Первичные радикалы AO-групп

А. В. МИХАЛЁВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Е. Е. ШИРШОВА
Московский педагогический государственный университет

УДК 512.545

Ключевые слова: первичный радикал, частично упорядоченная группа, положительный конус, направленная подгруппа.

Аннотация

В теории колец и групп изучается понятие первичного радикала. В работе рассматривается возможность обобщения этого понятия на класс направленных групп. Получен ряд результатов о коммутаторах AO-групп. Описаны первичные радикалы AO-групп.

Abstract

A. V. Mikhalev, E. E. Shirshova, Prime radicals of AO-groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 8, pp. 197—206.

The notion of the prime radical for a directed group is considered. A series of results on commutants of AO-groups is obtained. Prime radicals of AO-groups are described.

1. Введение

Первичные радикалы очень важны при изучении колец (см., например, [2]). А. Г. Курош предложил рассмотреть аналог первичного радикала кольца в группах. Понятие первичного радикала группы было введено Щукиным [11].

В классе решёточно упорядоченных колец l-первичный радикал был описан Михалёвым и Шаталовой [3]. Они же рассмотрели аналог первичного радикала групп в классе решёточно упорядоченных групп. В решёточно упорядоченной группе l-первичный радикал определяется как пересечение таких l-идеалов I группы G, для которых взаимный коммутант двух любых неединичных l-идеалов фактор-группы G/I отличен от $\{I\}$ [4]. При этом l-первичный радикал оказался совокупностью l-строго энгелевых элементов решёточно упорядоченной группы G. (Элемент $a \in G$ называется l-строго энгелевым, если в любой последовательности (a_i) вида $a_0 = a$, $a_{i+1} = [g_i^{-1}x_i g_i, y_i]$, где $g_i \in G$ и $e \leqslant x_i, y_i \leqslant |a_i|$, начиная с некоторого места все элементы равны единице.) Здесь и далее $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 8, с. 197—206.

Первичный радикал pl-групп описан в [5]. Этот подкласс направленных групп очень близко примыкает к решёточно упорядоченным группам.

Целью данной работы является характеризация аналога первичного радикала группы в более широком подклассе направленных групп.

В работе используется общепринятая для упорядоченных групп и алгебраических систем терминология (см., например, [1, 6]).

Пусть G — частично упорядоченная группа, e — единица группы G, $G^+ = \{x \in G \mid e \leqslant x\}$ — положительный конус группы G. Будем обозначать $\mathcal{L}(G)$ множество всех выпуклых направленных подгрупп группы G. Если элементы a и b группы G нельзя сравнить, то будем писать $a \parallel b$.

Напомним, что элементы $a, b \in G^+$ называются *почти ортогональными* ($a \perp b$) в частично упорядоченной группе G, если из $c \leqslant a, b$ следует, что $c^n \leqslant a, b$ для всех элементов $c \in G$ и всех целых чисел $n > 0$. Частично упорядоченная группа G называется *AO-группой*, если любой элемент $g \in G$ представим в виде $g = ab^{-1}$, где $a \perp b$ в группе G.

Пусть G — AO-группа, $X \subseteq G$, $\{M_j\}_{j \in J}$ — множество всех подгрупп $M_j \in \mathcal{L}(G)$, для которых $X \subseteq M_j$. В [12] показано, что существует подгруппа $G(X) \in \mathcal{L}(G)$, такая что

$$G(X) = \bigcap_{j \in J} M_j.$$

Если $X = \{g\}$ для некоторого элемента $g \in G$, то будем использовать обозначение $G(X) = G(g)$.

Во втором разделе приводится доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть G — AO-группа, $H \in \mathcal{L}(G)$, A — подгруппа, порождённой множеством $\{g^{-1}Hg \mid g \in G\}$. Тогда $G(A)$ — o-идеал группы G.*

Напомним, что o-идеал — это выпуклая направленная нормальная подгруппа.

В третьем разделе доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть G — AO-группа, $H \in \mathcal{L}(G)$, A — подгруппа, порождённая множеством $\{g^{-1}Hg \mid g \in G\}$, где $[A, A] = \{e\}$. Тогда A — наименьший o-идеал группы G, включающий подгруппу H.*

Если I — произвольный o-идеал частично упорядоченной группы G, то фактор-группу G/I можно частично упорядочить, считая, что $X \leqslant Y$ для классов $X, Y \in G/I$, если найдутся $x \in X$ и $y \in Y$, для которых $x \leqslant y$. В четвёртом разделе исследуются свойства подгрупп фактор-группы G/I по o-идеалу I и свойства естественного гомоморфизма $\varepsilon\colon G \to G/I$. В частности, там содержится доказательство следующего утверждения.

