Класс групп, в которых все безусловно замкнутые множества являются алгебраическими*

О. В. СИПАЧЁВА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: o-sipa@yandex.ru

УДК 512.546.1+512.546.2+512.543.7

Ключевые слова: алгебраические и безусловно замкнутые множества в группах, прямое произведение, абелева группа.

Аннотация

Доказано, что в любой подгруппе прямого произведения счётных групп безусловно замкнутые множества совпадают с алгебраическими.

Abstract

O. V. Sipacheva, A class of groups in which all unconditionally closed sets are algebraic, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 8, pp. 217—222.

It is proved that, in any subgroup of a direct product of countable groups, the property of being an unconditionally closed set coincides with that of being an algebraic set.

А. А. Марков [2] назвал подмножество A группы G *безусловно замкнутым* в G, если это множество замкнуто в любой отделимой групповой топологии на G. Ясно, что множества решений уравнений в G, равно как все конечные объединения и произвольные пересечения таких множеств, безусловно замкнуты.

Определение (А. А. Марков [2]). Подмножество A группы G с единицей 1 называется *элементарно алгебраическим* в G, если существует слово $w = w(x)$ над алфавитом $G \cup \{x^{\pm 1}\}$ (x — переменная), для которого $A = \{x \in G\colon w(x) = 1\}$. Конечные объединения элементарно алгебраических множеств называются *аддитивно алгебраическими* множествами. Произвольные пересечения аддитивно алгебраических множеств называются *алгебраическими* множествами. Таким образом, алгебраическое множество в G — это множество решений произвольной совокупности конечных систем уравнений в G.

В 1945 г., в статье [2], А. А. Марков показал, что любое алгебраическое множество безусловно замкнуто и поставил вопрос о справедливости обратного утверждения. В [3] (см. также [1]) он дал положительный ответ в случае

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 06-01-00761).

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 8, с. 217—222.

счётных групп, а именно доказал, что всякое безусловно замкнутое множество в счётной группе является алгебраическим в этой группе. В этой статье мы показываем, что ответ положителен также для подгрупп прямых произведений счётных групп (в частности, для всех абелевых групп); доказательство основано на идеях А. А. Маркова. В общем случае ответ отрицательный (по крайней мере, в предположении континуум-гипотезы) [5].

Определение (А. А. Марков [3]). Пусть m — натуральное число. *Мультипликативная функция* от m аргументов — это произвольное слово над алфавитом $\{(1,\pm1),\dots,(m,\pm1)\}$. *Длина* функции определяется как длина этого слова. Пусть G — группа и $x_1,\dots,x_m\in G$. *Значение* мультипликативной функции $\Phi=(j_1,\varepsilon_1)\dots(j_n,\varepsilon_n)$ (от m аргументов) на элементах $x_1,\dots,x_n$ группы G определяется равенством

$$\Phi_G(x_1,\dots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}x_{j_i}^{\varepsilon_i}.$$

Определение. Пусть A — подмножество группы G. *Алгебраическим замыканием* множества A в G называется минимальное алгебраическое множество в G, содержащее A; оно обозначается как $\tilde{A}^G$ или просто $\tilde{A}$.

В этой статье мы рассматриваем алгебраические замыкания только в H.

Теорема. *Если H — подгруппа прямого произведения счётных групп и $A\subset H$, то множество A безусловно замкнуто в H тогда и только тогда, когда оно является алгебраическим в H.*

Доказательство. Пусть G — прямое произведение счётных подгрупп G_α, где $\alpha\in I$, и H — подгруппа G. Мы обозначаем единицы в группах G и G_α через 1 и 1_α соответственно.

Предположим, что $A\subset H$, $1\in\tilde{A}$ и $1\notin A$ (в частности, A не является алгебраическим в H). Покажем, что A не безусловно замкнуто в H. Положим $a_0=1$ и возьмём произвольный элемент $a_1\in H\setminus\{1\}$. Лишь конечное число координат этого элемента отлично от единицы; пусть эти координаты имеют индексы $\beta_1,\dots,\beta_{k_1}$. Заметим, что множество всех мультипликативных функций длины меньше 6 от двух аргументов конечно. Пусть $\mathfrak{M}_1$ — (конечное) подмножество этого множества, состоящее из функций Φ, для которых

$$\Phi(a_1,1)\neq 1.$$

Положим

$$A_\Phi=\{x\in H\colon \Phi(a_1,x)=1\}\quad\text{для}\quad \Phi\in\mathfrak{M}_1$$

