющих порядок: $x \leq y \implies x\alpha \leq y\alpha$ при $x, y \in X$. Полугруппа изотонных преобразований изучалась во многих работах. М. Торнтон в [12] рассматривал проблему изоморфизма: следует ли из изоморфизма полугрупп $O(X)$ и $O(Y)$, что множества X и Y изоморфны или антиизоморфны? Особое внимание уделялось случаю, когда X — линейно упорядоченное множество (цепь). А. Я. Айзенштат в [1] построила копредставление полугруппы $O(X)$, где X — конечная цепь, т. е. задание этой полугруппы образующими и соотношениями. Б. М. Шайн в [11] исследовал условия представимости элемента из $O(X)$, где X — произвольная цепь, в виде произведения идемпотентов. Эквивалентность элементарных теорий полугрупп изотонных преобразований рассматривалась Ю. М. Важениным и Л. А. Скорняковым [2, 6]. Хиггинс, Митчелл и Рушкунц [7] для некоторых цепей X нашли ранг полугруппы $T(X)$ относительно $O(X)$. Перечислительно-комбинаторным вопросам полугруппы изотонных преобразований посвящена серия работ с участием А. Умара (см., например, [9, 13]). А. Крохин и Б. Лароз [8, 10] изучали клоны операций, сохраняющих порядок конечной цепи.

Оказывается, полугруппа $O(X)$ регулярна далеко не всегда. Необходимые и достаточные условия регулярности полугруппы $O(X)$, где X не цепь, получены авторами в недавней работе [3]. Хорошо известно, что для конечной цепи X полугруппа $O(X)$ регулярна. В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия регулярности полугруппы $O(X)$, если X — счётная цепь.

Введём некоторые определения и обозначения. Пусть X — произвольное множество и $\alpha: X \rightarrow X$ — отображение. Через $\text{im } \alpha$ мы будем обозначать *образ* отображения α , т. е. $\text{im } \alpha = X\alpha = \{x\alpha \mid x \in X\}$. Если $A \subseteq X$, то $A\alpha = \{a\alpha \mid a \in A\}$ — *образ*, а $A\alpha^{-1} = \{x \mid x\alpha \in A\}$ — *полный прообраз* множества A . Для частично упорядоченного множества X и элемента $x \in X$ полагаем $x^\Delta = \{y \mid y \leq x\}$ (*нижний конус* элемента x), $x^\nabla = \{y \mid y \geq x\}$ (*верхний конус*). Для $x, y \in X$ определим *полуинтервал*: $[x, y) = \{t \mid x \leq t < y\}$.

Всюду в дальнейшем Γ будет обозначать *цепь* (линейно упорядоченное множество). Цепь Γ называется *полной*, если любое непустое ограниченное сверху подмножество имеет точную верхнюю грань (а значит, любое непустое ограниченное снизу подмножество имеет точную нижнюю грань). Цепь Γ удовлетворяет *условию максимальности (минимальности)*, если в ней нет бесконечных возрастающих (соответственно убывающих) последовательностей элементов. Подмножество A цепи Γ называется *конфинальным*, если

$$\forall x \in \Gamma \exists a \in A \ a \geq x.$$

Конинициальное подмножество B определяется двойственным образом:

$$\forall x \in \Gamma \exists b \in B \ b \leq x.$$

Предложение 1. Пусть Γ — полная цепь (не обязательно счётная), имеющая минимальный и максимальный элементы. Тогда полугруппа $O(\Gamma)$ регулярна.

Доказательство. Пусть $a = \min \Gamma$, $b = \max \Gamma$ и $\alpha \in O(\Gamma)$. Будем считать, что $\sup \emptyset = a$. Для $x \in \Gamma$ положим

$$x\beta = \begin{cases} \text{какому-нибудь элементу из } x\alpha^{-1}, & \text{если } x \in \text{im } \alpha, \\ \inf\{y \mid y\alpha > x\}, & \text{если } x \notin \text{im } \alpha. \end{cases}$$

Проверим, что отображение β сохраняет порядок. Пусть $x_1 < x_2$. Разберём несколько случаев.