Теорема 3. *Пусть G — AO-группа, $H \in \mathcal{L}(G)$, I — o-идеал группы G. Если $\varepsilon(H)$ — образ подгруппы H при гомоморфизме ε, то $\varepsilon(H) \in \mathcal{L}(G/I)$.*

Определение 4. Назовём AO-группу AO-первичной, если взаимный коммутант двух любых её неединичных o-идеалов отличен от $\{e\}$.

o-идеал M в AO-группе G будем называть AO-первичным идеалом, если фактор-группа G/M является AO-первичной группой.

Определение 5. Пересечение всех AO-первичных идеалов AO-группы G будем называть AO-первичным радикалом (AO-$\mathrm{rad}(G)$) группы G.

Определение 6. Элемент a в AO-группе G будем называть AO-строго энгелевым, если в любой последовательности (a_i) вида $a_0 = a$, $a_{i+1} = [g_i^{-1}x_ig_i, y_i]$, где $g_i \in G$ и $G(x_i), G(y_i) \subseteq G(a_i)$, начиная с некоторого места все элементы равны e.

Основным результатом статьи является следующее утверждение.

Теорема 7. *Для любой AO-группы G её AO-первичный радикал AO-$\mathrm{rad}(G)$ является совокупностью AO-строго энгелевых элементов группы G.*

Из теоремы выводится следствие.

Следствие 8. *AO-первичный радикал AO-группы G/M, где $M = AO$-$\mathrm{rad}(G)$, равен единице группы G/M.*

2. Подгруппы частично упорядоченных групп

Начнём с двух утверждений, доказанных ранее, и одного тривиального факта.

Предложение 9 ([12, лемма 2]). *Пусть G — частично упорядоченная группа и $M \in \mathcal{L}(G)$. Если $m \in M$ и $m = ab^{-1}$, где $a \perp b$ в группе G, то $a \in M$ и $b \in M$.*

Предложение 10 ([12, лемма 3.6]). *Если H — подгруппа AO-группы G, то для любого элемента $e \leqslant x \in G(H)$ найдётся элемент $a \in H^+$, для которого $x \leqslant a$.*

Замечание 11. Пусть H — произвольная подгруппа группы G, A — подгруппа, порождённая множеством $\{g^{-1}Hg \mid g \in G\}$. Тогда A — нормальная подгруппа группы G.

Доказательство теоремы 1. Так как $G(A) \in \mathcal{L}(G)$, то достаточно доказать нормальность $G(A)$.

Пусть $e \leqslant u \in G(A)$. Тогда по предложению 10 найдётся элемент $a \in A^+$, для которого $u \leqslant a$. Если $g \in G$, то имеют место неравенства $e \leqslant g^{-1}ug \leqslant g^{-1}ag$, где по замечанию 11 A является нормальной подгруппой, т. е. $g^{-1}ag \in A$. Из $A \subseteq G(A)$ следует, что $g^{-1}ag \in G(A)$. Последнее влечёт принадлежность элемента $g^{-1}ug$ подгруппе $G(A)$, так как она выпукла.

Пусть $x \in G(A)$. Так как G — AO-группа, то $x = uv^{-1}$, где $u \perp v$ в группе G. Из предложения 9 следует, что $u, v \in G(A)$. При этом $u, v \in G^+$.

Для любого элемента $g \in G$ имеет место равенство

$$g^{-1}xg = (g^{-1}ug)(g^{-1}vg)^{-1},$$

где по доказанному выше элементы $g^{-1}ug$ и $g^{-1}vg$ принадлежат подгруппе $G(A)$. Таким образом, $g^{-1}xg \in G(A)$, и подгруппа $G(A)$ является нормальной подгруппой группы G.

Замечание 12. Каждая направленная группа порождается своим положительным конусом.

