Определяемость абелевых групп без кручения счётного ранга некоторого класса их кольцами эндоморфизмов

Е. А. БЛАГОВЕЩЕНСКАЯ
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
e-mail: kate@robotek.ru, kblag2002@yahoo.com

УДК 512.541

Ключевые слова: абелевы группы без кручения конечного и счётного рангов, почти вполне разложимые группы, кольцо эндоморфизмов, группа автоморфизмов.

Аннотация

Для блочно-жёстких локально почти вполне разложимых групп кольцевого типа счётного ранга с обобщённо циклическим регуляторным фактором доказана их определяемость кольцами эндоморфизмов в этом классе с точностью до почти изоморфизма.

Abstract

E. A. Blagoveshchenskaya, Determination of a class of countable rank torsion-free Abelian groups by their endomorphism rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 1, pp. 31—43.

Determination, up to near isomorphism, of countable rank block-rigid local almost completely decomposable groups of ring type with cyclic regulator quotient by their endomorphism rings in this class has been proved.

1. Предварительные сведения

Рассмотрение специального класса абелевых групп X без кручения счётного ранга будет базироваться на свойствах *почти вполне разложимых* групп (конечного ранга по определению), которые в последние десятилетия приобрели широкую известность (см. [11]). Нам понадобятся некоторые сведения о них.

По определению *блочно-жёсткая почти вполне разложимая группа с циклическим регуляторным фактором* — это произвольная группа X', содержащая вполне разложимую вполне характеристическую подгруппу, свой *регулятор* $A' = R(X')$, определённую единственным образом, такую что X'/A' является конечной циклической группой, при этом множество $T = T_{\mathrm{cr}}(A') = T_{\mathrm{cr}}(X')$, определённое каноническим разложением $A' = \bigoplus\limits_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A')} A'_\tau$ на однородные компоненты, состоит из попарно несравнимых типов (см. [11, гл. 13]). Для блочно-жёсткой почти вполне разложимой группы X' каноническое разложение

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 1, с. 31—43.

её регулятора A' определяется однозначно. Регулятор блочно-жёсткой почти вполне разложимой группы X', не обязательно с циклическим регуляторным фактором, может быть определён как её вполне разложимая подгруппа A' конечного индекса, однородные компоненты A'_τ которой сервантны в X'. Мы говорим, что группа X'/A' является e-ограниченной, если $e(X'/A') = 0$. Если $T_{\mathrm{cr}}(X') = T_{\mathrm{cr}}(A')$ состоит из *идемпотентных* типов τ, то группа X называется группой *кольцевого* типа.

Известно, что для любой почти вполне разложимой группы X' с регулятором $R(X')$ существует конечное множество простых чисел $P = P(X')$, для которого $X' = \sum\limits_{p \in P} X'_{(p)}$ является суммой своих вполне характеристических почти вполне разложимых подгрупп $X'_{(p)}$, таких что $R(X'_{(p)}) = R(X')$ и $X'_{(p)}/A$ — p-примарная конечная группа, $p \in P$.

Положим $X'_{(p)} = R(X')$ для всех простых $p \notin P$. Тогда $X' = \sum\limits_{p \in \mathbb{P}} X'_{(p)}$, где $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел. Будем называть такое представление почти вполне разложимой группы X' её *примарно-факторным представлением*.

Поскольку для любого элемента a абелевой группы X' без кручения и любого натурального числа q существует не более одного элемента $b \in X'$, для которого $qb = a$, мы можем обозначать b как $\frac{a}{q}$. Распространяя это обозначение на случай всей группы X', погружаем её в делимую оболочку $\mathbb{Q}X' = X' \otimes \mathbb{Q}$ и записываем группу Y в виде $\frac{X'}{q}$, если $qY = X'$. Заметим, что размерность векторного пространства $\mathbb{Q}X'$ совпадает с рангом группы X'. Как обычно, запись $V \subset X'$ (или $V \subseteq X'$) означает, что V — подгруппа группы X', возможно совпадающая с X',

$$V_*^{X'} = \{g \in X' \colon \text{существует } n \in \mathbb{N}, \text{ для которого } ng \in V\} -$$

сервантная оболочка группы V в X'. Подгруппа V сервантна в X', если $V_*^{X'} = V$.

Групповые характеристики, применённые к кольцу E, относятся к его аддитивной группе E^+. Для структуры, аддитивно порождённой некоторым множеством элементов, мы используем обозначение $\langle \ldots \rangle$.

Пусть $\mathcal{E} = \mathrm{End}(X')$ обозначает кольцо эндоморфизмов произвольной группы X'. Воспользуемся результатами, имеющими место для колец эндоморфизмов блочно-жёстких почти вполне разложимых групп X' кольцевого типа (конечного ранга). Известно, что $\mathcal{E}^+$ также является почти вполне разложимой группой и $\mathcal{E} = \mathrm{End}(X') \subset \mathrm{End}(R(X'))$. В [4, теорема 2] и [3, теорема 2] показано, что регулятор $R(\mathcal{E}^+)$ группы $\mathcal{E}^+$ совпадает с $\mathrm{Hom}(X', R(X'))^+$, причём

$$\mathrm{Hom}(X', R(X')) = \bigcap_{p \in \mathbb{P}} \mathrm{Hom}(X'_{(p)}, R(X')), \tag{1}$$

где $R(\mathcal{E}_p) = \mathrm{Hom}(X'_{(p)}, R(X'))$ — регулятор в $\mathcal{E}_p^+$ для любого p, и $R(\mathcal{E}^+)$ как множество является двусторонним идеалом в $\mathcal{E}$.

