Поведение дифференциальных стандартных базисов при композиции*

А. И. ЗОБНИН
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: al_zobnin@mail.ru

УДК 512.628.2+512.714

Ключевые слова: дифференциальная алгебра, дифференциальные стандартные базисы, базисы Грёбнера, композиция многочленов.

Аннотация

В работе доказаны аналоги теоремы Хуна Хонга о поведении базисов Грёбнера при композиции для дифференциальных стандартных базисов в кольце обыкновенных дифференциальных многочленов $\mathcal{F}\{y\}$. В частности, доказана конечность некоторых дифференциальных стандартных базисов, а также построены специальные упорядочения дифференциальных мономов, при которых такие базисы у идеалов, порождённых степенями квазилинейных многочленов, становятся конечными.

Abstract

A. I. Zobnin, Differential standard bases under composition, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 1, pp. 109—134.

We generalize Hoon Hong's theorem on Gröbner bases under composition to the case of differential standard bases in the ordinary ring of differential polynomials $\mathcal{F}\{y\}$. In particular, we prove that some ideals have finite differential standard bases. We construct special orderings on differential monomials such that ideals generated by some power of a quasi-linear polynomial acquire finite differential standard bases.

1. Введение

Задача принадлежности многочлена конечно порождённому идеалу в кольце дифференциальных многочленов до сих пор открыта. Известно её алгоритмическое решение лишь в некоторых важных частных случаях [27]. Для радикальных идеалов её можно решить с помощью разложения идеала в пересечение характеризуемых или регулярных идеалов [15,16] (соответствующие алгоритмы имеются в системе компьютерной алгебры Maple). Кроме того, можно алгоритмически ответить на вопрос о принадлежности многочлена однородному по весу идеалу [11]. Наконец, как и в полиномиальном случае, средством решения

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 05-01-00671.

этой задачи являются конечные стандартные базисы [9, 22]. Однако дифференциальные стандартные базисы, в отличие от полиномиальных, могут быть бесконечными даже у сравнительно несложно устроенных идеалов. Поэтому важно описать те случаи, когда у идеала имеются конечные стандартные базисы при некотором упорядочении.

Интерес к дифференциальным стандартным базисам [9,22] возродился после того, как были найдены примеры конечных и рекурсивных базисов при более общем наборе допустимых упорядочений [26, 29]. Кроме того, были получены критерии конечности дифференциальных стандартных базисов при определённых классах упорядочений [10, 28]. На их основе был создан и реализован в системах компьютерной алгебры так называемый «улучшенный процесс Оливье», вычисляющий редуцированный дифференциальный стандартный базис при δ-лексикографических упорядочениях в случае его конечности [3, 28].

В середине 1990-х годов Хуном Хонгом [13, 14] были получены важные результаты, связанные с базисами Грёбнера идеалов, порождённых композицией многочленов. Им были получены необходимые и достаточные условия, при которых композиция базиса Грёбнера любого идеала остаётся базисом Грёбнера. В данной работе мы распространяем эти результаты на дифференциальные стандартные базисы в обыкновенном кольце дифференциальных многочленов.

Техника, развиваемая в данной статье, позволяет доказать конечность некоторых дифференциальных стандартных базисов, а также построить специальные упорядочения, при которых дифференциальные стандартные базисы идеалов, порождённых степенями квазилинейными многочленами, становятся конечными. Данная работа перекликается с [3], где рассматривалась задача проверки принадлежности дифференциального многочлена для идеалов, порождённых композицией многочленов (она сводилась к другой, более простой задаче принадлежности).

2. Основные сведения о базисах Грёбнера и дифференциальной алгебре

Мы приведём необходимые сведения из теории базисов Грёбнера [1, 4, 5, 8].

