Описание делителей нуля в моноиде полугрупповых многообразий относительно сплетения

А. В. ТИЩЕНКО

Финансовая академия
при Правительстве Российской Федерации

УДК 512.536

Ключевые слова: полугруппы, полугрупповые многообразия, тождества, сплетение полугрупп, сплетение многообразий, моноид полугрупповых многообразий.

Аннотация

Из результатов, опубликованных автором в 1999 году, следует, что сплетение любых двух надкоммутативных полугрупповых многообразий совпадает с многообразием всех полугрупп и последнее многообразие есть нуль моноида MV всех полугрупповых многообразий относительно операции сплетения многообразий. В заметке даётся полный ответ на вопрос, при каких условиях сплетение двух полугрупповых многообразий совпадает с нулём моноида MV .

Abstract

A. V. Tishchenko, The description of zero divisors in monoid of semigroup varieties under wreath product, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 8, pp. 223–231.

It follows from the author's results published in 1999 that the wreath product of any two overcommutative semigroup varieties coincides with the variety $\mathbf{S}$ of all semigroups and $\mathbf{S}$ is the zero of the monoid MV of all semigroup varieties under the wreath product of varieties. In this paper, we give a full description of all cases under which the wreath product of two semigroup varieties equals $\mathbf{S}$.

1. Введение

Операция моноидного сплетения полугрупповых многообразий была впервые определена Тилсоном [14], который называл её просто сплетением многообразий. Позднее автор дал другое определение этой операции [5–7] и показал, что это та же самая операция, что и операция сплетения многообразий, введённая Тилсоном (см. [6]).

Из результатов автора, полученных в [9], следует, что сплетение любых двух надкоммутативных многообразий совпадает с многообразием $\mathbf{S}$ всех полугрупп и многообразие $\mathbf{S}$ есть нуль моноида MV всех полугрупповых многообразий. В этой заметке мы даём полный ответ на вопрос, при каких условиях на сплетаемые многообразия их сплетение равно нулю моноида MV .

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 8, с. 223–231.

© 2006 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

Основная теорема. *Моноидное сплетение $\mathbf{U} \text{ w } \mathbf{V}$ двух полугрупповых многообразий равно $\mathbf{S}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{V}$ надкоммутативно, а $\mathbf{U}$ содержит либо одноэлементную полурешётку, либо нетривиальную группу, либо счётно порождённую коммутативную ненильпотентную полугруппу с тождеством $x^2 = 0$.*

Основная теорема была анонсирована в [7]. С доказательством этот результат был изложен в докторской диссертации автора в 2000 году.

Предполагается, что читатель знаком со стандартной терминологией теории полугрупп (см. [1,2]) и основами теории многообразий [10]. В работе существенно используется техника вычисления тождеств сплетения многообразий, развитая в [6]. Необходимые определения и результаты из [6] приводятся в разделе 2. В разделе 3 описываются левые делители нуля моноида $\mathbf{MV}$, в разделе 4 — правые делители нуля моноида $\mathbf{MV}$. В разделе 5 основная теорема выводится из результатов разделов 3 и 4.

2. Предварительные сведения

Многообразие полугрупп — это класс всех полугрупп, в которых выполняются какие-либо полугрупповые тождества (см. [10]). Многообразие всех полугрупп, в которых истинны все тождества $\{u_i = v_i \mid i \in I\}$, обозначается далее $\text{var}\{u_i = v_i \mid i \in I\}$. Согласно известной теореме Биркгофа многообразия полугрупп — это в точности классы полугрупп, замкнутые относительно прямых произведений, гомоморфных образов и подполугрупп. Если $\mathbf{K}$ — какой-либо класс полугрупп, то через $\text{var } \mathbf{K}$ обозначается наименьшее многообразие, содержащее все полугруппы из $\mathbf{K}$. В частности, $\mathbf{K}$ может содержать только одноэлементные полугруппы.

Если X — конечный или счётный алфавит, то X^+ , как обычно, обозначает свободную полугруппу, порождённую множеством X . Элементы свободной полугруппы X^+ называются *словами над алфавитом X* . Если $\mathbf{U}$ — многообразие полугрупп, то через $F(\mathbf{U})$ обозначается счётно порождённая свободная в многообразии $\mathbf{U}$ полугруппа.