Следствие 13. *Пусть подгруппы H и A удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда $G(A)$ — наименьший o-идеал группы G, включающий подгруппу H.*

Доказательство. Пусть I — произвольный o-идеал группы G, для которого $H \subseteq I$. Рассмотрим элемент $x \in G(A)$, где $e \leqslant x$. По предложению 10 существует элемент $a \in A^+$, для которого $x \leqslant a$. Так как $a = a_1 a_2 \dots a_s$, где $a_i \in g_i^{-1} H g_i$ для некоторых элементов $g_i \in G$ при $i = 1, 2, \dots, s$, то из нормальности подгруппы I следует, что $a \in I$. Из выпуклости подгруппы I следует, что $x \in I$. Таким образом, положительный конус подгруппы $G(A)$ лежит в I, откуда по замечанию 12 заключаем, что $G(A) \subseteq I$.

Замечание 14. Если в произвольной группе G элементы x и y равны

$$x = \prod_{i=1}^{s} x_i, \quad y = \prod_{j=1}^{t} y_j,$$

то

$$[x, y] = \prod_{i,j} a_{ij}^{-1} [x_i, y_j] a_{ij}$$

для некоторых элементов $a_{ij} \in G$.

Следующая лемма понадобится в пятом разделе.

Лемма 15. *Пусть G — AO-группа, $H \in \mathcal{L}(G)$, I — o-идеал группы G, A — подгруппа, порождённая множеством $\{g^{-1}Hg \mid g \in G\}$, где коммутант $[A, A]$ не является подмножеством идеала I. Тогда найдётся не принадлежащий I коммутатор $[g^{-1}ag, q^{-1}bq]$ для некоторых элементов $a, b \in H$ и $g, q \in G$.*

Доказательство. Из условия леммы следует существование элементов $a, b \in A$, для которых $[a, b] \notin I$. Так как

$$a = \prod_{i=1}^{s} a_i, \quad b = \prod_{j=1}^{t} b_j,$$

где $a_i \in g_i^{-1} H g_i$ и $b_j \in q_j^{-1} H q_j$ для некоторых элементов $g_i, q_j \in G$ (при $i = 1, 2, \dots, s$, $j = 1, 2, \dots, t$), то по замечанию 14

$$[a, b] = \prod_{i,j} r_{ij}^{-1} [a_i, b_j] r_{ij}$$

для некоторых элементов $r_{ij} \in G$. Следовательно, существует такая пара индексов i, j, для которой $[a_i, b_j] \notin I$.

3. Свойство коммутанта порождённой подгруппы

Напомним свойство сопряжённых подгрупп частично упорядоченной группы.

Замечание 16 ([7, лемма 2.3]). Если в частично упорядоченной группе G подгруппа M принадлежит $\mathcal{L}(G)$, то $g^{-1}Mg \in \mathcal{L}(G)$ для любого элемента $g \in G$.

Пусть G — AO-группа, $H \in \mathcal{L}(G)$, A — подгруппа, порождённая множеством $\{g^{-1}Hg \mid g \in G\}$ в группе G.

Рассмотрим элемент $x \in G^+$, который удовлетворяет неравенству $x \leqslant a_1a_2\ldots a_s$ для некоторых элементов $a_i \in g_i^{-1}Hg_i$, где $g_i \in G$ и $e \leqslant a_i$ при $i = 1, 2, \ldots, s$.

Обозначим $b = a_2a_3\ldots a_s$, тогда $xb^{-1} \leqslant a_1$.

Лемма 17. *Если $e \leqslant xb^{-1}$, то $x \in A$.*

Доказательство. По замечанию 16 подгруппа $g_1^{-1}Hg_1$ является выпуклой подгруппой группы G.

Лемма 18. *Если $xb^{-1} \parallel e$, то найдутся элементы $u, v \in G^+$, удовлетворяющие условиям*

$$v \leqslant b^2, \quad u \in A, \quad x = uv^{-1}b.$$

Доказательство. Так как G является AO-группой, то $xb^{-1} = uv^{-1}$, где $u \perp v$ в группе G. Тогда $uv^{-1} \leqslant a_1$, откуда следует, что $a_1^{-1}u \leqslant v$. Из $a_1 \in G^+$ выводим, что $a_1^{-1}u \leqslant u$. Так как элементы u и v почти ортогональны, то $(a_1^{-1}u)^2 \leqslant u$, откуда следует неравенство $u \leqslant a_1^2$. Отсюда по замечанию 16 заключаем, что $u \in g_1^{-1}Hg_1$, т. е. $u \in A$.

