О жёстких колчанах

**В. В. КИРИЧЕНКО, В. Н. ЖУРАВЛЁВ,
И. Н. ЦЫГАНОВСКАЯ**
*Киевский национальный университет
им. Тараса Шевченко*

УДК 512.552.1

Ключевые слова: допустимый колчан, жёсткий колчан, матрица показателей, черепичный порядок.

Аннотация

Рассматриваются колчаны, возникающие в теории черепичных порядков, в частности жёсткие колчаны. Доказывается, что колчан, имеющий петлю в каждой вершине, не жёсткий, а колчан, ассоциированный с конечным частично упорядоченным множеством с одним минимальным элементом, является жёстким.

Abstract

V. V. Kirichenko, V. N. Zhuravlev, I. N. Tsyganivska, On rigid quivers, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 8, pp. 105—120.

We consider quivers that appear in the theory of tiled orders, in particular, rigid quivers. We prove that a quiver having a loop at each vertex is not rigid, and the quiver associated with a finite partially ordered set having one minimal element is rigid.

1. Введение

Понятие черепичного порядка ввёл И. Капланский. Его ученик Р. Тарси [16] изучал глобальную размерность черепичных порядков над локальным дедекиндовым кольцом $\mathcal{O}$ с полем частных k. Такие порядки имеют классические кольца частных, которые являются полными матричными алгебрами $\mathrm{M}_n(k)$, где через $\mathrm{M}_n(B)$ обозначаем кольцо всех квадратных матриц порядка n с элементами из кольца B. В. Ятегаонкар [11] доказал, что в алгебре $\mathrm{M}_n(k)$ над полем частных k локального дедекиндова кольца $\mathcal{O}$ существует лишь конечное число, с точностью до изоморфизма, черепичных порядков конечной глобальной размерности. Такие черепичные порядки изучались многими авторами (см., например, [1, 3—6, 10—17]). Конечномерные алгебры, тесно связанные с черепичными порядками, рассматривались в [7, 8].

Термин «колчан» был введён П. Габриелем в 1972 году в связи с изучением представлений конечномерных алгебр. Это в точности конечный ориентированный граф, возможно с кратными стрелками и кратными петлями. Петля — это стрелка, начало и конец которой совпадают.

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 8, с. 105—120.

Отметим, что в нашей терминологии «черепичный порядок» — это нётерово с двух сторон первичное полусовершенное и полудистрибутивное кольцо с ненулевым радикалом Джекобсона.

В настоящей статье мы рассматриваем колчаны, которые возникают в теории черепичных порядков. Эти колчаны определяются матрицами показателей и играют важную роль при изучении свойств черепичных порядков. Так, например, если колчан черепичного порядка имеет петли в каждой вершине, то такой порядок имеет бесконечную глобальную размерность (см. [17]).

2. Предварительные сведения

Напомним [3], что *полумаксимальное кольцо* — это полусовершенное полупервичное нётерово справа кольцо A, такое что для каждого примитивного идемпотента $e \in A$ кольцо eAe является дискретно нормированным (не обязательно коммутативным).

Обозначим через $\mathrm{M}_n(B)$ кольцо всех $(n \times n)$-матриц над кольцом B.

Теорема 2.1 ([9, теорема 14.5.2]). *Каждое полумаксимальное кольцо изоморфно конечному прямому произведению первичных колец следующего вида*:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi^{\alpha_{12}}\mathcal{O} & \ldots & \pi^{\alpha_{1n}}\mathcal{O} \\ \pi^{\alpha_{21}}\mathcal{O} & \mathcal{O} & \ldots & \pi^{\alpha_{2n}}\mathcal{O} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \pi^{\alpha_{n1}}\mathcal{O} & \pi^{\alpha_{n2}}\mathcal{O} & \ldots & \mathcal{O} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где $n \geqslant 1$, $\mathcal{O}$ — дискретно нормированное кольцо с простым элементом π и α_{ij} — такие целые числа, что

$$\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geqslant \alpha_{ik}, \quad \alpha_{ii} = 0$$

для всех i, j, k.

Определение 2.2. Целочисленная матрица $(\alpha_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ называется *матрицей показателей* черепичного порядка и обозначается $\mathcal{E}$.

Кольцо $\mathcal{O}$ вкладывается в классическое тело частных $\mathcal{D}$, и (1) является множеством всех матриц $(a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathcal{D})$, таких что

$$a_{ij} \in \pi^{\alpha_{ij}}\mathcal{O} = e_{ii}\Lambda e_{jj},$$

где $e_{11}, \ldots, e_{nn}$ — матричные единицы в $\mathrm{M}_n(\mathcal{D})$.

Ясно, что $Q = \mathrm{M}_n(\mathcal{D})$ — это классическое кольцо частных кольца Λ. Здесь Q — это левое и правое классическое кольцо частных кольца Λ.

Мы будем использовать обозначение $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\}$, где $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ — матрица показателей кольца Λ. Если черепичный порядок приведённый, то $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для $i, j = 1, \ldots, n$.

Обозначим через $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ кольцо всех квадратных $(n \times n)$-матриц над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. Пусть $\mathcal{E} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$.

Определение 2.3. Целочисленная матрица $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ называется *матрицей показателей*, если

1) $\alpha_{ii} = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$;
2) $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geqslant \alpha_{ik}$ для $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$.

Матрица показателей $\mathcal{E}$ называется *приведённой*, если $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$, $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$.

Условия 1) и 2) в определении матрицы показателей являются двумя из трёх аксиом конечного метрического пространства.

Пусть множество $\mathrm{M}_n = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ является конечным метрическим пространством. Обозначим через $\rho(m_i, m_j) = d_{ij}$ расстояние между элементами m_i и m_j. Пусть $D = (d_{ij})$ — матрица расстояний конечного метрического пространства M_n.

Приведём примеры матриц показателей, которые являются матрицами расстояний конечных метрических пространств.

Пример 2.4. Таблица Кэли четверной группы Клейна, построенная на элементах 0, 1, 2, 3, является матрицей расстояний метрического пространства $\mathrm{M}_4 = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$, состоящего из четырёх элементов. Она имеет вид

$$K = K(4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.5. Матрица Δ_n, определённая ниже, задаёт матрицу расстояний конечного метрического пространства $\mathrm{M}_n = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$:

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & \ldots & n-2 & n-1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & n-2 \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ n-2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & n-2 & \ldots & \ldots & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ — приведённая матрица показателей. Положим $\mathcal{E}^{(1)} = (\beta_{ij})$, где $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$ для $i \neq j$ и $\beta_{ii} = 1$ для $i = 1, \ldots, n$, и $\mathcal{E}^{(2)} = (\gamma_{ij})$, где $\gamma_{ij} = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (\beta_{ik} + \beta_{kj})$. Очевидно, что $[Q] = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)}$ является $(0,1)$-матрицей. Мы называем колчан Q простым, если его матрица смежности $[Q]$ является $(0,1)$-матрицей, т. е. в Q нет кратных стрелок и кратных петель.

Теорема 2.6 ([9, теорема 14.7.1]). *Матрица $[Q] = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)}$ является матрицей смежности сильно связного простого колчана $Q = Q(\mathcal{E})$.*

Определение 2.7. Колчан $Q(\mathcal{E})$ называется *колчаном приведённой матрицы показателей* $\mathcal{E}$.

Определение 2.8. Сильно связный простой колчан называется *допустимым*, если он является колчаном приведённой матрицы показателей.

Определение 2.9. Две матрицы показателей $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ и $\Theta = (\theta_{ij})$ называются *эквивалентными*, если одна может быть получена из другой преобразованиями следующих двух типов:

1) вычитание целого числа α из элементов i-й строки с одновременным прибавлением α к элементам i-го столбца;
2) одновременная перестановка двух строк и двух столбцов с одинаковыми номерами.