В настоящей заметке встречаются следующие полугрупповые многообразия:

$\mathbf{S}$ — многообразие всех полугрупп (является нулём моноида $\mathbf{MV}$);

$\mathbf{T}$ — многообразие всех одноэлементных полугрупп (является единицей моноида $\mathbf{MV}$);

$\mathbf{Com}$ — многообразие всех коммутативных полугрупп, т. е. всех полугрупп, в которых верно тождество коммутативности $xy = yx$;

$\mathbf{S1} = \text{var}\{xy = yx, x^2 = x\}$ — многообразие всех полурешёток;

$\mathbf{A}_n = \text{var}\{xy = yx, xy^n = x\}$ — многообразие всех коммутативных групп экспоненты n ;

$\mathbf{B}_{m,n} = \text{var}\{x^m = x^{m+n}\}$ — периодическое бернсайдово многообразие всех полугрупп индекса m и периода n ; в частности, при $m = n = 1$ получаем многообразие $\mathbf{B}_{1,1} = \mathbf{B}$ всех связей;

$\mathbf{Q}$ — многообразие, порождённое счётной коммутативной нильполугруппой Q , не являющейся нильпотентной, т. е. полугруппой

$$Q = \langle a_i \mid a_i a_j = a_j a_i, a_i^2 = 0, i \in \mathbb{N} \rangle.$$

Напомним теперь основные понятия из [6].

Сплетением S^A w R полугрупп S и R при помощи правого R -полигона A называется полугруппа, определённая на декартовом произведении $S^A \times R$, где S^A — множество всех функций из A в S , а умножение задаётся по формуле $(f, p)(g, q) = (f^p g, pq)$, где $(f^p g)(a) = f(a)g(ap)$ для любого $a \in A$ (см. [4, 13]). При этом полугруппа R называется *активной*, а S — *пассивной* полугруппой сплетения. Сплетение называется *расширенным стандартным* [12], если $A = R^1$, где R^1 обозначает наименьший моноид, содержащий полугруппу R . Отметим, что в одноэлементной полугруппе единственный элемент сам является единицей и поэтому $R^1 = R$ для любой одноэлементной полугруппы R . Расширенное стандартное сплетение обозначается $S w R$.

Определение 2.1 ([5, 6, 14]). *Моноидным сплетением полугрупповых многообразий $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ назовём полугрупповое многообразие $\mathbf{U} w \mathbf{V}$, порождённое всевозможными расширенными стандартными сплетениями $S w R$, в которых пассивная полугруппа S принадлежит $\mathbf{U}$, а активная полугруппа R принадлежит $\mathbf{V}$.*

Очевидно, что многообразие $\mathbf{S}$ всех полугрупп является нулём, а многообразие $\mathbf{T}$ всех тривиальных (т. е. одноэлементных) полугрупп является единицей относительно сплетения многообразий. Как уже отмечалось, моноидное сплетение многообразий ассоциативно [14]. Обозначим через MV упорядоченный моноид всех полугрупповых многообразий относительно моноидного сплетения w и порядка включения $\subseteq$.

Далее нам потребуется следующий способ построения тождеств моноидного сплетения $\mathbf{U} w \mathbf{V}$ через известные тождества многообразий U и V (см. [6]). Отметим, что этот алгоритм был впервые сформулирован автором в [8], а затем в [6].

Алгоритм 2.2 ([6, алгоритм 4.1]). Пусть имеется полугрупповое тождество

$$u = v, \tag{2.1}$$

где $u \equiv y_1 \dots y_k$ и $v \equiv z_1 \dots z_l$ — слова над алфавитом X . Среди букв $y_1, \dots, y_k, z_1, \dots, z_l$ могут быть и одинаковые. Зададим гомоморфизм

$$\varphi: X^+ \rightarrow T = S w R,$$

полагая

$$\varphi(y_i) = (f_i, p_i), \quad \varphi(z_j) = (g_j, q_j),$$

где $f_i, g_j \in S^A$, $p_i, q_j \in R$ ($i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, l$), $A = R^1$, причём для одинаковых букв из множества $Y = \{y_1, \dots, y_k, z_1, \dots, z_l\}$ их образы в T отождествляются и $\varphi(x) = (f_1, p_1)$ для $x \in X \setminus Y$.