С другой стороны, $x^{-1}u = b^{-1}v \leqslant u, v$, откуда по определению отношения почти ортогональности следует верность неравенства $(b^{-1}v)^2 \leqslant v$. Последнее влечёт верность неравенства $v \leqslant b^2$. Третье утверждение очевидно.

Лемма 19. *Если $[A, A] = \{e\}$, то $x \in A$.*

Доказательство. Положим $x_1 = x$ и $b_2 = b = a_2a_3\ldots a_s$. Тогда для элемента $x_1b_2^{-1}$ имеются три возможности.

1. $e \leqslant x_1b_2^{-1}$, отсюда по лемме 17 следует, что $x_1 \in A$.

2. $x_1b_2^{-1} \leqslant e$, откуда следует, что $x_1 \leqslant a_2a_3\ldots a_s$.

3. $x_1b_2^{-1} \parallel e$, тогда по лемме 18 существуют элементы $u_1, v_1 \in G^+$, для которых $x_1 = u_1v_1^{-1}b_2$, где $v_1 \leqslant b_2^2$ и $u_1 \in A$. Так как $b_2 \in A$, то в последнем случае $x_1 \in A$, если $v_1 \in A$.

Положим $x_2 = x_1$ и $c_i = a_i$ при $i = 2, 3, \ldots, s$ во втором случае или $x_2 = v_1$ и $c_i = a_i^2$ для $i = 2, 3, \ldots, s$ в третьем случае. Тогда имеет место неравенство $x_2 \leqslant c_2c_3\ldots c_s$. Обозначим через b_3 произведение $c_3c_4\ldots c_s$. Имеет место неравенство $x_2b_3^{-1} \leqslant c_2$, где $e \leqslant c_2 \in g_2^{-1}Hg_2$.

Для элемента $x_2b_3^{-1}$ существуют три возможности, указанные выше. Если для него не выполняется условие 1, то либо $x_2 \leqslant c_3c_4\ldots c_s$, либо найдутся элементы $u_2, v_2 \in G^+$, для которых $x_2 = u_2v_2^{-1}b_3$, где $v_2 \leqslant b_3^2$ и $u_2 \in A$.

Продолжая рассуждать аналогично, получим последовательность элементов (x_i) для $i = 3, 4, \ldots, s-1$, где $x_i = x_{i-1}$ или $x_i = v_{i-1}$, и последовательность элементов (b_j) для $j = 4, 5, \ldots, s$, где $b_j = t_j t_{j+1} \ldots t_s$, $e \leqslant t_k \in g_k^{-1} H g_k$ при $k = j, j+1, \ldots, s$.

При этом $x_i \in A$, или $x_i \leqslant b_{i+1}$, или существуют элементы $u_i, v_i \in G^+$, для которых

$$v_i \leqslant b_{i+1}^2, \quad u_i \in A, \quad x_i = u_i v_i^{-1} b_{i+1}.$$

Таким образом, для элемента x_{s-1} имеются три возможности: либо $x_{s-1} \in A$; либо $x_{s-1} \leqslant b_s$; либо $x_{s-1} = u_{s-1} v_{s-1}^{-1} b_s$, где $e \leqslant v_{s-1} \leqslant b_s^2$. Так как по построению последовательности (b_j) элемент b_s принадлежит $g_s^{-1} H g_s$, то по замечанию 16 либо $x_{s-1} \in g_s^{-1} H g_s$, либо $v_{s-1} \in g_s^{-1} H g_s$.

Следовательно, во всех трёх случаях $x_{s-1} \in A$, поэтому по построению любой элемент последовательности (x_i) лежит в подгруппе A. Отсюда легко выводится, что $x \in A$.

Лемма 20. *Пусть G — AO-группа, $H \in \mathcal{L}(G)$ и $a \in G^+$. Если $a = a_1 a_2 \ldots a_s$, где $a_i \in g_i^{-1} H g_i$ для некоторых элементов $g_i \in G$ при $i = 1, 2, \ldots, s$, то существуют положительные элементы $u_i \in g_i^{-1} H g_i$, для которых $a \leqslant u_1 u_2 \ldots u_s$.*

Доказательство. Так как G — AO-группа, то $a_i = u_i v_i^{-1}$, где $u_i \perp v_i$ в группе G при $i = 1, 2, \ldots, s$. Из предложения 9 следует, что $u_i \in g_i^{-1} H g_i$, так как по замечанию 16 $g_i^{-1} H g_i \in \mathcal{L}(G)$ при $i = 1, 2, \ldots, s$.