Зафиксируем кольцо многочленов $K[x_1, \ldots, x_n]$ над некоторым полем K. Обозначим через $\mathbb{M}_n$ множество всех мономов от переменных $x_1, \ldots, x_n$, т. е. выражений вида $\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$, $\alpha_i \geqslant 0$. Оно образует моноид относительно умножения. Термом будем называть одночлен, т. е. моном с ненулевым коэффициентом из поля K. (Заметим, что некоторые авторы используют противоположную терминологию для мономов и термов. Мы будем придерживаться обозначений книги [4].)

Определение 1. (*Допустимым*) *мономиальным упорядочением* на $\mathbb{M}_n$ называется линейный порядок, удовлетворяющий следующим свойствам:

1) $M \prec N \iff MP \prec NP$ для любых $M, N, P \in \mathbb{M}_n$;
2) $1 \preccurlyeq M$ для любого $M \in \mathbb{M}_n$.

Определение 2. Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Вектор a лексикографически младше вектора b ($a \prec_{\mathrm{lex}} b$), если существует такое k, $0 \leqslant k < n$, что $a_i = b_i$ для всех натуральных $i \leqslant k$, но $a_{k+1} < b_{k+1}$. Аналогично будем сравнивать векторы-столбцы.

Примеры. Зафиксируем порядок на переменных (положив, например, $x_1 \prec x_2 \prec \ldots \prec x_n$). Пусть $M = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ и $N = x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n}$ — произвольные мономы из $\mathbb{M}_n$. Следующие бинарные отношения на $\mathbb{M}_n$ являются мономиальными упорядочениями.

1. *Лексикографическое* упорядочение (lex)
$$M \prec_{\mathrm{lex}} N \iff (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \prec_{\mathrm{lex}} (\beta_1, \ldots, \beta_n).$$
2. *Сначала по степени, затем лексикографическое* упорядочение (deglex):
$$M \prec_{\mathrm{deglex}} N \iff (\deg M, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \prec_{\mathrm{lex}} (\deg N, \beta_1, \ldots, \beta_n).$$
3. *Сначала по степени, затем обратное лексикографическое* упорядочение (degrevlex):
$$M \prec_{\mathrm{degrevlex}} N \iff (\deg M, \beta_n, \ldots, \beta_1) \prec_{\mathrm{lex}} (\deg N, \alpha_n, \ldots, \alpha_1).$$

Предложение 1. *Любое мономиальное упорядочение вполне упорядочивает множество* $\mathbb{M}$ (*т. е. любая убывающая цепочка мономов обрывается*). □

Зафиксировав мономиальное упорядочение $\prec$, можно для любого многочлена $f \in K[x_1, \ldots, x_n] \setminus \{0\}$ определить его *старший моном* $\mathrm{lm}_\prec f$, *старший терм* $\mathrm{lt}_\prec f$ и *старший коэффициент* $\mathrm{lcf}_\prec f$.

Определение 3. Множество многочленов G называется *базисом Грёбнера* идеала $I \lhd K[x_1, \ldots, x_n]$ относительно $\prec$, если $G \subset I$ и для любого $f \in I$, $f \neq 0$, найдётся $g \in G$, такой что $\mathrm{lm}_\prec g \mid \mathrm{lm}_\prec f$.

Хорошо известно, что любой идеал в $K[x_1, \ldots, x_n]$ обладает конечным базисом Грёбнера относительно любого мономиального упорядочения. Это следствие нётеровости кольца многочленов над полем (точнее, следствие обрыва возрастающих цепочек *мономиальных* идеалов).

Определение 4. Многочлен f *элементарно редуцируется* к многочлену $\tilde{f}$ относительно многочлена $g \in G$ (пишут $f \underset{g}{\to} \tilde{f}$), если $\mathrm{lm}_\prec g$ делит некоторое слагаемое cM в f, где $c \in K$, причём $\tilde{f} = f - \frac{cM}{\mathrm{lt}_\prec g} g$. Рефлексивно-транзитивное замыкание отношения $\underset{g}{\to}$ по всем $g \in G$ называется (*полной*) *редукцией* относительно G и обозначается $\xrightarrow[G]{*}$. Многочлен называется *редуцированным* относительно множества G, если он не редуцируется ни при каком $g \in G$.

