Идемпотентные матрицы и мажорирование*

Л. Б. БИСЛИ
*Государственный университет штата Юта,
Логан, США*

А. Э. ГУТЕРМАН
*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова*

К.-Т. КАНГ
Национальный университет г. Чежу, Южная Корея

С.-З. СОНГ
Национальный университет г. Чежу, Южная Корея

УДК 512.643

Ключевые слова: идемпотенты, булевы матрицы, мажорирование.

Аннотация

Получена новая структурная характеризация идемпотентных матриц над бинарной булевой алгеброй. Указанная характеризация применяется для описания всех булевых матриц мажорирующихся идемпотентами.

Abstract

L. B. Beasley, A. E. Guterman, K.-T. Kang, S.-Z. Song, Idempotent Boolean matrices and majorization, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 1, pp. 11—29.

We obtain a new structural characterization of idempotent Boolean matrices. This characterization allows us to describe all Boolean matrices that are majorized by a given idempotent.

1. Введение

Широко известно, что структура идемпотентных матриц над полем достаточно проста: все такие матрицы подобны диагональным с нулями и единицами на диагонали. Например, все идемпотентные булевы (2×2)-матрицы над конечным полем из двух элементов $\mathbf{F}_2 = \{0,1\}$ имеют следующий вид: нулевая матрица 0, единичная матрица I и матрицы

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}. \qquad (*)$$

*Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ 05-01-01048 и МК-1417.2005.1.

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 1, с. 11—29.

Характеризация идемпотентов в алгебраических системах важна как для построения структурной теории таких систем, так и в приложениях (см. [13, 14]). Для матриц над алгебраическими системами, не являющимися полями, эта проблема далека от разрешения. В настоящей работе изучаются идемпотентные матрицы над бинарной булевой алгеброй.

Теория матриц над бинарной булевой алгеброй и более общими полукольцами активно исследуется в связи с целым рядом алгебраических вопросов, представляющих теоретический интерес, и большим количеством приложений (см. [7, 11, 12]). В частности, в [12, гл. 2.1] установлено, что идемпотентные матрицы над полукольцами имеют структуру, отличную от идемпотентных матриц над полями, и могут быть охарактеризованы в совершенно различных терминах (см. также [5, 8, 17, 18]).

Первая характеризационная теорема об идемпотентах над булевой алгеброй была получена в 1963 г. (см. [17]), были описаны графы идемпотентных булевых матриц. Затем в [18] они были охарактеризованы в терминах квазипорядков. В [16] (см. также [12]) было установлено, что идемпотентная булева матрица ранга r может быть редуцирована к некоторой блочной форме одновременной перестановкой строк и столбцов. В [8] получена характеризация таких матриц в терминах предельно ограниченных матриц. Параллельно в [6] была получена структурная характеризация идемпотентных матриц над полукольцом неотрицательных вещественных чисел, в этой работе была описана блочная структура таких матриц.

В настоящей работе мы доказываем, что булева матрица является идемпотентной тогда и только тогда, когда она может быть представлена как сумма своих линейных и прямоугольных частей, имеющих специальную структуру (см. раздел 4). Указанный результат доказан элементарными матричными методами без использования других известных характеризаций и фробениусовой нормальной формы. Эта характеризация является обобщением [4], где была получена полная классификация идемпотентных булевых матриц, которые являются суммой трёх клеток, и [19], где был получен аналогичный результат для суммы четырёх клеток.

Преимуществом полученной характеризации является то, что её применение позволяет охарактеризовать все булевы матрицы, мажорируемые идемпотентами (см. раздел 5).

2. История вопроса

Определение 2.1. *Полукольцо* $\mathcal{S}$ — это множество $\mathcal{S}$ с двумя бинарными операциями, сложением и умножением, причём

- $\mathcal{S}$ является коммутативным моноидом по сложению (соответствующий нейтральный элемент обозначается 0);
- $\mathcal{S}$ является полугруппой по умножению (соответствующий нейтральный элемент, если он существует, обозначается 1);

- справедливы два закона дистрибутивности;
- $s0 = 0s = 0$ для всех $s \in \mathcal{S}$.

Булева алгебра является одним из наиболее важных примеров полуколец.

Определение 2.2. Бинарная булева алгебра — это множество $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ с двумя бинарными операциями, $+$ и $\cdot$, определёнными следующим образом:

$$\begin{aligned} &0 + 0 = 0, && 0 \cdot 0 = 0,\\ &0 + 1 = 1 + 0 = 1, && 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0,\\ &1 + 1 = 1, && 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только бинарные булевы алгебры.

Другие известные примеры полуколец: поля, кольца, неотрицательные целые, вещественные и рациональные числа, макс-алгебры (см. [7]).

Теория матриц над полукольцами существенно отличается от теории матриц над полями. В частности, основные матричные инварианты и канонические формы или бесполезны, или не существуют. Структура идемпотентных матриц над полукольцами оказывается более сложной. Например, легко видеть, что все (2×2)-матрицы, перечисленные в $(*)$ являются идемпотентными, если мы рассмотрим их коэффициенты как элементы из $\mathbb{B}$. Однако существуют (2×2)-матрицы, идемпотентные над $\mathbb{B}$, но не над полем из двух элементов $\mathbf{F}_2$. Таковы матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Кроме того, существуют матрицы, являющиеся идемпотентными над полем из двух элементов $\mathbf{F}_2$ и не являющиеся идемпотентными над $\mathbb{B}$.

Пример 2.3. Рассмотрим

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда $A^2 = A$ над полем из двух элементов $\mathbf{F}_2$, однако $A^2 \neq A$ над $\mathbb{B}$.

Следующая теорема даёт характеризацию неотрицательных идемпотентных вещественных матриц.

Теорема 2.4 ([6]). *Пусть E — неотрицательная матрица. Матрица E является идемпотентной ранга r тогда и только тогда, когда существует матрица перестановки P, такая что*

$$PEP^{-1} = \begin{bmatrix} W & WD & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ CW & CWD & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где все диагональные блоки являются квадратными; W *является прямой суммой матриц* $\mathbf{x}_i\mathbf{y}_i^{\mathrm{T}}$, *где* $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{y}_i$ — *векторы с неотрицательными коэффициентами,* $\mathbf{y}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, r$, *и* C, D — *неотрицательные матрицы подходящего размера.*

Следующая теорема раскрывает структуру неотрицательных вещественных матриц, которые мажорируются идемпотентными.

Теорема 2.5 ([3]). *Пусть* A *и* E — *произвольные неотрицательные* $(n\times n)$-*матрицы, причём* $E^2 = E$. *Предположим, что* $A \lessapprox E$ (см. определение 5.4). *Тогда существует матрица перестановки* P, *такая что*

$$PEP^{-1} = \begin{bmatrix} W & WD & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ CW & CWD & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad PAP^{-1} = \begin{bmatrix} U & UD & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ CU & CUD & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$U = \begin{bmatrix} \hat{W} & \hat{W}\hat{D} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{C}\hat{W} & \hat{C}\hat{W}\hat{D} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

W *и* $\hat{W}$ *являются прямыми суммами положительных идемпотентных матриц ранга* 1, *а* C, D, $\hat{C}$, $\hat{D}$ — *неотрицательные матрицы подходящего размера.*

Цель настоящей работы — установить аналоги указанных результатов для булевых матриц.

