

Об интегрируемости уравнений Эйлера—Пуассона

А. Д. БРЮНО

*Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша, Москва*

В. Ф. ЕДНЕРАЛ

*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова*

УДК 517.925+531.38

Ключевые слова: резонансная нормальная форма, уравнения Эйлера—Пуассона, локальная интегрируемость.

Аннотация

Рассматривается специальный случай системы уравнений Эйлера—Пуассона, описывающей движения тяжёлого твёрдого тела вокруг закреплённой точки. Найдено 44 множества неподвижных решений, в окрестности которых система локально интегрируема. Десять из них вещественные. Выяснено, сколько таких комплексных неподвижных решений может содержаться в трёхмерных инвариантных многообразиях системы. Оказалось, что их число — 4, 2, 1 или 0.

Abstract

A. D. Bruno, V. F. Edneral, On integrability of the Euler–Poisson equations, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 1, pp. 45–59.

We consider a special case of the Euler–Poisson system of equations, describing the motion of a rigid body around a fixed point. We find 44 sets of stationary solutions near which the system is locally integrable. Ten of them are real. We study also the number of these complex stationary solutions in 3-dimensional invariant manifolds of the system. We find that the number is 4, 2, 1, or 0.

1. Локальная интегрируемость

Все случаи глобальной интегрируемости классических систем обыкновенных дифференциальных уравнений, таких как уравнения Эйлера—Пуассона, известны. В данной работе изучаются случаи локальной интегрируемости. Впервые такая попытка была сделана авторами в [7], но она не увенчалась успехом. В [4] был предложен новый подход к проблеме и найден первый случай локальной интегрируемости уравнений Эйлера—Пуассона. В этой статье мы развиваем этот подход и находим много новых множеств неподвижных решений рассматриваемой системы, в окрестности которых система является локально интегрируемой.

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 1, с. 45–59.

© 2007 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

Обозначим $\dot{\cdot} \stackrel{\text{def}}{=} d/dt$, $X = (x_1, \dots, x_n)$. Автономная система

$$\dot{x}_j = \varphi_j(X), \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

с полиномами $\varphi_j(X)$ *локально интегрируема* в области $D \subset \mathbb{C}^n$, если она имеет там достаточно независимых первых интегралов вида $a(X)/b(X)$, где функции $a(X)$ и $b(X)$ аналитичны в области D . Конечно, в окрестностях нестационарной точки X^0 , где $\Phi(X^0) \neq 0$, $\Phi \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, система (1.1) интегрируема. Таким образом, вопрос об интегрируемости имеет смысл для областей, содержащих или примыкающих к особенностям типа неподвижной точки, периодического решения и т. п. Поэтому мы должны изучать *локальную интегрируемость* и *локальную неинтегрируемость* данной системы около её особенностей. Лучшим инструментом для этого является метод нормальной формы [1–3].

Статья организована следующим образом. В разделе 2 даётся краткий обзор теории нормальной формы. В разделе 3 описывается система уравнений Эйлера—Пуассона и выбирается специальный случай, который и рассматривается ниже. В этом случае система имеет две пары двупараметрических семейств стационарных решений. В разделе 4 рассмотрена первая пара семейств. В них выделены все такие точки, вблизи которых можно гарантировать локальную интегрируемость системы. Они образуют 12 множеств, и 6 из них вещественны. В разделе 5 изучена вторая пара семейств и найдено 32 множества со свойством локальной интегрируемости, 4 из них вещественны. В разделе 6 рассмотрены неподвижные точки, содержащиеся в трёхмерном инвариантном многообразии, и определено, сколько из них обладает свойством локальной интегрируемости. Для сложных вычислений был использован пакет Mathematica.

2. Нормальная форма

Ниже векторы являются строками и звёздочкой $*$ обозначена операция транспонирования. Пусть $X^0 = 0$ будет стационарным решением системы (1.1), т. е. $\Phi(0) = 0$:

$$\dot{X}^* = AX^* + \tilde{\Phi}^*(X). \quad (2.1)$$

Пусть линейное преобразование

$$X^* = BY^*$$

приводит матрицу A к жордановой форме $J = B^{-1}AB$, а (2.1) к виду

$$\dot{Y}^* = JY^* + \tilde{\Phi}^*(Y). \quad (2.2)$$

Пусть также формальная замена координат

$$Y = Z + \Xi(Z), \quad (2.3)$$

где $\Xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, а $\xi_j(Z)$ — формальные степенные ряды, преобразует (2.2) в систему

$$\dot{Z}^* = JZ^* + \Psi^*(Z). \quad (2.4)$$

Мы запишем её в виде

$$\dot{z}_j = z_j g_j(Z) = z_j \sum g_{jQ} Z^Q \quad \text{по } Q \in \mathbb{N}_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.5)$$

где $Q = (q_1, \dots, q_n)$, $Z^Q = z_1^{q_1} \dots z_n^{q_n}$,

$$\mathbb{N}_j = \{Q: Q \in \mathbb{Z}^n, Q + E_j \geq 0\}, \quad j = 1, \dots, n,$$

E_j обозначает единичный вектор. Определим также

$$\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \dots \cup \mathbb{N}_n.$$

Вектор $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — диагональ матрицы J — образован из собственных значений матрицы A .