Истинность тождества (2.1) в сплетении T равносильна справедливости равенств

$$p_1 \dots p_k = q_1 \dots q_l, \quad (2.2)$$

$$f_1(1)f_2(p_1) \dots f_k(p_1 \dots p_{k-1}) = g_1(1)g_2(q_1) \dots g_l(q_1 \dots q_{l-1}) \quad (2.3)$$

для любых $p_i, q_j \in R$, $f_i, g_j \in S^A$, где $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, l$. Очевидно, что равенство (2.2) верно тождественно в R тогда и только тогда, когда (2.1) есть тождество в R . Для того чтобы справедливость (2.3) выразить на языке тождеств, запишем равенство (2.3) в символическом виде следующим образом. Пусть $\bar{X}$ — алфавит, не пересекающийся с X и находящийся с ним во взаимно-однозначном соответствии, а именно каждой букве $x \in X$ соответствует буква $\bar{x} \in \bar{X}$. Заменяем в равенстве (2.3) каждый множитель вида $f_i(p_1 \dots p_{i-1})$ на пару $(\bar{y}_i, y_1 \dots y_{i-1})$ и каждый множитель вида $g_j(q_1 \dots q_{j-1})$ на пару $(\bar{z}_j, z_1 \dots z_{j-1})$. Тогда получим равенство

$$(\bar{y}_1, 1)(\bar{y}_2, y_1) \dots (\bar{y}_k, y_1 \dots y_{k-1}) = (\bar{z}_1, 1)(\bar{z}_2, z_1) \dots (\bar{z}_l, z_1 \dots z_{l-1}). \quad (2.4)$$

Итак, пусть тождество

$$\tilde{u} = \tilde{v} \quad (2.5)$$

получено из (2.4) таким образом, что каждая пара $(\bar{y}_i, y_1 \dots y_{i-1})$ или $(\bar{z}_j, z_1 \dots z_{j-1})$ заменяется на букву из $\bar{X}$ так, что выполнено следующее условие:

два множителя-пары в (2.4) заменяются на одну и ту же букву из $\bar{X}$ в том и только том случае, если их первые проекции совпадают, а равенство вторых проекций есть тождество, истинное в R^1 .

Теорема 2.3 ([6, теорема 4.2]). Эквивалентны следующие условия:

- а) тождество (2.1) истинно в расширенном стандартном сплетении $T = S \text{ w } R$ полугрупп S и R ;
- б) в полугруппе R истинно тождество (2.1), а в полугруппе S истинно тождество (2.5), полученное из (2.1) с помощью алгоритма 2.2.

Лемма 2.4 ([6, следствие 4.3]). Тождество (2.1) есть следствие тождества (2.5) и может быть получено из него отождествлением некоторых переменных. В частности, $|\tilde{u}| = |u|$ и $|\tilde{v}| = |v|$.

Теорема 2.5 ([6, теорема 4.5]). Эквивалентны следующие условия:

- а) тождество (2.1) истинно в моноидном сплетении $\mathbf{U} \text{ w } \mathbf{V}$ полугрупповых многообразий;
- б) тождество (2.1) истинно в любом расширенном стандартном сплетении $S \text{ w } R$, в котором $S \in \mathbf{U}$ и $R \in \mathbf{V}$;

- в) тождество (2.1) истинно в полугруппе $T = F(\mathbf{U}) \text{ w } F(\mathbf{V})$;
- г) в многообразии V истинно тождество (2.1), а в многообразии U истинно тождество (2.5).

Лемма 2.6. Если в S истинно тождество $x^m = x^{m+n}$, а в R истинно тождество $x^i = x^{i+k}$, то в сплетении $S \text{ w } R$ истинно тождество $x^l = x^{l+d}$, где $l = i + km, d = kn$.