3. Определения и обозначения

Пусть $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ обозначает множество $(n\times n)$-матриц с коэффициентами из $\mathbb{B}$. Сложение и умножение матриц определяется стандартно.

Нулевая матрица будет обозначаться 0, единичная матрица — I, матрица со всеми коэффициентами, равными 1, будет обозначаться J.

Определение 3.1. Матрица E называется *идемпотентной*, если $E^2 = E$.

Определение 3.2. Матрица с единственным ненулевым коэффициентом, равным 1, называется *клеткой*. Если этот ненулевой коэффициент находится на пересечении i-й строки и j-го столбца, то данная клетка будет обозначаться E_{ij}.

Определение 3.3. Если $i \neq j$, то будем называть матрицу E_{ij} *внедиагональной клеткой*; матрицу E_{ii} назовём *диагональной клеткой*. Будем обозначать через

$$\mathcal{D} = \{E_{ii} \mid a_{ii} \neq 0,\ i = 1, \ldots, n\}$$

множество всех диагональных клеток матрицы $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ и через

$$\mathcal{O} = \{E_{ij} \mid a_{ij} \neq 0,\ 1 \leqslant i, j \leqslant n,\ i \neq j\}$$

множество всех внедиагональных клеток матрицы $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$.

Матрицы 0, I и J являются идемпотентами в $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$. Легко видеть, что все диагональные клетки являются идемпотентами, а все внедиагональные клетки не являются идемпотентами.

Для заданной матрицы $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ и $i = 1, \ldots, n$ определим i-ю *строчную матрицу* $\boldsymbol{R}_i(A)$ как матрицу, у которой i-я строка совпадает с i-й строкой матрицы A, а все остальные строки нулевые. Аналогично определим j-ю *столбцовую матрицу* $\boldsymbol{C}_j(A)$ при $j = 1, \ldots, n$. Если матрица A однозначно определена контекстом, мы будем вместо $\boldsymbol{R}_i(A)$ и $\boldsymbol{C}_j(A)$ писать $\boldsymbol{R}_i$ и $\boldsymbol{C}_j$ соответственно. Получаем, что

$$A = [a_{ij}] = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{R}_i(A) = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{C}_j(A), \quad \text{или} \quad A = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{R}_i = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{C}_j.$$

Произвольная матрица $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ может быть записана единственным образом в виде суммы

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}.$$

Данное разложение будет называться *канонической формой* матрицы A. Так как $a_{ij} \in \{0, 1\}$, каноническая форма даёт представление любой матрицы в виде суммы клеток.

Пусть $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$. Если $a_{ij} = 1$ для некоторых i и j, то будем говорить, что клетка E_{ij} *принадлежит* матрице A.

Определение 3.4. Матрица называется *линией*, если она является i-й строчной матрицей или j-й столбцовой матрицей.

Определение 3.5. Клетки $E_1, \ldots, E_k$ называются *коллинеарными*, если $\sum\limits_{i=1}^{k} E_i$ является линией.

Определение 3.6. Матрица A *мажорирует* матрицу B, если из $b_{ij} \neq 0$ следует $a_{ij} \neq 0$. В этом случае мы будем писать $A \geqslant B$ или $B \leqslant A$. В частности, для клетки E_{ij} справедливо $E_{ij} \leqslant A$, если E_{ij} принадлежит A.

Определение 3.7. Пусть $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$. Для $1 \leqslant i, j \leqslant n$ $\boldsymbol{R}_i$ и $\boldsymbol{C}_j$ называются (i, j)-*псевдоортогональными*, если $XY = 0$ для всех внедиагональных клеток $X \leqslant \boldsymbol{R}_i$ и $Y \leqslant \boldsymbol{C}_j$.

Определение 3.8. *Весом* матрицы $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ называется число её ненулевых коэффициентов. Вес матрицы A обозначается $|A|$.

Определение 3.9. Пусть E_1, E_2, E_3, E_4 — четыре различные клетки в $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$. Тогда их сумма называется *рамкой*, если единицы этих клеток образуют прямоугольник, у которого по крайней мере одна вершина расположена на главной диагонали матрицы $E_1 + E_2 + E_3 + E_4$. В этом случае будем говорить, что каждая клетка E_i, $i = 1, 2, 3, 4$, *принадлежит* соответствующей рамке.

Например, следующие две матрицы A_1 и A_2 являются рамками, однако матрица B рамкой не является:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Определение 3.10. Пусть $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$. Будем говорить, что A содержит *i-ю прямоугольную часть*, если справедливы следующие два условия:

1) существует рамка X в $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$, такая что $E_{ii} \leqslant X$ и $X \leqslant A$;
2) для всех k, l, $1 \leqslant k, l \leqslant n$, если $E_{li} \leqslant A$ и $E_{ik} \leqslant A$, то $E_{lk} \leqslant A$.

Определение 3.11. Пусть $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ и A обладает i-й прямоугольной частью. Тогда булева $(n \times n)$-матрица наименьшего веса, которая мажорируется матрицей A и мажорирует все рамки матрицы A, мажорирующие клетку E_{ii}, называется *i-й прямоугольной частью* матрицы A и обозначается $\mathrm{RP}(i)[A]$, или $\mathrm{RP}(i)$, если матрица A однозначно определена контекстом.

Замечание 3.12. Пусть $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ содержит i-ю прямоугольную часть $\mathrm{RP}(i)$,

$$\{E_{ii_1}, \dots, E_{ii_t}\}, \quad \{E_{j_1 i}, \dots, E_{j_s i}\} \text{ —}$$

два множества внедиагональных клеток, которые содержатся в $\boldsymbol{R}_i$ и $\boldsymbol{C}_i$ соответственно. Тогда

$$\mathrm{RP}(i) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{l=1}^{t} (E_{ii} + E_{ii_l} + E_{j_k i} + E_{j_k i_l}).$$

Пример 3.13. Пусть

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$A_1 = \mathrm{RP}(1)[A_1] = \mathrm{RP}(3)[A_1] = \mathrm{RP}(1)[A_2] = \mathrm{RP}(3)[A_2],$$
$$\mathrm{RP}(2)[A_3] = E_{11} + E_{12} + E_{21} + E_{22},$$

однако 1-я прямоугольная часть A_3 не существует.

Определение 3.14. Матрица $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ содержит *i-ю линейную часть*, если существует $i \in \{1, \dots, n\}$, такое что $a_{ii} = 1$ и либо $|\boldsymbol{R}_i| = 1$, либо $|\boldsymbol{C}_i| = 1$, либо и то и другое одновременно, т. е. $|\boldsymbol{R}_i| = 1 = |\boldsymbol{C}_i|$. В этих случаях $\boldsymbol{R}_i + \boldsymbol{C}_i$ является матрицей-линией, мажорирующей E_{ii}, называется *линейной частью* A и обозначается $\mathrm{LP}(i)[A] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$. Если матрица A однозначно задана контекстом, то мы будем вместо $\mathrm{LP}(i)[A]$ писать $\mathrm{LP}(i)$.