Система (2.4), (2.5) называется *резонансной нормальной формой* если:

- а) J — жорданова матрица,
- б) под знаком суммы в (2.5) содержатся только *резонансные члены*, для которых равно нулю скалярное произведение

$$\langle Q, \Lambda \rangle \stackrel{\text{def}}{=} q_1 \lambda_1 + \dots + q_n \lambda_n = 0. \quad (2.6)$$

Теорема 1. Существует формальная замена (2.3), приводящая (2.2) к нормальной форме (2.4), (2.5).

Пусть k — число линейно независимых решений $Q \in \mathbb{N}$ уравнения (2.6), оно называется *кратностью резонанса*. Интегрирование нормальной формы (2.5) сводится к решению системы порядка k относительно k резонансных переменных.

Свойство 1. Если система (2.2) имеет линейный автоморфизм $\tilde{t} = \delta t$, $\tilde{Y}^* = SY^*$, то её нормальная форма (2.5) имеет тот же самый автоморфизм $\tilde{t} = \delta t$, $\tilde{Z}^* = SZ^*$.

В [1] указаны условия на нормальную форму (2.5), которые обеспечивают сходимость нормализующего преобразования (2.3).

Условие А. В нормальной форме (2.5)

$$g_j = \lambda_j \alpha(Z) + \bar{\lambda}_j \beta(Z), \quad j = 1, \dots, n,$$

где $\alpha(Z)$ и $\beta(Z)$ — некоторые степенные ряды.

Положим

$$\omega_k = \min |\langle Q, \Lambda \rangle| \quad \text{по } Q \in \mathbb{N}, \quad \langle Q, \Lambda \rangle \neq 0, \quad \sum_{j=1}^n q_j < 2^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Условие ω (на малые знаменатели).

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \log \omega_k > -\infty,$$

т. е. этот ряд сходится.

Это слабое арифметическое условие выполняется для почти всех векторов Λ .

Теорема 2. Если вектор Λ удовлетворяет условию ω и нормальная форма (2.5) удовлетворяет условию A , то нормализующее преобразование (2.3) сходится.

3. Уравнения Эйлера—Пуассона

Движения твёрдого тела вокруг закреплённой точки описываются системой шести уравнений Эйлера—Пуассона [5]

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr &= Mg(z_0\gamma_2 - y_0\gamma_3), \\ B\dot{q} + (A - C)pr &= Mg(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1), \\ C\dot{r} + (B - A)pq &= Mg(y_0\gamma_1 - x_0\gamma_2), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2, \quad (3.2)$$

где $A, B, C, M, g, x_0, y_0, z_0$ — вещественные константы, A, B, C положительны и удовлетворяют неравенствам треугольника. Система (3.1), (3.2) имеет три первых интеграла

$$\begin{aligned} h &\stackrel{\text{def}}{=} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2Mg(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3) = \text{const}, \\ g &\stackrel{\text{def}}{=} Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = \text{const}, \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1. \end{aligned}$$

Мы рассмотрим систему Эйлера—Пуассона (3.1), (3.2) в случае

$$A = B = 1, \quad C = c, \quad Mg x_0 = -1, \quad y_0 = z_0 = 0.$$

При этом подсистема (3.1) принимает вид

$$\dot{p} = (1 - c)qr, \quad \dot{q} = (c - 1)pr - \gamma_3, \quad \dot{r} = \frac{\gamma_2}{c}. \quad (3.3)$$

Система (3.3), (3.2) имеет линейный автоморфизм

$$t, p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \rightarrow -t, p, -q, r, \gamma_1, -\gamma_2, \gamma_3. \quad (3.4)$$

Единственный параметр c принадлежит $(0, 2]$. Этот полуинтервал соответствует значениям параметра c в механической задаче. Система (3.4), (3.2) имеет три первых интеграла

$$\begin{aligned} h &\stackrel{\text{def}}{=} p^2 + q^2 + cr^2 - 2\gamma_1 = \text{const}, \\ g &\stackrel{\text{def}}{=} p\gamma_1 + q\gamma_2 + cr\gamma_3 = \text{const}, \\ I_3 &\stackrel{\text{def}}{=} \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \end{aligned} \quad (3.5)$$

и интегрируема в квадратурах, если имеет ещё один дополнительный первый интеграл, который существует лишь в двух случаях: при $c = 1$ (случай Лагранжа) и при $c = 1/2$ (случай С. Ковалевской). Система (3.3), (3.2) не интегрируема глобально при других значениях c [6].

Теорема 3. Система (3.3), (3.2) имеет две пары двухпараметрических (по c и p_0 или p_t) семейств неподвижных точек

$$\mathbf{S}_\sigma: \quad p = p_0 \in \mathbb{C}, \quad q = 0, \quad r = 0, \quad \gamma_1 = \sigma, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 0, \quad \sigma = \pm 1, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\tau: \quad p = p_t \in \mathbb{C}, \quad q = 0, \quad r_t &= \frac{\tau \sqrt{1 - (c-1)^2 p_t^4}}{(c-1)p_t}, \\ \gamma_{1t} &= (c-1)p_t^2, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_{3t} = \tau \sqrt{1 - (c-1)^2 p_t^4}, \quad \tau = \pm 1, \end{aligned} \quad (3.7)$$

и все её стационарные решения принадлежат этим семействам.

