Радикал Джекобсона и кольца рядов Лорана

Д. А. ТУГАНБАЕВ
ОАО «Аби Софтвер Хаус»

УДК 512.55

Ключевые слова: кольцо рядов Лорана, радикал Джекобсона.

Аннотация

Получено полное описание радикала Джекобсона кольца рядов Лорана для широкого класса колец коэффициентов, строго содержащего все инвариантные справа или слева кольца.

Abstract

D. A. Tuganbaev, The Jacobson radical and Laurent series rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 8, pp. 243—246.

For a large class of coefficient rings strictly containing all right or left invariant rings, a complete description of the Jacobson radical of Laurent series rings is obtained.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Через $A((x))$ обозначается кольцо формальных рядов Лорана с коэффициентами из кольца A. Через $J(A)$ обозначается радикал Джекобсона кольца A. Радикал Джекобсона $J(A((x)))$ кольца $A((x))$ изучался в [1—3]. В частности, в [2] доказано, что $J(A((x)))$ всегда содержит идеал $N((x))$, образованный всеми рядами, канонические коэффициенты которых лежат в первичном радикале N кольца A. Основным результатом данной работы является теорема 1.

Теорема 1. *Пусть A — такое кольцо, что $J(A)a \subseteq aA$ для всех $a \in J(A)$. Тогда радикал Джекобсона $J(A((x)))$ кольца рядов Лорана $A((x))$ совпадает с идеалом $N((x))$, образованным всеми рядами, канонические коэффициенты которых лежат в первичном радикале N кольца A.*

Из теоремы 1 вытекают два следствия.

Следствие 1. *Пусть A — такое кольцо, что элементы его радикала Джекобсона коммутируют по умножению друг с другом. Тогда радикал Джекобсона $J(A((x)))$ кольца рядов Лорана $A((x))$ совпадает с идеалом $N((x))$.*

Следствие 2. *Пусть A — инвариантное справа или слева кольцо с первичным радикалом N. Тогда радикал Джекобсона $J(A((x)))$ кольца рядов Лорана $A((x))$ совпадает с идеалом $N((x))$.*

Следующая лемма 1 известна и проверяется непосредственно.

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 8, с. 243—246.

Лемма 1. *Пусть A — кольцо и f — произвольный ряд из $A((x))$ с нулевой младшей степенью. Если младший коэффициент f_0 обратим справа* (*слева*) *в кольце A, то ряд f обратим справа* (*слева*) *в кольце $A((x))$ и его правый* (*левый*) *обратный ряд также имеет нулевую младшую степень.*

Для доказательства теоремы 1 нам потребуются известные леммы 2—4, приводимые для удобства с краткими доказательствами. Для любого подмножества P кольца A через $\bar{P}$ обозначается множество таких рядов из $A((x))$, все коэффициенты которых лежат в P.

Лемма 2. *Пусть A — кольцо, а P — максимальный правый идеал в нём. Тогда $\bar{P}$ — максимальный правый идеал кольца $R = A((x))$.*

Доказательство. Пусть $f = \sum\limits_{i=n}^{\infty} f_i x^i$ — произвольный ряд из $A((x))$, не лежащий в $\bar{P}$. Достаточно доказать, что $fR + \bar{P} = R$.

Пусть f_k — самый младший из коэффициентов ряда f, не лежащих в P. Рассмотрим ряд $f' = \sum\limits_{j=k}^{+\infty} f_j x^j$. Легко видеть, что ряд $f - f'$ лежит в $\bar{P}$, поэтому ряд f' лежит в правом идеале $fR + \bar{P}$. Из того, что P — максимальный правый идеал A, следует, что $f'_k A + P = A$. Тогда существуют элементы $a \in A$ и $b \in P$, такие что $f'_k a + b = 1$. Младший коэффициент ряда $f'' = f'a + bx^k$, лежащего в правом идеале $fR + \bar{P}$, равен единице; следовательно, ряд f'' обратим. Таким образом, правый идеал $fR + \bar{P}$ содержит обратимый элемент и, следовательно, совпадает со всем кольцом, что и требовалось доказать. $\square$

Лемма 3. *Пусть A — кольцо с радикалом Джекобсона J. Тогда для радикала Джекобсона $J(A((x)))$ кольца $A((x))$ выполнено включение $J(A((x))) \subseteq \bar{J}$.*

Лемма 3 непосредственно вытекает из леммы 2 и того, что радикал Джекобсона совпадает с пересечением всех максимальных правых идеалов кольца.