Пример 3.15. Пусть

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\mathrm{LP}(1)[A_4] = E_{11} + E_{12}, \quad \mathrm{LP}(2)[A_4] = E_{12} + E_{22}$$

и по определению 3.14 матрицы A_5 и A_6 не имеют линейных частей.

Определение 3.16. Если матрица $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ совпадает со своей прямоугольной или со своей линейной частью, мы будем говорить, что A *является прямоугольной* или *линейной частью* соответственно.

Следующая лемма является общеизвестной.

Лемма 3.17. *Для всех индексов i, j, u, v получаем $E_{ij}E_{uv} = \delta_{ju}E_{iv}$,* где δ_{ju} *является символом Кронекера.*

Лемма 3.18. *Пусть $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ является идемпотентной матрицей, $F, G \leqslant A$ — матрицы-клетки. Тогда $FG \leqslant A$.*

Доказательство. Пусть FG=0. Тогда $FG \leqslant A$. Если $FG \neq 0$, то по лемме 3.17 матрица FG является клеткой, принадлежащей каноническому виду A^2. По правилам сложения в $\mathbb{B}$ не существует элемента, с которым могло бы сократиться ненулевое слагаемое. Следовательно, $FG \leqslant A^2 = A$, так как A является идемпотентом, что завершает доказательство леммы. □

Применяя доказанную выше лемму несколько раз, получаем следствие.

Следствие 3.19. *Пусть $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ — идемпотентная матрица и $k \geqslant 2$ является целым числом. Предположим, что $F_1, \ldots, F_k \leqslant A$ — клетки. Тогда $F_1 \ldots F_k \leqslant A$.*

Полученное выше правило мажорирования для произведения является преимуществом булевой алгебры. Для матриц над полями аналогов этого правила не существует.

Пример 3.20. Пусть A является матрицей над полем $\mathbf{F}_2$ из примера 2.3. Тогда $E_{12} \leqslant A$, $E_{24} \leqslant A$, но $E_{14} = E_{12}E_{24} \nleqslant A$.

Прямым следствием леммы 3.17 является следующий результат.

Лемма 3.21. *Пусть C и D — две клетки, удовлетворяющие условию $CD \neq 0$.*

1. *Если C и D являются диагональными клетками, то $C = D$.*
2. *Если C — диагональная клетка, а D — нет, то $CD = D$ и матрица $C + D$ является строчной.*
3. *Если D — диагональная клетка, а C — нет, то $CD = C$ и матрица $C + D$ столбцовая.*
4. *Если C и D — внедиагональные клетки, то либо*
   а) *CD является внедиагональной клеткой, отличной от C и D, и $DC = 0$, либо*
   б) *$D = C^{\mathrm{T}}$, а CD и DC — различные диагональные клетки.*

Следствие 3.22. *Пусть $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ — идемпотентная матрица и F — внедиагональная клетка, $F \leqslant A$. Тогда существуют различные клетки G и H,* *такие что $G, H \leqslant A$ и $F = GH$. Более того, если обе клетки G и H являются внедиагональными, то F, G, H — попарно различные клетки.*

Доказательство. Предположим, что $A = \sum\limits_{i=1}^{m} F_i$, где F_i — клетка. Так как A — идемпотент, то получаем, что

$$\sum_{i=1}^{m} F_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{m} F_i F_j = A^2 = A = \sum_{i=1}^{m} F_i.$$

Следовательно, F является либо квадратом клетки, либо произведением двух различных клеток. Так как F является внедиагональной клеткой, то из леммы 3.21 следует, что F не является квадратом клетки. Если F является произведением двух внедиагональных клеток G и H, то из п. 4 леммы 3.21 получаем, что $F \neq G$ и $F \neq H$. □

4. Характеризация идемпотентных булевых матриц

В этом разделе мы будем изучать идемпотентные матрицы общего вида в $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$.

Непосредственная проверка показывает, что матрица над полем, являющаяся суммой диагональных клеток, будет идемпотентной. Более того, вычисляя функцию следа, несложно показать, что ненулевая матрица, которая не содержит диагональных элементов, не является идемпотентной. Для булевых матриц функция следа оказывается бесполезной, однако, как показывают следующие комбинаторные рассмотрения, указанный результат остаётся справедливым.

Лемма 4.1. *Пусть A — ненулевая матрица в $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$. Тогда*

1) *если все клетки A диагональные, то матрица A является идемпотентной*;
2) *если все клетки A внедиагональные, то матрица A не является идемпотентной.*

Доказательство. Утверждение 1) следует из леммы 3.17. Докажем утверждение 2). Предположим, что все клетки A являются внедиагональными и $\mathcal{O} = \{F_1, \ldots, F_m\}$ — множество всех внедиагональных клеток A. Тогда $A = \sum\limits_{i=1}^{m} F_i$. Мы покажем, что если A является идемпотентом, то существует бесконечное множество клеток в $\mathcal{O}$, что невозможно.

Будем вести доказательство по индукции. Так как A является идемпотентом, то по следствию 3.22 существуют индексы i, j, $1 \leqslant i, j \leqslant m$, такие что $F_i F_j = F_1$ и три клетки F_i, F_j, F_1 попарно различны. По лемме 3.17 получаем $F_i = E_{ax_1}$, $F_j = E_{x_1 b}$ и $F_1 = E_{ab}$ для некоторых попарно различных a, b и x_1. Так как $F_i = E_{ax_1} \in \mathcal{O}$ и A является идемпотентом, то по следствию 3.22 существуют две клетки $E_{ax_2}, E_{x_2 x_1} \in \mathcal{O}$, такие что $E_{ax_1} = E_{ax_2} E_{x_2 x_1}$ для некоторого индекса x_2, отличного от a и x_1. Предположим, что для некоторого $k \geqslant 2$ множество различных клеток $\{E_{ax_1}, \ldots, E_{ax_k}\} \subseteq \mathcal{O}$ уже построено. Новые элементы к этому множеству могут быть добавлены следующим способом: так как матрица A является идемпотентом, то по следствию 3.22 существуют две клетки $E_{ax_{k+1}}, E_{x_{k+1}x_k} \in \mathcal{O}$, такие что $E_{ax_k} = E_{ax_{k+1}} E_{x_{k+1}x_k}$ для некоторого индекса x_{k+1}, отличного от a и x_k. Предположим, что существует индекс $i = 1, \ldots, k-1$, такой что $x_i = x_{k+1}$. Тогда по следствию 3.19 получаем, что

$$E_{x_i x_i} = E_{x_{k+1}x_i} = E_{x_{k+1}x_k} \ldots E_{x_{i+1}x_i} \leqslant A.$$