Семейства $\mathbf{S}_\sigma$ существуют для любого $p_0 \in \mathbb{C}$. Семейства $\mathbf{T}_\tau$ существуют для $c \neq 1$ и $p_t \neq 0$. Пересечения семейств таковы:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_+ \cap \mathbf{S}_- &= \emptyset, \\ \mathbf{T}_+ \cap \mathbf{T}_- &= \mathbf{S}_\sigma \cap \mathbf{T}_\tau: \quad p_0 = p_t, \quad q = 0, \quad r = 0, \\ &\quad \gamma_1 = (c-1)p_t^2 = \sigma = \pm 1, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Семейства $\mathbf{S}_\sigma$ вещественны, если $p_0 \in \mathbb{R}$. Семейства $\mathbf{T}_\tau$ вещественны, если $p_t \in \mathbb{R}$ и $(c-1)^2 p_t^4 \leq 1$.

4. Семейства $\mathbf{S}_\sigma$

Сначала мы рассмотрим семейства $\mathbf{S}_\sigma$. В окрестности каждой неподвижной точки (3.6) введём локальные координаты

$$P = p - p_0, \quad q, \quad r, \quad \Gamma = \gamma_1 - \sigma, \quad \gamma_2, \quad \gamma_3. \quad (4.1)$$

В них система (3.3), (3.2) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{P} &= (1-c)qr, \quad \dot{q} = (c-1)p_0r - \gamma_3 + (c-1)Pr, \quad \dot{r} = \frac{\gamma_2}{c}, \quad \dot{\Gamma} = r\gamma_2 - q\gamma_3, \\ \dot{\gamma}_2 &= -\sigma r + p_0\gamma_3 + P\gamma_3 - r\Gamma, \quad \dot{\gamma}_3 = \sigma q - p_0\gamma_2 + q\Gamma - P\gamma_2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Если координаты (4.1) обозначить как $X = (x_1, \dots, x_6)$,

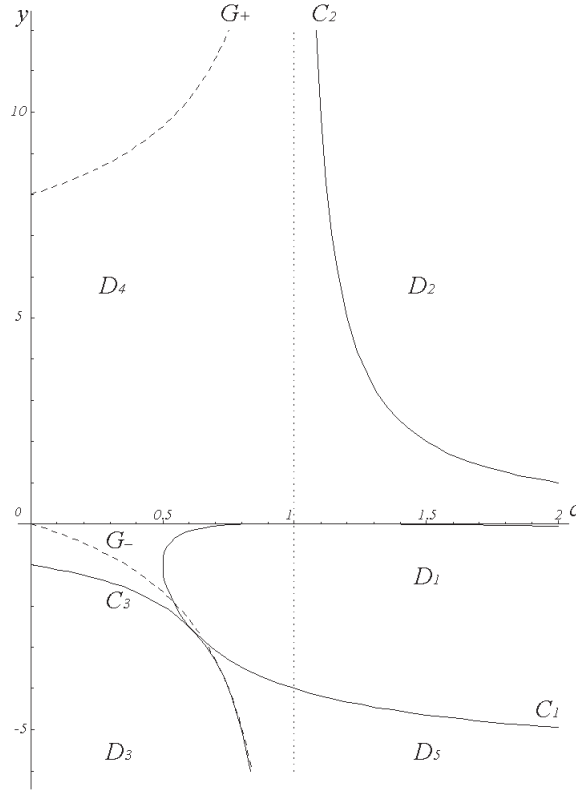
$$x_1 = P, \quad x_2 = q, \quad x_3 = r, \quad x_4 = \Gamma, \quad x_5 = \gamma_2, \quad x_6 = \gamma_3, \quad (4.3)$$

то система (4.2) имеет вид системы (2.1): $X^* = AX^* + \tilde{\Phi}^*(X)$ с $n = 6$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (c-1)p_0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma & 0 & 0 & p_0 \\ 0 & \sigma & 0 & 0 & -p_0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Характеристическое уравнение для матрицы A имеет вид

$$\lambda^6 + a\lambda^4 + b\lambda^2 = 0, \quad (4.5)$$

Рис. 1. Множества семейств $\mathbf{S}_\sigma$

где

$$a = \left(\sigma p_0^2 + 1 + \frac{1}{c} \right) \sigma, \quad b = \frac{1}{c} + \sigma p_0^2 \left(\frac{1}{c} - 1 \right).$$

Уравнение (4.5) имеет два нулевых корня и парные корни

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -\lambda_4, \quad \lambda_5 = -\lambda_6.$$

Пусть $\tilde{\mathbf{S}}_\sigma$ будет такой частью семейства $\mathbf{S}_\sigma$, для которой $p_0^2 \in \mathbb{R}$. Очевидно, что $\tilde{\mathbf{S}}_\sigma \supset \text{Re } \mathbf{S}_\sigma$. Ниже мы рассмотрим только подсемейства $\tilde{\mathbf{S}}_\sigma$. Зависимость собственных значений $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ от двух вещественных параметров

$$c \in (0, 2], \quad y \stackrel{\text{def}}{=} \sigma p_0^2 \in \mathbb{R} \quad (4.6)$$