3. Описание левых делителей нуля в моноиде MV

Теорема 3.1. Эквивалентны следующие условия:

- 1) многообразии $\mathbf{U}$ не является левым делителем нуля в MV ;
- 2) $\mathbf{U} \text{ w } \mathbf{Com} \neq \mathbf{S}$;
- 3) в многообразии $\mathbf{U}$ истинно тождество

$$x_1 \dots x_k z y_1 \dots y_m = x_1 \dots x_k z_1 y_1 \dots y_m \tag{3.1}$$

для некоторых целых $k, m \geq 0$;

- 4) существует целое число $n \geq 1$, такое что каждая полугруппа в $\mathbf{U}$ есть нильпотентное расширение индекса n прямоугольной связки;
- 5) в многообразии $\mathbf{U}$ истинно тождество

$$x_1 \dots x_n = x_1 \dots x_n z x_1 \dots x_n \tag{3.2}$$

для некоторого целого $n \geq 1$.

Доказательство.

- 1) $\implies$ 2). Импликация очевидна.
- 2) $\implies$ 3). Допустим, что $\mathbf{U} \text{ w } \mathbf{Com} \neq \mathbf{S}$. Тогда в многообразии $\mathbf{W} = \mathbf{U} \text{ w } \mathbf{Com}$ истинно некоторое нетривиальное тождество

$$u = v. \tag{3.3}$$

Прежде всего заметим, что в силу [7, теорема 3] многообразии $\mathbf{U}$ периодическое. Многообразии $\mathbf{W}$, очевидно, является надкоммутативным. Поэтому тождество (3.3) уравновешенное. Пусть u_1 — общее начало наибольшей длины слов u и v . Тогда тождество (3.3) можно записать в виде

$$u_1 z_1 u_2 = u_1 z_2 v_2, \tag{3.4}$$

где u_1, u_2, v_2 — подслова, возможно пустые, а z_1, z_2 — различные переменные. Согласно лемме 2.4 истинность тождества (3.4) в $\mathbf{W}$ влечёт истинность в $\mathbf{U}$ тождества

$$\tilde{u} = \tilde{v}, \tag{3.5}$$

построенного из (3.4) по алгоритму 2.2. При этом совпадение некоторых переменных $\tilde{x}, \tilde{y}$, имеющих вхождения в различные части тождества (3.5), т. е. $\tilde{u}' \tilde{x} \tilde{u}'' = \tilde{v}' \tilde{y} \tilde{v}''$, возможно лишь в случае, если $x \equiv y$, а $u' = v'$ — тождество,

истинное в **Com**. Так как все тождества $I(\mathbf{Com})$ являются уравновешенными, то это возможно лишь в случае, если переменные x и y стоят на одинаковом месте от начала. Из тех же соображений слова $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ линейные. Следовательно, тождество (3.5) имеет вид

$$\begin{aligned} x_{01} \dots x_{0k(1)} y_{11} \dots y_{11} x_{11} \dots y_{n1} \dots y_{nk(n)} x_{n1} \dots x_{nl(n)} = \\ = x_{01} \dots x_{0k(1)} z_{11} \dots z_{11} x_{11} \dots z_{n1} \dots z_{nk(n)} x_{n1} \dots x_{nl(n)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Отметим, что в (3.6) $|u_1| = k(1)$, и поэтому на $(k(1) + 1)$ -м месте в тождестве (3.6) переменные $\tilde{z}_1$ и $\tilde{z}_2$ различны. Следовательно, тождество (3.6) нетривиально. Отождествляя в (3.6) все одинаково отстоящие от начала переменные, кроме переменных y_{11} и z_{11} , но сохраняя линейность левой и правой части, получим тождество (3.1).

3) $\implies$ 1). Пусть $u = v$ — нетривиальное тождество, истинное в надкоммутативном многообразии **V**. Покажем, что в этом случае в $\mathbf{W} = \mathbf{U} \mathbf{w} \mathbf{V}$ истинно нетривиальное тождество

$$x^k u y^m = x^k v y^m. \quad (3.7)$$

В самом деле, тождество (3.7), очевидно, истинно в **V**. С другой стороны, тождество, построенное из 3.7 по алгоритму 2.2 имеет вид

$$x_1 \dots x_k \tilde{u} y_1 \dots y_m = x_1 \dots x_k \tilde{v} y_1 \dots y_m, \quad (3.8)$$

где $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ — слова одной и той же длины. При этом тождество (3.8) есть следствие тождества (3.1) и, следовательно, оно истинно в **U**. В силу теоремы 2.5 тождество (3.7) истинно в **W**.