Последнее противоречит предположению о том, что все клетки матрицы A являются внедиагональными. Следовательно, $x_i \neq x_{k+1}$ для всех $i = 1, \ldots, k$, откуда следует, что E_{ax_i} — различные элементы $\mathcal{O}$ для $i = 1, \ldots, k+1$. Следовательно, $\mathcal{O}$ содержит бесконечное множество различных клеток. Полученное противоречие доказывает, что матрица A не является идемпотентной. □

Предложение 4.2. *Пусть A — идемпотентная булева матрица в $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$. Предположим, что существует внедиагональная клетка $F \leqslant A$, такая что для любой диагональной клетки $E \leqslant A$ клетки E и F не являются коллинеарными. Тогда F принадлежит рамке с одной диагональной клеткой и двумя внедиагональными клетками A.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{D} = \{E_1, \ldots, E_m\}$ и $\mathcal{O} = \{F_1, \ldots, F_l\}$ — множества всех диагональных и внедиагональных клеток матрицы A соответственно. По лемме 4.1 получаем, что $m \geqslant 1$. Обозначим $E_i = E_{a_i a_i}$ для всех $i = 1, \ldots, m$, $F = E_{bc}$. Так как F и E_i не являются коллинеарными для любого $i = 1, \ldots, m$, то $a_1, \ldots, a_m$, b, c — попарно различные индексы. Предположим, что F не содержится ни в какой рамке вместе с одной диагональной клеткой из множества $\mathcal{D}$ и двумя внедиагональными клетками из множества $\mathcal{O}$. Тогда мы построим бесконечное множество клеток из $\mathcal{O}$, применяя индукционную конструкцию из леммы 4.1.

База индукции. Матрица A является идемпотентной, значит, по следствию 3.22 существуют две различные клетки $E_{bx_1}, E_{x_1c} \leqslant A$, такие что $E_{bc} = E_{bx_1}E_{x_1c}$ для некоторого индекса x_1. Если $E_{bx_1} \in \mathcal{D}$ или $E_{x_1c} \in \mathcal{D}$, то F коллинеарна диагональной клетке, противоречие. Следовательно, $E_{bx_1}, E_{x_1c} \in \mathcal{O}$. Если $x_1 = a_i$ для некоторого i, то получаем, что $E_{x_1x_1} + E_{bx_1} + E_{x_1c} + F$ является рамкой. Последнее противоречит сделанному предположению. Следовательно, $x_1 \neq a_i$ для всех i.

Так как A — идемпотент и $E_{bx_1} \in \mathcal{O}$, то по следствию 3.22 мы можем найти две клетки E_{bx_2} и $E_{x_2x_1}$ в $\mathcal{O} \cup \mathcal{D}$, такие что $E_{bx_1} = E_{bx_2}E_{x_2x_1}$ для некоторого индекса x_2. Тогда получаем, что $E_{x_2c} = E_{x_2x_1}E_{x_1c} \leqslant A$. Если $x_2 = x_1$, то четыре клетки $E_{x_2x_1}$, E_{bx_2}, E_{x_1c} и $E_{bc} = F$ образуют рамку, что противоречит условию. Если $x_2 = a_i$ для некоторого i, то $E_{x_2x_2}$, E_{bx_2}, E_{x_2c} и $E_{bc} = F$ образуют рамку, что опять противоречит условию. Следовательно, $x_2 \neq a_i$ для всех i и $x_2 \neq x_1$.

Шаг индукции. Предположим, что для некоторого $k \geqslant 2$ множество клеток

$$\{E_{bx_1}, \ldots, E_{bx_k}, E_{x_2x_1}, \ldots, E_{x_kx_{k-1}}\} \subseteq \mathcal{O}$$

уже построено. Тогда мы можем добавлять новые элементы в это множество следующим образом. Так как A является идемпотентом, то по следствию 3.22 существуют две клетки $E_{bx_{k+1}}$ и $E_{x_{k+1}x_k}$ в $\mathcal{O}\cup\mathcal{D}$, такие что $E_{bx_k} = E_{bx_{k+1}}E_{x_{k+1}x_k}$ для некоторого индекса x_{k+1}. Тогда по следствию 3.19

$$E_{x_{k+1}c} = E_{x_{k+1}x_k}\dots E_{x_2x_1}E_{x_1c} \leqslant A.$$

Покажем, что x_{k+1} не равен ни b, ни x_i для всех $i = 1,\dots,k$. Заметим, что $x_{k+1} \neq b$, так как F не коллинеарна ни одной диагональной клетке. Предположим, что $x_{k+1} = x_i$ для некоторого i, $i = 1,\dots,k$. Тогда $E_{x_ic} = E_{x_{k+1}c} \leqslant A$ и по следствию 3.19 справедливо

$$E_{x_ix_i} = E_{x_{k+1}x_i} = E_{x_{k+1}x_k}\dots E_{x_{i+1}x_i} \leqslant A.$$

Поэтому четыре клетки $E_{x_ix_i}$, E_{bx_i}, E_{x_ic} и $E_{bc} = F$ образуют рамку, что противоречит условию. Следовательно, $x_{k+1} \neq x_i$ для всех $i = 1,\dots,k$. Тем самым построено множество

$$\{E_{bx_1},\dots,E_{bx_{k+1}},E_{x_2x_1},\dots,E_{x_{k+1}x_k}\} \subseteq \mathcal{O}.$$

Поэтому мы получаем бесконечное множество различных внедиагональных клеток $\{E_{bx_i} \mid i \in \mathbb{N}\}$ в b-й строке, что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Следствие 4.3. *Пусть $A = \sum\limits_{i=1}^{m} E_i + F$ — матрица в $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$, где F — внедиагональная клетка и E_i — диагональные клетки. Матрица A является идемпотентом тогда и только тогда, когда F коллинеарна какой-либо клетке E_i для некоторого $i = 1,\dots,m$.*

Доказательство. По лемме 4.1 получаем, что $m \geqslant 1$, откуда по предложению 4.2 следует, что F не коллинеарна никакой E_i, $i = 1,\dots,m$. Тогда F принадлежит рамке вместе с некоторыми другими внедиагональными клетками. Однако других внедиагональных клеток в A нет. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Следствие 4.4. *Пусть $A = \sum\limits_{i=1}^{m} E_i + \sum\limits_{j=1}^{2} F_j$ является матрицей из $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$, где E_i — диагональные клетки, F_j — внедиагональные клетки. Матрица A является идемпотентной тогда и только тогда, когда существуют, возможно равные, индексы k, l, $1 \leqslant k,l \leqslant m$, такие что клетка F_1 коллинеарна E_k, клетка F_2 коллинеарна E_l и выполнено одно из следующих условий:*

1) $F_1F_2 = F_2F_1 = 0$;
2) *F_1 и F_2 принадлежат общей рамке вместе с двумя диагональными клетками A.*

Доказательство. Пусть матрица A — идемпотент. Тогда по лемме 4.1 получаем $m \geqslant 1$. Так как существуют только две внедиагональные клетки в A, получаем по предложению 4.2, что F_j коллинеарна некоторой диагональной клетке A. Предположим, что $F_1F_2 \neq 0$ или $F_2F_1 \neq 0$. По п. 4 леммы 3.21

имеем, что если $F_1F_2 \neq 0$, то $F_2 = F_1^{\mathrm{T}}$, а F_1F_2 и F_2F_1 являются различными диагональными клетками в A. Следовательно, четыре клетки F_1, F_2, F_1F_2 и F_2F_1 образуют рамку. Для $F_2F_1 \neq 0$ мы получаем утверждение, аналогичное доказанному выше.