представлена на рис. 1. Три кривые C_1, C_2, C_3 ,

$$C_1 = \{(cy + c - 1)^2 + 4c^2y = 0\} = \{a^2 - 4b = 0\},$$

$$C_2 \cup C_3 = \{y(c - 1) = 1\} = \{b = 0\},$$

делят полосу (4.6) на пять множеств: D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 . Кривая C_1 касается кривой C_3 в точке

$$(c_0, y_0) = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}, -\frac{\sqrt{5} + 3}{2} \right) \approx (0,618, -2,618).$$

На множестве D_1 собственные значения $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ комплексны: $\lambda_4 = -\lambda_3, \lambda_5 = \bar{\lambda}_3, \lambda_6 = -\bar{\lambda}_3$; на множествах D_2 и D_3 два из них вещественны, а другие два чисто мнимы. На D_4 все они чисто мнимы, на D_5 все они вещественны.

Согласно (3.4) и (4.1) система (4.2) имеет автоморфизм

$$t, P, q, r, \Gamma, \gamma_2, \gamma_3 \rightarrow -t, P, -q, r, \Gamma, -\gamma_2, \gamma_3$$

или согласно (4.3)

$$t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \rightarrow -t, x_1, -x_2, x_3, x_4, -x_5, x_6. \quad (4.7)$$

Пусть линейное преобразование

$$X^* = BY^*$$

приводит матрицу (4.4) к диагональной форме на множествах D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 . Тогда оно приведёт автоморфизм (4.7) к виду

$$t, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \rightarrow -t, y_1, y_2, y_4, y_3, y_6, y_5. \quad (4.8)$$

Теорема 4. На множествах D_1, D_2, D_3 нормализующее преобразование системы (4.2) сходится.

На этих множествах отношение λ_3/λ_5 не является вещественным числом. Поэтому уравнение

$$\langle \Lambda, Q \rangle = 0$$

с вектором $\Lambda = (0, 0, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$ имеет только такие вещественные решения $Q = (q_1, \dots, q_6)$, где q_1, q_2 произвольны, а $q_3 = q_4, q_5 = q_6$. Следовательно, в нормальной форме

$$\dot{z}_j = z_j g_j(Z), \quad j = 1, \dots, 6, \quad (4.9)$$

ряды $g_j(Z)$ зависят только от

$$z_1, z_2, \rho_1 \stackrel{\text{def}}{=} z_3 z_4, \quad \rho_2 \stackrel{\text{def}}{=} z_5 z_6, \quad (4.10)$$

которые являются *резонансными переменными*. Согласно свойству 1 нормальная форма (4.9) имеет автоморфизм вида (4.8), где y_j следует заменить на z_j . Для резонансных переменных (4.10) это приводит к автоморфизму

$$t, z_1, z_2, \rho_1, \rho_2 \rightarrow -t, z_1, z_2, \rho_1, \rho_2.$$

Следовательно, в нормальной форме (4.9)

$$g_1 \equiv g_2 \equiv 0, \quad g_4 = -g_3, \quad g_6 = -g_5. \quad (4.11)$$

Отсюда можно вывести, что нормальная форма (4.9), (4.11) удовлетворяет условию А. Условие ω здесь также удовлетворяется, поскольку отношение λ_3/λ_5 не является вещественным числом. Таким образом, согласно теореме 2 нормализующее преобразование сходится.

Для резонансных переменных z_1, z_2, ρ_1, ρ_2 из нормальных форм уравнений (4.9), (4.11) следуют уравнения $\dot{z}_j = 0, \dot{\rho}_j = 0, j = 1, 2$. Следовательно, нормальная форма (4.9), (4.11) имеет четыре независимых первых интеграла

$$z_1 = \text{const}, \quad z_2 = \text{const}, \quad \rho_1 = \text{const}, \quad \rho_2 = \text{const}. \quad (4.12)$$

Поскольку на множествах D_1, D_2, D_3 нормализующее преобразование является аналитическим и обратимым, система (4.2) имеет там четыре локальных первых интеграла. Следовательно, в окрестностях принадлежащих этим множествам неподвижных точек она локально интегрируема.

Для каждого фиксированного значения $y = \sigma p_0^2$ параметры σ и p_0 могут иметь четыре различных варианта знаков. Поэтому в двух подсемействах $\tilde{\mathbf{S}}_\sigma$ множества D_1, D_2, D_3 порождают 12 различных комплексных множеств локальной интегрируемости. Если же значение $p_0 = \pm\sqrt{y\sigma}$ вещественно, то система (4.2) также вещественна, поэтому её нормальная форма вещественна в соответствующих координатах и четыре первых интеграла (4.12) тоже вещественны. Если $\sigma = +1$, то значение $p_0 = \pm\sqrt{y}$ вещественно для $y \geq 0$, т. е. множество D_2 вещественно. Если же $\sigma = -1$, то значение $p_0 = \pm\sqrt{-y}$ вещественно для $y \leq 0$, т. е. вещественны D_1 и D_3 . Всего мы имеем шесть вещественных множеств локальной интегрируемости.

