Необходимые и достаточные условия полиномиальности роста многообразия алгебр Лейбница

С. П. МИЩЕНКО
Ульяновский государственный университет
e-mail: mishchenkosp@mail.ru

О. И. ЧЕРЕВАТЕНКО
Ульяновский государственный педагогический университет
e-mail: chai@pisem.net

УДК 512.572

Ключевые слова: алгебра Лейбница, многообразие полиномиального роста, тождество, коразмерность.

Аннотация

Над полем нулевой характеристики мы изучаем поведение последовательности коразмерностей многообразий алгебр Лейбница. В работе доказано, что многообразие имеет полиномиальный рост тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\mathbf{N}_2\mathbf{A}, \widetilde{\mathbf{V}_1} \not\subset \mathbf{V} \subset \widetilde{\mathbf{N}_c\mathbf{A}},$$

где $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$ — многообразие алгебр Ли, которое определено тождеством

$$(x_1x_2)(x_3x_4)(x_5x_6) \equiv 0,$$

$\widetilde{\mathbf{V}_1}$ — многообразие алгебр Лейбница, определённое тождеством

$$x_1(x_2x_3)(x_4x_5) \equiv 0,$$

а $\widetilde{\mathbf{N}_c\mathbf{A}}$ — многообразие алгебр Лейбница, определённое тождеством

$$(x_1x_2)\ldots(x_{2c+1}x_{2c+2}) \equiv 0.$$

Abstract

S. P. Mishchenko, O. I. Cherevatenko, Necessary and sufficient conditions for a variety of Leibniz algebras to have polynomial growth, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 8, pp. 207—215.

We study the behaviour of the codimension sequence of polynomial identities of Leibniz algebras over a field of characteristic 0. We prove that a variety $\mathbf{V}$ has polynomial growth if and only if the condition

$$\mathbf{N}_2\mathbf{A}, \widetilde{\mathbf{V}_1} \not\subset \mathbf{V} \subset \widetilde{\mathbf{N}_c\mathbf{A}}$$

holds, where $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$ is the variety of Lie algebras defined by the identity

$$(x_1x_2)(x_3x_4)(x_5x_6) \equiv 0,$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 8, с. 207—215.

$\widetilde{\mathbf{V}_1}$ is the variety of Leibniz algebras defined by the identity

$$x_1(x_2x_3)(x_4x_5) \equiv 0,$$

and $\widetilde{\mathbf{N}_c\mathbf{A}}$ is the variety of Leibniz algebras defined by the identity

$$(x_1x_2)\cdots(x_{2c+1}x_{2c+2}) \equiv 0.$$

Работа посвящена числовым характеристикам многообразий алгебр Лейбница над полем нулевой характеристики. Основным результатом является критерий полиномиальности роста коразмерностей тождеств, аналогичный доказанному ранее первым соавтором (см. [3]) для случая алгебр Ли.

Напомним, что алгебра Лейбница над полем F — это неассоциативная алгебра с билинейным произведением, удовлетворяющая тождеству Лейбница

$$(xy)z = (xz)y + x(yz),$$

которое превращает правое умножение на элемент алгебры в дифференцирование этой алгебры. Понятно, что любая алгебра Ли является, в частности, алгеброй Лейбница. Вероятно, впервые этот класс алгебр был определён в [2].

Напомним, что элементы вида $(((x_{i_1}x_{i_2})x_{i_3})\ldots x_{i_n}) = x_{i_1}\ldots x_{i_n}$ называются левонормированными. В этом случае будем опускать скобки.

Договоримся использовать специальный символ (черту или волну) над образующими вместо выписывания кососимметрической суммы. Например, определяющее алгебру Лейбница тождество можно переписать так: $x\bar{y}\bar{z} \equiv x(yz)$. Напомним также, что в любой алгебре Лейбница выполняется тождество $x(yz) \equiv -x(zy)$.

Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие линейных алгебр. Обозначим через $L = F(X, \mathbf{V})$ относительно свободную алгебру многообразия $\mathbf{V}$ со счётным множеством свободных образующих $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Совокупность всех полилинейных элементов от $x_1, \ldots, x_n$ в алгебре L обозначим через $P_n = P_n(\mathbf{V})$. Действие $\sigma(x_i) = x_{\sigma(i)}$ симметрической группы S_n естественным образом продолжается до автоморфизма алгебры L, при этом пространство P_n становится S_n-модулем. В случае нулевой характеристики основного поля F вся информация о многообразии $\mathbf{V}$ содержится в пространствах P_n, $n = 1, 2, \ldots$. Поэтому исследование структуры P_n как S_n-модуля играет важную роль при изучении многообразия $\mathbf{V}$. Модуль P_n является вполне приводимым. Рассмотрим разложение его характера в целочисленную комбинацию неприводимых характеров χ_λ с кратностями m_λ, где $\lambda \vdash n$ — разбиение числа n:

$$\chi_n(\mathbf{V}) = \chi(P_n(\mathbf{V})) = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda \chi_\lambda. \tag{1}$$

Асимптотическое поведение размерности $c_n = c_n(\mathbf{V})$ пространства $P_n = P_n(\mathbf{V})$ определяет рост многообразия. Напомним, что рост многообразия называется полиномиальным, если существуют такие числа C, k, что для любого n выполняется неравенство

$$c_n(\mathbf{V}) < Cn^k.$$

Обозначим через d_λ размерность соответствующего разбиению λ неприводимого модуля, т. е. $d_\lambda = \deg \chi_\lambda$. Понятно, что имеет место равенство

$$c_n(\mathbf{V}) = \dim P_n(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda d_\lambda.$$

Все основные не определяемые здесь понятия и обозначения можно найти в обзоре [5].

Для удобства читателей приведём полученный ранее авторами (см. [6, теорема 2; 7]) критерий полиномиальности роста «на языке диаграмм Юнга».

Теорема 1. *В случае нулевой характеристики основного поля многообразие алгебр Лейбница* $\mathbf{V}$ *имеет полиномиальный рост тогда и только тогда, когда существует такое число* m, *что в сумме* (1) $m_\lambda = 0$ *в случае, если выполнено условие* $n - \lambda_1 > m$.

Отметим, что аналогичный результат для случая алгебр Ли получен в [1].

Для различения многообразий алгебр Ли и алгебр Лейбница, выделяемых одинаковыми тождествами, будем использовать волну. Например, многообразие алгебр Ли с нильпотентным ступени не выше c коммутантом, которое определяется тождеством

$$(x_1x_2)\ldots(x_{2c+1}x_{2c+2}) \equiv 0, \tag{2}$$

обозначим $\mathbf{N}_c\mathbf{A}$, а многообразие алгебр Лейбница, определённое тем же тождеством, — $\widetilde{\mathbf{N}_c\mathbf{A}}$. Понятно, что $\mathbf{N}_c\mathbf{A} \subset \widetilde{\mathbf{N}_c\mathbf{A}}$.

В классе многообразий алгебр Лейбница с тождеством (2) для некоторого c известны два многообразия с почти полиномиальным ростом. Первое из них — это многообразие $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$ алгебр Ли, свойства которого описаны в [4]. Второе многообразие — это многообразие алгебр Лейбница, которое определяется тождеством

$$x_0(x_1x_2)(x_3x_4) \equiv 0.$$

Оно подробно исследовано в [8]. Сохраним для него использованное в упомянутой работе обозначение $\widetilde{\mathbf{V}_1}$. Отметим, что данные многообразия имеют экспоненциальный рост, более точно, размерности пространств $P_n(\mathbf{N}_2\mathbf{A})$, $P_n(\widetilde{\mathbf{V}_1})$ асимптотически ведут себя как 2^n.

Сформулируем основной результат данной работы.

Теорема 2. *В случае нулевой характеристики основного поля многообразие алгебр Лейбница* $\mathbf{V}$ *имеет полиномиальный рост тогда и только тогда, когда существует такое число* c, *что выполнено условие*

$$\mathbf{N}_2\mathbf{A}, \widetilde{\mathbf{V}_1} \not\subset \mathbf{V} \subset \widetilde{\mathbf{N}_c\mathbf{A}}. \tag{3}$$

В упомянутой работе [3] соответствующий критерий для случая многообразий алгебр Ли выглядит так:

$$\mathbf{N}_2\mathbf{A} \not\subset \mathbf{V} \subset \mathbf{N}_c\mathbf{A}.$$

Доказательство. Пусть многообразие $\mathbf{V}$ имеет полиномиальный рост, тогда по [6, теорема 1] существует такое c, что выполняется условие $\mathbf{V} \subset \widetilde{\mathbf{N}_c\mathbf{A}}$. С другой стороны, так как многообразия $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$ и $\widetilde{\mathbf{V}_1}$ имеют экспоненциальный рост и не могут быть подмногообразиями многообразия $\mathbf{V}$, получаем условие $\mathbf{N}_2\mathbf{A}, \widetilde{\mathbf{V}_1} \not\subset \mathbf{V}$. Таким образом, необходимость условия (3) для полиномиальности роста доказана.