и

$$B_1=\bigcup_{\Phi\in\mathfrak{M}_1}A_\Phi.$$

Множество B_1 аддитивно алгебраическое, и $1\notin B_1$. С другой стороны, $1\in\tilde{A}$. Поскольку $\tilde{A}$ — алгебраическое замыкание A, имеем $A\setminus B_1\neq\varnothing$. Возьмём

$x_1 \in A \setminus B_1$. Заметим, что $x_1 \neq a_0, a_1$. Действительно, $x_1 \neq a_0 = 1$, потому что $x_1 \in A \ni 1$, и $x \neq a_1$, потому что $\Phi = (1,1)(1,-1)$ — мультипликативная функция длины 2 от двух аргументов, для которой $\Phi(a_1, a_1) = a_1 a_1^{-1} = 1$, но $\Phi(a_1, 1) = a_1 \neq 1$.

Пусть $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}\}$ — такое конечное подмножество индексного множества I, что $\{\beta_1, \dots, \beta_{k_1}\} \subset \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}\}$ и индексы всех неединичных координат элемента $x_1 \in G = \prod\limits_{\alpha \in I} G_\alpha$ содержатся в $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}\}$ (здесь и ниже $\prod$ обозначает прямое произведение). Перенумеруем все элементы a не более чем счётного множества $H \cap \prod\limits_{\alpha \in I} G'_\alpha \setminus \{a_0, a_1\}$, где $G'_\alpha = G_\alpha$ для $\alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}\}$ и $G'_\alpha = \{1_\alpha\}$ для $\alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}\}$, натуральными числами, не меньшими 2, так, чтобы бесконечно много номеров остались незанятыми, однако номер 2 был занят, т. е. элемент a_2 был определён (например, можно положить $a_2 = x_1$ и использовать для нумерации только чётные числа; в таком случае мы будем иметь $H \cap \prod\limits_{\alpha \in I} G'_\alpha = \{a_0, a_1, a_2, a_4, a_6, \dots\}$. Множество $H \cap \prod\limits_{\alpha \in I} G'_\alpha$ может оказаться конечным, но оно обязано содержать a_0, a_1 и a_2).

Возьмём элемент a_2. Рассуждая как выше, выберем такой элемент $x_2 \in A$, что если Φ — мультипликативная функция длины меньше 9 от четырёх аргументов и $\Phi(a_1, a_2, x_1, x_2) = 1$, то $\Phi(a_1, a_2, x_1, 1) = 1$, и покажем, что $x_2 \neq a_0, a_1, a_2$. Пусть $n_2 > n_1$ и $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_2}\} \subset I$ — множество индексов, которое содержит индексы всех неединичных координат элемента x_2. Перенумеруем все не перенумерованные на предыдущем шаге элементы a не более чем счётного множества $H \cap \prod\limits_{\alpha \in I} G''_\alpha$, где $G''_\alpha = G_\alpha$ для $\alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_2}\}$ и $G''_\alpha = \{1_\alpha\}$ для $\alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_2}\}$, свободными (т. е. не занятыми на предыдущем шаге) натуральными числами так, чтобы бесконечно много номеров остались незанятыми, однако номер 3 был занят (например, можно положить $a_3 = x_2$ и использовать для нумерации только нечётные числа, делящиеся на 3).

На j-м шаге ситуация будет выглядеть так. Определены натуральные числа $n_1 < \dots < n_{j-1}$ и индексы $\alpha_1, \dots, \alpha_{n_{j-1}} \in I$; определены $x_1, \dots, x_{j-1} \in A$ и $a_1, \dots, a_j \in H \cap \prod\limits_{\alpha \in I} G'''_\alpha$, где $G'''_\alpha = G_\alpha$ для $\alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_{j-1}}\}$ и $G''_\alpha = \{1_\alpha\}$ для $\alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_{j-1}}\}$; все элементы a не более чем счётного множества $H \cap \prod\limits_{\alpha \in I} G'''_\alpha$ перенумерованы натуральными числами, причём бесконечно много номеров свободно (однако номера $1, \dots, j$ заняты элементами $a_1, \dots, a_j$). При этом для любой мультипликативной функции Φ длины меньше $3j$ от $2(j-1)$ аргументов, удовлетворяющей условию $\Phi(a_1, \dots, a_{j-1}, x_1, \dots, x_{j-1}) = 1$, имеем $\Phi(a_1, \dots, a_{j-1}, x_1, \dots, x_{j-2}, 1) = 1$. Определим элемент x_j.