3) $\implies$ 4). Полагая в тождестве (3.1) $z_1 = zy_1 \dots y_m x_1 \dots x_k z$, получим, что произведение любых n элементов в $S \in \mathbf{U}$, где $n = m + k + 1$, является идемпотентом в S . Пусть E — множество идемпотентов в S . Тогда из (3.1) легко следует, что для любых $a, b \in E$ справедливо $aba = a^3 = a$. Следовательно, $abab = ab$. Таким образом, E — подполугруппа в S с тождеством $xux = x$, т. е. прямоугольная связка.

4) $\implies$ 5). В произвольной полугруппе $S \in \mathbf{U}$ истинно тождество

$$x_1 \dots x_n z x_1 \dots x_n = x_1 \dots x_n z x_1 \dots x_n z x_1 \dots x_n = x_1 \dots x_n.$$

5) $\implies$ 3). Из (3.2) следует (3.1), если положить $k = m = n$ и использовать вывод, аналогичный выводу тождества $xuz = xz$ из $xux = x$ в прямоугольной полугруппе. Теорема доказана. $\square$

Простой переформулировкой условий 1), 2), 4), 5) теоремы 3.1 в терминах отрицания получим следствие 3.2.

Следствие 3.2. Следующие условия полугруппового многообразия эквивалентны:

- 1) многообразии **U** является левым делителем нуля в **MV**;
- 2) $\mathbf{U} \mathbf{w} \mathbf{Com} = \mathbf{S}$;

- 3) $\mathbf{U}$ содержит полугруппу S , которая не является нильпотентным расширением прямоугольной связки;
 4) для любого целого $n \geq 1$ в многообразии $\mathbf{U}$ ложно тождество (3.2).

Следствие 3.3.

1. $\mathbf{SlwCom} = \mathbf{S}$.
2. $\mathbf{A}_n \text{ w Com} = \mathbf{S}$ для любого целого числа $n \geq 2$.

Следствие непосредственно вытекает из условия 3) следствия 3.2.

Пусть $\mathbf{Q} = \text{var}\{xy = yx, x^2 = 0\}$. Как известно, полугрупповое многообразие является многообразием конечного индекса тогда и только тогда, когда оно не содержит многообразия $\mathbf{Q}$ [3, 11]. Легко проверить, что $\mathbf{Q}$ порождается счётно порождённой нильполугруппой Q , не являющейся нильпотентной, где $Q = \langle a_i \mid a_i a_j = a_j a_i, a_i^2 = 0, i \in \mathbb{N} \rangle$.

Следствие 3.4. $\mathbf{Q} \text{ w Com} = \mathbf{S}$.

Следствие непосредственно вытекает из условия 3) следствия 3.2.

4. Описание правых делителей нуля в моноиде $\mathbf{MV}$

Предложение 4.1. Если в многообразии $\mathbf{U}$ истинно уравновешенное тождество $u = v$, зависящее от двух переменных, то в сплетении $\mathbf{W}_{m,n} = \mathbf{U} \text{ w } \mathbf{B}_{m,n}$ многообразий истинно тождество

$$(x^m y)^m u((x^m y)^n, (x^{m+n} y)^n) = (x^m y)^m v((x^m y)^n, (x^{m+n} y)^n). \quad (4.1)$$

Доказательство. Отметим, что тождество (4.1) истинно в $\mathbf{B}_{m,n}$. В самом деле, так как $x^{m+n} = x^m$ истинно в $\mathbf{B}_{m,n}$, то обе части тождества (4.1) становятся фактически зависимыми от одной переменной $(x^m y)^n$. В силу уравновешенности тождества $u = v$ тождество (4.1) истинно в $\mathbf{B}_{m,n}$. Пусть $T = S \text{ w } R$ — расширенное стандартное сплетение, в котором $S \in \mathbf{U}$ и $R \in \mathbf{B}_{m,n}$. Тогда левая и правая части тождества (4.1) индуцируют в $F(R^1, S)$ произведения, которые имеют общее начало

$$f(1) \dots f(p^{m-1})g(p^m)f(p^m q) \dots f(p^m q p^{m-1})g(p^m q p^m) \dots \\ \dots f((p^m q)^{m-1}) \dots f((p^m q)^{m-1} p^{m-1})g((p^m q)^{m-1} p^m) \quad (4.2)$$