Предположим теперь, что для многообразия $\mathbf{V}$ выполнено условие (3). Доказательство достаточности этого условия проведём методом математической индукции. Для этого рассмотрим сначала случай $c = 2$.

Пусть t_1 и t_2 — некоторые произведения образующих. Тогда из определяющего тождества многообразия $\widetilde{\mathbf{N}_2\mathbf{A}}$ следует, что остальные образующие относительно свободной алгебры этого многообразия перестановочны, т. е. $t_1x_1x_2t_2 = t_1x_2x_1t_2$ и $t_1t_2x_1x_2 = t_1t_2x_2x_1$. Договоримся использовать это свойство без специальных объяснений.

Следующее утверждение выделим в виде леммы, так как оно представляет самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Если*
$$\widetilde{\mathbf{V}_1} \not\subset \mathbf{V} \subset \widetilde{\mathbf{N}_2\mathbf{A}},$$
то существует такое натуральное число m, что для любого ассоциативного полинома f от внутренних дифференцирований, содержащего более m пар кососимметричных переменных, в многообразии $\mathbf{V}$ выполнено тождество $x^2f \equiv 0$.

Доказательство. По условию $\mathbf{V} \cap \widetilde{\mathbf{V}_1}$ есть собственное подмногообразие многообразия $\widetilde{\mathbf{V}_1}$, а значит, имеет полиномиальный рост [8]. Согласно теореме 1 существует такое натуральное число m, что в пересечении многообразий тождествами являются все элементы свободной алгебры, построенные по диаграммам Юнга, у которых число клеток вне первой строки превышает m. Отсюда следует, что произвольный элемент w, содержащий больше m кососимметричных пар переменных, попадает по модулю тождеств многообразия $\mathbf{V}$ в вербальный идеал многообразия $\widetilde{\mathbf{V}_1}$. Пусть $w = zf$, где f — ассоциативный полином от внутренних дифференцирований, содержащий более m пар кососимметричных переменных. Тогда
$$w = \sum \alpha z \ldots t_1 \ldots t_2 + \sum \beta(\ldots z \ldots),$$
где коэффициенты α, β принадлежат основному полю F. Кроме того, t_1 и t_2 являются произведениями образующих и в слагаемых первой суммы выделенная образующая z находится на первом месте, а во второй сумме строение элементов несущественно, главное, что выделенная образующая расположена не на первом месте.

Подставим $z = x^2$, тогда слагаемые второй суммы равны нулю в любой алгебре Лейбница, а слагаемые первой суммы равны нулю в алгебрах многообразия $\widetilde{\mathbf{N}_2\mathbf{A}}$. Итак, мы показали, что в многообразии $\mathbf{V}$ выполнено тождество $x^2f \equiv 0$. Лемма 1 доказана. □

Замечание. Поясним, что из доказанной леммы следует кососимметричность переменных на первых двух местах при условии наличия достаточного количества (более m) кососимметричных пар. Это позволяет использовать преобразования выражений, аналогичные лиевскому случаю. В частности, в многообразии $\mathbf{V}$ для любого полинома f, удовлетворяющего условию леммы, выполняется, например, аналог тождества Якоби $xyzf + yzxf + zxyf \equiv 0$ и полезное для нас его следствие $\bar{z}_1\bar{z}_2\bar{z}_3 f \equiv 0$.

Докажем теперь, что при выполнении условий теоремы существует такое натуральное число m, что в многообразии $\mathbf{V}$ для любого $k \geqslant m$ выполнено тождество

$$(\tilde{x}_1\tilde{x}_2)\bar{x}_1^k(\tilde{x}_3\tilde{x}_4)\bar{x}_2^k \equiv 0. \tag{4}$$

Зафиксируем такое число m, при котором одновременно выполняются как утверждение леммы 1, так и утверждение теоремы 1 для многообразия $\mathbf{N}_2\mathbf{A}\cap\mathbf{V}$. Пусть k, $k \geqslant m$, — некоторое число. Рассмотрим разбиение $\mu = (k+1, k+1, 1, 1)$ числа $n = 2k+4$ и соответствующий этому разбиению элемент g_μ, который равен левой части тождества (4). Тогда из результатов [4] следует, что полная линеаризация f_μ элемента g_μ порождает в полилинейной компоненте $P_n(\mathbf{N}_2\mathbf{A})$ единственный ненулевой неприводимый S_n-подмодуль FS_nf_μ, соответствующий разбиению μ.