СЛУЧАЙ 1: $x_1, x_2 \in \text{im } \alpha$. Положим $u_1 = x_1\beta$, $u_2 = x_2\beta$. Тогда $u_1\alpha = x_1$, $u_2\alpha = x_2$. Так как $x_1 < x_2$, то $u_1 < u_2$. Следовательно, $x_1\beta < x_2\beta$.

СЛУЧАЙ 2: $x_1 \in \text{im } \alpha$, $x_2 \notin \text{im } \alpha$. Пусть $u_1 = x_1\beta$. Тогда $u_1\alpha = x_1$. Далее этот случай разбиваем на два подслучая.

СЛУЧАЙ 2.1: $b\alpha > x_2$. Положим $A = \{y \mid y\alpha > x_2\}$. Так как $b \in A$, то $A \neq \emptyset$. Возьмём любой элемент $y \in A$. Тогда $y\alpha > x_2$, откуда получаем, что $y\alpha > x_1$, а значит, $y > u_1$. Ввиду произвольности элемента $y \in A$ имеем $\inf\{y \mid y\alpha > x_2\} \geq u_1$. Таким образом, $x_2\beta \geq x_1\beta$.

СЛУЧАЙ 2.2: $b\alpha \leq x_2$. Тогда $\{y \mid y\alpha > x_2\} = \emptyset$, поэтому $\inf\{y \mid y\alpha > x_2\} = b$. Отсюда следует, что $x_2\beta = b$, а значит, $x_1\beta \leq x_2\beta$.

СЛУЧАЙ 3: $x_1 \notin \text{im } \alpha$, $x_2 \in \text{im } \alpha$. Положим $u_2 = x_2\beta$. Тогда $u_2\alpha = x_2 > x_1$, а значит, $u_2 \in \{y \mid y\alpha > x_1\}$. Следовательно, $u_2 \geq \inf\{y \mid y\alpha > x_1\}$, т. е. $x_2\beta \geq x_1\beta$.

СЛУЧАЙ 4: $x_1, x_2 \notin \text{im } \alpha$. Так как $x_1 < x_2$, то $\{y \mid y\alpha > x_2\} \subseteq \{y \mid y\alpha > x_1\}$. Отсюда получаем, что $\inf\{y \mid y\alpha > x_2\} \geq \inf\{y \mid y\alpha > x_1\}$, т. е. $x_1\beta \leq x_2\beta$.

Итак, $\beta \in O(\Gamma)$. Пусть x — произвольный элемент из Γ . Тогда $x\alpha \in \text{im } \alpha$, а значит, $(x\alpha)\beta \in (x\alpha)\alpha^{-1}$. Следовательно, $x\alpha\beta\alpha = x\alpha$. Таким образом, $\alpha\beta\alpha = \alpha$. Это означает, что полугруппа $O(\Gamma)$ регулярна. $\square$

Следствие. Если Γ — конечная цепь, то полугруппа $O(\Gamma)$ регулярна.

Заметим, что если Γ — счётная цепь без максимального элемента, то всякое конфинальное подмножество содержит конфинальную возрастающую последовательность $x_1 < x_2 < \dots$. Аналогично этому в счётной цепи без минимального элемента всякое конинициальное подмножество содержит конинициальную убывающую последовательность.

Лемма 2. Пусть Γ — счётная цепь и полугруппа $O(\Gamma)$ регулярна.

1. Если Γ не имеет максимального элемента, то всякая строго возрастающая последовательность элементов цепи Γ конфинальна.
2. Если Γ не имеет минимального элемента, то всякая строго убывающая последовательность элементов цепи Γ конинициальна.

Доказательство. Докажем лишь утверждение 1. Предположим, что утверждение неверно. Тогда в Γ существует возрастающая ограниченная сверху последовательность $x_1 < x_2 < \dots$. Так как Γ — счётная цепь без максимального элемента, то в Γ есть конфинальная последовательность $y_1 < y_2 < \dots$. Рассмотрим отображение $\alpha: \Gamma \rightarrow \Gamma$, определённое правилом

$$x\alpha = \begin{cases} x_1, & \text{если } x < y_1, \\ x_i, & \text{если } x_1 \leq y_{i-1} < y_i \quad (i \geq 2). \end{cases}$$

Так как (y_n) — конфинальная последовательность, то отображение α определено на всей цепи Γ . Ясно, что $\alpha \in O(\Gamma)$.