Предложение 2.10 ([5]). *Пусть* $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ *и* $\Theta = (\theta_{ij})$ — *матрицы показателей и* Θ *получается из* $\mathcal{E}$ *преобразованиями первого типа. Тогда* $[Q(\mathcal{E})] = [Q(\Theta)]$.

Предложение 2.11 ([5]). *При преобразованиях второго типа матрица смежности* $[\tilde{Q}]$ *колчана* $Q(\Theta)$ *изменяется по формуле* $[\tilde{Q}] = P_\tau^{\mathrm{T}}[Q]P_\tau$, где $[Q] = [Q(\mathcal{E})]$.

Определение 2.12. Допустимый колчан Q называется *жёстким*, если существует единственная, с точностью до эквивалентности, матрица показателей $\mathcal{E}$, такая что $Q = Q(\mathcal{E})$.

Предложение 2.13. *Если матрица показателей* $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ *является матрицей расстояний конечного метрического пространства, то в каждой вершине колчана этой матрицы есть петля.*

Доказательство. Если $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ одновременно является матрицей показателей и матрицей расстояний конечного метрического пространства, то она симметричная и $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} \geqslant 2$ для всех $i \neq j$, где $i, j = 1, \ldots, n$. Поэтому $Q(\mathcal{E})$ имеет петлю в каждой вершине. □

Обозначим через $\mathbb{N}$ множество натуральных чисел. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Если $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ — приведённая матрица показателей, то очевидно, что $m\mathcal{E} = (m\alpha_{ij})$ также приведённая матрица показателей, и если $Q(\mathcal{E})$ имеет петлю в каждой вершине, то $Q(\mathcal{E}) = Q(m\mathcal{E})$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Мы доказали следующее предложение.

Предложение 2.14. *Пусть колчан* Q *имеет петлю в каждой вершине. Тогда он не является жёстким.*

Следствие 2.15. *Колчан матрицы показателей, которая является матрицей расстояний конечного метрического пространства, не является жёстким.*

Дадим определение диаграммы конечного частично упорядоченного множества (см. [9, с. 239]).

Пусть $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ — конечное частично упорядоченное множество с отношением порядка $\leqslant$. *Диаграммой* множества S является колчан $Q(S)$ с множеством вершин $VQ(S) = \{1, \ldots, n\}$ и множеством стрелок $AQ(S)$, которое определяется так: $\sigma\colon i \to j$ $(i \neq j)$, $\sigma \in AQ(S)$ тогда и только тогда, когда

$\alpha_i \leqslant \alpha_j$ и не существует элемента α_k, такого что $\alpha_i \leqslant \alpha_k \leqslant \alpha_j$, где $\alpha_k \neq \alpha_i$ и $\alpha_k \neq \alpha_j$. В этом случае говорят, что элемент α_j накрывает α_i.

Колчан без ориентированных циклов называется *ациклическим колчаном*.

Определение 2.16. Стрелка $\sigma\colon i \to j$ ациклического колчана Q называется *лишней*, если существует путь из вершины i в вершину j длины, большей чем 1.

Теорема 2.17 ([9, предложение 11.3.11]). *Пусть Q — простой ациклический колчан без лишних стрелок. Тогда Q является диаграммой некоторого конечного частично упорядоченного множества P. Наоборот, диаграмма $Q(P)$ конечного частично упорядоченного множества P является ациклическим простым колчаном без лишних стрелок.*

Как следует из [5, предложения 2.9 и 2.10], колчаны эквивалентных приведённых матриц показателей $\mathcal{E}$ и Θ изоморфны.

Пусть P — произвольное частично упорядоченное множество. Напомним, что подмножество множества P называется *цепью*, если любые два его элемента сравнимы. Подмножество множества P называется *антицепью*, если любые два его элемента несравнимы.

С каждой приведённой $(0,1)$-матрицей показателей $\mathcal{E}$ ассоциировано частично упорядоченное множество $P_{\mathcal{E}} = \{1, \ldots, n\}$ с отношением порядка $\leqslant$, которое определяется по следующему правилу: $i \leqslant j \Longleftrightarrow \alpha_{ij} = 0$.

Наоборот, с каждым частично упорядоченным множеством $P = \{1, \ldots, n\}$ мы связываем приведённую $(0,1)$-матрицу показателей $\mathcal{E}_P = (\lambda_{ij})$ следующим образом: $\lambda_{ij} = 0 \Longleftrightarrow i \leqslant j$, иначе $\lambda_{ij} = 1$.

Обозначим через $P_{\max}$ множество всех максимальных элементов множества P, через $P_{\min}$ — множество всех минимальных элементов множества P и через $P_{\max} \times P_{\min}$ — их декартово произведение.

Определение 2.18. Колчан $\tilde{Q}(P)$, полученный из диаграммы $Q(P)$ добавлением стрелок σ_{ij} для всех $(p_i, p_j) \in P_{\max} \times P_{\min}$, называется колчаном, ассоциированным с частично упорядоченным множеством P.

Следующая теорема следует из [9, теорема 14.6.3].

Теорема 2.19. *Колчан $Q(\mathcal{E}_P)$ совпадает с колчаном $\tilde{Q}(P)$.*

Определение 2.20. Конечные частично упорядоченные множества S и T называются Q-эквивалентными, если эквивалентными являются приведённые $(0,1)$-матрицы показателей $\mathcal{E}_S$ и $\mathcal{E}_T$.

Предложение 2.21. *Если матрицы показателей $\mathcal{E}_S$ и $\mathcal{E}_T$ двух частично упорядоченных множеств S и T эквивалентны, то $Q(\mathcal{E}_S)$ и $Q(\mathcal{E}_T)$ изоморфны.*

Частично упорядоченные множества со связными диаграммами будем называть связными.

Диаграмма $Q(P)$ конечного частично упорядоченного множества P является объединением своих связных компонент $Q(P_1), \ldots, Q(P_s)$. Подмножества $P_1, \ldots, P_s$ будем называть связными компонентами конечного частично упорядоченного множества P.

Теорема 2.22 ([2, теорема 4]). *Два конечных связных частично упорядоченных множества P_1 и P_2 являются Q-эквивалентными тогда и только тогда, когда либо эти множества изоморфны, либо существуют разбиения этих множеств $P_1 = P_1' \cup P_1''$ и $P_2 = P_2' \cup P_2''$, такие что каждый элемент из P_1'' не превышает произвольного элемента из P_1', каждый элемент из P_2' не превышает произвольного элемента из P_2'' и $P_1' \simeq P_2'$, $P_1'' \simeq P_2''$.*

Теорема 2.23 ([2, теорема 5]). *Два несвязных конечных частично упорядоченных множества P и S являются Q-эквивалентными тогда и только тогда, когда изоморфны диаграммы $Q(P)$ и $Q(S)$.*

Теорема 2.24 ([12, теорема 5.4]). *Два конечных частично упорядоченных множества P и S Q-эквивалентны тогда и только тогда, когда $Q(\mathcal{E}_P)$ и $Q(\mathcal{E}_S)$ изоморфны.*

3. Частично упорядоченные множества с жёстким ассоциированным колчаном

Пусть P — конечное частично упорядоченное множество, $\tilde{Q}(P)$ — ассоциированный колчан. В теоремах 3.1, 3.4 и 3.7 приводятся достаточные условия для множества P, чтобы колчан $\tilde{Q}(P)$ не был жёстким. Эти теоремы доказываются по единой схеме, которая в каждом случае включает доказательство двух вспомогательных лемм. В доказательствах этих теорем мы используем единые обозначения.

Теорема 3.1. *Пусть P — конечное связное частично упорядоченное множество, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) *для любого $\alpha_i \in P$ существует такое $\alpha_j \in P$, что α_i и α_j несравнимы;*
2) *существуют $\alpha_u \in P_{\min}$ и $\alpha_v \in P_{\max}$, такие что $\alpha_u \nleqslant \alpha_v$.*

Тогда колчан $\tilde{Q}(P)$ не является жёстким.