Лемма 4. *Пусть A — кольцо, P — правый идеал кольца A и a — обратимый справа элемент кольца A. Если a лежит в множестве $1 + P$, то a^{-1} тоже лежит в $1 + P$.*

Доказательство. Действительно,

$$a^{-1} = 1 + (a^{-1} - 1) = 1 + (a^{-1} - aa^{-1}) = 1 + (1 - a)a^{-1} \in 1 + P. \qquad \square$$

Предложение 1. *Пусть A — кольцо с радикалом Джекобсона J и для любого элемента $a \in J$ выполнено включение $Ja \subseteq aA$. Тогда у любого ряда f из радикала Джекобсона $J(A((x)))$ кольца рядов Лорана $A((x))$ младший коэффициент порождает в кольце A нильпотентный правый идеал.*

Доказательство. Пусть f — произвольный ряд из $J(A((x)))$, а f_k — его младший коэффициент. Обозначим ряд $f - f_k x^k$ через f'. Тогда младшая степень ряда f' не ниже $k + 1$ и в силу леммы 3 все коэффициенты рядов f и f' лежат в J. Тогда ряд $1 - f' x^{-k-1}$ имеет младшую степень 0 и его младший коэффициент равен $1 - f_{k+1}$ и, следовательно, обратим. Тогда по лемме 1 обратим и сам ряд $1 - f'x^{-k-1}$, причём по лемме 4 его обратный ряд h лежит в $1 + \bar{J}$. Младший коэффициент h_0 ряда h лежит в $1 + J$ и, следовательно, обратим.

Рассмотрим ряд $(1 - fx^{-k-1})h$. С одной стороны, он является произведением двух обратимых рядов и, следовательно, обратим. С другой стороны, он равен $(1 - f'x^{-k-1} - f_k x^{-1})h = 1 - f_k h x^{-1}$. Легко видеть, что младший член этого ряда равен $f_k h_0 x^{-1}$. Пусть g — ряд, обратный ряду $1 - f_k h x^{-1}$. Легко видеть, что его младшая степень не может быть положительна, поскольку тогда коэффициент при x^0 произведения $g(1 - f_k h x^{-1})$ был бы равен $g_1 f_k h_0 \in J$, что невозможно, так как он должен быть равен единице. Пусть младшая степень ряда g равна $-n + 1$, где n — натуральное число.

Рассмотрим равенство

$$(1 + f_k h x^{-1} + (f_k h x^{-1})^2 + \ldots + (f_k h x^{-1})^n)(1 - f_k h x^{-1}) = 1 - (f_k h x^{-1})^{n+1}.$$

Домножив обе его части на g справа, получим

$$1 + f_k h x^{-1} + (f_k h x^{-1})^2 + \ldots + (f_k h x^{-1})^n = g - (f_k h x^{-1})^{n+1} g.$$

Приравнивая коэффициенты при x^{-n} левой и правой частей, получаем (с учётом того, что младшая степень g больше $-n$), что элемент $(f_k h_0)^n$ лежит в правом идеале, порождённом элементами вида $(f_k h_{i_1})(f_k h_{i_2}) \ldots (f_k h_{i_{n+1}})$, где $i_1, i_2, \ldots, i_{n+1}$ — произвольные неотрицательные целые числа. Обозначим $f_k h_0$ через a, $a \in J$, тогда получаем, что элемент a^n лежит в правом идеале, порождённом элементами вида $a{h_0}^{-1} h_{i_1} a{h_0}^{-1} h_{i_2} \ldots a{h_0}^{-1} h_{i_{n+1}}$. При этом для всех k, отличных от нуля, h_k лежит в J.

