Модули с большим числом прямых слагаемых*

А. А. ТУГАНБАЕВ
*Российский государственный
торгово-экономический университет*

УДК 512.55

Ключевые слова: I_0-модуль, прямое слагаемое, малый подмодуль.

Аннотация

Исследуются кольца, над которыми все модули являются I_0-модулями.

Abstract

A. A. Tuganbaev, Modules with many direct summands, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 8, pp. 233—241.

We study rings over which all right modules are I_0-modules.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Подмодуль N модуля M называется *малым в* M, если $N + P \neq M$ для любого собственного подмодуля P модуля M. Модуль M называется I_0-*модулем*, если каждый циклический немалый подмодуль модуля M содержит ненулевое прямое слагаемое модуля M. Кольцо A называется *правым* (*левым*) I_0-*кольцом*, если A_A (${}_AA$) является правым (левым) I_0-модулем. I_0-модули и I_0-кольца изучались в [8; 11, гл. 3; 1—3; 6; 7] и других работах. В данной работе исследуются кольца, над которыми все правые модули являются I_0-модулями. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *каждый правый A-модуль является I_0-модулем*;
2) *для каждого правого A-модуля M верно, что $J(M)$ — полупростой модуль и если $J(M) = 0$, то каждый ненулевой подмодуль модуля M содержит ненулевое прямое слагаемое модуля M*;
3) *каждый правый A-модуль либо имеет ненулевое инъективное прямое слагаемое, либо является полупростым модулем и лежит в радикале Джекобсона своей инъективной оболочки*;
4) *каждый циклический правый A-модуль либо имеет ненулевое инъективное прямое слагаемое, либо является полупростым модулем.*

*Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект 05-01-01048.

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 8, с. 233—241.

Кольцо вычетов $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ является примером неполупростого кольца, удовлетворяющего условиям теоремы 1. В примере 11 данной работы указано такое кольцо A, что все правые A-модули являются I_0-модулями, причём A содержит бесконечное множество ортогональных идемпотентов и поэтому не является нётеровым. Можно также показать, что A — полуартиново слева кольцо и не все левые A-модули являются I_0-модулями.

К I_0-модулям близки регулярные и полурегулярные модули. Модуль M называется *регулярным*, если каждый его циклический подмодуль является прямым слагаемым модуля M. Модуль M называется *полурегулярным*, если для каждого его циклического подмодуля N существует такое прямое разложение $M = M_1 \oplus M_2$, что $M_1 \subseteq N$ и $N \cap M_2$ — малый подмодуль в M_2. Полурегулярные модули изучались в [9; 10, гл. B; 11, гл. 4; 12; 14] и других работах. Легко проверить, что каждый полурегулярный модуль является I_0-модулем, каждый регулярный модуль полурегулярен и каждый полупримитивный полурегулярный модуль регулярен. Циклическая группа порядка 4 является полурегулярным нерегулярным модулем над кольцами $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. В утверждении 4 леммы 4 приведён пример полупримитивного I_0-модуля, не являющегося полурегулярным.

Доказательство теоремы 1 разбито на ряд утверждений. Некоторые из этих утверждений представляют самостоятельный интерес. Приведём необходимые обозначения и определения. Пересечение всех максимальных подмодулей модуля M обозначается через $J(M)$ и называется *радикалом Джекобсона* модуля M. Хорошо известно, что $J(M)$ совпадает с суммой всех малых подмодулей модуля M (см., например, [13, 21.5]). Модуль M называется *полупримитивным*, если $J(M) = 0$. Модуль M называется *полуартиновым*, если каждый ненулевой подмодуль модуля M содержит простой подмодуль. Кольцо A называется *правым V-кольцом*, если каждый простой правый A-модуль инъективен (это равносильно тому, что каждый правый A-модуль полупримитивен [4, 7.32A]). Модуль M называется *цепным*, если любые два его подмодуля сравнимы по включению. Прямая сумма цепных модулей называется *полуцепным* модулем. Модуль M называется *полупростым*, если каждый его подмодуль является прямым слагаемым модуля M. Подмодуль N модуля M называется *существенным*, если для любого подмодуля X модуля M равенство $X \cap N = 0$ влечёт равенство $X = 0$. Модуль M называется *инъективным*, если для любого модуля X и каждого подмодуля Y модуля X все гомоморфизмы $Y \to M$ продолжаются до гомоморфизмов $X \to M$. Если M — инъективный модуль и N — существенный подмодуль модуля M, то модуль M называется *инъективной оболочкой* модуля N. Для каждого модуля инъективная оболочка существует и единственна с точностью до изоморфизма.