Доказательство. Обозначим через X множество всех таких $\alpha_k \in P_{\max}$, что $\alpha_u \nleqslant \alpha_k$, а через Y — множество всех таких $\alpha_l \in P_{\min}$, что $\alpha_l \nleqslant \alpha_k$ для всех $\alpha_k \in X$. Множества X и Y не пустые: $\alpha_v \in X$, $\alpha_u \in Y$.

Рассмотрим множества

$$P'' = \{\alpha_t \in P \mid \text{для некоторого } \alpha_l \in Y\}, \quad P' = P \setminus P''.$$

Тогда $P_{\max} = P'_{\max} \cup P''_{\max}$, $P_{\min} = P'_{\min} \cup P''_{\min}$, причём $P'_{\max} \neq \varnothing$, $P''_{\max} \neq \varnothing$, $P'_{\min} \neq \varnothing$, $P''_{\min} \neq \varnothing$.

Рассмотрим целочисленную матрицу $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\alpha) = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{M}_n(Z)$, где $\alpha > 1$ и

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_i \leqslant \alpha_j, \\ 1, & \text{если } \alpha_i \nleqslant \alpha_j \text{ и } \alpha_i \in P' \text{ или } \alpha_j \in P'', \\ \alpha, & \text{если } \alpha_i \nleqslant \alpha_j \text{ и } \alpha_i \in P'',\ \alpha_j \in P'. \end{cases}$$

Отметим, что для любых $\alpha_i \in P''$ и $\alpha_j \in P'$ всегда $\alpha_i \nleqslant \alpha_j$.

Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 3.2. $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\alpha)$ — *приведённая матрица показателей.*

Доказательство. Из свойства рефлексивности $\alpha_i \leqslant \alpha_i$ следует, что $\alpha_{ii} = 0$.

Покажем, что выполняются неравенства $\alpha_{ij}+\alpha_{jk} \geqslant \alpha_{ik}$. Рассмотрим несколько случаев.

Случай $\alpha_{ik} = 0$. Неравенства очевидны.

Случай $\alpha_{ik} = 1$. Неравенства не выполняются при $\alpha_{ij} = \alpha_{jk} = 0$, но тогда $\alpha_i \leqslant \alpha_j$, $\alpha_j \leqslant \alpha_k$ и по транзитивности получаем $\alpha_i \leqslant \alpha_k$, что противоречит равенству $\alpha_{ik} = 1$.

Случай $\alpha_{ik} = \alpha$. Тогда $\alpha_i \nleq \alpha_k$ и $\alpha_i \in P''$, $\alpha_k \in P'$. Если $\alpha_j \in P'$, то $\alpha_i \in P''$, $\alpha_j \in P'$ и $\alpha_{ij} = \alpha$. Если же $\alpha_j \in P''$, то $\alpha_j \in P''$, $\alpha_k \in P'$ и $\alpha_{jk} = \alpha$. Поэтому для любого $\alpha_j \in P$ имеем $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geqslant \alpha_{ik}$.

Из свойства антисимметричности следует, что α_{ij} и α_{ji} при $i \neq j$ не равны одновременно нулю. Поэтому $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$. □

Лемма 3.3. *Колчан* $Q(\mathcal{E})$ *совпадает с колчаном* $\tilde{Q}(P)$.

Доказательство. Напомним, что

$$q_{ij} = \min_k(\beta_{ik} + \beta_{kj}) - \beta_{ij} = \min\Bigl(1, \min_{k\neq i,j}(\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij})\Bigr) \quad \text{при} \quad i \neq j,$$

$$q_{ii} = \min_k(\beta_{ik} + \beta_{ki}) - \beta_{ii} = \min\Bigl(1, \min_{k\neq i}(\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1)\Bigr).$$

Пусть в диаграмме $Q(P)$ есть стрелка из α_i в α_j. Это означает, что α_j накрывает α_i, т. е. $\alpha_i < \alpha_j$, но не существует такого α_k, что $\alpha_i < \alpha_k < \alpha_j$. Следовательно, $\alpha_{ij} = 0$, но α_{ik} и α_{kj} одновременно не равны нулю при $k \neq i, j$. Поэтому $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} > 0$ для всех $k \neq i, j$, и тогда $q_{ij} = 1$, т. е. в колчане $Q(\mathcal{E}(\alpha))$ из точки i в точку j ведёт стрелка.

Таким образом, если в диаграмме $Q(P)$ есть стрелка из α_i в α_j, то в колчане $Q(\mathcal{E})$ есть стрелка из точки i в точку j.

Пусть $\alpha_i \in P_{\max}$, $\alpha_j \in P_{\min}$. Тогда в колчане $\tilde{Q}(P)$ есть стрелка из α_i в α_j. Элемент α_i максимальный, поэтому $\alpha_i \nleq \alpha_k$ для всех $k \neq i$ и $\alpha_{ik} > 0$ при $k \neq i$. Аналогично элемент α_j минимальный, поэтому $\alpha_{kj} > 0$ при $k \neq j$.

Возможны следующие случаи:

1) $\alpha_i \in P''$, $\alpha_j \in P''$;
2) $\alpha_i \in P'$, $\alpha_j \in P'$;
3) $\alpha_i \in P'$, $\alpha_j \in P''$;
4) $\alpha_i \in P''$, $\alpha_j \in P'$.

В первых трёх случаях $\alpha_{ij} = 1$. Так как $\alpha_{ik} \geqslant 1$ при $k \neq i$ и $\alpha_{kj} \geqslant 1$ при $k \neq j$, то $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geqslant 1$ при $k \neq i, j$. Поэтому $q_{ij} = 1$.

В последнем случае $\alpha_{ij} = \alpha$. Если $\alpha_k \in P''$, то $\alpha_{ik} = 1$, а $\alpha_{kj} = \alpha$. Если же $\alpha_k \in P'$, то $\alpha_{ik} = \alpha$, а $\alpha_{kj} = 1$. Поэтому $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geqslant 1$ при $k \neq i, j$ и $q_{ij} = 1$.

Таким образом, если в колчане $\tilde{Q}(P)$ есть стрелка из α_i в α_j, то в колчане $Q(\mathcal{E})$ есть стрелка из точки i в точку j.

Покажем теперь, что если в колчане $Q(\mathcal{E})$ есть стрелка из точки i в точку j $(i \neq j)$, то в колчане $\tilde{Q}(P)$ есть стрелка из α_i в α_j. Пусть в колчане $Q(\mathcal{E})$ есть стрелка из точки i в точку j, т. е. $q_{ij} = 1$. Тогда $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geqslant 1$ для всех $k \neq i, j$. Рассмотрим несколько случаев.

Случай $\alpha_{ij} = 0$. Тогда $\alpha_i < \alpha_j$. Из неравенств $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} > 0$ при $k \neq i, j$ следует, что α_{ik} и α_{kj} не равны одновременно нулю. Поэтому не существует такого α_k, что $\alpha_{ik} = 0$ и $\alpha_{kj} = 0$. Это значит, что α_j накрывает α_i. Тогда в колчане $Q(P)$, а следовательно, и в колчане $\tilde{Q}(P)$ есть стрелка из α_i в α_j.

Случай $\alpha_{ij} = 1$. Тогда $\alpha_i \nleq \alpha_j$ и $\alpha_i \in P'$ или $\alpha_j \in P''$. (В диаграмме $Q(P)$ стрелки из α_i в α_j очевидно нет.) Покажем, что в этом случае $\alpha_{ik} > 0$ и $\alpha_{kj} > 0$ для всех $k \neq i, j$.

Допустим, что элементы α_i и α_j принадлежат одному подмножеству, к примеру P'. Тогда для любого $k \neq i, j$, такого что $\alpha_k \in P'$, из неравенства $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geqslant 1$ следует, что $\alpha_{ik} > 0$ и $\alpha_{kj} > 0$. Это значит, что $\alpha_i \in P'_{\max} \subset P_{\max}$, $\alpha_j \in P'_{\min} \subset P_{\min}$. Поэтому в колчане $\tilde{Q}(P)$ есть стрелка из α_i в α_j.