Докажем, что все элементы $a{h_0}^{-1} h_{i_1} a{h_0}^{-1} h_{i_2} \ldots a{h_0}^{-1} h_{i_{n+1}}$ лежат в правом идеале кольца A, порождённом элементом a^{n+1}. Действительно, если i_1 не равно 0, то по условию выполнено

$$h_{i_1} a{h_0}^{-1} h_{i_2} \ldots a{h_0}^{-1} \in a{h_0}^{-1} h_{i_2} \ldots a{h_0}^{-1} A.$$

Применив это условие ко всем i_k, отличным от нуля, мы получим, что

$$a{h_0}^{-1} h_{i_1} a{h_0}^{-1} h_{i_2} \ldots a{h_0}^{-1} h_{i_{n+1}} \in a^{n+1} A.$$

Таким образом, мы получаем, что $a^n \in a^{n+1} A$, т. е. $a^n = a^{n+1} b$, где b — некоторый элемент кольца A. Тогда $a^n(1 - ab) = 0$. Поскольку элемент a лежит в радикале Джекобсона J кольца A, то элемент $1 - ab$ обратим, и следовательно, $a^n = 0$.

Докажем теперь, что aA — нильпотентный правый идеал кольца A. Действительно, из того, что AaA лежит в J, вытекает, что $(aA)^{2n}$ лежит в $aJaJa \ldots JaA$ (a повторено в выражении n раз). По условию JaJ лежит в $aAJ = aJ$ и Ja лежит в aA. Применяя эти включения нужное количество раз, получаем, что $(aA)^{2n}$ лежит в $a^n A = 0$, т. е. $aA = a{h_0}^{-1} A = f_k A$ — нильпотентный правый идеал, что и требовалось доказать. □

Окончание доказательства теоремы 1. Докажем вначале, что если a — произвольный элемент первичного радикала N, то правый идеал aA нильпотентен. Действительно, сам элемент a нильпотентен, пусть $a^n = 0$. Из того, что

AaA лежит в $N \subseteq J$, вытекает, что $(aA)^{2n}$ лежит в $aJaJa\ldots JaA$ (a повторено в выражении n раз). По условию JaJ лежит в $aAJ = aJ$ и Ja лежит в aA. Применяя эти включения нужное количество раз, получаем, что $(aA)^{2n}$ лежит в $a^nA = 0$, что и требовалось доказать.

Если правый идеал aA нильпотентен, то нильпотентен и правый идеал $aA((x))$, откуда получаем, что произвольный элемент из первичного радикала N кольца A обязан лежать и в первичном радикале кольца $A((x))$, и, как следствие, в радикале Джекобсона $J(A((x)))$ кольца $A((x))$.

Пусть теперь f — произвольный ряд из $J(A((x)))$. Тогда по предложению 1 его младший коэффициент f_k лежит в N и по доказанному выше он же лежит в $J(A((x)))$. Тогда в $J(A((x)))$ лежит и ряд $f' = f - f_kx^k$. Применяя к ряду f' те же рассуждения, мы докажем, что f_{k+1} лежит в N. Продолжая далее, получаем, что все коэффициенты ряда f лежат в N. Таким образом, доказано включение $J(A((x))) \subseteq \bar{N}$.

Докажем теперь обратное включение. Достаточно доказать, что если f — произвольный ряд из $\bar{N}$, то ряд $1 + f$ обратим справа. Если младшая степень ряда f неотрицательна, то утверждение вытекает из леммы 1. Пусть теперь младшая степень ряда f отрицательна и равна $-n$. Тогда рассмотрим ряд $f' = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \ldots$. По лемме 1 ряд $1+f'$ обратим, поэтому достаточно доказать, что обратим ряд $(1+f)(1+f')^{-1} = 1+(f-f')(1+f')^{-1}$. Но ряд $f-f'$ представляет собой конечную сумму $f_{-n}x^{-n} + \ldots + f_{-1}x^{-1}$, причём все элементы f_{-i} лежат в N и, как доказано выше, в $J(A((x)))$, поэтому ряд $f - f'$ также лежит в $J(A((x)))$. Отсюда получаем, что ряд $(1+f)(1+f')^{-1} = 1 + (f-f')(1+f')^{-1}$ обратим, что и требовалось доказать. □

Литература

[1] Сонин К. И. Кольца лорановских рядов: Дис.... канд. физ.-мат. наук. — М., 1998.

[2] Туганбаев А. А. Радикал Джекобсона кольца рядов Лорана // Фундамент. и прикл. мат. — 2006. — Т. 12, вып. 2. — С. 209—215.

[3] Туганбаев Д. А. Полулокальные дистрибутивные кольца косых рядов Лорана // Фундамент. и прикл. мат. — 2000. — Т. 6, вып. 3. — С. 913—921.