Одним из определений почти изоморфизма может служить следующее.

Определение 1.1. Две абелевы группы без кручения конечного ранга G и H называются *почти изоморфными* (обозначение $G \cong_{\mathrm{nr}} H$), если для любого простого p существуют мономорфизмы $\Phi_p \colon G \to H$, $\Psi_p \colon H \to G$, для которых группы $G/H\Psi_p$ и $H/G\Phi_p$ конечны, и числа $[G : H\Psi_p]$ и p, а также $[H : G\Phi_p]$ и p являются взаимно простыми.

Перечислим некоторые общие известные свойства почти изоморфных почти вполне разложимых групп в виде следующей теоремы.

Теорема 1.2. *Пусть X' и Y' — блочно-жёсткие почти вполне разложимые группы кольцевого типа и $X' \cong_{\mathrm{nr}} Y'$. Тогда $R(X') \cong R(Y')$, $\mathrm{End}(X')^+ \cong_{\mathrm{nr}}$ $\cong_{\mathrm{nr}} \mathrm{End}(Y')^+$, при этом $R(\mathrm{End}(X'))$ и $R(\mathrm{End}(Y'))$ являются изоморфными кольцами (и совпадают с $\mathrm{Hom}(X', R(X'))$ и $\mathrm{Hom}(Y', R(Y'))$ соответственно). Если, в частности, X' и Y' — группы с циклическим регуляторным фактором, то кольца $\mathrm{End}(X')$ и $\mathrm{End}(Y')$ изоморфны как кольца.*

Доказательство. Перечисленные факты содержатся в [11, лемма 9.1.10], [8, теорема 3.4] и [1, замечание 3.6, теоремы 5.2, 5.8]. □

Кольцо эндоморфизмов блочно-жёсткой почти вполне разложимой группы X' кольцевого типа с циклическим регуляторным фактором также является почти вполне разложимой группой с циклическим регуляторным фактором, что видно из представления

$$\mathcal{E} = \langle \mathrm{Hom}(X', R(X')), I' \rangle, \tag{2}$$

где I' — единичное отображение на X' (см. [1, теорема 5.2]).

Для таких групп имеет место следующая теорема.

Теорема 1.3 ([10, теорема 4.6; 5, теорема 25.12]). *Пусть X' и Y' — блочно-жёсткие почти вполне разложимые группы кольцевого типа с циклическим регуляторным фактором. Если $\mathrm{End}(X') \cong \mathrm{End}(Y')$, то $X' \cong_{\mathrm{nr}} Y'$.*

Отсюда получаем следующую теорему.

Теорема 1.4. *Пусть X' и Y' — блочно-жёсткие почти вполне разложимые группы кольцевого типа с циклическим регуляторным фактором. Тогда $X' \cong_{\mathrm{nr}} Y'$, если и только если $\mathrm{End}(X') \cong \mathrm{End}(Y')$.*

Аналогичный результат будет доказан для некоторого специального класса групп без кручения счётного ранга с использованием инструмента, который даёт следующая теорема.

Теорема 1.5 ([4, теорема 2; 3, теорема 2 (следствие)]). *Пусть $X' = \sum\limits_{p \in P} X'_{(p)}$ является блочно-жёсткой почти вполне разложимой группой кольцевого типа с регулятором A' и $\mathcal{E} = \mathrm{End}(X')$ — её кольцо эндоморфизмов. Тогда $R(\mathcal{E}^+) =$ $= \mathrm{Hom}(X', A')^+$ и любой автоморфизм $\mathcal{B}$ кольца $\mathcal{E}$ однозначно продолжается до автоморфизма кольца $\mathrm{End}(A')$, причём $\mathcal{B} \in \bigcap\limits_{p \in P} \mathrm{Aut}\, \mathcal{E}_p$, где $\mathcal{E}_p = \mathrm{End}(X'_{(p)})$.*

Замечание 1.6. Доказательство этой теоремы базируется на том, что любой автоморфизм $\mathcal{B}$ кольца $\mathcal{E} = \mathrm{End}(X')$ индуцирует автоморфизм кольца $\mathcal{H} = \mathrm{Hom}(X', A')$. Попутно показано, что любой автоморфизм $\mathcal{B}$ кольца $\mathrm{Hom}(X', A')$ однозначно продолжается до автоморфизма кольца $\mathrm{End}(A')$ и $\mathcal{B} \in \in \bigcap\limits_{p\in P} \mathrm{Aut}\,\mathcal{H}_p$, где $\mathcal{H}_p = \mathrm{End}(X'_{(p)}, A')$.

2. Локально почти вполне разложимые группы с обобщённо циклическими регуляторными факторами

В [2] дано следующее определение почти изоморфизма для абелевых групп без кручения произвольного ранга, которое совпадает с обычным понятием почти изоморфизмом в случае групп конечного ранга.

Определение 2.1. Пусть G и H — абелевы группы без кручения. Тогда G и H называются *почти изоморфными*, $G \cong_{\mathrm{nr}} H$, если для любого простого p существуют мономорфизмы $\Phi_p\colon G \to H$ и $\Psi_p\colon H \to G$, такие что

1) группы $H/G\Phi_p$ и $G/H\Psi_p$ являются периодическими;
2) $(H/G\Phi_p)_p = 0 = (G/H\Psi_p)_p$;
3) для любых сервантных подгрупп конечного ранга $G' \subseteq G$ и $H' \subseteq H$ фактор-группы $(G'\Phi_p)_*^H/G'\Phi_p$ и $(H'\Psi_p)_*^G/H'\Psi_p$ являются конечными.