Доказательство теоремы 2. По определению подгруппы $G(A)$ имеет место включение $A \subseteq G(A)$.

Пусть $e \leqslant x \in G(A)$, тогда по предложению 10 существует элемент $a \in A^+$, для которого $x \leqslant a$. По определению подгруппы A $a = a_1 a_2 \ldots a_s$, где $a_i \in g_i^{-1} H g_i$ для некоторых элементов $g_i \in G$ при $i = 1, 2, \ldots, s$. По лемме 20 можно считать, не теряя общности, что $a_i \in G^+$. Тогда для элемента x выполняются условия леммы 19, откуда следует, что $x \in A$. Таким образом, положительный конус подгруппы $G(A)$ является подмножеством подгруппы A. Так как подгруппа $G(A)$ является направленной подгруппой, то по замечанию 12 имеет место включение $G(A) \subseteq A$. Остаётся применить следствие 13.

Следствие 21. *Если $[A, A] = \{e\}$, то A — o-идеал группы G.*

Следствие 22. *Если $[G(A), G(A)] \neq \{e\}$, то $[A, A] \neq \{e\}$.*

4. Свойства естественного гомоморфизма

Нам понадобятся следующие предложения.

Предложение 23 ([10, лемма 4]). *Пусть G — частично упорядоченная группа. Если $g \in G^+$ и $g = ab^{-1}$, где $a \perp b$ в группе G, то $b = e$.*

Предложение 24 ([8, лемма 1.1]). *Пусть G — частично упорядоченная группа, I — o-идеал группы G, A — направленная подгруппа группы G,*

$\varepsilon\colon G \to G/I$ — естественный гомоморфизм, $\varepsilon(A) = \{K \in G/I \mid K \cap A \neq \varnothing\}$. Тогда $\varepsilon(A)$ — направленная подгруппа группы G/I.

Пусть далее до конца раздела G — AO-группа, I — o-идеал группы G, $\varepsilon\colon G \to G/I$ — естественный гомоморфизм группы G на частично упорядоченную группу G/I, H — подгруппа группы G, $\varepsilon(H) = \{K \in G/I \mid K \cap H \neq \varnothing\}$.

В [9] доказано следующее утверждение.

Предложение 25.

1. *G/I — AO-группа* (*теорема* 2).
2. *Если $a \perp b$ в группе G, то $aI \perp bI$ в группе G/I* (*теорема* 1).

Лемма 26. *Если $H \in \mathcal{L}(G)$, $I \leqslant K$ для $K \in \varepsilon(H)$, то существует элемент $a \in H^+$, для которого $K = aI$.*

Доказательство. Пусть $x \in K \cap H$. Так как G — AO-группа, то $x = ab^{-1}$, где $a \perp b$ в группе G. Тогда по предложению 25 классы aI и bI почти ортогональны в группе G/I. Таким образом, $K = xI = (aI)(bI)^{-1}$, где $I \leqslant K$. Отсюда по предложению 23 следует, что $bI = I$, т. е. $K = aI$. Так как $H \in \mathcal{L}(G)$, то по предложению 9 $a \in H^+$.

Доказательство теоремы 3. Обозначим $\varepsilon(H) = \bar{H}$. Пусть $K \leqslant L \leqslant M$, где $K, M \in \bar{H}$ и $L \in G/I$. Тогда $I \leqslant LK^{-1} \leqslant MK^{-1}$. Положим $LK^{-1} = P$, $MK^{-1} = Q$. По определению отношения частичного порядка в группе G/I существует элемент $x \in G^+$, для которого $xI = P$. По лемме 26 для класса $Q \in \bar{H}^+$ найдётся элемент $h \in H^+$, для которого $Q = hI$. Из неравенства $xI \leqslant hI$ следует, что $x \leqslant hm$ для некоторого элемента $m \in I$. Так как I — направленная подгруппа, то, не теряя общности, можно считать, что $e \leqslant m$.

