Изоморфизмы градуированных колец эндоморфизмов прообразующих*

И. Н. БАЛАБА
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: ibalaba@tula.net

УДК 512.552

Ключевые слова: градуированные кольца, кольца эндоморфизмов, эквивалентность Мориты.

Аннотация

Доказан градуированный аналог теоремы Боллы об индуцируемости изоморфизмов градуированных колец эндоморфизмов прообразующих градуированной эквивалентностью Мориты.

Abstract

I. N. Balaba, Isomorphisms of graded endomorphism rings of progenerators, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 1, pp. 3—10.

We prove the analogue of Bolla's theorem that isomorphisms of graded endomorphism rings of progenerators are induced by the graded Morita equivalence.

В середине 1980-х годов М. Болла [4] показал, что изоморфизмы колец эндоморфизмов прообразующих индуцируются эквивалентностью Мориты. А поскольку свободные модули являются проективными образующими, это описание включало изоморфизмы между кольцами матриц.

В настоящее время всё большее внимание уделяется кольцам, градуированным группой. Особое место в теории градуированных колец занимает проблема описания различных градуировок на кольце матриц, а потому градуированная версия теоремы Боллы нашла бы широкое применение. Целью настоящей работы и является доказательство градуированного аналога теоремы Боллы.

Все кольца предполагаются ассоциативными с единицей 1, все модули — унитарными, G — мультипликативная группа с единичным элементом e.

Кольцо R называется *G-градуированным* (или *градуированным по группе G*), если $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$, где $\{R_g \mid g \in G\}$ — семейство аддитивных подгрупп кольца R и $R_g R_h \subseteq R_{gh}$ для всех $g, h \in G$. Если при этом $R_s R_h = R_{sh}$ для всех $s, h \in S$, то кольцо R называется *строго градуированным*.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант № 05-01-00672.

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 1, с. 3—10.

Два G-градуированных кольца R и S называются *изоморфными*, если существует такой изоморфизм колец $f\colon R \to S$, что $f(R_g) \approx S_g$ для всех $g \in G$.

Правый R-модуль M называется *G-градуированным*, если $M = \bigoplus\limits_{g\in G} M_g$, где $\{M_g \mid g \in G\}$ — семейство аддитивных подгрупп в M, таких что $M_h R_g \subseteq M_{hg}$ для всех $h, g \in G$.

Обозначим через $\mathrm{mod}\text{-}R$ ($R\text{-}\mathrm{mod}$) категорию правых (левых) R-модулей, а через $\mathrm{gr}\text{-}R$ ($R\text{-}\mathrm{gr}$) — категорию G-градуированных правых (левых) R-модулей, объектами которой являются G-градуированные правые (левые) R-модули, а морфизмами — сохраняющие градуировку гомоморфизмы, т. е. если $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ — множество всех гомоморфизмов из модуля M в модуль N, то

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}\text{-}R} = \{f \in \mathrm{Hom}_R(M,N) \mid f(M_g) \subseteq N_g \text{ для всех } g \in G\}.$$

Чтобы подчеркнуть, с какой стороны определена структура модуля, будем писать M_R, ${}_RM$, ${}_RM_S$, здесь ${}_RM_S$ означает R-S-бимодуль (левый R-модуль и правый S-модуль).

Если $M = \bigoplus\limits_{g\in G} M_g$ — градуированный правый R-модуль и $g \in G$, то обозначим через $M(g)$ модуль M, рассматриваемый с градуировкой $M(g)_h = M_{gh}$, $h \in G$. Градуированный правый R-модуль $M(g)$ называется *g-сдвигом* модуля M.

Легко видеть, что отображение $\tau_g\colon M \to M(g)$ определяет функтор сдвига градуировки $\tau_g\colon \mathrm{gr}\text{-}R \to \mathrm{gr}\text{-}R$, который является эквивалентностью категорий, и при этом имеют место следующие равенства:

1) $\tau_g \circ \tau_h = \tau_{gh}$ для всех $g, h \in G$;
2) $\tau_g \circ \tau_{g^{-1}} = \tau_{g^{-1}} \circ \tau_g = 1_{\mathrm{gr}\text{-}R}$ (тождественный функтор);
3) $\tau_g \circ F = F$, где $F\colon \mathrm{gr}\text{-}R \to \mathrm{mod}\text{-}R$ — функтор, забывающий градуировку.