Так как $O(\Gamma)$ — регулярная полугруппа, то $\alpha\beta\alpha = \alpha$ для некоторого $\beta \in O(\Gamma)$. Так как последовательность (x_n) является ограниченной сверху, то существует такой элемент $z \in \Gamma$, что $x_n < z$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Так как последовательность (y_n) конфинальна, то $z\beta < y_i$ при некотором i . Имеем $y_i\alpha = x_{i+1}$. Так как $z > x_{i+1}$, то $z\beta \geq x_{i+1}\beta$. Заметим, что $x_{i+1}\alpha^{-1} = [y_i, y_{i+1})$. Следовательно, $x_{i+1}\beta \in [y_i, y_{i+1})$, а значит, $x_{i+1}\beta \geq y_i$. Отсюда следует, что $z\beta \geq y_i$. Это противоречит неравенству $z\beta < y_i$. Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

Лемма 3. Пусть Γ — цепь (не обязательно счётная), не имеющая максимального элемента. Если любая строго возрастающая последовательность элементов из Γ является конфинальной, то для любого $x \in \Gamma$ множество x^Δ удовлетворяет условию минимальности.

Доказательство очевидно.

Лемма 4. Пусть Γ — счётная цепь, не имеющая максимального, но имеющая минимальный элемент. Полугруппа $O(\Gamma)$ регулярна в том и только том случае, если для любого $x \in \Gamma$ множество x^Δ удовлетворяет условию максимальности.

Доказательство. Необходимость следует из леммы 2. Докажем достаточность. Пусть $\alpha \in O(\Gamma)$. Обозначим через φ какое-либо отображение $\varphi: \text{im } \alpha \rightarrow \Gamma$, для которого $x\varphi\alpha = x$ при всех $x \in \text{im } \alpha$. Пусть $a = \min \Gamma$.

Определим отображение $\beta: \Gamma \rightarrow \Gamma$ правилом

$$x\beta = \begin{cases} a, & \text{если } x < y \text{ при всех } y \in \text{im } \alpha, \\ (\max(x^\Delta \cap \text{im } \alpha))\varphi, & \text{если } x \geq y \text{ при некотором } y \in \text{im } \alpha. \end{cases}$$

Проверим, что $\beta \in O(\Gamma)$. Пусть $x_1 < x_2$. Разберём два случая.

СЛУЧАЙ 1: $x_1 < y$ при всех $y \in \text{im } \alpha$. Тогда $x_1\beta = a$, а значит, $x_1\beta \leq x_2\beta$.

СЛУЧАЙ 2: $x_1 \geq y$ для некоторого $y \in \text{im } \alpha$. Пусть $z_1 = \max(x_1^\Delta \cap \text{im } \alpha)$, $z_2 = \max(x_2^\Delta \cap \text{im } \alpha)$. Ясно, что $z_1 \leq z_2$. Отсюда следует, что $z_1\varphi \leq z_2\varphi$, т. е. $x_1\beta \leq x_2\beta$.

Проверим теперь, что $\alpha\beta\alpha = \alpha$. Действительно, для любого $x \in \Gamma$ мы имеем $x\alpha\beta\alpha = x\alpha\varphi\alpha = x\alpha$. $\square$

Лемма 5. Пусть Γ — счётная цепь, не имеющая ни максимального, ни минимального элементов. Полугруппа $O(\Gamma)$ регулярна в том и только том случае, если $\Gamma \cong \mathbb{Z}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть полугруппа $O(\Gamma)$ регулярна. Тогда по лемме 2 все возрастающие последовательности конфинальны, а убывающие конинициальны. Это означает, что $\Gamma \cong \mathbb{Z}$.

Достаточность. Требуется доказать, что $O(\mathbb{Z})$ — регулярная полугруппа. Пусть $\alpha \in O(\mathbb{Z})$. Рассмотрим какое-либо отображение $\varphi: \text{im } \alpha \rightarrow \mathbb{Z}$, для которого $x\varphi\alpha = x$ при всех $x \in \text{im } \alpha$. Определим отображение $\beta: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ правилом

$$x\beta = \begin{cases} (\min(\text{im } \alpha))\varphi, & \text{если } x < y \text{ при всех } y \in \text{im } \alpha, \\ (\max(x^\Delta \cap \text{im } \alpha))\varphi, & \text{если } x \geq y \text{ при некотором } y \in \text{im } \alpha. \end{cases}$$

Проверим, что $\beta \in O(\mathbb{Z})$. Пусть $x_1 < x_2$.