Рассмотрим элемент $xm^{-1} \leqslant h$. Так как G — AO-группа, то $xm^{-1} = ab^{-1}$, где $a \perp b$ в группе G. Из последнего равенства следует, что $x^{-1}a = m^{-1}b \leqslant a, b$. По свойству почти ортогональности заключаем, что $(m^{-1}b)^2 \leqslant b$, т. е. $b \leqslant m^2$. Так как $e \leqslant b$, то $b \in I$, так как подгруппа I является выпуклой. Следовательно, $bI = I$ и $xI = aI$.

С другой стороны, из неравенства $ab^{-1} \leqslant h$ следует, что $h^{-1}a \leqslant b$. Так как $h \in G^+$, то $h^{-1}a \leqslant a$. Из неравенств для почти ортогональных элементов a, b следует, что $(h^{-1}a)^2 \leqslant a$, т. е. $a \leqslant h^2$. Значит, $a \in H$, так как H — выпуклая подгруппа. Тогда $P = aI \in \bar{H}$, т. е. $LK^{-1} \in \bar{H}$ и $L \in \bar{H}$.

Следовательно, $\bar{H}$ является выпуклой подгруппой группы G/I. Направленность подгруппы $\bar{H}$ следует из предложения 24. Теорема доказана.

Из доказанных теорем можно сделать некоторые выводы о подгруппах группы G/I.

Пусть далее $H \in \mathcal{L}(G)$, A — подгруппа, порождённая множеством $\{g^{-1}Hg \mid g \in G\}$, $B = G(A)$. Если M — подгруппа группы G, то будем обозначать $\bar{M}$ подгруппу $\varepsilon(M)$ в группе $\bar{G} = G/I$. Тогда имеют место следующие утверждения.

Лемма 27. *$\bar{A}$ является подгруппой, порождённой в группе $\bar{G}$ множеством $\{K^{-1}\bar{H}K \mid K \in \bar{G}\}$.*

Доказательство. Пусть $X \in \bar{A}$, тогда найдётся элемент $a \in A$, для которого $X = aI$. Так как по определению подгруппы A $a = a_1 a_2 \ldots a_s$, где $a_j \in g_j^{-1} H g_j$ для некоторых элементов $g_j \in G$ при $j = 1, 2, \ldots, s$, то $X = (a_1 I)(a_2 I) \ldots (a_s I)$, где $a_j I \in (g_j I)^{-1} \bar{H} (g_j I)$ для некоторых классов $g_j I \in \bar{G}$ при $j = 1, 2, \ldots, s$.

Лемма 28. *$\bar{B}$ — o-идеал группы $\bar{G}$.*

Доказательство. Из теорем 1 и 3 заключаем, что $\bar{B} \in \mathcal{L}(\bar{G})$.

Если $K \in \bar{G}$ и $X \in \bar{B}$, то $K = gI$ для некоторого элемента $g \in G$, а $X = bI$ для некоторого элемента $b \in B$. Тогда имеет место равенство $K^{-1} X K = g^{-1} b g I$, где по теореме 1 $g^{-1} b g \in B$. Следовательно, $K^{-1} X K \in \bar{B}$, т. е. $\bar{B}$ является нормальной подгруппой группы $\bar{G}$.

Лемма 29. *$\bar{B} = \bar{G}(\bar{A})$.*

Доказательство. Из включения $A \subseteq B$ следует, что $\bar{A} \subseteq \bar{B}$. В этом случае по лемме 28 и следствию 13 верно включение $\bar{G}(\bar{A}) \subseteq \bar{B}$.

Если $I \leqslant X \in \bar{B}$, то по лемме 26 найдётся элемент $b \in B^+$, для которого $X = bI$. По предложению 10 существует элемент $a \in A^+$, для которого $b \leqslant a$. Таким образом, существует класс aI в группе $\bar{A}$, удовлетворяющий неравенству $X \leqslant aI$. Так как $\bar{A} \subseteq \bar{G}(\bar{A})$, то $X \in \bar{G}(\bar{A})$. Отсюда следует включение $\bar{B}^+ \subseteq \bar{G}(\bar{A})$. Следовательно, $\bar{B} \subseteq \bar{G}(\bar{A})$ по замечанию 12, так как $\bar{B}$ является направленной подгруппой.

Замечание 30. Если M — подгруппа группы G, где $[M, M] \subseteq I$, то $[\bar{M}, \bar{M}] = \{I\}$.