В случае, когда элементы α_i и α_j принадлежат одному подмножеству P'', доказательство аналогично.

Допустим, что $\alpha_i \in P'$, $\alpha_j \in P''$ (при $\alpha_i \in P''$, $\alpha_j \in P'$ имеем, что $\alpha_{ij} = \alpha$). Тогда из неравенств $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geqslant 1$ для всех $k \neq i, j$ следует, что $\alpha_{ik} > 0$ и $\alpha_{kj} > 0$. Отсюда $\alpha_i \in P'_{\max} \subset P_{\max}$, $\alpha_j \in P''_{\min} \subset P_{\min}$. Поэтому в колчане $\tilde{Q}(P)$ есть стрелка из α_i в α_j.

Случай $\alpha_{ij} = \alpha$. Тогда из неравенств $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} > 0$ для всех $k \neq i, j$ следует, что $\alpha_{ik} > 0$ и $\alpha_{kj} > 0$ и одно из чисел α_{ik} или α_{kj} равно α. Из того, что $\alpha_{ik} > 0$ для всех $k \neq i, j$ и $\alpha_{ij} = \alpha > 0$, получаем, что α_i — максимальный элемент частично упорядоченного множества P. Аналогично из $\alpha_{kj} > 0$ для всех $k \neq i, j$ и $\alpha_{ij} = \alpha > 0$ получаем, что α_j — минимальный элемент частично упорядоченного множества P. Поэтому в колчане $\tilde{Q}(P)$ есть стрелка из α_i в α_j.

Таким образом, мы показали, что стрелка из точки i в точку j $(i \neq j)$ в колчане $Q(\mathcal{E})$ есть тогда и только тогда, когда в колчане $\tilde{Q}(P)$ есть стрелка из α_i в α_j.

Покажем теперь, что колчан $Q(\mathcal{E})$ не имеет петель, т. е.

$$q_{ii} = \min\Bigl(1, \min_{k \neq i}(\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1)\Bigr) = 0.$$

Пусть $\alpha_i \in P'$, но $\alpha_i \notin P'_{\max}$. Тогда существует такое $\alpha_k \in P'_{\max}$, что $\alpha_i \leqslant \alpha_k$. Следовательно, $\alpha_{ik} = 0$, $\alpha_{ki} = 1$ и $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1 = 0$. Если $\alpha_i \in P'_{\max}$, то существует такое $\alpha_k \in P'$, что $\alpha_k \leqslant \alpha_i$. Поэтому будем иметь $\alpha_{ik} = 1$, $\alpha_{ki} = 0$ и $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1 = 0$. Доказательство для случая $\alpha_i \in P''$ совершенно аналогично. Таким образом, $q_{ii} = 0$ и $Q(\mathcal{E}(\alpha)) = \tilde{Q}(P)$. □

Для колчана $\tilde{Q}(P)$ мы получили семейство матриц показателей $\mathcal{E}(\alpha)$, таких что $Q(\mathcal{E}(\alpha)) = \tilde{Q}(P)$. Поскольку матрицы $\mathcal{E}(\alpha)$ и $\mathcal{E}(\beta)$ не являются эквивалентными при $\alpha \neq \beta$, то колчан $\tilde{Q}(P)$ не является жёстким. □

Теорема 3.4. *Пусть P — конечное связное частично упорядоченное множество, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) *для любого $\alpha_i \in P$ существует такое $\alpha_j \in P$, что α_i и α_j несравнимы;*
2) *для любых $\alpha_u \in P_{\min}$ и $\alpha_v \in P_{\max}$ имеет место неравенство $\alpha_u \leqslant \alpha_v$;*
3) *существует разбиение множества $P = P' \cup P''$, $P' \cap P'' = \varnothing$, для которого $P_{\max} = P'_{\max} \cup P''_{\max}$, $P_{\min} = P'_{\min} \cup P''_{\min}$, $P'_{\max}, P''_{\max}, P'_{\min}, P''_{\min} \neq \varnothing$.*

Тогда колчан $\tilde{Q}(P)$ не является жёстким.

Доказательство. Для каждой точки $\alpha_k \in P'$ ($\alpha_k \in P''$) в диаграмме $Q(P)$ существует путь из $P'_{\min}$ ($P''_{\min}$) в $P'_{\max}$ ($P''_{\max}$), проходящий только через точки P' (P'') и точку $\alpha_k \in P'$ ($\alpha_k \in P''$).

Рассмотрим целочисленную матрицу $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\alpha) = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{M}_n(Z)$, где $\alpha > 1$ и

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_i \leqslant \alpha_j \text{ и } \alpha_i \in P' \text{ или } \alpha_j \in P'', \\ \alpha - 1, & \text{если } \alpha_i \leqslant \alpha_j \text{ и } \alpha_i \in P'',\ \alpha_j \in P', \\ 1, & \text{если } \alpha_i \nleqslant \alpha_j \text{ и } \alpha_i \in P' \text{ или } \alpha_j \in P'', \\ \alpha, & \text{если } \alpha_i \nleqslant \alpha_j \text{ и } \alpha_i \in P'',\ \alpha_j \in P'. \end{cases}$$

Лемма 3.5. *$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\alpha)$ — приведённая матрица показателей.*

Доказательство. Очевидно, что $\alpha_{ii} = 0$ (это равносильно рефлексивности $\alpha_i \leqslant \alpha_i$).

Покажем, что выполняются неравенства $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geqslant \alpha_{ik}$. Рассмотрим несколько случаев.

Случай $\alpha_{ik} = 0$. Неравенства очевидны.

Случай $\alpha_{ik} = 1$. Неравенства не выполняются при $\alpha_{ij} = \alpha_{jk} = 0$. Но тогда $\alpha_i \leqslant \alpha_j$, $\alpha_j \leqslant \alpha_k$, и по транзитивности получаем $\alpha_i \leqslant \alpha_k$, что противоречит равенству $\alpha_{ik} = 1$.

Случай $\alpha_{ik} = \alpha - 1$. Тогда $\alpha_i \leqslant \alpha_k$ и $\alpha_i \in P''$, $\alpha_k \in P'$. Если $\alpha_j \in P''$, то $\alpha_{jk} = \alpha - 1$ или $\alpha_{jk} = \alpha$. Поэтому выполняются неравенства $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geqslant \alpha_{ik}$. Если $\alpha_j \in P'$, то $\alpha_{ij} = \alpha - 1$ или $\alpha_{ij} = \alpha$. Поэтому выполняются неравенства $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geqslant \alpha_{ik}$.

Случай $\alpha_{ik} = \alpha$. Тогда $\alpha_i \nleqslant \alpha_k$ и $\alpha_i \in P''$, $\alpha_k \in P'$.

Пусть $\alpha_j \in P'$. Тогда $\alpha_{ij} = \alpha - 1$ или $\alpha_{ij} = \alpha$. Если $\alpha_{ij} = \alpha$, то выполняются неравенства $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geqslant \alpha_{ik}$. Если $\alpha_{ij} = \alpha - 1$, то $\alpha_i \leqslant \alpha_j$. Поскольку $\alpha_i \nleqslant \alpha_k$, то и $\alpha_j \nleqslant \alpha_k$ (иначе по транзитивности получим $\alpha_i \leqslant \alpha_j$). Тогда $\alpha_{jk} \geqslant 1$, и выполняются неравенства $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geqslant \alpha_{ik}$.