Из предложения 1 следует, что любая последовательность элементарных редукций обрывается (и приводит к некоторому многочлену, называемому *нормальной формой* f относительно G при заданном *алгоритме нормальной формы*).

Среди всех базисов Грёбнера данного идеала при фиксированном упорядочении можно выделить единственный *редуцированный* базис Грёбнера. Каждый его элемент редуцирован относительно остальных, и все старшие коэффициенты равны единице. Редуцированный базис Грёбнера может быть найден с помощью специальных алгоритмов (например, алгоритма Бухбергера), реализованных в системах компьютерной алгебры. Он получается из произвольного базиса Грёбнера данного идеала применением процесса *авторедукции* с последующей нормировкой коэффициентов.

Определение 5. Пусть $g_i, g_j \in G$ — ненулевые многочлены, и пусть $L = \text{НОК}(\operatorname{lm}_\prec g_i, \operatorname{lm}_\prec g_j)$ — наименьшее общее кратное их старших мономов. *S-полиномом* многочленов g_i и g_j называется многочлен

$$S_{g_i,g_j} = \operatorname{lcf}_\prec g_j \frac{L}{\operatorname{lm}_\prec g_i} g_i - \operatorname{lcf}_\prec g_i \frac{L}{\operatorname{lm}_\prec g_j} g_j.$$

Базисы Грёбнера допускают много эквивалентных определений [4, 5, 18].

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны*:

1) *G является базисом Грёбнера идеала (G) в смысле определения* 3, *т. е. для любого $f \in (G)$, $f \neq 0$, найдётся $g \in G$, такой что* $\operatorname{lm}_\prec g \mid \operatorname{lm}_\prec f$;
2) *множество* $\{\operatorname{lm}_\prec g \mid g \in G\}$ *порождает мономиальный идеал* $(\operatorname{lm}_\prec f \mid f \in (G))$;
3) *каждый многочлен $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ имеет единственную нормальную форму относительно G*;
4) $f \in (G) \iff f \xrightarrow[G]{*} 0$;
5) *для каждого $f \in (G)$ существует G*-представление (*или* стандартное представление f относительно G) $f = \sum\limits_{i=1}^{k} p_i g_i$, *где* $g_i \in G$, $p_i \in K[x_1, \ldots, x_n]$ *и* $\operatorname{lm}_\prec p_i g_i \preccurlyeq \operatorname{lm}_\prec f$;
6) *все s-полиномы элементов множества G редуцируются относительно G к нулю.* □

2.1. Матричное задание мономиальных упорядочений

Хорошо известно [24,25], что каждое допустимое упорядочение на $\mathbb{M}_n$ можно задать матрицей $\mathcal{M} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ размера $m \times n$ (при некотором $m \geqslant 1$) с нулевым ядром над $\mathbb{Q}$ и лексикографически положительными столбцами:

$$x_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k} \prec x_0^{\beta_0} \ldots x_n^{\beta_n} \iff \mathcal{M} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \prec_{\text{lex}} \mathcal{M} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Обратно, всякая матрица $\mathcal{M}$ с такими свойствами задаёт допустимое мономиальное упорядочение. Матрицы с указанными свойствами мы будем называть *мономиальными*.

По определению единичная матрица задаёт лексикографическое упорядочение. Разумеется, одно и то же упорядочение может быть задано разными матрицами. Так, можно доказать, что лексикографическое упорядочение задаётся произвольными невырожденными верхнетреугольными матрицами.