СЛУЧАЙ 1: $x_2 < y$ при всех $y \in \text{im } \alpha$. Тогда $x_1\beta = x_2\beta = (\min(\text{im } \alpha))\varphi$.

СЛУЧАЙ 2: $x_1 < y$ при всех $y \in \text{im } \alpha$, но $x_2 \geq z$ при некотором $z \in \text{im } \alpha$. Пусть $y_1 = \min(\text{im } \alpha)$, $y_2 = \max(x_2^\Delta \cap \text{im } \alpha)$. Ясно, что $y_1 \leq y_2$. Но $y_1 = x_1\beta$, а $y_2 = x_2\beta$. Следовательно, $x_1\beta \leq x_2\beta$.

СЛУЧАЙ 3: $x_1^\Delta \cap \text{im } \alpha \neq \emptyset$. Так как $x_1^\Delta \cap \text{im } \alpha \subseteq x_2^\Delta \cap \text{im } \alpha$, то $\max(x_1^\Delta \cap \text{im } \alpha) \leq \max(x_2^\Delta \cap \text{im } \alpha)$, т. е. $x_1\beta \leq x_2\beta$.

Осталось показать, что $\alpha\beta\alpha = \alpha$. Пусть $x \in \mathbb{Z}$. Тогда $x\alpha \in \text{im } \alpha$, поэтому $x\alpha\beta = x_\alpha\varphi$, а значит, $x\alpha\beta\alpha = x\alpha\varphi\alpha = x\alpha$. $\square$

Пусть Γ — цепь (не обязательно счётная). *Дедеккиндовым сечением* (A, B) называется разбиение $\Gamma = A \cup B$ цепи Γ на два непустых подмножества A и B , таких что $a < b$ при всех $a \in A$, $b \in B$. Если Γ не полна, то имеется такое дедеккиндово сечение (A, B) , что не существуют $\sup A$ и $\inf B$. В этом случае сечение (A, B) называется *дырой*.

Лемма 6. Пусть Γ — счётная цепь, $\Gamma = A \cup B$ и (A, B) — дыра. Если полугруппа $O(\Gamma)$ регулярна, то для любого $x \in A$ множество x^Δ удовлетворяет условию максимальности и для любого $x \in B$ множество x^∇ удовлетворяет условию минимальности.

Доказательство. Достаточно доказать первое утверждение леммы. Пусть выполняются все условия леммы, но для некоторого $x \in A$ множество x^Δ не удовлетворяет условию максимальности. Пусть $y_1 < y_2 < \dots$ — такая возрастающая последовательность, что $y_n < x$ при всех n . Так как A — счётная цепь без максимального элемента, то в A есть возрастающая конфинальная последовательность $z_1 < z_2 < \dots$. Построим отображение $\alpha: \Gamma \rightarrow \Gamma$, полагая

$$u\alpha = \begin{cases} u, & \text{если } u \in B, \\ y_1, & \text{если } u \leq z_1, \\ y_i, & \text{если } z_{i-1} < u \leq z_i \quad (i \geq 2). \end{cases}$$

Так как (z_n) — конфинальная последовательность множества A , то α определено для всех $u \in \Gamma$. Очевидно, α сохраняет порядок.

Так как полугруппа $O(\Gamma)$ регулярна, то существует такой элемент $\beta \in O(\Gamma)$, что $\alpha\beta\alpha = \alpha$. Далее разберём два случая.

СЛУЧАЙ 1: $x\beta \in B$. Так как множество B не имеет наименьшего элемента, то существует такой элемент $b \in B$, что $b < x\beta$. Так как $b \geq x$, то $b\beta \geq x\beta$. Теперь получаем

$$b = b\alpha = b\alpha\beta\alpha = b\beta\alpha \geq x\beta\alpha = x\beta,$$

а это противоречит неравенству $b < x\beta$.