5. Семейства $\mathbf{T}_\tau$

Рассмотрим теперь семейства $\mathbf{T}_\tau$. В окрестности каждой неподвижной точки (3.7) введём локальные координаты

$$P = p - p_t, \quad q, \quad R = r - r_t, \quad \Gamma = \gamma_1 - \gamma_{1t}, \quad \gamma_2, \quad \Delta = \gamma_3 - \gamma_{3t}. \quad (5.1)$$

В них система (3.3), (3.2) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{P} &= (1-c)r_t q + (1-c)qP, \quad \dot{q} = (c-1)(p_t R + r_t P) - \Delta + (c-1)PR, \\ \dot{R} &= \frac{\gamma_2}{c}, \quad \dot{\Gamma} = r_t \gamma_2 - q\gamma_{3t} + R\gamma_2 - q\Delta, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\dot{\gamma}_2 = p_t \Delta + P\gamma_{3t} - (r_t \Gamma + R\gamma_{1t}) + P\Delta - R\Gamma, \quad \dot{\Delta} = q\gamma_{1t} - p_t \gamma_2 + q\Gamma - P\gamma_2.$$

Если координаты (5.1) обозначить как $X = (x_1, \dots, x_6)$,

$$x_1 = P, \quad x_2 = q, \quad x_3 = R, \quad x_4 = \Gamma, \quad x_5 = \gamma_2, \quad x_6 = \Delta, \quad (5.3)$$

то (5.2) можно записать как систему (2.1): $X^* = AX^* + \tilde{\Phi}^*(X)$ с $n = 6$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & (1-c)r_t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (c-1)r_t & 0 & (c-1)p_t & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/c & 0 \\ 0 & -\gamma_{3t} & 0 & 0 & r_t & 0 \\ \gamma_{3t} & 0 & -\gamma_{1t} & -r_t & 0 & p_t \\ 0 & \gamma_{1t} & 0 & 0 & -p_t & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Характеристическим уравнением для матрицы A будет

$$\lambda^6 + a\lambda^4 + b\lambda^2 = 0, \quad (5.5)$$

где

$$c_1 \stackrel{\text{def}}{=} c - 1, \quad a = \left(1 + \frac{1}{c_1^2}\right) \frac{1}{p_t^2} \frac{c_1(c_1^2 - 2)p_t^2}{1 + c_1}, \quad b = \frac{1}{c_1^2 p_t^4} + 2 - \frac{3}{1 + c_1} - \frac{3c_1^3 p_t^4}{1 + c_1}.$$

Уравнение (5.5) имеет два нулевых корня и парные корни

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -\lambda_4, \quad \lambda_5 = -\lambda_6.$$

Пусть $\tilde{\mathbf{T}}_\tau$ — часть семейства $\mathbf{T}_\tau$ с $p_t^2 \in \mathbb{R}$. Очевидно, что $\tilde{\mathbf{T}}_\tau \supset \text{Re } \mathbf{T}_\tau$. Ниже мы будем рассматривать только подсемейства $\tilde{\mathbf{T}}_\tau$. Зависимость собственных значений $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ от двух вещественных параметров

$$c_1 = c - 1 \in (-1, 1], \quad V = c_1^2 p_t^4 > 0, \quad (5.6)$$

т. е. для $p_t^2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, представлена на рис. 2. Четыре кривые E_1, E_2, E_3, E_4 ,

$$\begin{aligned} E_1 &= \{V = 1\}, \quad E_2 = \left\{V = -\frac{c_1 + 1}{3c_1}\right\} \cap \{V > 0\}, \\ E_3 \cup E_4 &= \{(c_1 - 1)^2(c_1 + 1)^4 - 2c_1(c_1 - 1)(c_1 + 1)(2 + 4c_1 + c_1^2 + c_1^3)V + \\ &\quad + c_1^2(4 + 12c_1 + 8c_1^2 + c_1^4)V^2 = 0\} \cap \{V > 0\}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

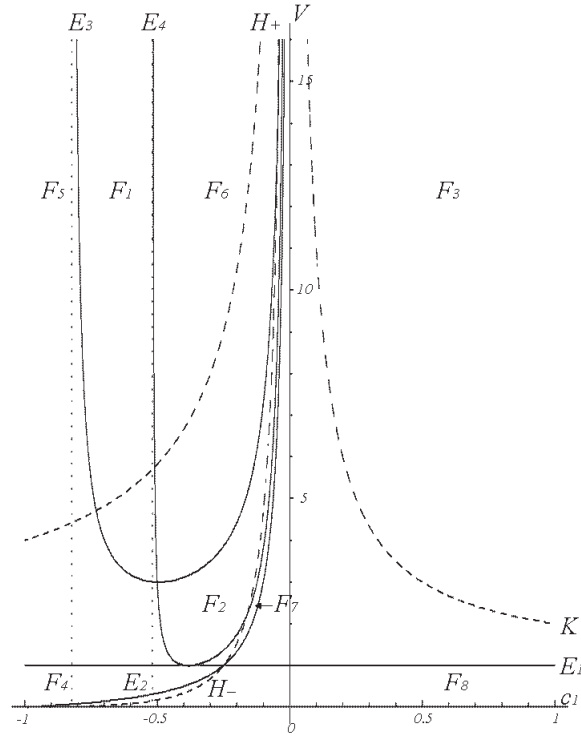
делят полуполосу (5.6) на восемь множеств $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8$. Здесь

$$E_1 \cup E_2 = \{b = 0\} \cap \{V > 0\}, \quad E_3 \cup E_4 = \{a^2 - 4b = 0\} \cap \{V > 0\}.$$