Пример 1. Упорядочение deglex с $x_1 \prec x_2 \prec \ldots \prec x_n$ задаётся $(n \times n)$-матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & 1 & \\ & & & & 1 & & \\ & & & \ldots & & & \\ & & 1 & & & & \\ & 1 & & & & & \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Упорядочение degrevlex с $x_1 \prec x_2 \prec \ldots \prec x_n$ можно задать $(n \times n)$-матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ -1 & & & & & & \\ & -1 & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & \ldots & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & -1 & \end{pmatrix}.$$

2.2. Поведение базисов Грёбнера при композиции

Рассмотрим набор из n многочленов $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ в кольце многочленов $K[x_1, \ldots, x_n]$ над некоторым полем K. Рассмотрим *композицию с* Ψ — эндоморфизм над K кольца $K[x_1, \ldots, x_n]$, при котором переменная x_i переходит в многочлен ψ_i. Обозначим образ произвольного многочлена f при такой композиции через $f \circ \Psi$. Аналогично для произвольного множества $F \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ обозначим множество образов элементов этого множества через $F \circ \Psi$.

Пусть G — базис Грёбнера идеала (G) в $K[x_1, \ldots, x_n]$ относительно некоторого мономиального упорядочения $\prec$. Вопрос о том, при каких условиях множество $G \circ \Psi$ будет базисом Грёбнера идеала $(G \circ \Psi)$ (при том же самом или при другом упорядочении) рассматривался в работах Хуна Хонга [13, 14]. Нам понадобятся его результаты.

Будем говорить, что *вычисление базиса Грёбнера коммутирует с композицией* с многочленами данного набора Ψ, если для любого множества многочленов F из того, что G — базис Грёбнера идеала (F) относительно $\prec$, следует, что $G \circ \Psi$ — базис Грёбнера идеала $(F \circ \Psi)$ (при том же самом упорядочении $\prec$). Введём обозначение $\mathrm{lm}_{\prec} \Psi = (\mathrm{lm}_{\prec} \psi_1, \ldots, \mathrm{lm}_{\prec} \psi_n)$.

Определение 6. Композиция с многочленами множества Ψ *совместима с упорядочением* $\prec$, если для любых мономов p и q

$$p \prec q \implies p \circ \mathrm{lm}_{\prec} \Psi \prec q \circ \mathrm{lm}_{\prec} \Psi.$$

Предложение 2 ([13, лемма 4.1]). *Если композиция с* Ψ *совместима с* $\prec$, *то для каждого многочлена* $f \in \mathcal{F}[x_1, \ldots, x_n] \setminus \mathcal{F}$ *верно, что* $\mathrm{lm}_{\prec}(f \circ \Psi) = \mathrm{lm}_{\prec} f \circ \mathrm{lm}_{\prec} \Psi$. □

Предложение 3 ([13, лемма 4.2]). *Следующие условия эквивалентны*:

1) *композиция с* Ψ совместима с неделимостью[1], *т. е. для любых мономов* p *и* q
$$p \nmid q \implies p \circ \mathrm{lm}\, \Psi \nmid q \circ \mathrm{lm}\, \Psi;$$
2) *набор старших мономов многочленов множества* Ψ *образует* перестановку степеней, *т. е.* $\mathrm{lm}_{\prec} \Psi = (x_{\pi(1)}^{\lambda_1}, \ldots, x_{\pi(n)}^{\lambda_n})$ *для некоторых* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ *и перестановки* $\pi \in \mathrm{S}_n$. □

Теорема 2 (первая теорема Хуна Хонга [13]). *Вычисление базиса Грёбнера коммутирует с композицией в том и только в том случае, когда одновременно выполняются следующие условия*:

1) *композиция с* Ψ *совместима с упорядочением* $\prec$;
2) *набор* $\mathrm{lm}_{\prec} \Psi$ *является перестановкой степеней.* □

Ясно, что композиция, удовлетворяющая утверждениям теоремы, является мономорфизмом кольца $K[x_1, \ldots, x_n]$.

Эта теорема позволяет выяснить, когда базис Грёбнера коммутирует с композицией при *фиксированном* мономиальном упорядочении. Следующая теорема обобщает этот результат.