Множество всех мультипликативных функций длины меньше $3(j+1)$ от $2j$ аргументов конечно. Пусть $\mathfrak{M}_j$ — его подмножество, состоящее из функций Φ, для которых

$$\Phi(a_1, \dots, a_j, x_1, \dots, x_{j-1}, 1) \neq 1.$$

Положим

$$A_\Phi = \{x\colon \Phi(a_1,\dots,a_j,x_1,\dots,x_{j-1},x) = 1\} \quad \text{для} \quad \Phi \in \mathfrak{M}_j$$

и

$$B_j = \bigcup_{\Phi\in\mathfrak{M}_j} A_\Phi.$$

Множество B_j аддитивно алгебраическое, и $1 \notin B_j$. С другой стороны, $1 \in \tilde{A}$. Поскольку $\tilde{A}$ — алгебраическое замыкание A, имеем $A \setminus B_j \neq \varnothing$. Возьмём $x_j \in A \setminus B_j$. Ясно, что $x_j \neq a_0 = 1, a_1, \dots, a_j$, потому что если $x_j = a_i$, то $\Phi = (i,1)(2j,-1)$ — мультипликативная функция длины меньше $3(j+1)$ от $2j$ аргументов, для которой

$$\Phi(a_1,\dots,a_j,x_1,\dots,x_j) = a_i x_j^{-1} = 1,$$

но

$$\Phi(a_1,\dots,a_j,x_1,\dots,x_{j-1},1) \neq 1.$$

Возьмём достаточно большие число $n_j > n_{j-1}$ и множество $\{\alpha_{n_{j-1}+1},\dots,\alpha_{n_j}\} \subset I$, для которых все координаты элемента x_j с индексами не из $\{\alpha_1,\dots,\alpha_{n_j}\}$ равны единицам соответствующих сомножителей. Перенумеруем все не перенумерованные на предыдущих шагах элементы a не более чем счётного множества $H \cap \prod_{\alpha\in I} G''''_\alpha$, где $G''''_\alpha = G_\alpha$ для $\alpha \in \{\alpha_1,\dots,\alpha_{n_j}\}$ и $G''''_\alpha = \{1_\alpha\}$ для $\alpha \notin \{\alpha_1,\dots,\alpha_{n_j}\}$, свободными (т. е. не занятыми на предыдущих шагах) натуральными числами так, чтобы бесконечно много номеров остались незанятыми. Если элемент a_{j+1} не был определён (т. е. номер $j+1$ не был занят) на предыдущих шагах, то положим $a_{j+1} = x_j$.

В результате мы получим счётное множество $I^* = \{\alpha_i\colon i \in \mathbb{N}\} \subset I\}$, и все элементы множества $G^* = H \cap \prod_{\alpha\in I} G^*_\alpha$, где $G^*_\alpha = G_\alpha$ для $\alpha \in I^*$ и $G^*_\alpha = \{1_\alpha\}$ для $\alpha \notin I^*$, окажутся перенумерованными неотрицательными целыми числами: $G^* = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$, причём $a_0 = 1$. Мы будем иметь также такую последовательность $\{x_1, x_2, \dots\} \subset A$, что если Φ — мультипликативная функция длины меньше $3(j+1)$ от $2j$ аргументов и $\Phi(a_1,\dots,a_j,x_1,\dots,x_j) = 1$, то $\Phi(a_1,\dots,a_j,x_1,\dots,x_{j-1},1) = 1$. Положим $A^* = A \cap G^*$.

Заметим, что G^* — счётная нормальная подгруппа группы H и $A^* \subset G^*$. Таким образом, мы находимся в ситуации, которую рассмотрел А. А. Марков в [3]. Роль группы G из [3] в нашем случае играет G^*, а роль множества A — множество A^*. В [3, пп. 3—5], Марков определяет последовательности $\{b_i\}_{i=1}^\infty$, $\{a_i\}_{i=1}^\infty$ и $\{x_i\}_{i=1}^\infty$, обладающие определёнными свойствами (в статье Маркова свойствам первой последовательности присвоены номера 2.31 и 2.32, свойствам второй — номера 2.41—2.44, а свойствам третьей — номера 2.51 и 2.52). Положим $b_i = 1$ для всех i; последовательности $\{a_i\}_{i=1}^\infty$ и $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ мы уже построили. Эти последовательности обладают всеми перечисленными свойствами, кроме 2.32. Однако свойство 2.32 не используется в пп. 6—12 статьи [3], поэтому мы можем дословно повторить рассуждения из этих пунктов (с заменой G на G^* и A на A^*); в частности, функции f_j на множествах

$$A_j = \{1, a_j\} \cup \{a_k^{-1} x_i a_k \colon i \geqslant j,\ k \leqslant i\},$$