Заметим, что само кольцо R, рассматриваемое как градуированный правый R-модуль, в отличие от категории модулей $\mathrm{mod}\text{-}R$, образующим категории градуированных модулей $\mathrm{gr}\text{-}R$ может не являться.

Известно [10, теоремы I.3.4 и I.5.1; 5, теоремы 2.8 и 4.6], что градуированный модуль R_R является образующим категории $\mathrm{gr}\text{-}R$ в том и только том случае, если R — строго градуированное кольцо. В этом случае функтор

$$\text{-} \otimes_{R_e} \colon \mathrm{mod}\text{-}R_e \to \mathrm{gr}\text{-}R$$

является эквивалентностью категорий.

В то же время, как легко видеть, $P = \bigoplus\limits_{g\in G} R(g)$ является образующим категории $\mathrm{gr}\text{-}R$, более того, $\mathrm{gr}\text{-}R$ является категорией Гротендика (см. [10]).

Кроме гомоморфизмов G-градуированных модулей, сохраняющих градуировку, естественно рассматривать гомоморфизмы, градуировку «сдвигающие».

R-линейное отображение $f\colon M \to N$ правых G-градуированных R-модулей называется *градуированным морфизмом степени g*, если $f(M_h) \subseteq N_{gh}$ для всех $h \in G$. Градуированные морфизмы степени g образуют аддитивную подгруппу $\mathrm{HOM}_R(M,N)_g$ группы $\mathrm{Hom}_R(M,N)$. Ясно, что $\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}\text{-}R}(M,N) = \mathrm{HOM}_R(M,N)_e$.

Заметим, что

$$\mathrm{HOM}_R(M,N)_g = \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}\text{-}R}(M,N(g)) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}\text{-}R}(M(g^{-1}),N).$$

Ясно, что $\mathrm{HOM}_R(M,N) = \bigoplus\limits_{g\in G} \mathrm{HOM}_R(M,N)_g$ — градуированная абелева группа, а $\mathrm{END}_R(M) = \bigoplus\limits_{g\in G} \mathrm{HOM}_R(M,M)_g$ — градуированное кольцо, называемое *градуированным кольцом эндоморфизмов* градуированного R-модуля M.

Хорошо известно, что если группа G конечна или модуль M конечно порождён, то $\mathrm{HOM}_R(M,N) = \mathrm{Hom}_R(M,N)$ [10, следствие I.2.11]. В общем случае может иметь место строгое включение.

Замечание. При рассмотрении G-градуированных левых R-модулей *градуированным морфизмом степени* g называется R-линейное отображение $f\colon M \to N$, для которого $f(M_h) \subseteq N_{hg}$ при всех $h \in G$, а g-сдвигом модуля M называется модуль M, рассматриваемый с градуировкой $M(g)_h = M_{hg}$, $h \in G$.

Функтор $U\colon \mathrm{gr}\text{-}R \to \mathrm{gr}\text{-}S$ называется *градуированным функтором*, если он коммутирует со всеми функторами сдвига градуировки τ_g ($g \in G$).

Градуированный функтор $U\colon \mathrm{gr}\text{-}R \to \mathrm{gr}\text{-}S$ является *градуированной эквивалентностью*, если существует градуированный функтор $V\colon \mathrm{gr}\text{-}S \to \mathrm{gr}\text{-}R$, такой что $VU \approx 1_{\mathrm{gr}\text{-}R}$ и $UV \approx 1_{\mathrm{gr}\text{-}S}$. Следуя стандартной практике, в этом случае будем говорить, что категории $\mathrm{gr}\text{-}R$ и $\mathrm{gr}\text{-}S$ являются *gr-эквивалентны*.

Будем говорить также, что G-градуированные кольца R и S *gr-эквивалентны*, если существует градуированная эквивалентность $U\colon \mathrm{gr}\text{-}R \to \mathrm{gr}\text{-}S$.

В случае $G = \mathbb{Z}$ gr-эквивалентные кольца были охарактеризованы в [1, 8]. В [9] отмечено, что результаты остаются верными и для произвольной группы G.