Пусть $\alpha_j \in P''$. Тогда $\alpha_{jk} = \alpha - 1$ или $\alpha_{jk} = \alpha$. Если $\alpha_{jk} = \alpha$, то выполняются неравенства $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geqslant \alpha_{ik}$. Если $\alpha_{jk} = \alpha - 1$, то $\alpha_j \leqslant \alpha_k$. Так как $\alpha_i \nleqslant \alpha_k$, то и $\alpha_i \nleqslant \alpha_j$ (иначе по транзитивности получим $\alpha_i \leqslant \alpha_j$). Тогда $\alpha_{ij} \geqslant 1$, и выполняются неравенства $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geqslant \alpha_{ik}$.

Поскольку из $\alpha_i \leqslant \alpha_j$ и $\alpha_j \leqslant \alpha_i$ следует, что $\alpha_i = \alpha_j$, т. е. $i = j$, то α_{ij} и α_{ji} не равны нулю одновременно при $i \neq j$. Поэтому $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$. □

Лемма 3.6. *Колчан $Q(\mathcal{E})$ совпадает с колчаном $\tilde{Q}(P)$.*

Доказательство. Пусть в диаграмме $Q(P)$ есть стрелка из α_i в α_j $(i \neq j)$. Это значит, что α_j накрывает α_i, т. е. $\alpha_i < \alpha_j$, но не существует такого α_k, что $\alpha_i < \alpha_k < \alpha_j$. Рассмотрим несколько случаев.

Случай $\alpha_i \in P'$ или $\alpha_j \in P''$. Тогда $\alpha_{ij} = 0$. Поскольку α_j накрывает α_i, то ни для каких $k \neq i, j$ не выполняется двойное неравенство $\alpha_i < \alpha_k < \alpha_j$. Следовательно, α_{ik} и α_{kj} не могут одновременно равняться нулю. Поэтому $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} > 0$ для всех $k \neq i, j$, и тогда $q_{ij} = 1$. В колчане $Q(\mathcal{E})$ есть стрелка из точки i в точку j.

Случай $\alpha_i \in P''$ и $\alpha_j \in P'$. Тогда $\alpha_{ij} = \alpha - 1$.

Пусть $\alpha_k \in P''$. Тогда $\alpha_{kj} = \alpha - 1$ или $\alpha_{kj} = \alpha$. При $\alpha_{kj} = \alpha$ имеем $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geqslant 1$. При $\alpha_{kj} = \alpha - 1$ имеем $\alpha_k \leqslant \alpha_j$. Так как $\alpha_i \nleqslant \alpha_j$ и $\alpha_k \leqslant \alpha_j$, то $\alpha_i \nleqslant \alpha_k$ (иначе получили бы $\alpha_i \leqslant \alpha_k \leqslant \alpha_j$, что противоречит тому, что α_j накрывает α_i). Поэтому $\alpha_{ik} \geqslant 1$ и $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geqslant 1$.

Пусть $\alpha_k \in P'$. Тогда $\alpha_{ik} = \alpha - 1$ или $\alpha_{ik} = \alpha$. При $\alpha_{ik} = \alpha$ имеем $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geqslant 1$. При $\alpha_{ik} = \alpha - 1$ имеем $\alpha_i \leqslant \alpha_k$. Так как $\alpha_i \leqslant \alpha_j$ и $\alpha_i \leqslant \alpha_k$, то $\alpha_k \nleqslant \alpha_j$ (иначе получили бы $\alpha_i \leqslant \alpha_k \leqslant \alpha_j$, что противоречит тому, что α_j накрывает α_i). Поэтому $\alpha_{kj} \geqslant 1$ и $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geqslant 1$.

Следовательно, если в диаграмме $Q(P)$ есть стрелка из α_i в α_j, то в колчане $Q(\mathcal{E})$ есть стрелка из точки i в точку j.

Пусть $\alpha_i \in P_{\max}$, $\alpha_j \in P_{\min}$ и в колчане $\tilde{Q}(P)$ есть стрелка из α_i в α_j. Так как $\alpha_i \in P_{\max}$, то $\alpha_{ik} > 0$ для всех $k \neq i$. Аналогично из $\alpha_j \in P_{\min}$ следует, что $\alpha_{kj} > 0$ для всех $k \neq j$. Снова рассмотрим несколько случаев.

Случай $\alpha_i \in P'$ или $\alpha_j \in P''$. Тогда $\alpha_{ij} = 1$ и для всех $k \neq i, j$ выполняются неравенства $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geqslant 1$. Следовательно, $q_{ij} = 1$.

Случай $\alpha_i \in P''$ и $\alpha_j \in P'$. Тогда $\alpha_{ij} = \alpha$.

Пусть $\alpha_k \in P''$. Так как $\alpha_i \in P''_{\max}$, то $\alpha_i \nleqslant \alpha_k$ для всех $k \neq i$, и тогда $\alpha_{ik} = 1$. Поскольку $\alpha_j \in P_{\min}$, то $\alpha_k \nleqslant \alpha_j$ для всех $k \neq j$. Поэтому $\alpha_{kj} = \alpha$. Тогда неравенства $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geqslant 1$ выполняются для всех $k \neq i, j$.

Пусть $\alpha_k \in P'$. Так как $\alpha_i \in P''_{\max}$ и $\alpha_k \in P'$, то $\alpha_i \nleqslant \alpha_k$ для всех $k \neq i$ и $\alpha_{ik} = \alpha$. Поскольку $\alpha_j \in P'_{\min}$ и $\alpha_k \in P'$, то $\alpha_k \nleqslant \alpha_j$ для всех $k \neq j$, и поэтому $\alpha_{kj} = 1$. Тогда неравенства $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geqslant 1$ выполняются для всех $k \neq i, j$. Следовательно, $q_{ij} = 1$.

Мы показали, что для любого $k \neq i, j$ имеем $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geqslant 1$, и поэтому $q_{ij} = 1$.

Таким образом, если в колчане $\tilde{Q}(P)$ есть стрелка из α_i в α_j $(i \neq j)$, то в колчане $Q(\mathcal{E})$ есть стрелка из точки i в точку j.

Покажем теперь, что если в колчане $Q(\mathcal{E})$ есть стрелка из точки i в точку j $(i \neq j)$, то в колчане $\tilde{Q}(P)$ есть стрелка из α_i в α_j. Пусть в колчане $Q(\mathcal{E})$ есть стрелка из точки i в точку j, т. е. $q_{ij} = 1$. Тогда $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geqslant 1$ для всех $k \neq i, j$. Рассмотрим несколько случаев.

Случай $\alpha_i \in P'$ или $\alpha_j \in P''$. Тогда $\alpha_{ij} = 0$ при $\alpha_i \leqslant \alpha_j$ и $\alpha_{ij} = 1$ при $\alpha_i \nleqslant \alpha_j$. Если $\alpha_{ij} = 0$ и $\alpha_i \leqslant \alpha_j$, то не существует $k \neq i, j$, такого что $\alpha_{ik} = \alpha_{kj} = 0$. Поэтому не существует $k \neq i, j$, такого что $\alpha_i < \alpha_k < \alpha_j$, т. е. α_j накрывает α_i. Это значит, что в диаграмме $Q(P)$, а следовательно, и в колчане $\tilde{Q}(P)$ есть стрелка из α_i в α_j.

Если $\alpha_{ij} = 1$, то $\alpha_i \nleqslant \alpha_j$. Из того, что $\alpha_i \in P'$ или $\alpha_j \in P''$, следует, что α_{ik} и α_{kj} не превышают 1 для произвольного k. Поскольку $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} > \alpha_{ij} = 1$, то $\alpha_{ik} = \alpha_{kj} = 1$ для всех $k \neq i, j$. Это значит, что $\alpha_i \in P'_{\max}$ и $\alpha_j \in P''_{\min}$. Поэтому в колчане $\tilde{Q}(P)$ есть стрелка из α_i в α_j.

Случай $\alpha_i \in P''$ и $\alpha_j \in P'$. Тогда $\alpha_{ij} = \alpha - 1$ при $\alpha_i \leqslant \alpha_j$ и $\alpha_{ij} = \alpha$ при $\alpha_i \nleqslant \alpha_j$.