Из леммы 1 и замечания следует, что в случае многообразия $\mathbf{V}$, так же как и в случае алгебр Ли, переменные внутри скобок образуют кососимметрические пары. Кроме того, мы получаем, что в полилинейной компоненте многообразия $\mathbf{V}$ только FS_nf_μ может быть единственным ненулевым неприводимым S_n-подмодулем, соответствующим разбиению μ, т. е. $m_\mu \leqslant 1$, причём это утверждение может быть получено с использованием только тех тождественных соотношений, которые выполняются в многообразии $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$. По выбору m $g_\mu \equiv 0$ является тождеством пересечения $\mathbf{N}_2\mathbf{A} \cap \mathbf{V}$. Это возможно только в случае, когда $g_\mu \equiv 0$ является также тождеством самого многообразия $\mathbf{V}$.

Докажем теперь, что в многообразии для любого $p \geqslant m+4$ выполнено тождество

$$t_1\bar{x}_1^p t_2\bar{x}_2^p \equiv 0, \tag{5}$$

где t_1, t_2 — любые произведения образующих.

Подставим в (4) вместо x_3 произведение $z_1z_2x_5$, а вместо x_4 произведение z_1z_2. Получим тождественное соотношение

$$2(z_1z_2)x_5\bar{x}_1^{k+1}(z_1z_2)\bar{x}_2^{k+1} - (z_1z_2)\bar{x}_1^{k+1}(z_1z_2)x_5\bar{x}_2^{k+1} \equiv 0.$$

Умножим его справа на x_6, проальтернируем по образующим x_5 и x_6, после чего положим $x_5 = x_1$, $x_6 = x_2$. Получим, что в многообразии $\mathbf{V}$ выполняется тождество

$$(z_1z_2)\bar{x}_1^{k+2}(z_1z_2)\bar{x}_2^{k+2} \equiv 0. \tag{6}$$

Подставим теперь в (4) вместо x_3 произведение z_1z_2, а вместо x_4 произведение z_3z_2. Получим тождественное соотношение

$$(\tilde{z}_1z_2)\bar{x}_1^{k+1}(\tilde{z}_3z_2)\bar{x}_2^{k+1} \equiv 0. \tag{7}$$

Для любого $p \geqslant m+2$, используя (6) и (7), получаем тождество

$$(z_1 z_2)\bar{x}_1^p (z_3 z_2)\bar{x}_2^p \equiv 0.$$

Для доказательства выполнимости тождества (5) в многообразии $\mathbf{V}$ осталось проделать следующее: подставить $z_1 = t_1 x_3$, $z_2 = x_4 + x_5$, $z_3 = t_2$; умножить полученную линейную по переменным x_4, x_5 компоненту справа на x_6; проальтернировать по парам переменных x_3, x_4 и x_5, x_6, а после этого подставить $x_3 = x_1$, $x_4 = x_2$ и $x_5 = x_1$, $x_6 = x_2$.

Рассмотрим теперь для многообразия $\mathbf{V}$ разложение (1). Несложно показать, что если первый столбец диаграммы Юнга содержит более пяти клеток, то соответствующий элемент свободной алгебры является тождеством многообразия $\mathbf{V}$. Таким образом, кохарактер многообразия находится в полосе высоты четыре. Рассмотрим разбиение $\lambda \vdash n$ с условием $\lambda_2 \geqslant m+5$, т. е. вторая строка диаграммы Юнга содержит не менее $m+5$ клеток. В этом случае соответствующий элемент g_λ будет содержать не менее $m+3$ пар одинаковых кососимметричных переменных, расположенных на местах начиная с третьего, и его строение по модулю тождеств многообразия $\mathbf{V}$ будет сводиться к виду (5). (Детали этого рассуждения оставляем читателю в качестве несложного упражнения.) Поэтому кратность m_λ также будет равна нулю. Для завершения доказательства теоремы 2 в случае $c = 2$ достаточно использовать теорему 1.