СЛУЧАЙ 2: $x\beta \in A$. Тогда $x\beta < z_i$ для некоторого i . Так как $x \geq y_{i+1}$, то мы получаем

$$y_i = z_i\alpha \geq x\beta\alpha \geq y_{i+1}\beta\alpha = z_{i+1}\alpha\beta\alpha = z_{i+1}\alpha = y_{i+1},$$

а это противоречит выбору элементов y_i . $\square$

Следствие. Пусть Γ — счётная цепь, причём полугруппа $O(\Gamma)$ регулярна. Если Γ имеет дыру, то эта дыра единственна.

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы, но Γ имеет две дыры (A, B) и (A', B') . Ясно, что должно выполняться одно из соотношений $A \subset A'$ или $A' \subset A$. Пусть, например, $A' \subset A$. Возьмём элемент $x \in A \setminus A'$. Так как $x \notin A'$, то $x \in B'$, следовательно, $x > y$ для любого $y \in A'$. Так как A' не имеет максимального элемента, то в A' есть бесконечная возрастающая последовательность $y_1 < y_2 < \dots$. Но $y_n < x$ при всех n . Следовательно, x^Δ не удовлетворяет условию максимальнойности, что противоречит лемме. $\square$

Для цепи Γ и подмножества $C \subseteq \Gamma$ положим $\bar{C} = \{x \mid \exists y, y' \in C \mid y \leq x \leq y'\}$ ($\bar{C}$ — выпуклая оболочка множества C).

Лемма 7. Пусть Γ — счётная цепь, имеющая минимальный и максимальный элементы, $\Gamma = A \cup B$ и (A, B) — дыра. Если для любого $x \in A$ множество x^Δ удовлетворяет условию максимальнойности и для любого $x \in B$ множество x^∇ удовлетворяет условию минимальности, то полугруппа $O(C)$ регулярна.

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы. Положим $a = \min \Gamma$, $b = \max \Gamma$. Возьмём любое $\alpha \in O(\Gamma)$. Пусть $\varphi: \text{im } \alpha \rightarrow \Gamma$ — какое-либо отображение, удовлетворяющее условию $x\varphi\alpha = x$ при всех $x \in \text{im } \alpha$. Определим отображение $\beta: \Gamma \rightarrow \Gamma$ правилом

$$x\beta = \begin{cases} a, & \text{если } x < a\alpha, \\ b, & \text{если } x > b\alpha, \\ (\min(x^\nabla \cap \text{im } \alpha))\varphi, & \text{если } x \in B \cap \overline{\text{im } \alpha}, \\ (\max(x^\Delta \cap \text{im } \alpha))\varphi, & \text{если } x \in A \cap \overline{\text{im } \alpha}. \end{cases}$$

Проверим, что β сохраняет порядок. Пусть $x, x' \in \Gamma$ и $x < x'$. Если $x < y$ при всех $y \in \text{im } \alpha$, то $x\beta = a$, поэтому $x\beta \leq x'\beta$. Аналогичный результат получается, если $x' > y$ при всех $y \in \text{im } \alpha$. Таким образом, мы можем далее считать, что $x, x' \in \text{im } \alpha$.

СЛУЧАЙ 1: $x, x' \in A$. Так как $x < x'$, то $x^\Delta \subseteq (x')^\Delta$, поэтому $\max(x^\Delta \cap \text{im } \alpha) \leq \max((x')^\Delta \cap \text{im } \alpha)$, а значит, $x\beta \leq x'\beta$.

СЛУЧАЙ 2: $x, x' \in B$. Случай разбирается аналогично случаю 1.

СЛУЧАЙ 3: $x \in A, x' \in B$. Пусть $c = \max(x^\Delta \cap \text{im } \alpha)$, $c' = \max((x')^\Delta \cap \text{im } \alpha)$. Тогда $c \in A, c' \in B$, а значит, $c < c'$. Следовательно, $c\varphi \leq c'\varphi$, т. е. $x\beta \leq x'\beta$.

Осталось проверить, что $\alpha\beta\alpha = \alpha$. Пусть $x \in \mathbb{Z}$. Тогда $x\alpha \in \text{im } \alpha$, а значит, $x\alpha\beta = x_\alpha\varphi$, откуда получаем $x\alpha\beta\alpha = x\alpha\varphi\alpha = x\alpha$. $\square$

Теперь мы можем сформулировать и доказать основной результат.