Пусть $\alpha_{ij} = \alpha - 1$ и $\alpha_i \leqslant \alpha_j$. Тогда если $\alpha_k \in P''$, то $\alpha_{ik} = 0$ при $\alpha_i \leqslant \alpha_k$ и $\alpha_{ik} = 1$ при $\alpha_i \nleqslant \alpha_k$, $\alpha_{kj} = \alpha - 1$ при $\alpha_k \leqslant \alpha_j$ и $\alpha_{kj} = \alpha$ при $\alpha_k \nleqslant \alpha_j$. Так как $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} > \alpha_{ij} = \alpha - 1$, то случай, когда $\alpha_{ik} = 0$ и $\alpha_{kj} = \alpha - 1$, невозможен. Поэтому не существует $k \neq i, j$, такого что $\alpha_i < \alpha_k$ и $\alpha_k < \alpha_j$. Это значит, что элемент α_j накрывает элемент α_i. Следовательно, в диаграмме $Q(P)$ и в колчане $\tilde{Q}(P)$ есть стрелка из α_i в α_j.

Если же $\alpha_k \in P'$, то $\alpha_{ik} = \alpha - 1$ при $\alpha_i \leqslant \alpha_k$ и $\alpha_{ik} = \alpha$ при $\alpha_i \nleqslant \alpha_k$, $\alpha_{kj} = 0$ при $\alpha_k \leqslant \alpha_j$ и $\alpha_{kj} = 1$ при $\alpha_k \nleqslant \alpha_j$. Так как $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} > \alpha_{ij} = \alpha - 1$, то случай, когда $\alpha_{ik} = \alpha - 1$ и $\alpha_{kj} = 0$, невозможен. Поэтому не существует $k \neq i, j$, такого что $\alpha_i < \alpha_k$ и $\alpha_k < \alpha_j$. Это значит, что элемент α_j накрывает элемент α_i. Следовательно, в диаграмме $Q(P)$ и в колчане $\tilde{Q}(P)$ есть стрелка из α_i в α_j.

Пусть $\alpha_{ij} = \alpha$. Тогда $\alpha_i \nleqslant \alpha_j$. Так как α_{ik} и α_{kj} не превышают α, то из неравенства $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} > \alpha_{ij} = \alpha$ следует, что $\alpha_{ik} > 0$ и $\alpha_{kj} > 0$ для всех $k \neq i, j$. Учитывая, что $\alpha_{ij} = \alpha > 0$, имеем, что $\alpha_{ik} > 0$ для всех $k \neq i$ и $\alpha_{kj} > 0$ для всех $k \neq j$. Это значит, что не существует $k \neq i$, такого что $\alpha_i \leqslant \alpha_k$, и не существует $k \neq j$, такого что $\alpha_k \leqslant \alpha_j$. Поэтому $\alpha_i \in P_{\max}$ и $\alpha_j \in P_{\min}$, и тогда в колчане $\tilde{Q}(P)$ из α_i в α_j ведёт стрелка.

Таким образом, мы показали, что стрелка из точки i в точку j $(i \neq j)$ в колчане $Q(\mathcal{E})$ есть тогда и только тогда, когда в колчане $\tilde{Q}(P)$ есть стрелка из α_i в α_j.

Покажем теперь, что колчан $Q(\mathcal{E})$ не имеет петель, т. е.

$$q_{ii} = \min\Big(1, \min_{k \neq i}(\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1)\Big) = 0.$$

Пусть $\alpha_i \in P'$, но $\alpha_i \notin P'_{\max}$. Тогда существует такое $\alpha_k \in P'_{\max}$, что $\alpha_i \leqslant \alpha_k$. Следовательно, $\alpha_{ik} = 0$, $\alpha_{ki} = 1$ и $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1 = 0$. Если $\alpha_i \in P'_{\max}$, то существует такое $\alpha_k \in P'$, что $\alpha_k \leqslant \alpha_i$. Поэтому будем иметь $\alpha_{ik} = 1$, $\alpha_{ki} = 0$ и $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1 = 0$. Доказательство для случая $\alpha_i \in P''$ совершенно аналогично. Таким образом, $q_{ii} = 0$ и $Q(\mathcal{E}(\alpha)) = \tilde{Q}(P)$. □

Для колчана $\tilde{Q}(P)$ мы получили семейство матриц показателей $\mathcal{E}(\alpha)$, таких что $Q(\mathcal{E}(\alpha)) = \tilde{Q}(P)$. Поскольку матрицы $\mathcal{E}(\alpha)$ и $\mathcal{E}(\beta)$ не являются эквивалентными при $\alpha \neq \beta$, то колчан $\tilde{Q}(P)$ не является жёстким. □

Теорема 3.7. *Пусть P — конечное несвязное частично упорядоченное множество. Тогда колчан $\tilde{Q}(P)$ не является жёстким.*

Доказательство. Пусть $P = P' \cup P''$ и любые два элемента из подмножеств P' и P'' несравнимы.

Тогда $P_{\max} = P'_{\max} \cup P''_{\max}$, $P_{\min} = P'_{\min} \cup P''_{\min}$, $P'_{\max} \neq \varnothing$, $P''_{\max} \neq \varnothing$, $P'_{\min} \neq \varnothing$, $P''_{\min} \neq \varnothing$.

Рассмотрим целочисленную матрицу $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\alpha) = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{M}_n(Z)$, где $\alpha > 1$ и

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_i \leqslant \alpha_j, \\ 1, & \text{если } \alpha_i \nleqslant \alpha_j \text{ и } \alpha_i \in P' \text{ или } \alpha_j \in P'', \\ \alpha, & \text{если } \alpha_i \nleqslant \alpha_j \text{ и } \alpha_i \in P'',\ \alpha_j \in P'. \end{cases}$$

Лемма 3.8. $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\alpha)$ — *приведённая матрица показателей.*

Доказательство. Из свойства рефлексивности $\alpha_i \leqslant \alpha_i$ следует, что $\alpha_{ii} = 0$.

Покажем, что выполняются неравенства $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geqslant \alpha_{ik}$. Рассмотрим несколько случаев.

Случай $\alpha_{ik} = 0$. Неравенства очевидны.

Случай $\alpha_{ik} = 1$. Неравенства не выполняются при $\alpha_{ij} = \alpha_{jk} = 0$. Но тогда $\alpha_i \leqslant \alpha_j$, $\alpha_j \leqslant \alpha_k$ и по транзитивности получаем $\alpha_i \leqslant \alpha_k$, что противоречит равенству $\alpha_{ik} = 1$.

Случай $\alpha_{ik} = \alpha$. Тогда $\alpha_i \in P''$, $\alpha_k \in P'$. Если $\alpha_j \in P''$, то $\alpha_{jk} = \alpha$. Если $\alpha_j \in P'$, то $\alpha_{ij} = \alpha$. Поэтому $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geqslant \alpha_{ik}$.

Из свойства антисимметричности следует, что α_{ij} и α_{ji} при $i \neq j$ не равны одновременно нулю. Поэтому $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$. □

Лемма 3.9. *Колчан $Q(\mathcal{E})$ совпадает с колчаном $\tilde{Q}(P)$.*

Доказательство. Пусть в диаграмме $Q(P)$ есть стрелка из α_i в α_j. Это значит, что α_j накрывает α_i, т. е. $\alpha_i < \alpha_j$, но не существует такого α_k, что $\alpha_i < \alpha_k < \alpha_j$. Следовательно, $\alpha_{ij} = 0$, но α_{ik} и α_{kj} одновременно не равны нулю при $k \neq i, j$. Поэтому $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} > 0$ для всех $k \neq i, j$, и тогда $q_{ij} = 1$, т. е. в колчане $Q(\mathcal{E}(\alpha))$ из точки i в точку j ведёт стрелка.

Таким образом, если в диаграмме $Q(P)$ есть стрелка из α_i в α_j, то в колчане $Q(\mathcal{E})$ есть стрелка из точки i в точку j.