Определение 7. *Композицией мономиального упорядочения* $\prec$ *с многочленами множества* Ψ называется бинарное отношение $\prec_{\circ\Psi}$ на мономах, такое что для любых мономов p и q

$$p \prec_{\circ\Psi} q \iff p \circ \mathrm{lm}_{\prec} \Psi \prec q \circ \mathrm{lm}_{\prec} \Psi.$$

В [14] доказано, что если матрица, составленная из столбцов степеней переменных для каждого монома $\mathrm{lm}_{\prec} \psi_k$, невырожденная, то $\prec_{\circ\Psi}$ является допустимым мономиальным упорядочением. В частности, это будет так, если $\mathrm{lm}_{\prec} \Psi$ образует перестановку степеней.

Теорема 3 (вторая теорема Хуна Хонга [14]). *Пусть* $\mathrm{lm}_{\prec} \Psi$ *образует перестановку степеней. Тогда для любого множества многочленов* F *из того, что* G *является базисом Грёбнера* (F) *относительно порядка* $\prec_{\circ\Psi}$, *следует, что* $G \circ F$ — *базис Грёбнера* $(F \circ \Psi)$ *относительно* $\prec$. □

[1] Заметим, что *совместимость с делимостью* выполняется для любого набора Ψ.

Отметим ещё один интересный результат, связанный с поведением *редуцированных* базисов Грёбнера при композиции [12].

Теорема 4 (аналог первой теоремы Хуна Хонга для редуцированных базисов [12, теорема 3.1]). *Следующие условия эквивалентны*:

1) *вычисление редуцированного базиса коммутирует с композицией* (*в том смысле, что для любого редуцированного базиса Грёбнера G идеала (F) относительно $\prec$ множество $G\circ\Psi$ — редуцированный базис Грёбнера идеала $(F\circ\Psi)$ относительно того же $\prec$*);
2) *одновременно выполняются два условия*:
   а) *композиция с Ψ совместима с упорядочением $\prec$*;
   б) *каждый многочлен ψ_i из Ψ зависит ровно от одной переменной*;
   в) $\operatorname{lcf}_\prec \psi_i = 1$. □

Из свойства 2б), в частности, вытекает, что $\operatorname{lm}_\prec \Psi$ — перестановка степеней. Заметим [12, теорема 5.2], что свойства 2б), 2в) являются достаточными для того, чтобы множество $G\circ\Psi$ было редуцированным базисом Грёбнера идеала $(F\circ\Psi)$ относительно $\prec_{\circ\Psi}$ (аналог второй теоремы Хуна Хонга).

2.3. Кольца дифференциальных многочленов

Мы приведём необходимые нам определения из дифференциальной алгебры, которые можно найти в [17, 23].

Обыкновенным дифференциальным кольцом $\mathcal{R}$ называется коммутативное кольцо с единицей, на котором задано дифференцирование δ, т. е. линейное отображение $\delta\colon \mathcal{R}\to\mathcal{R}$, удовлетворяющее правилу Лейбница $\delta(ab)=\delta(a)b+a\delta(b)$. *Элементарный дифференциальный оператор* на $\mathcal{R}$ может быть записан в виде $\theta=\delta^\alpha$, $\alpha\geqslant 0$. Через Θ будем обозначать множество всех элементарных дифференциальных операторов.

Идеал $I\subset\mathcal{R}$ называется *дифференциальным*, если $\delta I\subset I$. Пересечение любого набора дифференциальных идеалов — снова дифференциальный идеал. Если F — произвольное подмножество в $\mathcal{R}$, то через $[F]$ обозначается наименьший дифференциальный идеал в $\mathcal{R}$, содержащий F. Он равен пересечению всех дифференциальных идеалов, содержащих F.