определённые правилами

$$f_j(1) = 0, \quad f_j(a_j) = 1, \quad f_j(a_k^{-1} x_i a_k) = \frac{1}{i},$$

определены корректно и продолжаются до некоторых полунорм N_j на группе G^*. Следуя Маркову [3, п. 11], для произвольного натурального числа n и любых наборов целых чисел $\{p_j\}_{j=1}^n$ и $\{q_j\}_{j=1}^n$, где $p_j \geqslant 0$ и $q_j > 0$ для $j = 1, \ldots, n$, мы определим норму $N_{q_1,\ldots,q_n}^{p_1,\ldots,p_n}$ на группе G^* равенством

$$N_{q_1,\ldots,q_n}^{p_1,\ldots,p_n}(x) = \sum_{j=1}^{n} N_{q_j}(a_{p_j}^{-1} x a_{p_j});$$

при этом $N_q^0 = N_q$ для $q = 1, 2, \ldots$, потому что $a_0 = 1$. Марков показал, что все эти полунормы определяют некоторую групповую топологию $\mathcal{T}^*$ на G^*; базу окрестностей единицы в этой топологии образуют множества вида

$$U_N = \{x \in G^* \colon N(x) < 1\},$$

где $N = N_{q_1,\ldots,q_n}^{p_1,\ldots,p_n}$ для некоторых $p_1, \ldots, p_n \geqslant 0$ и $q_1, \ldots, q_n > 0$.

Докажем, что 1 принадлежит замыканию множества A^* в этой топологии. Для этого достаточно показать, что любая её окрестность вида U_N пересекается с A^*.

Пусть $N = N_{q_1,\ldots,q_n}^{p_1,\ldots,p_n}$. Возьмём натуральное s со свойствами $s > n$, $s > p_j$ и $s > q_j$ для $j = 1, \ldots, n$. По определению имеем

$$N(x_s) = \sum_{j=1}^{n} N_{q_j}(a_{p_j}^{-1} x_s a_{p_j}) = \frac{n}{s} < 1.$$

Значит, $x_s \in U_N$. С другой стороны, $x_s \in A^*$ по построению.

Итак, множество A^* не замкнуто в группе G^* с топологией $\mathcal{T}^*$. Поскольку G^* — нормальная подгруппа группы H, окрестности единицы в топологии $\mathcal{T}^*$ образуют базу окрестностей единицы для некоторой групповой топологии $\mathcal{T}$ на H. Из того, что любая окрестность единицы в $\mathcal{T}^*$ пересекает A^* и $A^* = A \cap G^* \subset A$, вытекает, что любая окрестность единицы в $\mathcal{T}$ пересекает A. Таким образом, A не безусловно замкнуто в H.

Пусть теперь B — произвольное неалгебраическое множество в H; тогда $\tilde{B} \neq B$. Возьмём $b \in \tilde{B} \setminus B$. Имеем $1 \notin b^{-1}B$. С другой стороны, $1 \in b^{-1}\tilde{B}$. Согласно [3, лемма 12] $b^{-1}\tilde{B} = \widetilde{b^{-1}B}$; значит, $1 \in \widetilde{b^{-1}B} \setminus b^{-1}B$. Выше мы доказали, что отсюда вытекает незамкнутость множества $b^{-1}B$ (и, следовательно, самого множества B) в некоторой групповой топологии на H. Таким образом, если множество B не является алгебраическим в H, то оно не может быть безусловно замкнутым в H. С другой стороны, всякое алгебраическое множество в группе H безусловно замкнуто в H [3, теорема 1]. $\square$

Следствие. *Если G — абелева группа и $A \subset G$, то множество A безусловно замкнуто в G тогда и только тогда, когда оно является алгебраическим в G.*

Это утверждение немедленно вытекает из того, что любая абелева группа вкладывается в прямое произведение счётных групп в качестве подгруппы (см., например, [4]).

Литература

[1] Марков А. А. О безусловно замкнутых множествах // ДАН СССР. — 1944. — Т. 44, № 5. — С. 196—197.

[2] Марков А. А. О свободных топологических группах // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1945. — Вып. 9, № 1. — С. 3—64.

[3] Марков А. А. О безусловно замкнутых множествах // Мат. сб. — 1946. — Т. 18, № 1. — С. 3—26.

[4] Kaplansky I. Infinite Abelian Groups. — Ann Arbor: Univ. of Michigan Press, 1954.

[5] Sipacheva O. V. Consistent solution of Markov's problem about algebraic sets. — 2006. — `arXiv:math.GR/0605558`.