Кривые E_1, E_2, E_3, E_4 обозначены сплошными линиями, поскольку они делят эту полуполосу на множества $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8$. Их вертикальные асимптоты обозначены пунктиром для значений $c_1 = 0, -0,5188\dots, -0,8225\dots$, являющихся корнями многочлена V^2 в (5.7). Кривые E_1 и E_2 пересекаются в точке $c_1 = -1/4, V = 1$. Кривые E_3 и E_4 пересекаются в точке $c_1 = -1/2, V = 3$ согласно решению уравнения (5.7)

$$Vc_1(4 + 12c_1 + 8c_1^2 + c_1^4) = (c_1^2 - 1)(2 + 4c_1 + c_1^2 + c_1^3) \pm 2(c_1^2 - 1)(1 + 2c_1)\sqrt{-c_1}.$$

Кривая F_4 касается прямой $E_1 = \{V = 1\}$ в точке с $c_1 = (\sqrt{5} - 3)/2 = -0,3819\dots$. Подсемейства $\tilde{\mathbf{T}}_\tau$ пересекаются с подсемействами $\tilde{\mathbf{S}}_\sigma$ вдоль линии E_1 на рис. 2 и вдоль кривых C_2 и C_3 на рис. 1, при этом $\sigma = \text{sgn } c_1$ согласно (3.8). Точка $(c - 1, V) = ((\sqrt{5} - 3)/2, 1)$ соответствует точке $(c, y) = (c_0, y_0) = ((\sqrt{5} - 1)/2, (\sqrt{5} + 3)/2)$.

Рис. 2. Множества семейств $\mathbf{T}_\tau$

На множествах F_1 и F_2 собственные значения $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ комплексны: $\lambda_4 = -\lambda_3, \lambda_5 = \bar{\lambda}_3, \lambda_6 = -\bar{\lambda}_3$; на множествах F_3 и F_4 два из них вещественны и ещё два чисто мнимы.

В соответствии с (3.4) и (5.1) система (5.2) имеет автоморфизм

$$t, P, q, R, \Gamma, \gamma_2, \Delta \rightarrow -t, P, -q, R, \Gamma, -\gamma_2, \Delta.$$

В координатах (5.3) это автоморфизм (4.7). Пусть линейное преобразование

$$X^* = BY^*$$

приводит матрицу (5.4) к диагональной форме на множествах $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8$. Тогда оно же приведёт автоморфизм (4.7) к виду

$$t, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \rightarrow -t, y_1, y_2, y_4, y_3, y_6, y_5. \quad (5.8)$$

Теорема 5. На множествах F_1, F_2, F_3, F_4 нормализующее преобразование (5.2) сходится.

На этих множествах отношение λ_3/λ_5 не является вещественным числом. Поэтому уравнение

$$\langle \Lambda, Q \rangle = 0$$

с вектором $\Lambda = (0, 0, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$ имеет только такие вещественные решения $Q = (q_1, \dots, q_6)$, у которых q_1, q_2 произвольны, $q_3 = q_4, q_5 = q_6$. Следовательно, в нормальной форме

$$\dot{z}_j = z_j g_j(Z), \quad j = 1, \dots, 6, \quad (5.9)$$

ряды $g_j(Z)$ зависят только от

$$z_1, z_2, \rho_1 \stackrel{\text{def}}{=} z_3 z_4, \quad \rho_2 \stackrel{\text{def}}{=} z_5 z_6, \quad (5.10)$$

которые являются *резонансными переменными*. Согласно свойству 1 нормальная форма (5.9) обладает автоморфизмом вида (5.8), где y_j заменены на z_j . Для резонансных переменных (5.10) это приводит к автоморфизму

$$t, z_1, z_2, \rho_1, \rho_2 \rightarrow -t, z_1, z_2, \rho_1, \rho_2.$$

Следовательно, в нормальной форме (5.9)

$$g_1 \equiv g_2 \equiv 0, \quad g_4 = -g_3, \quad g_6 = -g_5. \quad (5.11)$$

Отсюда можно вывести, что нормальная форма (5.9), (5.11) удовлетворяет условию А. Условие ω здесь также удовлетворяется, поскольку отношение λ_3/λ_5 не является вещественным числом. Таким образом, согласно теореме 2 нормализующее преобразование сходится.

Для резонансных переменных z_1, z_2, ρ_1, ρ_2 нормальная форма уравнений (5.9), (5.11) будет выглядеть как $\dot{z}_j = 0, \dot{\rho}_j = 0, j = 1, 2$. Следовательно, нормальная форма (5.9), (5.11) имеет четыре независимых первых интеграла

$$z_1 = \text{const}, \quad z_2 = \text{const}, \quad \rho_1 = \text{const}, \quad \rho_2 = \text{const}. \quad (5.12)$$

Поскольку нормализующее преобразование является аналитическим и обратимым, то вблизи неподвижных точек, принадлежащих множествам F_1, F_2, F_3, F_4 , система (5.2) имеет четыре локальных первых интеграла. Следовательно, на этих множествах она локально интегрируема.