Там же (аналогично [7, следствие 12.9(b)]) доказано, что почти изоморфные группы обладают почти изоморфными прямыми разложениями для достаточно широкого класса $\mathcal{C}'$ групп счётного ранга, получивших название *локально почти вполне разложимых* групп, поскольку все их вполне характеристические сервантные подгруппы конечного ранга являются почти вполне разложимыми группами.

Определение 2.2. Пусть T — счётное множество идемпотентных попарно несравнимых типов. Абелева группа без кручения X принадлежит классу $\mathcal{C}'$, если она содержит вполне разложимую подгруппу $R(X) = \bigoplus\limits_{\tau\in T_{\mathrm{cr}}(R(X))} C_\tau$, для которой выполнены следующие условия:

1) $T_{\mathrm{cr}}(R(X)) \subseteq T$;
2) C_τ — сервантная подгруппа конечного ранга в X для каждого $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(C_X)$;
3) $X/R(X) = \bigoplus\limits_{p\in P_X} T_p^X$ для некоторого множества простых чисел P_X и $p^{n_p(X)}$-ограниченных p-примарных групп T_p^X;
4) для каждого $p \in P_X$ множество $\bigl\{q \in P_X\colon [T_p^X] \cap [T_q^X] \neq \varnothing\bigr\}$ конечно; здесь $[T_p^X]$ совпадает с наименьшим из подмножеств $\mathfrak{T}_p \subset T_{\mathrm{cr}}(R(X))$, для которых
$$T_p^X \subseteq \biggl(\Bigl(\bigoplus_{\tau\in\mathfrak{T}_p} C_\tau\Bigr)_*^X + R(X)\biggr)/R(X).$$

Определим класс $\mathcal{C}^0$ *локально почти вполне разложимых* групп с обобщённо циклическим регуляторным фактором, входящий в $\mathcal{C}'$ (не будучи так названными, эти группы фактически обсуждались в [9] и [6, теоремы 91.1, 91.2]):

$$\mathcal{C}^0 = \Big\{ X \in \mathcal{C}' \colon X/R(X) = \bigoplus_{p \in P_X} T_p^X, \\ \text{где } T_p^X \text{ — конечные циклические группы порядков } p^{n_p(X)} \Big\}. \quad (3)$$

Определим также класс $\mathcal{C}^0(A)$, подкласс класса $\mathcal{C}^0$, состоящий из групп счётного ранга, содержащих в качестве подгруппы некоторую фиксированную вполне разложимую группу $A = \bigoplus_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)} A_\tau$, для которой $T = T_{\mathrm{cr}}(A)$. Пусть

$$\mathcal{C}^0(A) = \Big\{ X \in \mathcal{C}^0 \colon R(X) = A \subset X,\ X/A = \bigoplus_{p \in P_X} T_p^X \Big\}. \quad (4)$$

Мы будем использовать результаты, полученные в [2] для групп более широкого класса $\mathcal{C}'(A)$, определённого как

$$\mathcal{C}'(A) = \Big\{ X \in \mathcal{C}' \colon R(X) = A \subset X,\ X/A = \bigoplus_{p \in P_X} T_p^X, \\ \text{где } T_p^X \text{ — } p^{n_p(X)}\text{-ограниченные, не обязательно циклические группы} \Big\}. \quad (5)$$

Так как все однородные компоненты A_τ группы A по условию сервантны в $X \in \mathcal{C}'(A)$ и, значит, A является вполне характеристической подгруппой в X, мы называем $A = R(X)$ *регулятором* группы X в соответствии с теорией блочно-жёстких почти вполне разложимых групп.

Пусть группы $X \in \mathcal{C}^0(A)$, для которых $eX \subset A$, составляют класс $\mathcal{C}_e^0(A)$ (e — некоторое натуральное число). Очевидно, $X \in \mathcal{C}_e^0(A)$ означает, что $X \in \mathcal{C}_{e'}^0(A)$, если $e \mid e'$. Имеем

$$\mathcal{C}_e^0(A) \subset \mathcal{C}^0(A) \subset \mathcal{C}^0 \subset \mathcal{C}'. \quad (6)$$

Из того, что $X \subset \mathbb{Q}A$, и определения 2.2 следует, что существует (единственно определённое) представление произвольной группы $X \in \mathcal{C}^0(A)$ в виде суммы её вполне характеристических подгрупп:

$$X = \sum_{p \in P_X} X_{(p)}, \quad \text{где} \quad X_{(p)} = X \cap \frac{A}{p^{n_p(X)}} \in \mathcal{C}^0_{p^{n_p(X)}}(A) \quad (7)$$

и $X_{(p)}/A = T_p^X$.

Расширяя подход теории почти вполне разложимых групп на группы счётного ранга, мы называем (7) *примарно-факторным* представлением группы $X \in \mathcal{C}^0(A)$. Мы естественно полагаем $X_{(p)} = A$ и $[T_p^X] = \varnothing$ для тех простых p, которые не принадлежат множеству P_X, тогда группа записывается в виде $X = \sum\limits_{p\in\mathbb{P}} X_{(p)}$, где $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел. Очевидно, A является регулятором для каждой группы $X_{(p)}$ и $X/A = \bigoplus\limits_{p\in\mathbb{P}} X_{(p)}/A$.