Доказательство. Пусть $X, Y \in \bar{M}$, тогда $X = aI$, $Y = bI$ для некоторых элементов $a, b \in M$. Отсюда следует, что $[X, Y] = [a, b]I$, где $[a, b] \in I$ по условию замечания.

Лемма 31. *Если $[A, A]$ является подмножеством идеала I, то $\bar{A} = \bar{B}$.*

Доказательство. По теореме 1 $\bar{H} \in \mathcal{L}(\bar{G})$. По замечанию 30 $[\bar{A}, \bar{A}] = \{I\}$. Применяя теорему 2, заключаем, что $\bar{A}$ является o-идеалом группы $\bar{G}$. Остаётся применить следствие 13 и лемму 29.

Следствие 32. *Если $[\bar{B}, \bar{B}] \neq \{I\}$, то $[A, A]$ не является подмножеством идеала I.*

Доказательство. Пусть, от противного, $[A, A] \subseteq I$. Тогда по лемме 31 $\bar{A} = \bar{B}$. С другой стороны, по замечанию 30 $[\bar{A}, \bar{A}] = \{I\}$.

5. Первичные идеалы

Пусть до конца раздела G — AO-группа и A — подгруппа, порождённая в группе G множеством $\{x^{-1} G(g) x \mid x \in G\}$. Обозначим через I_g наименьший o-идеал группы G, который содержит элемент $g \in G$.

Лемма 33. *$I_g = G(A)$.*

Доказательство. Так как $G(g) \in \mathcal{L}(G)$, то по теореме 1 $G(A)$ является o-идеалом группы G. Из того, что $g \in G(A)$, следует, что $I_g \subseteq G(A)$ по выбору идеала I_g.

С другой стороны, так как $I_g \in \mathcal{L}(G)$, то $G(g) \subseteq I_g$ по определению подгруппы $G(g)$. В этом случае по следствию 13 имеет место включение $G(A) \subseteq I_g$.

Таким образом, $G(A) = I_g$.

Лемма 34. *Если $g \notin AO\text{-rad}(G)$, то существует последовательность элементов (a_i), где $a_0 = g$ и $a_{i+1} = [b_i^{-1}x_ib_i, y_i]$ для некоторых элементов $b_i, x_i, y_i \in G$, удовлетворяющих условию $G(x_i), G(y_i) \subseteq G(a_i)$, в которой $a_i \neq e$ для любого индекса i.*

Доказательство. Так как $g \notin AO\text{-rad}(G)$, найдётся AO-первичный идеал P группы G, для которого $g \notin P$. В этом случае I_g не является подмножеством идеала P. По лемме 28 в группе G/P существует o-идеал $\varepsilon(I_g) \neq \{P\}$.

Так как P — AO-первичный идеал группы G, то G/P является AO-первичной группой, поэтому $[\varepsilon(I_g), \varepsilon(I_g)] \neq \{P\}$. Отсюда по следствию 32 и лемме 33 заключаем, что $[A, A]$ не является подмножеством идеала P. В этом случае по лемме 15 для некоторых элементов $s, t \in G$ и элементов $a, b \in G(g)$ существует коммутатор $[s^{-1}as, t^{-1}bt]$, не принадлежащий P. Тогда $t[s^{-1}as, t^{-1}bt]t^{-1} \notin P$.

Введём следующие обозначения:

$$a_0 = g, \quad x_0 = a, \quad y_0 = b, \quad b_0 = st^{-1}, \quad a_1 = [ts^{-1}ast^{-1}, b].$$

Тогда $a_1 = [b_0^{-1}x_0b_0, y_0] \neq e$ для элементов $x_0, y_0 \in G(a_0)$. Так как $G(a_0) \in \mathcal{L}(G)$, то $G(x_0), G(y_0) \subseteq G(a_0)$.

Повторив предыдущие рассуждения для элемента $a_1 \notin P$, получим элемент $a_2 \neq e$ и т. д. Лемма доказана.

Далее нам понадобятся следующие утверждения.