Рассмотрим дифференциальное поле констант $\mathcal{F}$ нулевой характеристики. Пусть y — *независимая дифференциальная переменная*. Кольцо многочленов

$$\mathcal{F}\{y\}:=\mathcal{F}[\Theta y]=\mathcal{F}[y,y_1,y_2,\ldots]$$

от бесконечного числа *дифференциальных переменных* вида $\delta^k y$ называется *кольцом дифференциальных многочленов* над $\mathcal{F}$. Здесь через y_k обозначена производная $\delta^k y$. Построенное кольцо является обыкновенным дифференциальным кольцом. На переменных дифференцирование определено стандартным образом: $\delta y_k=y_{k+1}$. Введём обозначение $\mathcal{R}_i=\mathcal{F}[y_0,y_1,\ldots,y_i]$.

Произвольный *дифференциальный моном* $M \in \mathcal{R}\{y\}$ можно записать в виде $M = \prod\limits_{i=0}^{n} y_i^{\alpha_i}$, где $\alpha_i \geqslant 0$. *Вес* монома M определяется как $\operatorname{wt} M := \sum\limits_{i=1}^{n} i\alpha_i$. Каждый дифференциальный многочлен являются конечной суммой *дифференциальных термов*, т. е. выражений вида $c \cdot M$, где $c \in \mathcal{F}$, $c \neq 0$, а M — дифференциальный моном.

Ниже мы будем часто опускать прилагательное «дифференциальный», говоря просто о мономах и многочленах.

3. Дифференциальные стандартные базисы

Стандартные базисы дифференциальных идеалов являются аналогами базисов Грёбнера в обычных полиномиальных идеалах. В дифференциальной алгебре первые обобщения понятия базиса Грёбнера полиномиального идеала появились в конце 1980-х годов независимо друг от друга в работах Дж. Карра-Ферро [9, 10] («дифференциальные базисы Грёбнера») и Ф. Оливье [21, 22] («стандартные базисы дифференциальных идеалов»). В начале 1990-х появилась работа Э. Мансфилд [20], в который дифференциальным базисом Грёбнера был назван совсем другой объект. Мансфилд положила в основу определения понятие псевдоредукции, а не дифференциальной редукции. Её базисы можно рассматривать как обобщение понятия характеристического множества. В отличие от конструкции Мансфилд, базисы Оливье и Карра-Ферро позволяют решить задачу принадлежности дифференциальному идеалу. Чтобы избежать путаницы, базисы, введённые Оливье и Карра-Ферро, мы будем называть «дифференциальными стандартными базисами».

3.1. Допустимые упорядочения на дифференциальных мономах

Пусть $\mathbb{M}$ — множество всех дифференциальных мономов кольца $\mathcal{F}\{y\}$. *Допустимым упорядочением* называется линейный порядок $\prec$ на $\mathbb{M}$, удовлетворяющий следующим свойствам:

1) $M \prec N \implies MP \prec NP$ для всех $M, N, P \in \mathbb{M}$;
2) $1 \preccurlyeq P$ для всех $P \in \mathbb{M}$;
3) $y_i \prec y_j \iff i < j$.

Автором доказано [26], что эти свойства гарантируют полную упорядоченность $\mathbb{M}$.

Будем обозначать через $\mathcal{R}_k$ кольцо многочленов $\mathcal{F}[y, y_1, \ldots, y_k]$. Через $\mathbb{M}_k$ будем теперь обозначать множество всех мономов от переменных $y = y_0, y_1, \ldots, y_k$, а через $\prec_k$ — ограничение упорядочения $\prec$ на $\mathbb{M}_k$. Упорядочения $\prec_k$ *согласованны* в том смысле, что $\prec_k$ является ограничением $\prec_{k+1}$ на $\mathbb{M}_k$. В [28] было показано, что для таких согласованных мономиальных упорядочений $\prec_k$ их матрицы можно выбрать тоже в некотором смысле согласованно.

Определение 8. Назовём набор мономиальных матриц $\{\mathcal{M}_k\}$ *согласованным*, если матрица $\mathcal{M}_{k-1}$ получается из $\mathcal{M}_k$ удалением правого столбца и затем откидыванием нулевой строки, если такая найдётся.