Для $X \in \mathcal{C}^0(A)$ множества $[T_p^X]$ конечны, если $p \in P_X$, и

$$T_p^X \cong \Big(\bigoplus_{\tau\in[T_p^X]} A_\tau\Big)_*^{X_{(p)}} / \bigoplus_{\tau\in[T_p^X]} A_\tau.$$

Введём группы

$$X'_{(p)} = \Big(\bigoplus_{\tau\in[T_p^X]} A_\tau\Big)_*^{X_{(p)}}, \quad p \in P_X,$$

которые являются почти вполне разложимыми группами с p-примарными циклическими регуляторными факторами T_p^X, значит,

$$X_{(p)} = X'_{(p)} \oplus \Big(\bigoplus_{\tau\notin[T_p^X]} A_\tau\Big). \tag{8}$$

Из (3), (4) следует, что множества

$$P_\tau(X) = \{p \in P_X : \tau \in [T_p^X]\} \tag{9}$$

конечны для всех $\tau \in T$. Для удобства читателя мы будем рассматривать группы из класса $\mathcal{C}^0(A)$, все они имеют один и тот же фиксированный регулятор A и структурно совпадают с группами из $\mathcal{C}^0$ (см. (6)).

Теорема 2.3. *Пусть $X \in \mathcal{C}^0(A)$. Любая вполне характеристическая сервантная подгруппа конечного ранга группы X является почти вполне разложимой группой с циклическим регуляторным фактором.*

Доказательство. В [2, теорема 2.7] показано, что вполне характеристические сервантные подгруппы конечного ранга группы $X \in \mathcal{C}'(A)$ являются почти вполне разложимыми группами и их множество совпадает со множеством групп вида

$$V' = \Big(\bigoplus_{\sigma\in T'} A_\sigma\Big)_*^X,$$

где T' — любое конечное подмножество элементов из $T = T_{\mathrm{cr}}(X)$, при этом

$$R(V') = \bigoplus_{\sigma\in T'} A_\sigma, \quad V'/R(V') \subset \bigoplus_{p\in P_X} T_p^X.$$

Если, в частности, $X \in \mathcal{C}^0(A)$, то, очевидно, $V'/R(V')$ является прямой суммой конечного числа p-примарных циклических групп T_p^X для некоторых различных простых чисел p из P_X. Значит, регуляторный фактор группы V' цикличен, что и требовалось доказать. ☐

Аналогично, используя [2, следствие 2.8] и рассматривая $X \in \mathcal{C}^0(A)$ как группу из класса $\mathcal{C}'(A)$, получаем следствие.

Следствие 2.4. *Если $X \in \mathcal{C}^0(A)$ и группа $L \subset R(X)$ имеет конечное множество критических типов $T' = T_{\mathrm{cr}}(L) \subset T$, то L_*^X — почти вполне разложимая группа с циклическим регуляторным фактором.*

Следуя [2, определение 2.9], на основании теоремы 2.3 мы называем группы из класса $\mathcal{C}^0(A)$ *локально почти вполне разложимыми группами с обобщённо циклическим регуляторным фактором*, имея в виду, что все их вполне характеристические сервантные подгруппы конечного ранга являются вполне разложимыми группами с циклическими регуляторными факторами.

Произвольные группы $X, Y \in \mathcal{C}^0(A)$, имеющие примарно-факторные представления

$$X = \sum_{p \in P_X} X_{(p)}, \quad Y = \sum_{p \in P_Y} Y_{(p)},$$

как и все группы из класса $\mathcal{C}'(A)$, обладают следующими свойствами:

1) $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$, если и только если для каждого простого p существует отображение $\Phi_p \in \mathrm{Mon}(X, Y)$, удовлетворяющее условию $(Y/X\Phi_p)_p = 0$ (см. [2, следствие 2.25]);
2) $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$, если и только если $X_{(p)} \cong_{\mathrm{nr}} Y_{(p)}$ для каждого простого p (см. [2, предложение 2.24]);
3) если $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$, то $P_X = P_Y$, $T_p^X \cong T_p^Y$ и $[T_p^X] = [T_p^Y]$ для любого простого p, а также $P_\tau(X) = P_\tau(Y)$ для любого $\tau \in T$ (см. [2, следствия 2.14, 2.26]);
4) если $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$, то $R(X) \cong R(Y)$, и для любого $\Phi \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ верно, что $\Phi|_{R(X)} \in \mathrm{Hom}(R(X), R(Y))$; в частности, изоморфное отображение $X \to Y$ индуцирует изоморфное отображение $R(X) \to R(Y)$ (см. [2, теорема 2.4, лемма 2.5]).

Нам понадобится описание [2, следствие 2.16] кольца эндоморфизмов рассматриваемых групп:

$$\mathrm{End}(X) = \{\Phi \in \mathrm{End}(A) \colon (p^{n_p} X_{(p)})\Phi \subset p^{n_p} X_{(p)} \text{ для всех } p\}, \tag{10}$$

где $p^{n_p} = p^{n_p(X)}$ для любого простого p. Поскольку A — регулятор в $X_{(p)}$ для любого p, верно, что $\Phi \in \mathrm{End}(X_{(p)})$ влечёт $\Phi|_A \in \mathrm{End}(A)$. Кроме того, $X_{(p)}$ содержится в делимой оболочке $\mathbb{Q}A$ регулятора A, что позволяет рассматривать $\mathrm{End}(X_{(p)})$ как подкольцо кольца $\mathrm{End}(A) \cong \bigoplus\limits_{\tau \in T} \mathrm{End}(A_\tau)$. Следовательно,

$$\mathrm{End}(X) = \bigcap_{p \in P_X} \mathrm{End}(X_{(p)}). \tag{11}$$

Аналогично для подкольца $\mathrm{Hom}(X, A)$ кольца $\mathrm{End}(X)$ выполняется

$$\mathrm{Hom}(X, A) = \bigcap_{p \in P_X} \mathrm{Hom}(X_{(p)}, A). \tag{12}$$

Обозначим тождественное отображение на A как

$$I = \sum_{\tau\in T} I_\tau \in \bigoplus_{\tau\in T}\mathrm{End}(A_\tau) = \mathrm{End}(A),$$

где $I_\tau \in \mathrm{End}(A_\tau)$.