Предложение 35 ([7, лемма 2.2]). *Если I — o-идеал частично упорядоченной группы G, $\bar{A} \in \mathcal{L}(G/I)$ и A — полный прообраз подгруппы $\bar{A}$ при гомоморфизме ε, то $A \in \mathcal{L}(G)$.*

Следствие 36. *Если $\bar{A}$ — o-идеал группы G/I, то A — o-идеал группы G.*

Доказательство теоремы 7. Пусть в группе G существует последовательность элементов (a_i), где $a_{i+1} = [b_i^{-1}x_ib_i, y_i]$ для некоторых элементов $b_i, x_i, y_i \in G$, удовлетворяющих условию $G(x_i), G(y_i) \subseteq G(a_i)$, в которой $a_i \neq e$ для любого индекса i.

По лемме Цорна найдётся максимальный o-идеал J в группе G, который не содержит элементов из последовательности (a_i). Докажем, что J является AO-первичным идеалом группы G. Для этого рассмотрим o-идеалы $\bar{A} \neq \{J\}$ и $\bar{B} \neq \{J\}$ в группе G/J и их полные прообразы A и B в группе G при гомоморфизме ε.

По следствию 36 подгруппы A и B являются o-идеалами группы G. При этом $J \subset A$ и $J \subset B$. В этом случае должны найтись элементы $a_s \in A$ и $a_t \in B$, для которых $a_s, a_t \in (a_i)$.

Если $s \neq t$, то пусть для определённости $s < t$. Рассмотрим элемент последовательности $a_{s+1} = [b_s^{-1}x_s b_s, y_s]$, где $G(x_s), G(y_s) \subseteq G(a_s)$. Так как $A \in \mathcal{L}(G)$, то $G(a_s) \subseteq A$, откуда по транзитивности следует, что $G(x_s), G(y_s) \subseteq A$, т. е. $x_s, y_s \in A$. Так как A является нормальной подгруппой группы G, то $b_s^{-1}x_s b_s \in$ $\in A$. Следовательно, $a_{s+1} \in A$.

Рассуждая аналогично, через конечное число шагов можно показать, что $a_{t+1} \in A$ и $a_{t+1} \in B$, где $a_{t+1} = [b_t^{-1}x_t b_t, y_t]$ для элементов $b_t^{-1}x_t b_t \in A$ и $y_t \in B$. Таким образом, $a_{t+1} \in [A, B]$, но $a_{t+1} \notin J$. В этом случае класс $a_{t+1}J \neq J$ принадлежит коммутанту $[\bar{A}, \bar{B}]$, т. е. $[\bar{A}, \bar{B}] \neq \{J\}$. Следовательно, группа G/J является AO-первичной группой.

Значит, если элемент $g \in G$ не является AO-строго энгелевым, то $g \notin$ $\notin AO\text{-rad}(G)$. Остаётся применить лемму 34.

Литература

[1] Копытов В. М. Решёточно упорядоченные группы. — М.: Наука, 1984.

[2] Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Мир, 1971.

[3] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал решёточно упорядоченных колец // Сборник работ по алгебре / Под ред. А. И. Кострикина. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. — С. 178—184.

[4] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал решёточно упорядоченных групп // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1990. — № 2. — С. 84—86.

[5] Михалёв А. В., Ширшова Е. Е. Первичный радикал pl-групп // Фундамент. и прикл. мат. — 2006. — Т. 12, вып. 2. — С. 193—199.

[6] Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.

[7] Ширшова Е. Е. Ассоциированные подгруппы псевдорешёточно упорядоченных групп // Алгебраические системы. Сб. тр. Ивановского гос. унив. — Иваново, 1991. — С. 78—85.

[8] Ширшова Е. Е. Гомоморфизмы, сохраняющие p-ортогональность // Фундамент. и прикл. мат. — 2000. — Т. 6, вып. 3. — С. 939—952.

[9] Ширшова Е. Е. О гомоморфизмах AO-групп // Универсальная алгебра и её приложения. Тр. участников междунар. семинара. — Волгоград: Перемена, 2000. — С. 287—294.

[10] Ширшова Е. Е. Об обобщении понятия ортогональности и группах Рисса // Мат. заметки. — 2001. — Т. 69, вып. 1. — С. 122—132.

[11] Щукин К. К. RI-разрешимый радикал группы // Мат. сб. — 1960. — Т. 52, № 4. — С. 1021—1031.

[12] Shirshova E. E. On groups with the almost orthogonality condition // Comm. Algebra. — 2000. — Vol. 28, no. 10. — P. 4803—4818.