Предложение 4 ([28]). *Если мономиальные матрицы $\mathcal{M}_{k-1}$ и $\mathcal{M}_k$ согласованны, то упорядочения $\prec_{k-1}$ и $\prec_k$ тоже согласованны.* □

Теорема 5 ([28]). *Согласованный набор допустимых упорядочений, таких что $y_k \prec_{k+1} y_{k+1}$, можно задать согласованным набором матриц.* □

Следствие 1 ([28]). *Всякое допустимое упорядочение на дифференциальных мономах задаётся согласованным набором мономиальных матриц или, что эквивалентно, «бесконечной» (вообще говоря, вверх, вниз и вправо) мономиальной матрицей.* □

Замечание. Под «бесконечной мономиальной матрицей» мы понимаем упорядоченную счётную систему бесконечных строк с действительными элементами, такую что для любого $k \geqslant 0$ в подматрице из первых $k+1$ столбцов лишь конечный набор строк будет ненулевым, причём этот набор будет образовывать мономиальную матрицу упорядочения $\prec_k$. Тогда, обозначив этот набор через $\mathcal{M}_k$, мы получим согласованную систему $\{\mathcal{M}_k\}$. Подчеркнём, что порядковый тип системы строк бесконечной мономиальной матрицы может отличаться от порядкового типа $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$. Ясно, что, наоборот, любой согласованный набор мономиальных матриц, так же как и соответствующая «бесконечная» матрица, задаёт некоторое допустимое упорядочение.

«Бесконечная» матрица из следствия 1 определена неоднозначно, однако в [28] предложено определение единственной *канонической* матрицы допустимого упорядочения.

Пример 3. Лексикографическое упорядочение lex задаётся бесконечной вверх и вправо матрицей

$$\begin{pmatrix} \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ & & \dots & & & 1 & \dots \\ & & \dots & & 1 & & \dots \\ & & \dots & 1 & & & \dots \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ & 1 & \dots & & & & \dots \\ 1 & & \dots & & & & \dots \end{pmatrix}$$

или согласованным набором мономиальных матриц

$$(1)\,,\ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ 1 & \mathbf{0} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \dots$$

(здесь и далее жирным шрифтом обозначены добавленные на очередном шаге в матрицы строка и столбец).

Пример 4. Упорядочение deglex (сначала по степени, а затем лексикографическое) задаётся канонической матрицей с бесконечным «провалом» после первой строки

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots \\ \hdotsfor{8} \\ & & & \dots & & & 1 & \dots \\ & & & \dots & & 1 & & \dots \\ & & & \dots & 1 & & & \dots \\ \hdotsfor{8} \\ & & 1 & \dots & & & & \dots \\ & 1 & & \dots & & & & \dots \end{pmatrix}$$

или набором

$$(1)\,, \quad \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \dots .$$

Если заменить первую строку бесконечной матрицы строкой

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \end{pmatrix},$$

то получится матрица упорядочения wtlex (сначала по весу, затем лексикографическое).

Пример 5. Упорядочение degrevlex (сначала по степени, затем обратное лексикографическое) удобно задать бесконечной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots \\ -1 & & & \dots & & & & \dots \\ & -1 & & \dots & & & & \dots \\ & & -1 & \dots & & & & \dots \\ \hdotsfor{8} \\ & & & \dots & -1 & & & \dots \\ & & & \dots & & -1 & & \dots \\ & & & \dots & & & -1 & \dots \\ \hdotsfor{8} \end{pmatrix}.$$

В этой бесконечной матрице (в отличие от упорядочения degrevlex) нельзя заменять первую строку на строку

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \end{pmatrix},$$

так как тогда первый столбец стал бы нулевым и полученная матрица не задавала бы допустимого упорядочения. С другой стороны, первую строку можно заменить строкой

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \end{pmatrix},$$

что даст упорядочение, обозначаемое (wt+deg)revlex. Заметим, что, рассматривая также первые строки вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \end{pmatrix},$$

можно построить матрицы, задающие новые упорядочения degwtrevlex и wtdegrevlex.