Обратное утверждение очевидно. $\square$

Лемма 4.5. *Пусть $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ — идемпотентная матрица и $a_{ii} = 1$ для некоторого i. Если $|\boldsymbol{R}_i| = s+1$ и $|\boldsymbol{C}_i| = t+1$, то существует в точности $s \cdot t$ рамок в A, мажорирующих E_{ii}.*

Доказательство. Если $s = 0$ или $t = 0$, то утверждение леммы очевидно. Следовательно, можно предполагать, что $s, t \geqslant 1$. Так как A является идемпотентной матрицей, то по следствию 3.22 получаем, что для любых клеток $E_{ki} \leqslant A$ и $E_{il} \leqslant A$ A мажорирует произведение E_{kl}. Следовательно, четыре клетки E_{ii}, E_{ki}, E_{il} и E_{kl} образуют рамку в A для произвольных k и l, таких что $E_{ki} \leqslant A$ и $E_{il} \leqslant A$. Следовательно, A имеет по крайней мере $s \cdot t$ рамок, содержащих E_{ii}. Из определения рамки следует, что A имеет не более $s \cdot t$ рамок, мажорирующих E_{ii}. $\square$

Из доказанной выше леммы и правил умножения в $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ непосредственно вытекает следствие.

Следствие 4.6. *Пусть $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ является идемпотентной матрицей и дополнительно $a_{ii} \neq 0$, $|\boldsymbol{R}_i| > 1$ и $|\boldsymbol{C}_i| > 1$. Тогда i-я прямоугольная часть A существует.*

Следствие 4.7. *Если $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ — идемпотентная матрица, то любая клетка, мажорируемая матрицей A, принадлежит либо прямоугольной части A, либо её линейной части.*

Доказательство. Применим предложение 4.2 и лемму 4.5. $\square$

Следующий пример демонстрирует, что для матриц, не являющихся идемпотентами, утверждение следствия 4.7 не является верным.

Пример 4.8. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{B}).$$

Эта матрица не имеет ни прямоугольной, ни линейной части.

Заметим, что следствие 4.7 не даёт полной характеризации класса идемпотентных булевых матриц, так как существуют матрицы, не являющиеся идемпотентами и имеющие аналогичное разложение.

Пример 4.9. Пусть

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} -$$

матрица из $\mathcal{M}_4(\mathbb{B})$. Тогда B не является идемпотентной матрицей, однако является суммой 1-й прямоугольной части и 4-й линейной части B. Заметим, что $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{C}_4$ не являются $(1,4)$-псевдоортогональными, так как $E_{13}E_{34}(=E_{14}) \neq 0$.

Предложение 4.10. *Пусть $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ — идемпотентная матрица. Если $\boldsymbol{R}_i$ и $\boldsymbol{C}_j$ не являются (i,j)-псевдоортогональными, то $E_{ij} \leqslant A$.*

Доказательство. Предположим, что $\boldsymbol{R}_i$ и $\boldsymbol{C}_j$ не являются (i,j)-псевдоортогональными. Тогда существуют внедиагональные клетки $X \leqslant \boldsymbol{R}_i$ и $Y \leqslant \boldsymbol{C}_j$, такие что $XY \neq 0$. Следовательно, $X = E_{ix}$ и $Y = E_{yj}$ для некоторых индексов x и y. Так как $XY \neq 0$, из леммы 3.17 следует, что $x = y$ и $XY = E_{ij}$. Так как A — идемпотентная матрица, из следствия 3.19 получаем $XY \leqslant A$, т. е. $E_{ij} \leqslant A$. □

Доказанное выше утверждение неверно для матриц над полями.

Пример 4.11. Пусть A — матрица из примера 2.3 над полем $\mathbf{F}_2$. Тогда $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{C}_4$ не являются $(1,4)$-псевдоортогональными, однако $a_{14} = 0$.

Пример 4.12. Рассмотрим матрицу

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{B}).$$

Непосредственно проверяется, что 1-я, 2-я и 4-я прямоугольные части D совпадают. Теорема 4.16 показывает, что D — идемпотент.

Определение 4.13. Пусть $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$. Предположим, что A содержит i-ю и j-ю прямоугольные части $\mathrm{RP}(i)$ и $\mathrm{RP}(j)$ для некоторых i и j, $i \neq j$. Будем говорить, что $\mathrm{RP}(i)$ и $\mathrm{RP}(j)$ *псевдоортогональны*, если либо $\boldsymbol{R}_i$ и $\boldsymbol{C}_j$ являются (i,j)-псевдоортогональными, либо $\boldsymbol{R}_j$ и $\boldsymbol{C}_i$ являются (j,i)-псевдоортогональными, либо выполнены оба условия одновременно.

Предложение 4.14. *Пусть $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ — идемпотентная матрица. Тогда любые две несовпадающие прямоугольные части A псевдоортогональны друг другу.*

Доказательство. Предположим, что i-я и j-я прямоугольные части A не являются псевдоортогональными. По определению получаем, что $\boldsymbol{R}_i$ и $\boldsymbol{C}_j$ не являются (i,j)-псевдоортогональными, а также $\boldsymbol{R}_j$ и $\boldsymbol{C}_i$ не являются (j,i)-псевдоортогональными. Следовательно, $a_{ij} \neq 0$ и $a_{ji} \neq 0$ по предложению 4.10. Докажем, что для любой клетки E справедливо $E \leqslant \mathrm{RP}(i)$ тогда и только тогда, когда $E \leqslant \mathrm{RP}(j)$. Легко проверяется, что $E_{ii}, E_{jj}, E_{ij}, E_{ji} \leqslant \mathrm{RP}(t)$ для $t = i, j$. Предположим, что $E \leqslant \mathrm{RP}(i)$. Рассмотрим для начала случай $E \leqslant \boldsymbol{R}_i$ и допустим, что $E = E_{ia}$. Тогда $E_{ja} = E_{ji}E_{ia} \leqslant A$, и четыре клетки E_{ia}, E_{ij}, E_{ja}, E_{jj} образуют рамку. Следовательно, $E = E_{ia} \leqslant \mathrm{RP}(j)$. Аналогично в случае $E \leqslant \boldsymbol{C}_i$ получаем $E \leqslant \mathrm{RP}(j)$.