Дальнейшее доказательство проведём методом математической индукции по числу s. Докажем, что элемент, содержащий более k_s пар кососимметричных переменных, попадает по модулю тождеств многообразия $\mathbf{V}$ в вербальный идеал многообразия $\widetilde{\mathbf{N}_s\mathbf{A}}$.

База индукции $s = 2$ доказана, т. е. существует такое число k_2, что если элемент содержит более k_2 пар кососимметричных переменных, то он является тождеством многообразия $\widetilde{\mathbf{N}_2\mathbf{A}}$.

Предположим, что существует такое натуральное число k_{s-1}, что элемент w, содержащий больше этого числа кососимметричных пар переменных, попадает в вербальный идеал многообразия $\widetilde{\mathbf{N}_{s-1}\mathbf{A}}$. Рассмотрим натуральное число $k_s = 8k_{s-1} + 2s$ и элемент w, содержащий k_s кососимметричных пар переменных. По предположению индукции элемент w равен сумме элементов v, каждый из которых в своей левонормированной записи содержит s произведений образующих второй степени $t_1, \ldots, t_s$, а остальные переменные — это свободные образующие, поэтому в записи произведений участвуют $2s$ свободных образующих. Таким образом, вне этих произведений в слагаемом v содержится как минимум $k_s = 8k_{s-1}$ пар кососимметричных переменных. Дифференцируя образующими вне произведений, без ограничения общности можно считать, что элемент v имеет вид

$$v = (t_1 \ldots)(t_2 \ldots) \ldots (t_s \ldots).$$

Каждая кососимметричная пара состоит из двух переменных, которые мы, следуя [3], будем называть партнёрами. Партнёр, расположенный левее, будет иметь первый номер.

Если партнёры расположены в одной скобке, то, дифференцируя, мы поместим эту пару рядом, тем самым получаем новое произведение t_{s+1} и образуемые при этом слагаемые попадают в вербальный идеал многообразия $\widetilde{\mathbf{N_sA}}$. Таким образом, можно предполагать, что партнёры расположены в разных скобках.

Если вне последней скобки расположено не менее k_{s-1} вторых номеров пар, то можно применить предположение индукции к первым $s-1$ скобкам. Поэтому будем предполагать, что последняя скобка содержит не менее $7k_{s-1}$ партнёров со вторыми номерами. В дальнейших рассуждениях мы рассматриваем только эти пары кососимметричных переменных.

Рассмотрим ряд случаев расположения партнёров с первыми номерами в различных скобках элемента v.

Первый случай. Если число партнёров с первыми номерами вне первых двух скобок более k_{s-1}, то, обозначая первые две скобки новым символом t, можно применить индуктивный переход и получить требуемое.

Таким образом, мы можем предполагать, что в первых двух скобках содержится не менее $6k_{s-1}$ партнёров с первыми номерами.

Второй случай. Пусть во второй скобке содержится не менее $3k_{s-1}$ первых номеров, а их партнёры расположены в последней скобке. Перепишем элемент v, используя новые обозначения для других скобок: $v = t'_1(t_2\ldots)t'_3\ldots t'_{s-1}(t_s\ldots)$.

Продифференцируем элементом t'_3 и получим сумму

$$t'_1t'_3(t_2\ldots)\ldots(t_s\ldots) + t'_1(t_2\ldots t'_3)\ldots(t_s\ldots).$$

В первом слагаемом не менее k_{s-1} (даже не менее $3k_{s-1}$) партнёров с первыми номерами расположены в третьей скобке, что соответствует разобранному первому случаю.

Во втором слагаемом продолжим дифференцировать элементом t'_3 и получим сумму элементов вида $t'_1((t_2f)(t'_3g)h)\ldots(t_s\ldots)$, где f, g, h являются ассоциативными многочленами от внутренних дифференцирований. Если многочлен h содержит не менее k_{s-1} партнёров с первыми номерами, то, обозначая $(t_2f)(t'_3g)$ новым символом t, можно применить индуктивный переход и получить требуемое.

Итак, мы можем предполагать, что в f и g расположено не менее $2k_{s-1}$ первых номеров. Если в f и g более k_{s-1} первых номеров одновременно, то эта ситуация сводится к первому случаю. Пусть это не так. Тогда, так как

$$t'_1((t_2f)(t'_3g)h)\ldots(t_s\ldots) = -t'_1((t'_3g)(t_2f)h)\ldots(t_s\ldots),$$

без ограничения общности можно считать, что много партнёров с первыми номерами (более k_{s-1}) расположено в скобке (t'_3g). Используя верное в любой алгебре Лейбница тождество $x(yz) = xyz - xzy$, мы можем перемещать переменные из многочлена g в многочлены f и h. В конце концов добьёмся того, что более k_{s-1} партнёров будет не только в g, но и в f или h. Эти случаи были разобраны ранее.