Из (8), (11) следует, что для любого p

$$\mathrm{End}(X_{(p)}) = \mathrm{End}(X'_{(p)}) \oplus \Bigl(\bigoplus_{\tau\notin[T_p^X]}\mathrm{End}(A_\tau)\Bigr). \tag{13}$$

Отсюда и из теоремы 1.2, применённой к группе $X'_{(p)}$ конечного ранга, сразу получаем следствие.

Следствие 2.5. *Пусть $X_{(p)} \in \mathcal{C}^0_{p^{n_p}}(A)$. Тогда*

$$R(\mathrm{End}(X_{(p)})) = \mathrm{Hom}(X_{(p)}, A) = \mathrm{Hom}\Bigl(X'_{(p)}, \bigoplus_{\tau\in[T_p^X]} A_\tau\Bigr) \oplus \Bigl(\bigoplus_{\tau\notin[T_p^X]}\mathrm{End}(A_\tau)\Bigr),$$

т. е.

$$\mathrm{Hom}(X_{(p)}, A) = \bigoplus_{\tau\in[T_p^X]} H_\tau^p \oplus \Bigl(\bigoplus_{\tau\notin[T_p^X]}\mathrm{End}(A_\tau)\Bigr),$$

причём

$$\bigoplus_{\tau\in[T_p^X]} H_\tau^p = \mathrm{Hom}\Bigl(X'_{(p)}, \bigoplus_{\tau\in[T_p^X]} A_\tau\Bigr) = R(\mathrm{End}(X'_{(p)})) -$$

вполне разложимая группа с τ-однородными компонентами $H_\tau^p \subset \mathrm{End}(A_\tau)$, $\tau \in [T_p^X]$.

Значит, для произвольной группы $X \in \mathcal{C}^0(A)$ из (12) получаем, что

$$\mathrm{Hom}(X, A) = \bigoplus_{\tau\in T}\Bigl(\bigcap_{p\in P_\tau(X)} H_\tau^p\Bigr) = \bigoplus_{\tau\in T} H_\tau, \tag{14}$$

где

$$H_\tau = \bigcap_{p\in P_\tau(X)} H_\tau^p = \bigcap_{p\in\mathbb{P}} H_\tau^p -$$

τ-однородные вполне разложимые группы конечного ранга, как пересечения конечного числа однородных групп H_τ^p, $p \in P_\tau(X)$, что следует из (9) на основании [6, теорема 86.6] (естественно считать, что $H_\tau^p = \mathrm{End}(A_\tau)$, если $\tau \in T \setminus [T_p^X]$).

Теорема 2.6. *Пусть $X \in \mathcal{C}^0_{p^{n_p}}(A)$ и Y — группа из класса $\mathcal{C}^0$. Если $\mathrm{End}(X) \cong$ $\cong \mathrm{End}(Y)$, то $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$.*

Доказательство. Из (8) и (13) получаем, что

$$X = X'_{(p)} \oplus \Bigl(\bigoplus_{\tau\notin[T_p^X]} A_\tau\Bigr),$$

где $X'_{(p)}$ — блочно-жёсткая почти вполне разложимая группа с циклическим регуляторным фактором с регулятором $\bigoplus\limits_{\tau\in[T_p^X]} A_\tau$, причём

$$\operatorname{End}(X)=\operatorname{End}(X'_{(p)})\oplus\Bigl(\bigoplus_{\tau\notin[T_p^X]}\operatorname{End}(A_\tau)\Bigr).$$

По условию $\operatorname{End}(X)\cong\operatorname{End}(Y)$ получаем, что

$$Y=Y'_{(p)}\oplus\Bigl(\bigoplus_{\tau\notin[T_p^X]}A_\tau\Bigr),$$

где $Y'_{(p)}$ тоже имеет циклический регуляторный фактор. Кроме того, $\operatorname{End}(X'_{(p)})\cong$ $\cong\operatorname{End}(Y'_{(p)})$. Теорема 1.3 обеспечивает, что $X'_{(p)}\cong_{\mathrm{nr}} Y'_{(p)}$ и, значит, $X\cong_{\mathrm{nr}} Y$, что и требовалось доказать. □

Рассмотрим произвольную группу $X\in\mathcal{C}^0(A)$. Для каждого элемента $\tau\in T$ введём конечное множество типов

$$T_\tau=T_\tau(X)=\{\sigma\colon\sigma\in[T_q^X]\text{ для некоторого }q\in P_\tau(X)\}$$