длины $m(m+1)$. В этом доказательстве такое выражение, как (4.2), будем называть словом-функцией. Каждое вхождение слова $x_1 = (x^m y)^n$ в тождество (4.1) индуцирует в $F(R^1, S)$ вхождение слова-функции

$$f((p^m q)^m) \dots f((p^m q)^m p^{m-1})g((p^m q)^m p^m) \\ f((p^m q)^{m+1}) \dots f((p^m q)^{m+1} p^{m-1})g((p^m q)^{m+1} p^m) \dots \\ \dots f((p^m q)^{m+n-1}) \dots f((p^m q)^{m+n-1} p^{m-1})g((p^m q)^{m+n-1} p^m) \quad (4.3)$$

длины $(m+1)n$, а каждое вхождение слова $y_1 = (x^{m+n}y)^n$ в (4.1) индуцирует в $F(R^1, S)$ вхождение слова-функции

$$\begin{aligned} & f((p^m q)^m) \dots f((p^m q)^m p^{m+n-1}) g((p^m q)^m p^{m+n}) \\ & \quad f((p^m q)^{m+1}) \dots f((p^m q)^{m+1} p^{m+n-1}) g((p^m q)^{m+1} p^{m+n}) \dots \\ & \quad \dots f((p^m q)^{m+n-1}) \dots f((p^m q)^{m+n-1} p^{m+n-1}) g((p^m q)^{m+n-1} p^{m+n}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

длины $(m+n+1)n$. Отсюда следует, что тождество $\tilde{u} = \tilde{v}$, которое индуцируется из тождества $u = v$ с помощью алгоритма 2.2, имеет вид

$$w_0 u(u_1, v_1) = w_0 v(u_1, v_1), \quad (4.5)$$

где u_1 — слово длины $(m+1)n$, а v_1 — слово длины $(m+n+1)n$. Тождество (4.5), очевидно, истинно в $\mathbf{U}$, так как оно есть следствие тождества $u = v$.

Отметим, что аргумент функции, следующей как после слова-функции (4.3), так и после слова-функции (4.4), равен $(p^m q)^{m+n} = (p^m q)^m$. При этом число вхождений слов-функций (4.3) и (4.4) одинаково в левой и правой части равенства, индуцированного тождеством (4.1) при подстановке (f, p) вместо x и (g, q) вместо y , в силу уравновешенности тождества $u(x_1, y_1) = v(x_1, y_1)$. Предложение доказано. $\square$

Теорема 4.2. *Эквивалентны следующие условия:*

- 1) *многообразие $\mathbf{V}$ является правым делителем нуля в MV ;*
- 2) *$\mathbf{V}$ — надкоммутативное многообразие полугрупп;*
- 3) *$\text{Com } \mathbf{V} = \mathbf{S}$.*

Доказательство. Импликация 2) $\implies$ 3) непосредственно следует из [7, теорема 3], а импликация 3) $\implies$ 1) очевидна.

1) $\implies$ 2). Пусть $\mathbf{V}$ — правый делитель нуля в MV . Предположим, что $\mathbf{V}$ не является надкоммутативным многообразием. Тогда $\mathbf{V}$ — периодическое многообразие, и следовательно, $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{B}_{m,n}$ для некоторых целых $m, n \geq 1$. В силу свойства монотонности сплетения многообразий и предложения 4.1 имеем $\mathbf{U} \mathbf{w} \mathbf{V} \subseteq \mathbf{U} \mathbf{w} \mathbf{B}_{m,n} \neq \mathbf{S}$ для любого собственного надкоммутативного многообразия $\mathbf{U}$ полугрупп. А так как для периодического многообразия $\mathbf{U}$ по лемме 2.6 сплетение $\mathbf{U} \mathbf{w} \mathbf{V}$ также периодическое, то $\mathbf{U} \mathbf{w} \mathbf{V} \neq \mathbf{S}$ для любого многообразия $\mathbf{U} \neq \mathbf{S}$. Теорема доказана. $\square$