Пусть $\alpha_i \in P_{\max}$, $\alpha_j \in P_{\min}$. Тогда в колчане $\tilde{Q}(P)$ есть стрелка из α_i в α_j. Элемент α_i максимальный, поэтому $\alpha_i \nleqslant \alpha_k$ для всех $k \neq i$ и $\alpha_{ik} > 0$ при $k \neq i$. Аналогично элемент α_j минимальный, поэтому $\alpha_{kj} > 0$ при $k \neq j$.

Возможны следующие случаи:

1) $\alpha_i \in P''$, $\alpha_j \in P''$;
2) $\alpha_i \in P'$, $\alpha_j \in P'$;

3) $\alpha_i \in P'$, $\alpha_j \in P''$;
4) $\alpha_i \in P''$, $\alpha_j \in P'$.

В первых трёх случаях $\alpha_{ij} = 1$. Так как $\alpha_{ik} \geqslant 1$ при $k \neq i$ и $\alpha_{kj} \geqslant 1$ при $k \neq j$, то $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geqslant 1$ при $k \neq i, j$. Поэтому $q_{ij} = 1$.

В последнем случае $\alpha_{ij} = \alpha$. Если $\alpha_k \in P''$, то $\alpha_{ik} = 1$, $\alpha_{kj} = \alpha$. Если же $\alpha_k \in P'$, то $\alpha_{ik} = \alpha$, $\alpha_{kj} = 1$. Поэтому $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geqslant 1$ при $k \neq i, j$, и $q_{ij} = 1$.

Таким образом, если в колчане $\tilde{Q}(P)$ есть стрелка из α_i в α_j, то в колчане $Q(\mathcal{E})$ есть стрелка из точки i в точку j.

Покажем теперь, что если в колчане $Q(\mathcal{E})$ есть стрелка из точки i в точку j $(i \neq j)$, то в колчане $\tilde{Q}(P)$ есть стрелка из α_i в α_j. Пусть в колчане $Q(\mathcal{E})$ есть стрелка из точки i в точку j, т. е. $q_{ij} = 1$. Тогда $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geqslant 1$. Рассмотрим несколько случаев.

Случай $\alpha_{ij} = 0$. Тогда $\alpha_i < \alpha_j$. Из неравенств $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} > 0$ при $k \neq i, j$ следует, что α_{ik} и α_{kj} не равны одновременно нулю. Поэтому не существует такого α_k, что $\alpha_{ik} = 0$ и $\alpha_{kj} = 0$. Это значит, что α_j накрывает α_i. Тогда в колчане $Q(P)$, а следовательно, и в колчане $\tilde{Q}(P)$ есть стрелка из α_i в α_j.

Случай $\alpha_{ij} = 1$. Тогда $\alpha_i \nleq \alpha_j$ и $\alpha_i \in P'$ или $\alpha_j \in P''$. (В диаграмме $Q(P)$ стрелки из α_i в α_j очевидно нет.) Покажем, что в этом случае $\alpha_{ik} > 0$ и $\alpha_{kj} > 0$ для всех $k \neq i, j$.

Допустим, что элементы α_i и α_j принадлежат одному подмножеству, к примеру P'. Тогда для любого $k \neq i, j$, такого что $\alpha_k \in P'$, из неравенства $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geqslant 1$ следует, что $\alpha_{ik} > 0$ и $\alpha_{kj} > 0$. Это значит, что $\alpha_i \in P'_{\max} \subset P_{\max}$, $\alpha_j \in P'_{\min} \subset P_{\min}$. Поэтому в колчане $\tilde{Q}(P)$ есть стрелка из α_i в α_j. В случае, когда элементы α_i и α_j принадлежат одному подмножеству P'', доказательство аналогично.

Допустим, что $\alpha_i \in P'$, $\alpha_j \in P''$ (при $\alpha_i \in P''$, $\alpha_j \in P'$ имеем $\alpha_{ij} = \alpha$). Тогда $\alpha_{ik} \leqslant 1$, $\alpha_{kj} \leqslant 1$ и из неравенств $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} \geqslant 1$ для всех $k \neq i, j$ следует, что $\alpha_{ik} > 0$ и $\alpha_{kj} > 0$. Отсюда $\alpha_i \in P'_{\max} \subset P_{\max}$, $\alpha_j \in P''_{\min} \subset P_{\min}$. Поэтому в колчане $\tilde{Q}(P)$ есть стрелка из α_i в α_j.

Случай $\alpha_{ij} = \alpha$. Тогда из неравенств $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} > 0$ для всех $k \neq i, j$ следует, что $\alpha_{ik} > 0$ и $\alpha_{kj} > 0$ и одно из чисел α_{ik} или α_{kj} равно α. Из того, что $\alpha_{ik} > 0$ для всех $k \neq i, j$ и $\alpha_{ij} = \alpha > 0$, получаем, что α_i — максимальный элемент частично упорядоченного множества P. Аналогично из того, что $\alpha_{kj} > 0$ для всех $k \neq i, j$ и $\alpha_{ij} = \alpha > 0$, получаем, что α_j — минимальный элемент частично упорядоченного множества P. Поэтому в колчане $\tilde{Q}(P)$ есть стрелка из α_i в α_j.

Таким образом, мы показали, что стрелка из точки i в точку j $(i \neq j)$ в колчане $Q(\mathcal{E})$ есть тогда и только тогда, когда в колчане $\tilde{Q}(P)$ есть стрелка из α_i в α_j.

Покажем теперь, что колчан $Q(\mathcal{E})$ не имеет петель, т. е.

$$q_{ii} = \min\Big(1, \min_{k \neq i}(\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1)\Big) = 0.$$

Пусть $\alpha_i \in P'$, но $\alpha_i \notin P'_{\max}$. Тогда существует $\alpha_k \in P'_{\max}$, такое что $\alpha_i \leqslant \alpha_k$. Следовательно, $\alpha_{ik} = 0$, $\alpha_{ki} = 1$ и $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1 = 0$. Если $\alpha_i \in P'_{\max}$, то существует $\alpha_k \in P'$, такое что $\alpha_k \leqslant \alpha_i$. Поэтому будем иметь $\alpha_{ik} = 1$, $\alpha_{ki} = 0$ и $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1 = 0$. Доказательство для случая $\alpha_i \in P''$ совершенно аналогично. Таким образом, $q_{ii} = 0$ и $Q(\mathcal{E}(\alpha)) = \tilde{Q}(P)$. □

Для колчана $\tilde{Q}(P)$ мы получили семейство матриц показателей $\mathcal{E}(\alpha)$, таких что $Q(\mathcal{E}(\alpha)) = \tilde{Q}(P)$. Поскольку матрицы $\mathcal{E}(\alpha)$ и $\mathcal{E}(\beta)$ не являются эквивалентными при $\alpha \neq \beta$, колчан $\tilde{Q}(P)$ не является жёстким. □

Теорема 3.10. *Пусть P — конечное частично упорядоченное множество с единственным минимальным элементом. Тогда колчан $\tilde{Q}(P)$ является жёстким.*

Доказательство. Обозначим $Q = \tilde{Q}(P)$. Пусть $P_{\min} = \{\alpha_1\}$, и пусть матрица показателей $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ такая, что $Q(\mathcal{E}) = Q$. Эквивалентными преобразованиями первого типа можно сделать первую строку матрицы $\mathcal{E}$ нулевой: $\alpha_{1j} = 0$ для всех j. Колчан при этом не изменится.