или $T_\tau=\{\tau\}$, если $P_\tau(X)=\varnothing$. Возьмём $\widetilde{X^\tau}$ — сервантную вполне характеристическую подгруппу в X конечного ранга, определённую как

$$\widetilde{X^\tau}=\Bigl(\bigoplus_{\sigma\in T_\tau}A_\sigma\Bigr)_*^X=\sum_{p\in P_X\colon[T_p^X]\subset T_\tau}\Bigl(X'_{(p)}+\bigoplus_{\sigma\in T_\tau}A_\sigma\Bigr).\tag{15}$$

Она является почти вполне разложимой группой с регулятором

$$R(\widetilde{X^\tau})=\bigoplus_{\sigma\in T_\tau}A_\sigma$$

и циклическим регуляторным фактором по теореме 2.3. Для неё (15) является примарно-факторным представлением со слагаемыми

$$\widetilde{X^\tau}_{(p)}=X'_{(p)}+\bigoplus_{\sigma\in T_\tau}A_\sigma.$$

Ясно, что $\tau\in T_\tau$ и $[T_p^X]\subset T_\tau$ для любого $p\in P_\tau(X)$.

Пусть

$$\operatorname{Hom}\Bigl(\widetilde{X^\tau},\bigoplus_{\sigma\in T_\tau}A_\sigma\Bigr)=\bigoplus_{\sigma\in T_\tau}\widetilde{H_\sigma}\ —$$

разложение группы $R(\operatorname{End}(\widetilde{X^\tau}))$ на её однородные компоненты. По построению видно, что

$$\widetilde{H_\tau}=H_\tau=\bigcap_{p\in P_\tau(X)}H_\tau^p=\bigcap_{p\in\mathbb{P}}H_\tau^p,\tag{16}$$

где H_τ — τ-однородная компонента группы $\mathrm{Hom}(X, A)$ счётного ранга (см. следствие 2.5, (1) и (14)). В частности, если $P_\tau(X) = \varnothing$, то $\widetilde{X^\tau} = A_\tau$ и $\widetilde{H_\tau} = H_\tau = \mathrm{End}(A_\tau)$.

Теорема 2.7. *Пусть* $X \in \mathcal{C}^0(A)$. *Тогда*

$$\mathrm{End}(X) = \langle \mathrm{Hom}(X, A), I\rangle, \quad R(\mathrm{End}(X)^+) = \mathrm{Hom}(X, A).$$

Доказательство. Из (2) для любого $p \in P_X$ следует, что

$$\mathrm{End}(X'_{(p)}) = \left\langle \mathrm{Hom}\left(X'_{(p)}, \bigoplus_{\tau\in[T_p^X]} A_\tau\right), I_p\right\rangle,$$

где I_p — тождественное отображение на $\bigoplus\limits_{\tau\in[T_p^X]} A_\tau$. Значит,

$$\mathrm{End}(X_{(p)}) = \langle \mathrm{Hom}(X_{(p)}, A), I\rangle,$$

поскольку

$$\mathrm{Hom}(X_{(p)}, A) = \mathrm{Hom}\left(X'_{(p)}, \bigoplus_{\tau\in[T_p^X]} A_\tau\right) \oplus \left(\bigoplus_{\tau\notin[T_p^X]} \mathrm{End}(A_\tau)\right)$$

(см. (13)). Из (11) и (12) сразу получаем, что $\mathrm{End}(X) = \langle \mathrm{Hom}(X, A), I\rangle$.

Сервантность подгруппы H_τ в

$$\mathrm{End}(\widetilde{X^\tau}) = \left\langle \mathrm{Hom}\left(\widetilde{X^\tau}, \bigoplus_{\sigma\in T_\tau} A_\sigma\right), I^\tau\right\rangle,$$

где I^τ обозначает единичное отображение на $\widetilde{X^\tau}$, влечёт её сервантность в $\mathrm{End}(X)$, и это верно для всех $\tau \in T$, что доказывает равенство $R(\mathrm{End}(X)^+) = \mathrm{Hom}(X, A)$, что и требовалось. □

Теорема 2.8. *Пусть* $X, Y \in \mathcal{C}^0$ *и* $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$. *Тогда* $\mathrm{End}(X) \cong \mathrm{End}(Y)$.

Доказательство. Поскольку почти изоморфные группы имеют изоморфные регуляторы [2, теорема 2.4], отождествляя их, мы полагаем, не умаляя общности, что $X, Y \in \mathcal{C}^0(A)$ для некоторой вполне разложимой группы A со множеством критических типов $T = T_{\mathrm{cr}}(A)$.

Имеем примарно-факторные представления $X = \sum\limits_{p\in P_X} X_{(p)}$, $Y = \sum\limits_{p\in P_Y} Y_{(p)}$ (см. (7)), в которых $X_{(p)} \cong_{\mathrm{nr}} Y_{(p)}$ (свойство 2)). Получаем, что в разложениях (8) групп

$$X_{(p)} = X'_{(p)} \oplus \left(\bigoplus_{\tau\notin[T_p^X]} A_\tau\right)$$

и

$$Y_{(p)} = Y'_{(p)} \oplus \left(\bigoplus_{\tau\notin[T_p^Y]} A_\tau\right)$$

блочно-жёсткие почти вполне разложимые группы с циклическим регуляторным фактором $X'_{(p)}$ и $Y'_{(p)}$ почти изоморфны (в частности, $[T_p^X] = [T_p^Y]$). Для них известно, что $\mathrm{End}(X'_{(p)}) \cong \mathrm{End}(Y'_{(p)})$ (теорема 1.2). Отсюда для любого p ввиду (13) сразу получаем, что $\mathrm{End}(X_{(p)}) \cong \mathrm{End}(Y_{(p)})$.