Для каждой неподвижной точки c_1, V из полуполосы (5.6) $\tau = \pm 1$ и $p_t = \sqrt[4]{V/c_1^2}$, следовательно, ей соответствует в общей сложности восемь различных пар значений c_1, p_t . Таким образом, в двух подсемействах $\tilde{T}_\tau$ множества F_1, F_2, F_3, F_4 образуют 32 различных комплексных множества локальной интегрируемости для $\tau = \pm 1$ и вещественных $V > 0$. Если точка (3.7) вещественна, то $V \leq 1$ и система (5.2) также вещественна, как и её нормальная форма в соответствующих координатах. Вещественны при этом и четыре первых интеграла (5.12). Поскольку вещественные параметры $\tau = \pm 1$ и $p_t = \pm |p_t|$ могут принимать четыре различных варианта знаков, всего имеется четыре вещественных копии множества локальной интегрируемости F_4 .

6. Неподвижные точки в инвариантных многообразиях

В этом разделе мы рассматриваем вопрос, как много локально интегрируемых неподвижных точек подсемейств $\tilde{\mathbf{S}}_\sigma$ и $\tilde{\mathbf{T}}_\tau$ могут принадлежать одному вещественному инвариантному многообразию $M = \{h = \text{const}, g = \text{const}\}$ (см. (3.5)). Согласно (3.6) в семействах $\mathbf{S}_\sigma$ интегралы

$$h = p_0^2 - 2\sigma, \quad g = \sigma p_0. \quad (6.1)$$

Следовательно,

$$\sigma = \frac{g^2 - h}{2}, \quad p_0 = \sigma g = \frac{g(g^2 - h)}{2}.$$

Итак, значения σ и p_0 однозначно определяются парами (h, g) , т. е. каждая пара значений (h, g) , связанная соотношением $h = g^2 - 2\sigma$, соответствует лишь одной точке подсемейства $\tilde{\mathbf{S}}_\sigma$. Таким образом, одно многообразие M содержит не более одной точки из $\tilde{\mathbf{S}}_\sigma$.

В семействах $\mathbf{T}_\tau$ интегралы (3.6) имеют вид

$$h = \frac{1 + c_1}{c_1^2 p_t^2} - 3c_1 p_t^2, \quad g = \frac{1 + c_1}{c_1 p_t} - c_1^2 p_t^3. \quad (6.2)$$

Разрешая систему относительно p_t , получаем

$$p_t = \frac{h^2 g c_1 + 12g(1 + c_1)}{c_1[h^3 c_1 + 18g^2 - 4h(1 + c_1)]}.$$

Следовательно, пары (h, g) при $g \neq 0$ определяют значение p_t однозначно. При этом $\tau = \pm 1$ может быть выбрано произвольно. Таким образом, каждой паре (h, g) соответствуют две точки из подсемейств $\tilde{\mathbf{T}}_\tau$: одна из $\tilde{\mathbf{T}}_+$, другая из $\tilde{\mathbf{T}}_-$, обе с одинаковым p_t .

Если $g = 0$, то из (6.2) получим

$$V = \frac{1 + c_1}{c_1} = 1 + \frac{1}{c_1}. \quad (6.3)$$

Поскольку $V > 0$, то и $c_1 > 0$, поэтому

$$\sqrt{V} = c_1 p_t^2 = \sqrt{\frac{1 + c_1}{c_1}} > 0, \quad h = -2\sqrt{\frac{1 + c_1}{c_1}} \quad (6.4)$$

и

$$p_t = \pm \sqrt{\frac{1}{c_1} \sqrt{\frac{1 + c_1}{c_1}}}.$$

Таким образом, пара $(h, g = 0)$ с $h = -2\sqrt{(1 + c_1)/c_1}$ соответствует четырём точкам из подсемейств $\tilde{\mathbf{T}}_\tau$:

$$p_t = \pm |p_t|, \quad \tau = \pm 1.$$

Мы обозначили кривую (6.3) через K . Как видно из рис. 2, она лежит в множестве F_2 . Соответствующие многообразия M имеют четыре локально интегрируемые неподвижные точки. В соответствии с (6.1) на семействах $\mathbf{S}_\sigma$ мы имеем $h = -2\sigma$ для $g = 0$. Таким образом, если подсемейство решений (6.4) пересекает семейства $\mathbf{S}_\sigma$, то $\sqrt{(1+c_1)/c_1} = \sigma$, или $1+c_1 = c_1$. Но это невозможно. Следовательно, подсемейство (6.4) (которое обозначено через K) не пересекает семейств $\mathbf{S}_\sigma$, все его неподвижные точки принадлежат $\tilde{\mathbf{T}}_\tau$ и локально интегрируемы.