Каждой стрелке σ_{ij} колчана Q, ведущей из точки i в точку j, соответствует образующий радикала R черепичного порядка Λ с матрицей показателей $\mathcal{E}(\Lambda) = \mathcal{E}$. Пусть $\mathcal{E}(R) = (\beta_{ij})$. Тогда образующий радикала, соответствующий стрелке σ_{ij}, имеет вид $\pi^{\beta_{ij}} a_{ij} e_{ij}$, где $a_{ij} \in \mathcal{O}$. Совокупность всех элементов $\{\pi^{\beta_{ij}} a_{ij} e_{ij}\}$ (по всем стрелкам колчана Q) — это минимальная система образующих радикала R. Всякий элемент $r \in R_{ij} = e_{ii} R e_{jj}$ представи́м в виде

$$r = \sum (\pi^{\beta_{ii_1}} a_{ii_1} e_{ii_1})(\pi^{\beta_{i_1 i_2}} a_{i_1 i_2} e_{i_1 i_2}) \dots (\pi^{\beta_{i_k j}} a_{i_k j} e_{i_k j}),$$

где сумма берётся по всем путям $\sigma_{ii_1}\sigma_{i_1 i_2} \dots \sigma_{i_k j}$ из точки i в точку j. Поэтому

$$r = \sum \pi^{\beta_{ii_1} + \beta_{i_1 i_2} + \dots + \beta_{i_k j}} a_{ij} e_{ij},$$

где $a_{ij} \in \mathcal{O}$. Отсюда

$$\beta_{ij} = \min(\beta_{ii_1} + \beta_{i_1 i_2} + \dots + \beta_{i_k j})$$

(здесь минимум берётся по всем путям $\sigma_{ii_1}\sigma_{i_1 i_2} \dots \sigma_{i_k j}$ из точки i в точку j). Колчан Q не имеет петель, поэтому $\beta_{i_l i_{l+1}} = \alpha_{i_l i_{l+1}}$ и $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$ при $i \neq j$, $\beta_{ii} = 1$. Имеем равенства

$$\alpha_{ij} = \min(\alpha_{ii_1} + \alpha_{i_1 i_2} + \dots + \alpha_{i_k j}) \quad \text{при} \quad i \neq j. \tag{2}$$

$$1 = \min(\alpha_{ii_1} + \alpha_{i_1 i_2} + \dots + \alpha_{i_k i}). \tag{3}$$

Пусть $\alpha_m \in P_{\max}$. Из равенств

$$\alpha_{1m} = \min(\alpha_{1i_1} + \alpha_{i_1 i_2} + \dots + \alpha_{i_k m}),$$

где минимум берётся по всем путям $\sigma_{1i_1}\sigma_{i_1 i_2} \dots \sigma_{i_k m}$ из точки 1 в точку m, и $\alpha_{1j} = 0$ для всех j следует, что всем стрелкам σ_{ij} диаграммы $Q(P)$ соответствуют $\alpha_{ij} = 0$. Тогда из равенств

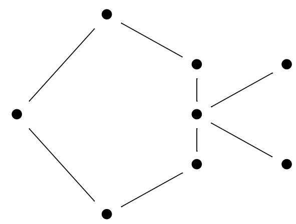
$$1 = \min(\alpha_{1i_1} + \alpha_{i_1 i_2} + \dots + \alpha_{i_k m} \alpha_{m1})$$

получаем $\alpha_{m1} = 1$ для всех m, таких что $\alpha_m \in P_{\max}$. Поскольку минимум в (2) достигается для пути $\sigma_{ii_1}\sigma_{i_1i_2}\ldots\sigma_{i_kj}$, не имеющего циклов, то среди стрелок $\sigma_{ii_1}, \sigma_{i_1i_2}, \ldots, \sigma_{i_kj}$ может быть не более одной, ведущей из $\alpha_m \in P_{\max}$ в $\alpha_1 \in P_{\min}$. Тогда $\alpha_{ij} \leqslant 1$. Следовательно, $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ является $(0,1)$-матрицей. По ней можно построить конечное частично упорядоченное множество S, такое что $\mathcal{E}_S = \mathcal{E}$. Тогда $\tilde{Q}(S) = Q(\mathcal{E}) = \tilde{Q}(P)$. По теореме 2.24 частично упорядоченные множества S и P являются Q-эквивалентными. Поэтому матрицы показателей таких множеств эквивалентны. Таким образом, $\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}_P$. Теорема доказана. □

Ассоциированные колчаны Q-эквивалентных частично упорядоченных множеств изоморфны, поэтому справедливо следствие.

Следствие 3.11. *Если в конечном частично упорядоченном множестве P существует элемент α, сравнимый со всеми элементами этого множества, то колчан $\tilde{Q}(P)$ является жёстким.*

Пример 3.12. Нетрудно проверить, что частично упорядоченное множество



имеет жёсткий ассоциированный колчан. Это множество не удовлетворяет условию следствия 3.11. Для этого множества выполняются первые два условия теоремы 3.4 и не выполняется третье условие.

Литература

[1] Данлыев Х. М. Гомологическая размерность полумаксимальных колец // Изв. АН Туркменской ССР. Сер. физ.-техн., хим., геол. наук. — 1989. — Т. 4. — С. 83—86.

[2] Журавлёв В. Н., Цыгановская И. Н. Q-эквивалентные конечные частично упорядоченные множества // Вестн. Киевского ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2005. — Т. 1. — С. 47—51.

[3] Завадский А. Г., Кириченко В. В. Модули без кручения над первичными кольцами // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. — 1976. — Т. 57. — С. 100—116.

[4] Кириченко В. В. О квазифробениусовых кольцах и горенштейновых порядках // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1978. — Т. 148. — С. 168—174.

[5] Chernousova Zh. T., Dokuchaev M. A., Khibina M. A., Kirichenko V. V., Miroshnichenko S. G., Zhuravlev V. N. Tiled orders over discrete valuation rings, finite Markov chains and partially ordered sets. I, II // Algebra Discrete Math. — 2002. — Vol. 1. — P. 32—63; 2003. — Vol. 2, no. 2. — P. 47—86.

[6] Fujita H. Tiled orders of finite global dimension // Trans. Amer. Math. Soc. — 1990. — Vol. 322. — P. 329—342; Erratum to "Tiled orders of finite global dimension" // Ibid. — 1991. — Vol. 327. — P. 919—920.

[7] Fujita H. Full matrix algebras with structure systems // Colloq. Math. — 2003. — Vol. 98, no. 2. — P. 249—258.

[8] Fujita H., Sakai Y. Frobenius full matrix algebras and Gorenstein tiled orders // Comm. Algebra. — 2006. — Vol. 34. — P. 1181—1203.

[9] Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V. V. Algebras, Rings and Modules. Vol. 1. — Kluwer Academic, 2004. — (Math. Its Appl.; Vol. 575).

[10] Jategaonkar V. A. Global dimension of triangular orders over a discrete valuation ring // Proc. Amer. Math. Soc. — 1973. — Vol. 38. — P. 8—14.

[11] Jategaonkar V. A. Global dimension of tiled orders over a discrete valuation ring // Trans. Amer. Math. Soc. — 1974. — Vol. 196. — P. 313—330.

[12] Kirichenko V. V., Zelensky A. V., Zhuravlev V. N. Exponent matrices and tiled orders over discrete valuation rings // Algebra Comput. — 2005. — Vol. 15, no. 5, 6. — P. 997—1012.

[13] Kirkman E., Kuzmanovich J. Global dimensions of a class of tiled orders // J. Algebra. — 1989. — Vol. 127. — P. 57—72.

[14] Roggenkamp K. W., Kirichenko V. V., Khibina M. A., Zhuravlev V. N. Gorenstein tiled orders // Comm. Algebra. — 2001. — Vol. 29, no. 9. — P. 4231—4247.

[15] Rump W. Discrete posets, cell complexes, and the global dimension of tiled orders // Comm. Algebra. — 1996. — Vol. 24. — P. 55—107.

[16] Tarsy R. B. Global dimension of orders // Trans. Amer. Math. Soc. — 1970. — Vol. 151. — P. 335—340.

[17] Wiedemann A., Roggenkamp K. W. Path orders of global dimension two // J. Algebra. — 1983. — Vol. 80. — P. 113—133.