Лемма 2. *Пусть M — ненулевой правый модуль над кольцом A.*

1. *Для того чтобы M являлся I_0-модулем, необходимо и достаточно, чтобы каждый подмодуль модуля M либо лежал в $J(M)$, либо содержал ненулевое прямое слагаемое модуля M.*

2. *M является полупримитивным I_0-модулем в точности тогда, когда каждый ненулевой подмодуль модуля M содержит ненулевое прямое слагаемое модуля M.*
3. *Если A — правое V-кольцо, то M является I_0-модулем в точности тогда, когда каждый ненулевой подмодуль модуля M содержит ненулевое прямое слагаемое модуля M.*
4. *Если M — существенное расширение полупростого модуля и каждый простой подмодуль модуля M инъективен, то M — полупримитивный I_0-модуль.*
5. *Если A — полуартиново справа правое V-кольцо, то M — полупримитивный I_0-модуль.*

Доказательство.

1. Достаточность следует из того, что $J(M)$ содержит все малые подмодули модуля M.

Докажем необходимость. Пусть N — подмодуль модуля M, не лежащий в $J(M)$. Существует циклический подмодуль X модуля N, не лежащий в $J(M)$. Так как $J(M)$ — сумма всех малых подмодулей модуля M, то X не является малым подмодулем модуля M. По условию некоторое ненулевое прямое слагаемое Y модуля M лежит в X. Тогда $Y \subseteq N$.

2. Утверждение вытекает из утверждения 1.

3. Утверждение вытекает из утверждения 2 и того, что каждый правый модуль над любым правым V-кольцом полупримитивен.

4. Так как M — существенное расширение полупростого модуля, то каждый ненулевой подмодуль N модуля M содержит некоторый простой подмодуль S. По условию модуль S инъективен. Поэтому S — ненулевое прямое слагаемое модуля M.

5. Так как A — полуартиново справа кольцо, то M — существенное расширение полупростого модуля. Так как A — правое V-кольцо, то каждый простой подмодуль модуля M инъективен. По утверждению 4 M — полупримитивный I_0-модуль. □

Лемма 3. *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *A — полупримитивное правое I_0-кольцо*;
2) *каждый ненулевой правый идеал кольца A содержит ненулевой идемпотент*;
3) *каждый ненулевой главный правый идеал кольца A содержит ненулевой идемпотент.*

Лемма 3 вытекает из утверждения 2 леммы 2.

Лемма 4. *Пусть A — кольцо, B — унитарное подкольцо кольца A, $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ — счётное множество копий кольца A, D — прямое произведение колец A_i, R — подкольцо в D, порождённое идеалом $\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ и подкольцом $B' \equiv \{(b,b,b,\dots) \mid b \in B\}$.*

1. *Единицы e_i колец A_i являются центральными идемпотентами кольца D и содержатся в кольце R, $R = \{(a_1, \dots, a_n, b, b, b, \dots) \mid a_i \in A,\ b \in B\}$, где натуральное число n зависит от элемента $(a_1, \dots, a_n, b, b, b, \dots)$, R имеет фактор-кольцо $R/\Big(\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} A_i\Big)$, которое изоморфно кольцу B.*
2. *Если A — полупримитивное I_0-кольцо, то R — полупримитивное I_0-кольцо.*
3. *Если кольцо B не регулярно, то кольцо R не регулярно.*
4. *Если A — поле рациональных чисел и B — кольцо целых чисел, то R — коммутативное полупримитивное I_0-кольцо и R не является полурегулярным кольцом.*

Доказательство.
1. Утверждение проверяется непосредственно.