Теперь мы изучим возможность того, что многообразие M имеет одну локально интегрируемую точку из подсемейств $\tilde{\mathbf{S}}_\sigma$ и две таких точки из подсемейств $\tilde{\mathbf{T}}_\tau$. Для этого рассмотрим систему четырёх уравнений (6.1), (6.2). Исключая из них h и g , мы получаем систему двух уравнений

$$p_0^2 - 2\sigma = \frac{1+c_1}{c_1^2 p_t^2} - 3c_1 p_t^2, \quad \sigma p_0 = \frac{1+c_1}{c_1 p_t} - c_1^2 p_t^3. \quad (6.5)$$

Исключая далее p_0 , мы получаем уравнение типа $h = g^2 - 2\sigma$:

$$f \stackrel{\text{def}}{=} 1 + c_1 - 2\sigma u + (1 - 2c_1)V + c_1 V^2 = 0,$$

где $u = c_1 p_t^2 = \sqrt{V}$, u вещественно при $V > 0$. Относительно u это уравнение четвёртого порядка

$$f = (u - \sigma)^2 (c_1 u^2 + 2\sigma c_1 u + c_1 + 1).$$

Уравнение $f = 0$ имеет решения

$$u = \sigma \quad (\text{т. е. } V = 1), \quad (6.6)$$

$$u = -\sigma \pm \frac{1}{\sqrt{-c_1}} \quad \left(\text{т. е. } V = 1 - \frac{1}{c_1} \mp \frac{2\sigma}{\sqrt{-c_1}} \right). \quad (6.7)$$

Линия (6.6) не пересекает множеств F_j (она принадлежит их границам).

Вещественные решения (6.7) существуют только при $c_1 < 0$. Поскольку $u = c_1 p_t^2$, то $u < 0$ для вещественного p_t . Следовательно, все вещественные решения отрицательны, т. е.

$$u = -\left(\sigma + \frac{1}{\sqrt{-c_1}} \right), \quad V = 1 + \frac{2\sigma}{\sqrt{-c_1}} - \frac{1}{c_1}. \quad (6.8)$$

На рис. 2 кривые (6.8) изображены штриховыми линиями и обозначены H_+ для $\sigma = +1$ и H_- для $\sigma = -1$. Кривая H_+ пересекает множество F_1 в интервале

$$c_1 \in (-0,7304 \dots, -0,5097 \dots).$$

Она пересекает также множества F_5 и F_6 .

Кривая H_- пересекает множество F_2 в интервале

$$c_1 \in (-0,1624 \dots, -0,04267 \dots). \quad (6.9)$$

Она пересекает также множества F_8 , F_7 и F_6 . Подставляя решения (6.8) в первое уравнение (6.5), после некоторых упрощений получаем

$$p_0^2 = 4 \left(\sigma + \frac{1}{\sqrt{-c_1}} \right).$$

Следовательно,

$$y \stackrel{\text{def}}{=} \sigma p_0^2 = 4 \left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{-c_1}} \right). \quad (6.10)$$

Кривые (6.10) обозначаются G_σ и изображены на рис. 1 штриховыми линиями. Линия G_- пересекает множество D_1 в интервале

$$c \in (0,5327 \dots, 0,6637 \dots). \quad (6.11)$$

Она также пересекает множества D_4 и D_5 . Линия G_- касается кривой C_3 в точке $(c, y) = (3/4, -4)$. Интервал (6.11) соответствует интервалу

$$c_1 \in (-0,4632 \dots, -0,3362 \dots). \quad (6.12)$$

Интервалы (6.9) и (6.12) не пересекаются. Следовательно, инвариантного многообразия M , содержащего локально интегрируемые точки из обоих подсемейств $\tilde{S}_\sigma$ и $\tilde{T}_\tau$, не существует. Однако многообразия M , содержащие только интегрируемые точки, существуют: они имеют или одну точку из множеств D_1 , D_2 , D_3 , которая не принадлежит пересечению $G_- \cap D_1$, или две точки из множеств F_1 , F_2 , F_3 , F_4 , которые не принадлежат ни подмножеству K , ни пересечениям $H_+ \cap F_1$ и $H_- \cap F_2$, или четыре точки из подмножества K . Вещественные многообразия M содержат любые две вещественные точки из F_4 , или одну вещественную точку из $D_1 - D_3$, либо никакой вещественной точки со свойством локальной интегрируемости.

7. Заключение

Рассмотренный частный случай системы уравнений Эйлера—Пуассона имеет 44 множества комплексных неподвижных решений, в окрестности которых система является локально интегрируемой. Среди них 10 множеств вещественны. Комплексное инвариантное многообразие с постоянными значениями интегралов энергии и момента может иметь 4, 2, 1 или 0 неподвижных решений, в окрестности которых система является локально интегрируемой, а вещественное многообразие может иметь 2, 1 или 0 вещественных решений.

Работа была поддержана грантом РФФИ 05-01-00050 и грантом Президента Российской Федерации НШ-4476.06.02.

Литература

- [1] Брюно А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений // Тр. ММО. — 1971. — Т. 25. — С. 119—262.

- [2] Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1979.
- [3] Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. — М.: Физматлит, 1998.
- [4] Брюно А. Д. Теория нормальных форм уравнений Эйлера—Пуассона: Препринт № 100 Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН. — М., 2005.
- [5] Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжёлого твёрдого тела около неподвижной точки. — М.: Гостехиздат, 1953.
- [6] Зиглин С. Л. Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике // Функциональный анализ и его приложения. — 1982. — Т. 16, № 3. — С. 30—40; 1983. — Т. 17, № 1. — С. 8—23.
- [7] Bruno A. D., Edneral V. F. Normal forms and integrability of ODE systems // Computer Algebra in Scientific Computing. 8th Int. Workshop, CASC 2005, Kalamata, Greece, September 12—16, 2005. Proceedings / V. G. Ganzha, ed. — Berlin: Springer, 2005. — (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 3718). — P. 379—386.