В [2] было дано описание градуированных эквивалентностей в полных подкатегориях категорий градуированных модулей, а в [7] были описаны эквивалентности категорий $\mathrm{gr}\text{-}R$ и $\mathrm{gr}\text{-}S$ в случае, когда R — G-градуированное кольцо, а S — Ω-градуированное кольцо (для двух различных мультипликативных групп G и Ω) в терминах биградуированных бимодулей.

Приведём некоторые результаты, которые будем использовать в дальнейшем.

Теорема 1 ([8, теорема 5.4; 9, теорема 1.3]). *Для G-градуированных колец R и S следующие условия эквивалентны*:

1) *категории $\mathrm{gr}\text{-}R$ и $\mathrm{gr}\text{-}S$ являются gr-эквивалентными*;
2) *существуют такие эквивалентность $L\colon \mathrm{mod}\text{-}R \to \mathrm{mod}\text{-}S$ и градуированный функтор $U\colon \mathrm{gr}\text{-}R \to \mathrm{gr}\text{-}S$, что коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{gr}\text{-}R & \xrightarrow{U} & \mathrm{gr}\text{-}S \\ {\scriptstyle F}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle F} \\ \mathrm{mod}\text{-}R & \xrightarrow{L} & \mathrm{mod}\text{-}S\ ; \end{array}$$

3) *существует градуированный модуль* $P \in \text{gr-}R$*, такой что* $F(P)$ *является конечно порождённым проективным образующим категории* $\text{mod-}R$ *и градуированные кольца* $\text{END}_R(P)$ *и* S *изоморфны.*

Теорема 2 ([1; 2, теорема 3]). *Для* G*-градуированных колец* R *и* S *следующие условия эквивалентны*:

1) *категории* $\text{gr-}R$ *и* $\text{gr-}S$ *являются gr-эквивалентными*;
2) *категории* $R\text{-gr}$ *и* $S\text{-gr}$ *являются gr-эквивалентными*;
3) *существуют конечно порождённый проективный градуированный модуль* P_R*, изоморфизм градуированных колец* $S \approx \text{END}_R(P)$ *и эпиморфизм* $f \in \text{Hom}_{\text{gr-}R}\Big(\bigoplus\limits_{i=1}^{n} P(g_i), R\Big)$ *для некоторых* $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$;
4) *существуют градуированные бимодули* ${}_SP_R$ *и* ${}_RQ_S$ *и изоморфизм градуированных бимодулей* $P \otimes_R Q \approx S$, $Q \otimes_S P \approx R$.

При этом эквивалентность категорий осуществляют функторы

$$\text{HOM}_R(P, \text{-})\colon \text{gr-}R \to \text{gr-}S \quad \textit{и} \quad \text{-} \otimes_S P\colon \text{gr-}S \to \text{gr-}R.$$

Из теоремы 1 следуют, что если G-градуированные кольца R и S gr-эквивалентны, то они являются и Морита-эквивалентными.

Замечание. Два градуированных кольца могут быть Морита-эквивалентными, но не gr-эквивалентными [8, следствие 5.10; 9, замечание 1.4].

Может существовать эквивалентность категорий $\text{gr-}R$ и $\text{gr-}S$, но в то же время кольца R и S могут не быть даже Морита-эквивалентными (см. [8]).

Предложение. *Пусть* $P \in \text{gr-}R$, $Q \in \text{gr-}S$ *и* $U\colon \text{gr-}R \to \text{gr-}S$ *— такая градуированная эквивалентность категорий, что* $U(P) \approx Q$ *(как градуированные* S*-модули). Тогда градуированные кольца* $\text{END}_R(P)$ *и* $\text{END}_S(Q)$ *изоморфны.*

Доказательство. Ясно, что ограничение U

$$U\colon \text{End}_{\text{gr-}R}(P) \to \text{End}_{\text{gr-}S}(U(P))$$

является изоморфизмом колец. В силу перестановочности функтора U со всеми функторами сдвига градуировки τ_g $(g \in G)$ имеем

$$\begin{aligned}\text{END}_R(P)_g = \text{HOM}_R(P, P)_g = \text{Hom}_{\text{gr-}R}(P, P(g)) \approx \\ \approx \text{Hom}_{\text{gr-}S}(U(P), U(P(g))) = \text{END}_S(U(P))_g.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что если $\varphi\colon U(P) \to Q$ — изоморфизм градуированных S-модулей, то соответствие $f \to \varphi U(f)\varphi^{-1}$ для $f \in \text{END}_R(P)$ определяет изоморфизм градуированных колец $\text{END}_R(P)$ и $\text{END}_S(Q)$. $\square$

Напомним, что *прообразующим* в категории модулей называется конечно порождённый проективный образующий.