5. Доказательство основной теоремы

Если $\mathbf{U} \mathbf{w} \mathbf{V} = \mathbf{S}$ и $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ — собственные подмногообразия $\mathbf{S}$, то многообразия $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ являются левым и правым делителями нуля в MV соответственно. Согласно теореме 4.2 многообразие $\mathbf{V}$ надкоммутативно, а в силу следствия 3.2 многообразие $\mathbf{U}$ содержит полугруппу S , которая не является нильпотентным расширением прямоугольной связки. Если $\mathbf{U}$ не является многообразием конечного индекса, то оно содержит $\text{var } Q$ (см. [3, 11]). Если же оно является

многообразием конечного индекса, то оно состоит из полурешёток нильпотентных расширений вполне простых полугрупп. В последнем случае $\mathbf{U}$ содержит полугруппу S , которая не является нильпотентным расширением прямоугольной связки, тогда и только тогда, когда $\mathbf{U}$ содержит либо неодноэлементную полурешётку, либо нетривиальную группу.

Обратно, если $\mathbf{V}$ — надкоммутативное многообразие, а $\mathbf{U}$ содержит нетривиальную группу, или неодноэлементную полурешётку, или счётно порождённую коммутативную ненильпотентную нильполугруппу Q с тождеством $x^2 = 0$, то $\mathbf{U} \mathbf{w} \mathbf{V} = \mathbf{S}$ в силу следствий 3.3 и 3.4 и свойства монотонности моноидного сплетения многообразий. Теорема доказана.

Литература

- [1] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1972.
- [2] Общая алгебра. Т. 2 / Под общей ред. Л. А. Скорнякова. — М.: Наука, 1991.
- [3] Сапир М. В., Суханов Е. В. О многообразиях периодических полугрупп // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1981. — № 4. — С. 48—55.
- [4] Тищенко А. В. Радикальность и полупростота сплетения полугрупп // Сиб. мат. журн. — 1986. — Т. 27, № 6. — С. 183—195.
- [5] Тищенко А. В. Когда моноидное сплетение многообразий полугрупп имеет конечный индекс? // Междунар. конф. по алгебре памяти А. И. Ширшова (Барнаул, август 1991). Тезисы докл. по логике и универс. алгебрам, прикл. алгебре. — Новосибирск, 1991. — С. 144.
- [6] Тищенко А. В. О различных определениях сплетения полугрупповых многообразий // Фундамент. и прикл. мат. — 1996. — Т. 2, вып. 1. — С. 233—249.
- [7] Тищенко А. В. Моноид полугрупповых многообразий относительно сплетения // Успехи мат. наук. — 1996. — Т. 51, вып. 2. — С. 177—178.
- [8] Тищенко А. В. Сплетения многообразий и полуархимедовы многообразия полугрупп // Труды ММО. — 1996. — Т. 57. — С. 318—338.
- [9] Тищенко А. В. Упорядоченный моноид полугрупповых многообразий относительно сплетения // Фундамент. и прикл. матем. — 1999. — Т. 5, вып. 1. — С. 283—305.
- [10] Шеврин Л. Н., Волков М. В. Тождества полугрупп // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1985. — № 11. — С. 3—47.
- [11] Шеврин Л. Н., Суханов Е. В. Структурные аспекты теории многообразий полугрупп // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1989. — № 6. — С. 3—39.
- [12] Koselev Yu. G. Varieties preserved under wreath products // Semigroup Forum. — 1976. — Vol. 12. — P. 95—107.
- [13] Skorniakov L. A. Regularity of the wreath product of monoids // Semigroup Forum. — 1979. — Vol. 18, no. 1. — P. 83—86.
- [14] Tilson B. Categories as algebra: an essential ingredient in the theory of monoids // J. Pure Appl. Algebra. — 1987. — Vol. 48, no. 1—2. — P. 83—198.