Рассмотрим случай $E \nleqslant \boldsymbol{R}_i$ и $E \nleqslant \boldsymbol{C}_i$. Допустим, что $E = E_{cd}$. Так как $E \leqslant \mathrm{RP}(i)$, то существуют две внедиагональные клетки $E_{ix} \leqslant \boldsymbol{R}_i$ и $E_{yi} \leqslant \boldsymbol{C}_i$, такие что $E_{cd} = E_{yi}E_{ix}$. Следовательно, $c = y$ и $d = x$ по лемме 3.17. Так как A — идемпотентная матрица, то по следствию 3.19 имеем

$$E_{cj} = E_{yj} = E_{yi}E_{ij} \leqslant A, \quad E_{jd} = E_{jx} = E_{ji}E_{ix} \leqslant A.$$

Следовательно, четыре клетки E_{cd}, E_{cj}, E_{jd}, E_{jj} образуют рамку. Поэтому $E = E_{cd} \leqslant \mathrm{RP}(j)$.

Аналогично, если E является клеткой и $E \leqslant \mathrm{RP}(j)$, получаем $E \leqslant \mathrm{RP}(i)$. Следовательно, две прямоугольные части $\mathrm{RP}(i)$ и $\mathrm{RP}(j)$ совпадают. □

Пример 4.15. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{B}).$$

Тогда $\mathrm{RP}[1] \neq \mathrm{RP}[4]$ и эти прямоугольные части не являются псевдоортогональными. Легко убедиться, что в этом случае матрица A не является идемпотентом.

Перейдём к доказательству характеризационной теоремы.

Теорема 4.16. *Пусть $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$. Матрица A является идемпотентом тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:*

1) *существуют целые числа $r, l \geqslant 0$, такие что A является суммой r псевдоортогональных прямоугольных частей и l линейных частей;*
2) *если для некоторых $i \neq j$ прямоугольные части $\boldsymbol{R}_i$ и $\boldsymbol{C}_j$ не являются (i,j)-псевдоортогональными, то $E_{ij} \leqslant A$.*

Доказательство. Проверим, что матрица, удовлетворяющая указанным условиям, является идемпотентной.

Установим сначала, что $A \leqslant A^2$. Непосредственная проверка показывает, что если $E_{ii} \leqslant A$, то $E_{ii} \leqslant A^2$. Пусть теперь $E_{ij} \leqslant A$ для некоторых i, j, $i \neq j$. По условию 1) клетка E_{ij} принадлежит некоторой прямоугольной или линейной части. По определениям прямоугольной и линейной частей получаем, что либо $E_{ii} \leqslant A$, либо $E_{jj} \leqslant A$, либо существует такое k, что $E_{kk} + E_{ik} + E_{kj} \leqslant A$. Во всех перечисленных случаях $E_{ij} \leqslant A^2$.

Проверим, что $A^2 \leqslant A$. Пусть $E_{ij} \leqslant A^2$. Если $i \neq j$, то $E_{ii}E_{jj} = 0$ и, следовательно, $\boldsymbol{R}_i$ и $\boldsymbol{C}_j$ не являются (i,j)-псевдоортогональными. Поэтому $E_{ij} \leqslant A$ по условию 2). Если $E_{ii} \leqslant A^2$, то либо $E_{ii} \leqslant A$, либо $\boldsymbol{R}_i$ и $\boldsymbol{C}_i$ не являются (i,i)-псевдоортогональными. Во втором случае получаем также, что $E_{ii} \leqslant A$.

Для доказательства обратной импликации без ограничения общности будем предполагать, что A имеет r несовпадающих прямоугольных частей и l несовпадающих линейных частей, $r, l \geqslant 0$. Пусть F — внедиагональная клетка матрицы A. По следствию 4.7 клетка F принадлежит некоторой прямоугольной части или некоторой линейной части A. Следовательно, A является суммой r прямоугольных частей и l линейных частей. По утверждению 4.14 получаем, что различные прямоугольные части A являются псевдоортогональными. По утверждению 4.10, если $\boldsymbol{R}_i(A)$ и $\boldsymbol{C}_j(A)$ не являются (i, j)-псевдоортогональными, $E_{ij} \leqslant A$. □

Как мы уже замечали (пример 4.9), одного первого условия в теореме 4.16 недостаточно для идемпотентности матрицы. Покажем, что второе условие теоремы 4.16 также не является достаточным.

Пример 4.17.

а) Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{B}).$$

Тогда $\boldsymbol{R}_i(A)$ и $\boldsymbol{C}_j(A)$ являются (i, j)-псевдоортогональными для всех $i, j = 1, 2$, однако A не является идемпотентом.

б) Пусть

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{B}).$$

Тогда $\boldsymbol{R}_1(B)$ и $\boldsymbol{C}_3(B)$ не являются $(1, 3)$-псевдоортогональными, так как $E_{13} \leqslant B$, а все остальные строки и столбцы являются псевдоортогональными, однако B также не является идемпотентом.

в) Пусть

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{B}).$$

Тогда C является суммой первой и третьей линейной частей, однако $\boldsymbol{R}_1(C)$ и $\boldsymbol{C}_3(C)$ не являются $(1, 3)$-псевдоортогональными, хотя $E_{13} \nleqslant C$. Легко видеть, что C не является идемпотентом.

г) Пусть

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{B}).$$

Матрица D является суммой своей первой и третьей линейных частей. Кроме того, $\boldsymbol{R}_1(C)$ и $\boldsymbol{C}_3(C)$ не являются $(1, 3)$-псевдоортогональными, однако $E_{13} \leqslant C$, и матрица C является идемпотентной.

Следствие 4.18. *Пусть $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ является идемпотентом с m диагональными клетками. Предположим, что A имеет $r \geqslant 0$ псевдоортогональных прямоугольных частей и $l \geqslant 0$ линейных частей. Кроме того, предположим, что h-я прямоугольная часть содержит s_h различных диагональных клеток для $h = 1, \ldots, r$. Тогда $m = s_1 + \ldots + s_r + l$.*

Доказательство. Непосредственное вычисление числа диагональных клеток даёт требуемый результат. $\square$

Следствие 4.19. *Пусть* $A = E_{ii} + \sum\limits_{j=1}^{k} F_j$ *является булевой* $(n \times n)$*-матрицей, где* F_j — *различные внедиагональные клетки. Тогда* A *является идемпотентом тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий*:

1) A *является* i*-й линейной частью*;
2) A *является* i*-й прямоугольной частью.*

Более того, если $\boldsymbol{R}_i$ *и* $\boldsymbol{C}_i$ *содержат* x *и* y *внедиагональных клеток соответственно, то* $k = xy + x + y$.

Доказательство. Утверждение является частным случаем теоремы 4.16 при $m = 1$. Формула $k = xy+x+y$ следует из леммы 4.5, так как A содержит только одну диагональную клетку. $\square$

5. Мажорирование идемпотентными матрицами

В этом разделе S обозначает полугруппу. Следующее отношение частичного порядка на множестве идемпотентов полугруппы S было введено независимо в [9] и [15].