2. Пусть X — ненулевой правый идеал кольца R. Существует такое натуральное число n, что $Xe_n \neq 0$ и $Xe_n \subseteq X \cap A_n$. Так как A_n — полупримитивное I_0-кольцо, то по лемме 3 ненулевой правый идеал Xe_nA_n кольца A_n содержит некоторый ненулевой идемпотент e. Так как $e \in X$, то по лемме 3 R — полупримитивное I_0-кольцо.

3. По утверждению 1 кольцо B изоморфно фактор-кольцу кольца R. Поэтому утверждение 3 следует из того, что любое фактор-кольцо регулярного кольца регулярно.

4. Так как A — полупримитивное I_0-кольцо, то по утверждению 2 R — полупримитивное I_0-кольцо. Поскольку кольцо целых чисел не регулярно, то по утверждению 3 кольцо R не регулярно. Любое полупримитивный полурегулярный модуль регулярен. Поэтому кольцо R не полурегулярно. □

Лемма 5. *Пусть M — такой модуль, что для любого ненулевого циклического малого подмодуля X модуля M каждый максимальный подмодуль Y модуля X является прямым слагаемым модуля X. Тогда $J(M)$ — полупростой модуль.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $J(M) \neq 0$. Достаточно доказать, что каждый ненулевой циклический подмодуль X модуля $J(M)$ является полупростым модулем. Пусть X_1 — собственный подмодуль модуля X. Существует такой подмодуль X_2 модуля X, что $X_1 \cap X_2 = 0$ и $X_1 \oplus X_2$ — существенный подмодуль модуля X. Если $X = X_1 \oplus X_2$, то X — полупростой модуль.

Допустим, что $X \neq X_1 \oplus X_2$. Так как X — циклический модуль, то существует такой максимальный подмодуль Y модуля X, что $X_1 \oplus X_2 \subseteq Y$. Так как Y содержит существенный подмодуль $X_1 \oplus X_2$ модуля X, то Y — существенный подмодуль модуля X. Так как $J(M)$ — сумма всех малых подмодулей модуля M, то X — сумма конечного числа малых подмодулей модуля M. Поэтому X — малый подмодуль модуля M. По условию Y — прямое слагаемое модуля X. Кроме того, Y — существенный подмодуль модуля X. Поэтому $Y = M$, получаем противоречие. □

Лемма 6. *Пусть M — модуль, X — малый подмодуль модуля M и существует такой эпиморфизм $f\colon X \to S$, что S — простой модуль и $M \oplus S$ — I_0-модуль. Тогда* $\mathrm{Ker}(f)$ *— прямое слагаемое модуля X.*

Доказательство. Рассмотрим подмодуль $X' = \{x + f(x) \mid x \in X\}$ модуля $M \oplus S$. Существует такой изоморфизм $\varphi\colon X \to X'$, что $\varphi(x) = x + f(x)$ для всех $x \in X$. Заметим, что

$$\mathrm{Ker}(f) = \varphi(\mathrm{Ker}(f)) = \varphi^{-1}(\mathrm{Ker}(f)) = X' \cap M.$$

Так как $M \oplus S = M + X'$ и $M \neq M \oplus S$, то X' не является малым подмодулем модуля $M \oplus S$. Поэтому $X' \nsubseteq J(M \oplus S)$. По условию $M \oplus S$ — I_0-модуль. Поэтому существует такое прямое разложение $M \oplus S = Y' \oplus M'$, что $Y' \neq 0$ и $Y' \subseteq X'$.

Пусть $\pi\colon M \oplus S \to M$ — проекция с ядром S. Тогда

$$M = \pi(Y' \oplus M') = \pi(Y') + \pi(M') \subseteq X + \pi(M').$$

Тогда $\pi(M') = M$, поскольку X — малый подмодуль модуля M. Так как $\pi(M') = M$, то $M \oplus S = M' + S$. Возможны два случая: $M' \cap S \neq 0$ и $M' \cap S = 0$.