Теорема Боллы ([4, теорема 2.1]). *Пусть* R *и* S *— кольца,* P_R *и* Q_S *— прообразующие в категориях* $\text{mod-}R$ *и* $\text{mod-}S$ *соответственно,* $R' = \text{End}_R(P)$ *и*

$S' = \mathrm{End}_S(Q)$ — *кольца эндоморфизмов модулей. Если* $\Phi\colon R' \to S'$ — *изоморфизм колец, то существует единственная (с точностью до естественного изоморфизма) эквивалентность категорий* $F_\Phi\colon \mathrm{mod}\text{-}R \to \mathrm{mod}\text{-}S$, *такая что* $F_\Phi(P) = Q$ *и* $F_\Phi(f) = \Phi(f)$ *для всех* $f \in R'$.

Хорошо известно (см., например, [10, следствие I.2.2]), что градуированный модуль P_R является gr-проективным (т. е. проективным объектом категории gr-R) в том и только том случае, если он, рассматриваемый без градуировки, является проективным объектом категории mod-R.

Лемма 1. *Для конечно порождённого G-градуированного модуля M_R следующие условия эквивалентны:*

1) *существуют конечное множество элементов* $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$ *и эпиморфизм* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}\text{-}R}\Big(\bigoplus\limits_{i=1}^{n} M(g_i), R\Big)$;
2) $\bar{M} = F(M)$ *является образующим категории* mod-R;
3) $\bigoplus\limits_{g\in G} M(g)$ *является образующим категории* gr-R.

Доказательство.

Докажем эквивалентность $(1) \Longleftrightarrow (2)$. Пусть существуют конечное множество элементов $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$ и эпиморфизм $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}\text{-}R}\Big(\bigoplus\limits_{i=1}^{n} M(g_i), R\Big)$. Так как $F(M(g)) = F(M) = \bar{M}$ для любого $g \in G$, то $f \in \mathrm{Hom}_R(\bar{M}^n, R)$ и, значит, $\bar{M}$ является образующим категории mod-R.

Пусть теперь $\bar{M}$ является образующим категории mod-R. Тогда, поскольку R содержит единицу, существуют натуральное число n и эпиморфизм $f \in \mathrm{Hom}_R(M^n, R)$, откуда $f = f_1 + \ldots + f_n$, где $f_i \in \mathrm{Hom}_R(M, R)$. Так как $\mathrm{Hom}_R(M, R) = \mathrm{HOM}_R(M, R)$ в силу конечной порождённости модуля M, то $f_i = f_{i_1} + \ldots + f_{i_{n_i}}$ для некоторых $f_{i_j} \in \mathrm{HOM}_R(M, R)_{h_{i_j}}$ $(i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n_i)$. Но $\mathrm{HOM}_R(M, R)_g = \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}\text{-}R}(M(g^{-1}), R)$, следовательно, существует конечное множество элементов $g_1, g_2, \ldots, g_k \in G$, такое что $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}\text{-}R}\Big(\bigoplus\limits_{i=1}^{k} M(g_i), R\Big)$.

Докажем импликацию $(1) \Longrightarrow (3)$. Поскольку, как отмечалось ранее, $\bigoplus\limits_{g\in G} R(g)$ является образующим категории gr-R и существует эпиморфизм $f\colon \bigoplus\limits_{i=1}^{n} M(g_i) \to R$ категории gr-R, то $\bigoplus\limits_{g\in G} M(g)$ является образующим категории gr-R.

Докажем импликацию $(3) \Longrightarrow (2)$. Пусть $P = \bigoplus\limits_{g\in G} M(g)$ является образующим категории gr-R, тогда существует эпиморфизм $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}\text{-}R}(P^{(J)}, R)$ для некоторого множества J (здесь $P^{(J)}$ означает прямую сумму J экземпляров модуля P). Но поскольку $F(M(g)) = F(M) = \bar{M}$ для любого $g \in G$, $\bar{M}$ является образующим категории mod-R. $\square$

Следующая теорема является градуированным аналогом теоремы Боллы.