Определение 5.1. Пусть $e, f \in S$ являются идемпотентами. Отношение частичного порядка на множестве идемпотентов полугруппы S может быть введено следующими равенствами: $e \bar{<} f$, если $ef = fe = e$.

Известно, что множество идемпотентов принадлежит следующему более широкому множеству регулярных элементов.

Определение 5.2. Элемент $a \in S$ называется *регулярным по фон Нейману*, если существует элемент $x \in S$, удовлетворяющий условию $axa = a$.

Определение 5.3. Пусть существует элемент $x \in S$, такой что $axa = a$ и $xax = x$, тогда a называется *рефлексивно обратимым* и элемент x называется *рефлексивным обратным* для a. Множество всех рефлексивных обратных к a обычно обозначается $a^{\{1,2\}}$.

Отношение частичного порядка из определения 5.1 было расширено в [9] при помощи рефлексивных обратных следующим образом.

Определение 5.4. Для рефлексивно обратимых элементов $a \in S$ и $b \in S$ определим отношение частичного порядка: $a \bar{<} b$, если существует элемент $a^+ \in a^{\{1,2\}}$, такой что $a^+b = a^+a$ и $ba^+ = aa^+$. Данное отношение частичного порядка называется *минус-порядком*.

Как было доказано в [9, теорема 1], это отношение совпадает с предыдущим, будучи ограниченным на множество идемпотентов.

Отношение минус-порядка на S обладает рядом естественных свойств по отношению к алгебраической структуре S. Поэтому это отношение является важным как для алгебраических приложений (см. [1, 9, 10]), так и для приложений в математической статистике (см. [2, 20]). Следующее свойство минус-порядка является известным.

Лемма 5.5 ([9, предложение 1]). *Пусть $a, b \in S$, $b \bar{<} a$ и a является идемпотентом. Тогда b также является идемпотентом.*

Так как множество всех булевых матриц является полугруппой относительно матричного умножения, мы можем сравнивать элементы $\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ относительно минус-порядка.

Наша ближайшая цель — применить теорему 4.16 для характеризации всех булевых матриц, которые мажорируются идемпотентными матрицами. Заметим, что подобная проблема над полукольцом неотрицательных вещественных чисел со стандартной арифметикой (см. теорему 2.5 данной работы) была решена в [3] с использованием принципиально другой техники. Кроме того, как показывает следующий пример, одно лишь условие $B \bar{<} A$, как в теореме 2.5, не является достаточным для характеризации B, аналогичной соответствующей характеризации из теоремы 2.5, т. е. для получения такой же блочной структуры, как и у матрицы A.

Пример 5.6. Пусть $A = E_{11} + E_{22} + E_{24}$, $B = E_{11} + E_{12} + E_{14}$. Тогда $A = A^2$ и $AB = BA = B = B^2$, т. е. $B \bar{<} A$. Однако $B \not\leqslant A$, т. е. блочная структура B отличается от блочной структуры A.

Докажем ряд вспомогательных лемм о тех случаях, когда условие $B \bar{<} A$ является достаточным для характеризации B. Затем мы докажем общую теорему о мажорировании при дополнительном условии $B \leqslant A$.

Лемма 5.7. *Пусть $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ является j-й линейной частью, $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$. Пусть $B \bar{<} A$. Тогда либо $B = 0$, либо $B = A$.*

Доказательство. Легко видеть, что $A = \boldsymbol{R}_j$ или $A = \boldsymbol{C}_j$ и $E_{jj} \leqslant A$ по определению линейной части. Предположим, что $A = \boldsymbol{R}_j$. По лемме 5.5 матрица B также является идемпотентом, т. е. мы получаем $AB = BA = B$ по определению 5.1. Так как $\boldsymbol{R}_j B = B$, то только j-я строка B может содержать ненулевые коэффициенты. В силу того что $B\boldsymbol{R}_j = B$, j-я строка B должна быть скалярным кратным $\boldsymbol{R}_j$. Следовательно, либо $B = 0$, либо $B = \boldsymbol{R}_j = A$. Случай $A = \boldsymbol{C}_j$ рассматривается аналогично. □

Лемма 5.8. *Пусть $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ является i-й прямоугольной частью и для $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ справедливо $B \bar{<} A$. Тогда либо $B = 0$, либо $B = A$.*

Доказательство. По лемме 5.5 матрица B также является идемпотентом. Следовательно, для $B \bar{<} A$ получаем $AB = BA = B$. Так как A является i-й прямоугольной частью, имеем

$$A = E_{ii} + \sum_{k \in I} E_{ki} + \sum_{l \in J} E_{il} + \sum_{k \in I} \sum_{l \in J} E_{kl},$$

где $I = \{i_1, \ldots, i_s\} \backslash \{i\}$ и $J = \{j_1, \ldots, j_t\} \backslash \{i\}$ — некоторые индексные множества. Будем обозначать $B = \sum\limits_{u,v=1}^{n} b_{uv} E_{uv}$. Следовательно, по определению

$$AB=\sum_{v=1}^{n}b_{iv}E_{iv}+\sum_{k\in I}\sum_{v=1}^{n}b_{iv}E_{kv}+\sum_{l\in J}\sum_{v=1}^{n}b_{lv}E_{iv}+\sum_{k\in I}\sum_{l\in J}\sum_{v=1}^{n}b_{lv}E_{kv}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{v=1}^{n}E_{iv}+\sum_{k\in I}\sum_{v=1}^{n}E_{kv},$$

т. е. все клетки в $B=AB$ находятся в $\{i,i_1,\dots,i_s\}$-х строчных матрицах. Аналогично, все клетки в $B=BA$ находятся в $\{i,j_1,\dots,j_t\}$-х столбцовых матрицах. Комбинируя эти два результата, получаем $B\leqslant A$.

Если $B=0$, то утверждение тривиально. Следовательно, можно предполагать, что $B\neq 0$. Если $b_{ii}=0$, то существует индекс j с условием $j\neq i$, такой что $b_{jj}=1$ по лемме 4.1. Следовательно, $a_{jj}=1$, так как $B\leqslant A$. В силу того что A является i-й прямоугольной частью, получаем, что $a_{ij}=a_{ji}=1$. Так как $B=BA$, то $b_{ji}=\sum\limits_{k=1}^{n}b_{jk}a_{ki}=1$, потому что $b_{jj}=1$ и $a_{ji}=1$. Аналогично получаем $b_{ij}=1$ из $B=AB$. Так как B является идемпотентом, то $b_{ii}=1$. Полученное противоречие показывает, что $b_{ii}=1$.