Фиксируем произвольный элемент $\tau \in T$ и замечаем, что $T_\tau(X) = T_\tau(Y)$, так как $[T_p^X] = [T_p^Y]$ для любого p. Обозначим это множество как T_τ. Из примарно-факторного представления (15) и [11, теорема 9.2.8] видно, что $\widetilde{X^\tau} \cong_{\mathrm{nr}} \widetilde{Y^\tau}$, поскольку для любого p выполняется

$$\Big(X'_{(p)} + \bigoplus_{\tau\in T_\tau} A_\tau\Big) \cong_{\mathrm{nr}} \Big(Y'_{(p)} + \bigoplus_{\tau\in T_\tau} A_\tau\Big).$$

Значит, по теореме 1.2 имеем изоморфизмы колец

$$R(\mathrm{End}(\widetilde{X^\tau})) = \mathrm{Hom}\Big(\widetilde{X^\tau}, \bigoplus_{\tau\in T_\tau} A_\tau\Big) \cong \mathrm{Hom}\Big(\widetilde{Y^\tau}, \bigoplus_{\tau\in T_\tau} A_\tau\Big) = R(\mathrm{End}(\widetilde{Y^\tau}))$$

и $\widetilde{H_\tau} \cong \widetilde{H'_\tau}$, где

$$R(\mathrm{End}(\widetilde{X^\tau})) = \bigoplus_{\sigma\in T_\tau} \widetilde{H_\sigma}, \quad R(\mathrm{End}(\widetilde{Y^\tau})) = \bigoplus_{\sigma\in T_\tau} \widetilde{H'_\sigma} \,—$$

разложения на однородные компоненты. Напомним, что $\widetilde{H_\tau} = H_\tau$ и $\widetilde{H'_\tau} = H'_\tau$, где H_τ и H'_τ — τ-однородные компоненты колец $\mathrm{Hom}(X, A)$ и $\mathrm{Hom}(Y, A)$ соответственно (см. (16)). Таким образом, $H_\tau \cong H'_\tau$ для любого $\tau \in T$, что влечёт кольцевой изоморфизм $\mathrm{Hom}(X, A) \to \mathrm{Hom}(Y, A)$, при этом изоморфизм τ-однородных компонент $H_\tau \to H'_\tau$ для любого τ можно рассматривать как сужение некоторого изоморфизма $R(\mathrm{End}(\widetilde{X^\tau})) \to R(\mathrm{End}(\widetilde{Y^\tau}))$ на τ-однородную компоненту, так как эти кольца являются блочно-жёсткими вполне разложимыми аддитивными структурами. Замечание 1.6 позволяет сделать заключение, что любой автоморфизм кольца H_τ (однозначно) продолжается до автоморфизма кольца $\mathrm{End}(A_\tau)$, что влечёт аналогичное продолжение изоморфизма $H_\tau \to H'_\tau$, при котором единица I_τ кольца $\mathrm{End}(A_\tau)$ отображается на себя. Поскольку это выполняется для любого τ и

$$I = \sum_{\tau\in T} I_\tau \in \bigoplus_{\tau\in T} \mathrm{End}(A_\tau) = \mathrm{End}(A),$$

построенное отображение переводит единицу $I \in \mathrm{End}(A)$ на себя и получается изоморфизм колец $\langle \mathrm{Hom}(X, A), I\rangle$ и $\langle \mathrm{Hom}(Y, A), I\rangle$, которые совпадают с $\mathrm{End}(X)$ и $\mathrm{End}(Y)$ соответственно по теореме 2.7. Мы доказали, что $\mathrm{End}(X) \cong \mathrm{End}(Y)$, что и требовалось. □

Теорема 2.9. *Пусть* $X, Y \in \mathcal{C}^0$ *и* $\mathrm{End}(X) \cong \mathrm{End}(Y)$. *Тогда* $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$.

Доказательство. Не умаляя общности, считаем, что $X \in \mathcal{C}^0(A)$ для некоторой вполне разложимой группы A со множеством критических типов $T = T_{\mathrm{cr}}(A)$.

Пусть сначала $X \in \mathcal{C}^0_{p^{n_p}}(A)$, где p — некоторое простое число. Тогда по теореме 2.6 $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$.

В общем случае, когда $X \in \mathcal{C}^0(A)$, имеем $\mathrm{End}(X) \subset \mathrm{End}(A)$, и условие $\mathrm{End}(X) \cong \mathrm{End}(Y)$ позволяет считать, что $\mathrm{End}(Y) \subset \mathrm{End}(A)$, т. е. $Y \in \mathcal{C}^0(A)$ (см. (10)).

Пусть $\mathcal{B}\colon \mathrm{End}(X) \to \mathrm{End}(Y)$ — изоморфизм. Его сужение даёт изоморфизм регуляторов $\mathrm{Hom}(X, A) \to \mathrm{Hom}(Y, A)$ по теореме 2.7 и свойству 4) почти изоморфных (в данном случае изоморфных) групп $\mathrm{End}(X)^+$ и $\mathrm{End}(Y)^+$. Поскольку T состоит из попарно несравнимых типов, он индуцирует изоморфизм τ-однородных компонент из разложений (14) для

$$\mathrm{Hom}(X, A) = \bigoplus_{\tau\in T}\Bigg(\bigcap_{p\in P_\tau(X)} H^p_\tau\Bigg) = \bigoplus_{\tau\in T} H_\tau$$