Теорема 3. *Пусть* R *и* S — G-*градуированные кольца,* P_R *и* Q_S — *конечно порождённые проективные* G-*градуированные модули, такие что* $\bigoplus\limits_{g\in G} P(g)$ *и* $\bigoplus\limits_{g\in G} Q(g)$ — *образующие категорий* $\mathrm{gr}\text{-}R$ *и* $\mathrm{gr}\text{-}S$ *соответственно, и пусть* $A = \mathrm{END}_R(P)$ *и* $B = \mathrm{END}_S(Q)$ — *их градуированные кольца эндоморфизмов. Если* $\Phi\colon A \to B$ — *изоморфизм градуированных колец, то существует единственная (с точностью до естественного изоморфизма) градуированная эквивалентность категорий* $U_\Phi\colon \mathrm{gr}\text{-}R \to \mathrm{gr}\text{-}S$*, такая что* $U_\Phi(P) = Q$ *и* $U_\Phi(f) = \Phi(f)$ *для всех* $f \in A$.

Доказательство. Так как P_R и Q_S — конечно порождённые градуированные модули, то $A = \mathrm{END}_R(P) = \mathrm{End}_R(P)$ и $B = \mathrm{END}_S(Q) = \mathrm{End}_S(Q)$.

Используя изоморфизм градуированных колец Φ, можно определить на кольце B структуру G-градуированного левого A-модуля, полагая $a \cdot b = \Phi(a)b$ для всех $a \in A$, $b \in B$. При этом B становится G-градуированным R-S-бимодулем и, следовательно, в силу теоремы 2 функтор $-\otimes_A B\colon \mathrm{gr}\text{-}A \to \mathrm{gr}\text{-}B$ является градуированной эквивалентностью категорий.

Кроме того, в силу свойств градуированных модулей P и Q функторы $-\otimes_R \mathrm{HOM}_R(P,R)\colon \mathrm{gr}\text{-}R \to \mathrm{gr}\text{-}A$ и $-\otimes_B Q\colon \mathrm{gr}\text{-}B \to \mathrm{gr}\text{-}S$ являются градуированными эквивалентностями.

Композиция этих функторов

$$U = -\otimes_R \mathrm{HOM}_R(P,R) \otimes_A B \otimes_B Q\colon \mathrm{gr}\text{-}R \to \mathrm{gr}\text{-}S$$

осуществляет эквивалентность категорий, и $U(P) \approx Q$ (как градуированные S-модули).

Обозначив через $\varphi\colon U(P) \to Q$ данный изоморфизм, определим функтор $U_\Phi\colon \mathrm{gr}\text{-}R \to \mathrm{gr}\text{-}S$, полагая $U_\Phi(M) = U(M)$, за исключением $U_\Phi(P(g)) = Q(g)$ ($g \in G$), и $U_\Phi(f) = t_N U(f) t_M^{-1}$ для любого $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}\text{-}R}(M,N)$, где t_M — тождественное преобразование, за исключением $t_{P(g)} = \varphi$ ($g \in G$).

Доказательство того, что U_Φ является эквивалентностью, обладающей необходимыми требованиями, можно провести как у Боллы [4, теорема 2.1].

Заметим, что U_Φ является градуированной эквивалентностью, и следовательно, в силу теоремы 1 существует такая эквивалентность $L\colon \mathrm{mod}\text{-}R \to \mathrm{mod}\text{-}S$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathrm{gr}\text{-}R \arrow[r, "U_\Phi"] \arrow[d, "F"'] & \mathrm{gr}\text{-}S \arrow[d, "F"] \\ \mathrm{mod}\text{-}R \arrow[r, "L"] & \mathrm{mod}\text{-}S \end{tikzcd}.$$

А поскольку P_R и Q_S являются прообразующими категорий $\mathrm{mod}\text{-}R$ и $\mathrm{mod}\text{-}S$ соответственно, то к ним применима теорема Боллы и, следовательно, эквивалентность L определена однозначно (с точностью до естественного изоморфизма), откуда следует и единственность градуированной эквивалентности U_Φ. □