Установим, что для $x\in\{i,i_1,\dots,i_s\}$ и $y\in\{i,j_1,\dots,j_t\}$ из $a_{xy}\neq 0$ следует, что $b_{xy}\neq 0$. Так как $a_{ii}=b_{ii}=1$, мы можем предполагать, что либо $x\neq i$, либо $y\neq i$. Рассмотрим сначала случай $a_{iy}\neq 0$ для некоторого $y\neq i$. Так как A является i-й прямоугольной частью, то существует индекс j, $j\neq i$, такой что $a_{ji}=a_{jy}=1$. Из условия $B=AB$ получаем

$$b_{ji}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}=1,$$

так как $a_{ji}=1$ и $b_{ii}=1$. Из условия $B=BA$ получаем

$$b_{iy}=\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{ky}\neq 0,$$

так как $b_{ii}=1$ и $a_{iy}=1$. Аналогично $b_{xi}\neq 0$, если $a_{xi}\neq 0$ и $x\neq i$.

Далее рассмотрим $a_{xy}\neq 0$, $x\neq i$ и $y\neq i$. Так как A является i-й прямоугольной частью, то $a_{xi}=a_{iy}=1$. Аналогично предыдущему получаем, что $b_{xi}=b_{iy}=1$. Так как B является идемпотентом, $E_{xy}=E_{xi}E_{iy}\leqslant B$. Следовательно, $b_{xy}\neq 0$, т. е. мы показали, что для любых x, y, таких что $a_{xy}\neq 0$, имеем $b_{xy}\neq 0$. Следовательно, $A\leqslant B$, откуда $A=B$. □

Покажем, что любая матрица, которая меньше или равна фиксированной идемпотентной матрицы A относительно минус-порядка и которая мажорируется матрицей A в смысле определения 3.6, является суммой некоторых линейных частей A и некоторых прямоугольных частей A.

Теорема 5.9. *Пусть $A=[a_{ij}]\in\mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ является идемпотентной матрицей,*

$$A=\sum_{i\in I}\mathrm{RP}(i)[A]+\sum_{j\in J}\mathrm{LP}(j)[A],$$

где I и J — некоторые индексные множества. Пусть $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$. Тогда $B \bar{<} A$ и $B \leqslant A$ в том и только том случае, когда

$$B = \sum_{i \in I'} \mathrm{RP}(i)[A] + \sum_{j \in J'} \mathrm{LP}(j)[A],$$

где $I' \subseteq I$ и $J' \subseteq J$.

Доказательство. Докажем сперва, что если

$$B = \sum_{i \in I'} \mathrm{RP}(i)[A] + \sum_{j \in J'} \mathrm{LP}(j)[A],$$

где $I' \subseteq I$ и $J' \subseteq J$, то $B \bar{<} A$ и $B \leqslant A$. Второе неравенство выполнено по определению. По теореме 4.16 матрица B является идемпотентом. Так как B — сумма линейной и прямоугольной частей A, получаем, что $AB = BA = B$ в силу правил матричного умножения. Следовательно, $B \bar{<} A$ по определению 5.1.

Докажем необходимость. По лемме 5.5 B является идемпотентом. Следовательно, получаем, что

$$B = \sum_{i \in I'} \mathrm{RP}(i)[B] + \sum_{j \in J'} \mathrm{LP}(j)[B],$$

где $I' \subseteq I$ и $J' \subseteq J$. Пусть $\mathrm{RP}(i)[B] \neq 0$ для некоторого $i \in I'$. Следовательно, $b_{ii} = 1$ по определению прямоугольной части. Поэтому из $BA = B$ получаем, что $\boldsymbol{R}_i(A) = \boldsymbol{R}_i(B)$, и из $AB = B$ получаем, что $\boldsymbol{C}_i(A) = \boldsymbol{C}_i(B)$. Рассматривая аналогично ненулевой элемент в i-й строке и столбце B, мы получаем, что $\mathrm{RP}(i)[B] = \mathrm{RP}(i)[A]$.

Если $\mathrm{LP}(j)[B] \neq 0$ для некоторого индекса $j \in J'$, то аналогично предыдущему можно показать, что $\mathrm{LP}(j)[B] = \mathrm{LP}(j)[A]$, что завершает доказательство теоремы. □

Литература

[1] Baksalary J. K., Pukelsheim F., Styan G. P. H. Some properties of matrix partial orderings // Linear Algebra Appl. — 1989. — Vol. 119. — P. 57—85.

[2] Baksalary J. K., Puntanen S. Characterization of the best linear unbiased estimator in general Gauss–Markov model with the use of matrix partial orderings // Linear Algebra Appl. — 1990. — Vol. 127. — P. 363—370.

[3] Bapat R. B., Jain S. K., Snyder L. E. Nonnegative idempotent matrices and the minus partial order // Linear Algebra Appl. — 1997. — Vol. 261. — P. 143—154.

[4] Beasley L. B., Pullman N. J. Linear operators strongly preserving idempotent matrices over semirings // Linear Algebra Appl. — 1992. — Vol. 160. — P. 217—229.

[5] Chaudhuri R., Mukherjea A. Idempotent Boolean matrices // Semigroup Forum. — 1980. — Vol. 21. — P. 273—282.

[6] Flor P. On groups of nonnegative matrices // Compositio Math. — 1969. — Vol. 21. — P. 376—382.

[7] Golan J. S. Semirings and Their Applications. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1999.

[8] Gregory D., Kirkland S., Pullman N. Power convergent Boolean matrices // Linear Algebra Appl. — 1993. — Vol. 179. — P. 105—117.

[9] Hartwig R. E. How to partially order regular elements // Math. Japon. — 1980. — Vol. 25, no. 1. — P. 1—13.

[10] Hartwig R. E., Styan G. P. H. On some characterizations of the “star” partial ordering for matrices and rank subtractivity // Linear Algebra Appl. — 1986. — Vol. 82. — P. 145—161.

[11] Hebisch U., Weinert H. J. Semirings. Algebraic Theory and Applications in Computer Science. — World Scientific, 1998. — (Ser. Algebra.; Vol. 5).

[12] Kim K. H. Boolean Matrix Theory and Applications. — New York: Marcel Dekker, 1982. — (Pure Appl. Math., Vol. 70).

[13] Kolokoltsov V. N., Maslov V. P., Idempotent Analysis and its Applications. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1997. — (Math. Its Appl.; Vol. 401).

[14] Lambek J. Lectures on Rings and Modules. — Second edition. — New York: Chelsea, 1976.

[15] Nambooripad K. S. S. The natural partial order on a regular semigroup // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 1980. — Vol. 23. — P. 249—260.

[16] Rao P. S. S. N. V. P., Rao K. P. S. B. On generalized inverses of Boolean matrices // Linear Algebra Appl. — 1975. — Vol. 11. — P. 135—153.

[17] Rosenblatt D. On the graphs of finite idempotent Boolean relation matrices // J. Res. Nat. Bureau of Standards. — 1963. — Vol. 67B. — P. 249—256.

[18] Schein B. A construction for idempotent binary relations // Proc. Japan Acad. — 1970. — Vol. 46. — P. 246—247.

[19] Song S. Z., Kang K. T. Types and enumeration of idempotent matrices // Far East J. Math. Sci. — 2001. — Vol. 3. — P. 1029—1042.

[20] Werner H. J. Generalized inversion and weak bi-complementarity // Linear and Multilinear Algebra. — 1986. — Vol. 19. — P. 357—372.