Допустим, что $M' \cap S \neq 0$. Тогда $S \subseteq M'$, поскольку S — простой модуль. Поэтому

$$0 \neq Y' = Y' \cap (M \oplus S) = Y' \cap (M' + S) = Y' \cap M' = 0.$$

Получено противоречие.

Допустим, что $M' \cap S = 0$. Тогда

$$M \oplus S = M' \oplus S = M' \oplus Y', \quad Y' \cong (M' \oplus S)/M' \cong S.$$

Поэтому Y' — простой модуль. Поэтому либо $Y' \subseteq \mathrm{Ker}(f) \subseteq X$, либо $Y' \cap \mathrm{Ker}(f) = 0$. Первый случай невозможен, так как в этом случае малый подмодуль X модуля M содержит ненулевое прямое слагаемое Y' модуля M.

Следовательно, $Y' \cap \mathrm{Ker}(f) = 0$. Так как $\mathrm{Ker}(f) = \varphi(\mathrm{Ker}(f)) = \varphi^{-1}(\mathrm{Ker}(f))$ — максимальный подмодуль модуля X и $\varphi\colon X \to X'$ — изоморфизм, то $\mathrm{Ker}(f) = \varphi(\mathrm{Ker}(f))$ — максимальный подмодуль модуля X'. Поэтому $X' = Y' \oplus \mathrm{Ker}(f)$. Изоморфизм $\varphi^{-1}\colon X' \to X$ индуцирует равенство $X = \varphi^{-1}(Y') \oplus \mathrm{Ker}(f)$. $\square$

Доказательство теоремы 1.

1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть M — ненулевой правый A-модуль. Если $J(M) = 0$, то по утверждению 1 леммы 2 каждый ненулевой подмодуль модуля M содержит ненулевое прямое слагаемое модуля M.

Допустим, что $J(M) \neq 0$ и X — ненулевой циклический подмодуль модуля $J(M)$. Тогда X — циклический малый подмодуль модуля M. По лемме 6 каждый максимальный подмодуль модуля X является прямым слагаемым модуля X. По лемме 5 $J(M)$ — полупростой модуль.

2) $\Longrightarrow$ 3). Пусть N — ненулевой правый модуль с инъективной оболочкой M. Допустим, что $N \subseteq J(M)$. Тогда $J(M) \neq 0$, и по условию $J(M)$ — полупростой модуль. Тогда подмодуль N полупростого модуля $J(M)$ является полупростым модулем.

Допустим, что $J(M) = 0$. По 2) ненулевой подмодуль N инъективного модуля M имеет ненулевое инъективное прямое слагаемое.

Импликация 3) $\Longrightarrow$ 4) очевидна.

4) $\Longrightarrow$ 1). Пусть M — правый A-модуль и X — циклический подмодуль модуля M, не являющийся малым подмодулем в M. Если X имеет ненулевое инъективное прямое слагаемое Y, то Y — прямое слагаемое модуля M, и всё доказано.

Допустим, что ненулевой модуль X не имеет ненулевых инъективных прямых слагаемых. По 4) X — полупростой модуль. Поэтому существует такое прямое разложение $X = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} X_i$, что все модули X_i просты. Так как подмодуль X не мал в M, то существует такое $i \in \{1, \ldots, n\}$, что X_i не является малым подмодулем в M. Поэтому существует такой собственный подмодуль Y модуля M, что $X_i + Y = M$. Тогда $X_i \cap Y \neq X_i$, поскольку модуль X_i прост. Поэтому $X_i \cap Y = 0$, $X_i \oplus Y = M$ и X содержит ненулевое прямое слагаемое модуля M. $\square$

Следствие 7. *Пусть над кольцом A каждый правый A-модуль является I_0-модулем.*

1. *Каждый неразложимый правый A-модуль либо инъективен, либо является простым малым подмодулем своей инъективной оболочки.*
2. *Каждый неразложимый ненулевой правый A-модуль либо является простым малым подмодулем своей инъективной оболочки, либо является циклическим цепным инъективным модулем длины 2.*
3. *Каждый неразложимый правый A-модуль является циклическим цепным нётеровым и артиновым модулем длины не больше 2.*
4. *Каждый правый A-модуль является подпрямым произведением циклических цепных модулей конечной длины не больше 2. В частности, каждый ненулевой правый A-модуль обладает максимальным подмодулем и не совпадает со своим радикалом Джекобсона.*
5. *Для каждого правого A-модуля M радикал Джекобсона $J(M)$ является полупростым малым подмодулем модуля M.*

Доказательство.