Напомним, что градуированный правый R-модуль V называется *gr-свободным*, если он обладает базисом, состоящим из однородных элементов. Известно (см., например, [10]), что если $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ — G-градуированное кольцо, то градуированное кольцо эндоморфизмов $\mathrm{END}_R(V)$ конечно порождённого gr-свободного правого R-модуля V с базисом, состоящим из однородных элементов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ с $v_i \in V_{g_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$, изоморфно градуированному кольцу матриц

$$\mathrm{M}_n(R)(g_1, \ldots, g_n) = \bigoplus_{h\in G} \mathrm{M}_n(R)_h(g_1, \ldots, g_n),$$

где

$$M_n(R)_h(g_1, \ldots, g_n) = \begin{pmatrix} R_{g_1^{-1}hg_1} & R_{g_1^{-1}hg_2} & \ldots & R_{g_1^{-1}hg_n} \\ R_{g_2^{-1}hg_1} & R_{g_2^{-1}hg_2} & \ldots & R_{g_2^{-1}hg_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{g_n^{-1}hg_1} & R_{g_n^{-1}hg_2} & \ldots & R_{g_n^{-1}hg_n} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что не всякое градуированное кольцо матриц можно рассматривать как градуированное кольцо эндоморфизмов градуированного модуля [3, 6].

Следуя [6], назовём G-градуировку на кольце матриц $\mathrm{M}_n(R)$ *хорошей*, если существует такой конечно порождённый gr-свободный правый R-модуль V, что $\mathrm{M}_n(R) \approx \mathrm{END}_R(V)$ (как градуированные кольца). А поскольку конечно порождённые gr-свободные модули удовлетворяют условиям теоремы 3, мы получаем описание изоморфизмов градуированных колец матриц, снабжённых хорошими градуировками.

Теорема 4. *Пусть R и S — G-градуированные кольца, $A = \mathrm{M}_n(R)$ и $B = \mathrm{M}_m(S)$ — градуированные кольца матриц, снабжённые хорошими градуировками, т. е. $A = \mathrm{END}_R(P)$, $B = \mathrm{END}_S(Q)$ для некоторых конечно порождённых gr-свободных модулей $P \in \mathrm{gr}\text{-}R$, $Q \in \mathrm{gr}\text{-}S$. Тогда $\Phi\colon A \to B$ является изоморфизмом градуированных колец в том и только том случае, если существует градуированная эквивалентность категорий $U_\Phi\colon \mathrm{gr}\text{-}R \to \mathrm{gr}\text{-}S$, такая что $U_\Phi(P) = Q$ и $U_\Phi(f) = \Phi(f)$ для всех $f \in A$.*

Литература

[1] Балаба И. Н. Градуированный вариант теоремы Мориты // Сб. тезисов V Всесоюзн. симп. по теории колец, алгебр и модулей. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1982. — С. 10—11.

[2] Балаба И. Н. Эквивалентности Мориты категорий градуированных модулей // Успехи мат. наук. — 1987. — Т. 42, № 3 (255). — С. 177—178.

[3] Зайцев М. В., Сегал С. К. Конечные градуировки простых артиновых колец // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2001. — № 3. — С. 21—24.

[4] Bolla M. L. Isomorphisms between endomorphism rings of progenerators // J. Algebra. — 1984. — Vol. 87. — P. 261—281.

[5] Dade E. C. Group-graded rings and modules // Math. Z. — 1980. — Vol. 74, no. 3. — P. 241—262

[6] Dăscălescu S., Ion B., Năstăsescu C., Rios Montes J. Group gradings on full matrix rings // J. Algebra. — 1999. — Vol. 220. — P. 709—728.

[7] Del Rio A. Graded rings and equivalence categories // Comm. Algebra. — 1991. — Vol. 19, no. 3. — P. 997—1012.

[8] Gordon R., Green E. L. Graded Artinian algebras // J. Algebra. — 1982. — Vol. 76, no. 1. — P. 111—137.

[9] Menini C., Năstăsescu C. When is R-gr equivalent to the category of modules? // J. Pure Appl. Algebra. — 1988. — No. 3. — P. 277—291.

[10] Năstăsescu C., van Oystaeyen F. Graded Ring Theory. — Amsterdam: North-Holland, 1982.