и

$$\mathrm{Hom}(Y, A) = \bigoplus_{\tau\in T}\Bigg(\bigcap_{p\in P_\tau(X)} {H'}^p_\tau\Bigg) = \bigoplus_{\tau\in T} H'_\tau,$$

где

$$\mathrm{Hom}(X_{(p)}, A) = \bigoplus_{\tau\in[T^X_p]} H^p_\tau \oplus \Bigg(\bigoplus_{\tau\notin[T^X_p]} \mathrm{End}(A_\tau)\Bigg)$$

и

$$\mathrm{Hom}(Y_{(p)}, A) = \bigoplus_{\tau\in[T^Y_p]} {H'}^p_\tau \oplus \Bigg(\bigoplus_{\tau\notin[T^Y_p]} \mathrm{End}(A_\tau)\Bigg).$$

Напомним, что H_τ и H'_τ совпадают с τ-однородными компонентами из канонических разложений групп $R(\mathrm{End}(\widetilde{X^\tau}))$ и $R(\mathrm{End}(\widetilde{X^\tau}))$, при этом для любого $p \in P_\tau(X)$ из предыдущего следует, что

$$\mathrm{Hom}(X_{(p)}, A) = \mathrm{Hom}\Bigg(\widetilde{X^\tau}_{(p)}, \bigoplus_{\tau\in T_\tau(X)} A_\tau\Bigg) \oplus \Bigg(\bigoplus_{\tau\notin T_\tau(X)} \mathrm{End}(A_\tau)\Bigg)$$

и аналогично

$$\mathrm{Hom}(Y_{(p)}, A) = \mathrm{Hom}\Bigg(\widetilde{Y^\tau}_{(p)}, \bigoplus_{\tau\in T_\tau(Y)} A_\tau\Bigg) \oplus \Bigg(\bigoplus_{\tau\notin T_\tau(Y)} \mathrm{End}(A_\tau)\Bigg)$$

для любого $p \in P_\tau(Y)$ (см. (15)). Как и в доказательстве предыдущей теоремы, мы рассматриваем изоморфизм τ-однородных компонент $H_\tau \to H'_\tau$ для любого τ как сужение некоторого изоморфизма $R(\mathrm{End}(\widetilde{X^\tau})) \to R(\mathrm{End}(\widetilde{Y^\tau}))$ на τ-однородную компоненту. Из (16) по замечанию 1.6 получаем, что $H^p_\tau\mathcal{B} = {H'}^p_\tau$ для любого простого p и $\tau \in T$ (как и раньше, $H^p_\tau = \mathrm{End}(A_\tau)$ для $\tau \notin [T^X_p]$), при этом единица $I_\tau \in \mathrm{End}(A_\tau)$ отображается на себя. Получаем, что $\langle \mathrm{Hom}(X_{(p)}, A), I\rangle \cong$ $\cong \langle \mathrm{Hom}(Y_{(p)}, A), I\rangle$, т. е. $\mathrm{End}(X_{(p)}) \cong \mathrm{End}(Y_{(p)})$ для любого p. Значит, $X_{(p)} \cong_{\mathrm{nr}}$ $\cong_{\mathrm{nr}} Y_{(p)}$ для любого p (см. теоремы 2.6, 2.7). Воспользовавшись критерием почти изоморфизма (свойство 2)), мы получаем, что $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$, чем завершается доказательство. $\square$

Отсюда и из теоремы 2.8 получаем заключительную теорему.

Теорема 2.10. *Пусть* $X, Y \in \mathcal{C}^0$. *Тогда* $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$, *если и только если* $\mathrm{End}(X) \cong \mathrm{End}(Y)$.

Литература

[1] Благовещенская Е. Автоморфизмы колец эндоморфизмов блочно-жёстких почти вполне разложимых групп // Фундамент. и прикл. мат. — 2004. — Т. 10, вып. 2. — С. 23—50.

[2] Благовещенская Е. Прямые разложения локально почти вполне разложимых групп счётного ранга // Чебышёвский сб. — 2005. — Т. 6, вып. 4.

[3] Благовещенская Е. Двойственная структура почти вполне разложимых групп и их колец эндоморфизмов // Успехи мат. наук. — 2006. — Т. 61, вып. 2. — С. 159—160.

[4] Благовещенская Е. А. Двойственность теории почти вполне разложимых групп и их колец эндоморфизмов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. — 2006. — Т. 1. — С. 69—72.

[5] Крылов П. А., Михалёв А. В., Туганбаев А. А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. — М.: Факториал, 2006.

[6] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1974, 1977.

[7] Arnold D. Finite Rank Torsion Free Abelian Groups and Rings. — Springer, 1982. — (Lect. Notes Math.; Vol. 931).

[8] Blagoveshchenskaya E. Dualities between almost completely decomposable groups and their endomorphism rings // J. Math. Sci. — 2005. — Vol. 131, no. 5. — P. 5948—5961.

[9] Blagoveshchenskaya E., Göbel R. Classification and direct decompositions of some Butler groups of countable rank // Comm. Algebra. — 2002. — Vol. 30, no. 7. — P. 3403—3427.

[10] Blagoveshchenskaya E., Ivanov G., Schultz P. The Baer–Kaplansky theorem for almost completely decomposable groups // Contemp. Math. — 2001. — Vol. 273. — P. 85—93.

[11] Mader A. Almost Completely Decomposable Abelian Groups. — Amsterdam: Gordon and Breach, 1999. — (Algebra, Logic and Applications; Vol. 13).