1. Утверждение следует из теоремы 1 (см. условие 3)).

2. Пусть M — неразложимый ненулевой правый A-модуль. Допустим, что M не является простым малым подмодулем своей инъективной оболочки. По утверждению 1 M — инъективный непростой модуль. Достаточно доказать, что любой собственный ненулевой подмодуль N модуля M прост. Так как M — неразложимый модуль и $N \neq M$, то модуль N не инъективен. По утверждению 1 модуль N прост.

3. Утверждение следует из утверждения 2.

4. Утверждение следует из утверждения 3 и того, что каждый модуль является подпрямым произведением подпрямо неразложимых модулей.

5. По теореме 1 $J(M)$ — полупростой модуль. Допустим, что $J(M)$ не является малым подмодулем модуля M. Тогда существует такой собственный подмодуль X модуля M, что $M = X + J(M)$. Тогда M/X — ненулевой модуль, совпадающий со своим радикалом Джекобсона. Это противоречит утверждению 4. □

Лемма 8 ([13, 55.16]). *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *каждый правый A-модуль является полуцепным модулем*;
2) *каждый правый A-модуль является прямой суммой циклических цепных модулей конечной длины*;
3) *A — артиново справа кольцо и каждый неразложимый конечно порождённый правый A-модуль является цепным модулем*;
4) *A — артиново полуцепное кольцо.*

Лемма 9. *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *A — нётерово справа кольцо*;
2) *каждый инъективный правый A-модуль является прямой суммой неразложимых модулей*;
3) *каждая прямая сумма инъективных правых A-модулей является инъективным модулем*;
4) *каждая прямая сумма счётного множества инъективных правых A-модулей является инъективным модулем*;
5) *для каждого правого A-модуля M существует такое прямое разложение $M = X \oplus Y$, что X — инъективный модуль и модуль Y не имеет ненулевых инъективных подмодулей.*

Доказательство. Эквивалентность условий 1), 2), 3) и 4) хорошо известна (см., например, [5, 20.1, 20.6. 20.9]).

3) $\Longrightarrow$ 5). Пусть $\{X_i\}_{i \in I}$ — множество всех подмодулей модуля M, являющихся прямой суммой инъективных модулей. На этом множестве мы задаём такой частичный порядок $\leqslant$, что для произвольных $i, j \in I$ неравенство $X_i \leqslant X_j$ равносильно тому, что $X_i \oplus X_k = X_j$ для некоторого $k \in I$. Из условия 3) следует, что в этом множестве каждая возрастающая цепь имеет верхнюю грань. По лемме Цорна множество $\{X_i\}_{i \in I}$ имеет максимальный элемент X. Тогда существует прямое разложение $M = X \oplus Y$, являющееся искомым разложением.

5) $\Longrightarrow$ 4). Пусть $M = \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} M_i$, где все M_i — инъективные правые A-модули. По условию существует такое прямое разложение $M = X \oplus Y$, что X — инъективный модуль и модуль Y не имеет ненулевых инъективных подмодулей. Если $Y = 0$, то $M = X$ — инъективный модуль.

Допустим, что $Y \neq 0$. Тогда X не является существенным подмодулем модуля M. Поэтому существует такое $i \in I$, что $X \cap M_i$ не является существенным подмодулем модуля M_i. Тогда инъективный модуль M_i имеет такое ненулевое прямое слагаемое N, что $X \cap N = 0$. Пусть $\pi \colon M \to Y$ — проекция с ядром X.