Третий случай. Пусть теперь в первой скобке содержится не менее $3k_{s-1}$ первых номеров, а их партнёры расположены в последней скобке. Аналогично второму случаю перепишем элемент $v = (t_1 \ldots)t'_2 \ldots t'_{s-1}(t_s \ldots)$. Продифференцируем по правилу Лейбница последней скобкой и получим

$$v = (t_1 \ldots) \ldots (t_s \ldots)t'_{s-1} - (t_1 \ldots) \ldots (t_s \ldots t'_{s-1}).$$

К первому слагаемому применим индуктивный переход. Во втором слагаемом рассмотрим последнюю скобку. Дифференцируя элементом t'_{s-1}, получим слагаемые вида $(t_s f)(t'_{s-1} g)h$, где f, g, h являются ассоциативными многочленами от внутренних дифференцирований. Если в h не менее k_{s-1} вторых номеров, то, обозначая элемент $(t_s f)(t'_{s-1} g)$ новым символом t, можно применить индуктивный переход и получить требуемое.

Если в f и g более k_{s-1} вторых номеров одновременно, то, раскрывая последнюю скобку, мы получим слагаемые, в которых в предпоследней скобке не менее k_{s-1} вторых номеров, поэтому к $(s-1)$-й скобке можно применить индуктивное предположение и получить требуемое. Пусть это не так. Тогда, так как в последней скобке является верным преобразование $(t_s f)(t'_{s-1} g)h = -(t'_{s-1} g)(t_s f)h$, без ограничения общности можно считать, что много партнёров со вторыми номерами (более k_{s-1}) расположено в скобке $(t'_{s-1} g)$. Используя верное в любой алгебре Лейбница тождество $x(yz) = xyz - xzy$, мы можем перемещать переменные из многочлена g в многочлены f и h. В конце концов добьёмся того, что более k_{s-1} партнёров будет не только в g, но и в f или h. Эти случаи были разобраны ранее.

Таким образом, рассматриваемый элемент v принадлежат вербальному идеалу многообразия $\widetilde{\mathbf{N}_s\mathbf{A}}$. Теорема 2 полностью доказана. □

Из теоремы 2 получаем такое следствие.

Следствие. *В случае нулевой характеристики основного поля в классе алгебр Лейбница с тождеством* (2) *существуют только два многообразия почти полиномиального роста — это многообразия* $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$ *и* $\widetilde{\mathbf{V}}_1$.

Работа частично поддержана грантом РФФИ 04-01-00739.

Литература

[1] Бенедиктович И. И., Заленский А. Е. Т-идеалы свободных алгебр Ли с полиномиальным ростом последовательности коразмерностей // Изв. АН БССР. — 1980. — № 3. — С. 5—10.

[2] Блох А. М. Об одном обобщении понятия алгебры Ли // ДАН СССР. — 1965. — Т. 18, № 3. — С. 471—473.

[3] Мищенко С. П. О многообразиях полиномиального роста алгебр Ли над полем характеристики нуль // Мат. заметки. — 1986. — Т. 40, № 6. — С. 713—721.

[4] Мищенко С. П. Многообразия алгебр Ли с двуступенно нильпотентным коммутантом // Весцi АН БССР: Сер. фiз. мат. наук. — 1987. — № 6. — С. 39—43.

[5] Мищенко С. П. Рост многообразий алгебр Ли // Успехи мат. наук. — 1990. — Т. 45, № 6. — С. 25—45.

[6] Мищенко С. П., Череватенко О. И. Многообразия алгебр Лейбница слабого роста // Казанское математическое общество. Труды Математического центра им. Н. И. Лобачевского. — 2005. — Т. 31. — С. 103—104.

[7] Мищенко С. П., Череватенко О. И. Многообразия алгебр Лейбница слабого роста // Вестник Самарского государственного университета. — 2006.

[8] Mishchenko S., Valenti A. A Leibniz variety with almost polynomial growth // J. Pure Appl. Algebra. — 2005. — Vol. 202, no. 1—3. — P. 82—101.