Теорема. Пусть Γ — счётная цепь. Тогда полугруппа $O(\Gamma)$ регулярна в том и только том случае, если выполнено одно из следующих условий:

- 1) Γ — полная цепь, имеющая минимальный и максимальный элементы;
- 2) Γ не имеет максимального, но имеет минимальный элемент и для любого $x \in \Gamma$ множество x^Δ удовлетворяет условию максимальности;
- 3) Γ не имеет минимального, но имеет максимальный элемент и для любого $x \in \Gamma$ множество x^∇ удовлетворяет условию минимальности;
- 4) $\Gamma \cong \mathbb{Z}$;
- 5) Γ имеет минимальный и максимальный элементы, $\Gamma = A \cup B$ и (A, B) — дыра, причём для любого $x \in A$ множество x^Δ удовлетворяет условию максимальности и для любого $x \in B$ множество x^∇ удовлетворяет условию минимальности.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть полугруппа $O(\Gamma)$ регулярна. Предположим вначале, что Γ имеет максимальный и минимальный элементы. Если Γ полна, то выполнено условие 1). Если Γ неполна, то в Γ есть дыра, и по лемме 6 мы получаем, что выполнено условие 5). Пусть теперь Γ имеет минимальный, но не имеет максимального элемента. Тогда по лемме 4 Γ удовлетворяет условию 2). Если Γ не имеет минимального, но имеет максимальный элемент, то утверждение, двойственное лемме 4, скажет нам, что выполнено условие 3). Если же Γ не имеет ни максимального, ни минимального элементов, то по лемме 5 $\Gamma \cong \mathbb{Z}$, т. е. выполнено условие 4).

Достаточность следует из предложения 1, леммы 4 и утверждения, двойственного ей, а также лемм 5 и 7. $\square$

Литература

- [1] Айзенштат А. Я. Определяющие соотношения полугруппы эндоморфизмов конечного линейно упорядоченного множества // Сиб. мат. журн. — 1962. — Т. 3, № 2. — С. 161—169.
- [2] Важенин Ю. М. Элементарные свойства полугрупп преобразований упорядоченных множеств // Алгебра и логика. — 1970. — Т. 7, № 3. — С. 339—347.
- [3] Ким В. И., Кожухов И. Б. Регулярные полугруппы изотонных преобразований. В печати.

- [4] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1. — М.: Мир, 1972.
- [5] Ляпин Е. С. Абстрактная характеристика класса полугрупп эндоморфизмов систем общего вида // Мат. сб. — 1966. — Т. 70 (112), № 2. — С. 173—179.
- [6] Скорняков Л. А. О моноидах изотонных отображений // Мат. сб. — 1984. — Т. 123 (165), № 1. — С. 50—68.
- [7] Higgins P. M., Mitchell J. D., Ruškuc N. Generating the full transformation semigroup using order preserving mappings // Glasgow Math. J. — 2003. — Vol. 45. — P. 557—566.
- [8] Krokhnin A., Larose B. A monoidal interval of isotone clones on a finite chain // Acta Sci. Math. (Szeged). — 2001. — Vol. 68, no. 1—2. — P. 37—62.
- [9] Laradji A., Umar A. Combinatorial results for semigroups of order-preserving partial transformations // J. Algebra. — 2004. — Vol. 278, no. 1. — P. 342—359.
- [10] Larose B. A completeness criterion for isotone operations on a finite chain // Acta Sci. Math. (Szeged). — 1994. — Vol. 59, no. 3—4. — P. 319—356.
- [11] Schein B. M. Products of idempotent order-preserving transformations of arbitrary chains // Semigroup Forum. — 1975. — Vol. 11, no. 1. — P. 297—309.
- [12] Thornton M. C. Semigroups of isotone selfmaps on partially ordered sets // J. London Math. Soc. — 1976. — Vol. 14, no. 3. — P. 545—553.
- [13] Umar A. On the ranks of certain finite semigroups of order-decreasing transformations // Portugal. Math. — 1996. — Vol. 53, fasc. 1. — P. 23—34.