Так как $X \cap N = 0$, то $\pi(N) \cong N$ и модуль Y имеет ненулевой инъективный подмодуль $\pi(N)$. Получено противоречие. $\square$

Следствие 10. *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) A_A — *прямая сумма неразложимых модулей и каждый правый A-модуль является I_0-модулем*;
2) A — *артиново полуцепное кольцо и $J^2(A) = 0$*;
3) A — *артиново справа кольцо и каждый правый A-модуль M обладает прямым разложением $M = X \oplus Y$, где X — инъективный модуль, являющийся прямой суммой циклических цепных инъективных модулей длины не больше 2, и Y — полупростой модуль без ненулевых инъективных подмодулей*;
4) A_A — *прямая сумма неразложимых модулей и каждый циклический правый A-модуль является прямой суммой инъективного модуля и полупростого модуля.*

Доказательство.

1) $\Longrightarrow$ 2). Так как A_A — конечная прямая сумма неразложимых модулей, то из условия 1) и утверждения 3 следствия 7 вытекает, что A — артиново справа кольцо и каждый неразложимый правый A-модуль является цепным модулем. По лемме 8 A — артиново полуцепное кольцо.

2) $\Longrightarrow$ 3). По лемме 8 каждый A-модуль является прямой суммой циклических цепных модулей конечной длины. Так как $J^2(A) = 0$, то длина каждого циклического цепного A-модуля не превосходит 2. Поэтому каждый цепной A-модуль длины 2 инъективен и каждый модуль без ненулевых инъективных подмодулей является полупростым. Теперь утверждение следует из леммы 9.

Импликация 3) $\Longrightarrow$ 4) очевидна.

Импликация 4) $\Longrightarrow$ 1) следует из теоремы 1. $\square$

Пример 11. Пусть K — поле, V — бесконечномерное векторное пространство над K, $Q = \mathrm{End}_K(V)$. Будем рассматривать поле F как подкольцо в Q, состоящее из всех скалярных эндоморфизмов. Положим $J = \{x \in Q \mid \dim_K(xV) < \infty\}$ и $A = K + J$.

Хорошо известно, что A — регулярное правое V-кольцо (см., например, [5, 19.47]). Непосредственно проверяется, что A — полуартиново справа кольцо, содержащее бесконечное множество ортогональных идемпотентов. По утверждению 5 леммы 2 все правые A-модули являются I_0-модулями.

Литература

[1] Абызов А. Н. Замкнутость слабо регулярные модулей относительно прямых сумм // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2003. — № 9. — С. 3—5.

[2] Абызов А. Н. Слабо регулярные модули над полусовершенными кольцами // Чебышёвский сборник. — 2003. — Т. 4, № 1. — С. 4—9.

[3] Абызов А. Н. Слабо регулярные модули // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2004. — № 3. — С. 3—6.

[4] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1. — М.: Мир, 1977.

[5] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 2. — М.: Мир, 1979.

[6] Хакми Х. И. Сильно регулярные и слабо регулярные кольца и модули // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1994. — № 5. — С. 60—65.

[7] Hamza H. I_0-rings and I_0-modules // Math. J. Okayama Univ. — 1998. — Vol. 40. — P. 91—97.

[8] Nicholson W. K. I-rings // Trans. Amer. Math. Soc. — 1975. — Vol. 207. — P. 361—373.

[9] Nicholson W. K. Semiregular modules and rings // Can. J. Math. — 1976. — Vol. 28, no. 5. — P. 1105—1120.

[10] Nicholson W. K., Yousif M. F. Quasi-Frobenius Rings. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003.

[11] Tuganbaev A. Rings Close to Regular — Dordrecht: Kluwer Academic, 2002.

[12] Tuganbaev A. A. Semiregular, weakly regular, and π-regular rings // J. Math. Sci. — 2002. — Vol. 109, no. 3. — P. 1509—1588.

[13] Wisbauer R. Foundations of Module and Ring Theory. — Philadelphia: Gordon and Breach, 1991.

[14] Xue W. M. Semiregular modules and F-semiperfect modules // Comm. Algebra. — 1995. — Vol. 23, no. 3. — P. 1035—1046.