3.2. Специальные классы дифференциальных упорядочений

Определение 9 ([19]). Пусть $p > 0$. Моном $M = \prod\limits_{i=0}^{k} y_i^{\alpha_i}$ называется *α_p-мономом*, если для всех i от 1 до k выполнено $\alpha_{i-1} + \alpha_i < p$. Все остальные мономы называются *β_p-мономами*.

Нетрудно убедиться, что для всякого $k \geqslant 0$ многочлен $\delta^k y^p$ содержит в качестве слагаемого только один β_p-моном. Если $k = ap + b$, где $0 \leqslant b < p$, то этот β_p-моном имеет вид $y_a^{p-b} y_{a+1}^b$. Разумеется, при $b = 0$ получаются мономы y_a^p.

Теорема 6 ([19; 23, с. 17]). *Для любого монома P верно равенство*

$$P \equiv \sum c_i M_i \mod [y^p],$$

где M_i — α_p-мономы, а c_i — однозначно определённые рациональные коэффициенты. □

Теорема 7 ([19]). *Никакая нетривиальная линейная комбинация α_p-мономов не принадлежит $[y^p]$.* □

Определение 10 ([28]). Многочлен f называется *квазилинейным* относительно $\prec$, если $f \in \mathcal{F}$ или $\deg \operatorname{lm}_\prec f = 1$.

Допустимое упорядочение $\prec$ называется:

- *δ-лексикографическим*, если $\operatorname{lm}_\prec \delta M = \operatorname{lm}_{\mathrm{lex}} \delta M$ для всех $M \neq 1$;
- *β-упорядочением*, если $\operatorname{lm}_\prec \delta^k y^n = \operatorname{lm}_{\mathrm{degrevlex}} \delta^k y^n$ для всех $k, n \geqslant 1$ (т. е. старший моном $\delta^k y^n$ является β_n-мономом);
- *согласованным с квазилинейностью*, если производная любого $\prec$-квазилинейного многочлена сама является $\prec$-квазилинейной.

Пример 6 ([26, 28]).

1. Упорядочения lex, deglex и wtlex являются δ-лексикографическими упорядочениями.
2. Упорядочения degrevlex, (wt+deg)revlex, degwtrevlex и wtdegrevlex являются β-упорядочениями.
3. Все перечисленные упорядочения согласованны с квазилинейностью.

3.3. Дифференциальные стандартные базисы по Оливье и Карра-Ферро

Для простоты мы приведём определение дифференциального стандартного базиса для кольца $\mathcal{F}\{y\}$ с одним дифференцированием δ (в случае кольца с частными производными и несколькими дифференциальными переменными определения совершенно аналогичны).

Пусть зафиксировано произвольное[1] допустимое упорядочение $\prec$. Пусть $S \subset \mathcal{F}\{y\}$. Введём обозначение $S_i = (\Theta S) \cap \mathcal{R}_i$.

Определение 11. Множество $S \subset I$ называется *дифференциальным стандартным базисом* идеала I относительно $\prec$, если ΘS является (бесконечным) алгебраическим базисом Грёбнера идеала I, рассматриваемого в кольце $\mathcal{F}[y, y_1, y_2, \ldots]$.

Дифференциальные стандартные базисы в $\mathcal{F}\{y\}$ можно рассматривать как удобную параметризацию бесконечных базисов Грёбнера (алгебраических стандартных базисов [5]) в недифференциальном кольце $\mathcal{F}[\Theta y]$. Эта параметризация обеспечивается дифференциальными операторами и является совместимой со структурой дифференциального кольца $\mathcal{F}\{y\}$. Таким образом, мы можем работать с одним элементом f вместо целого семейства Θf.

Как и в случае базисов Грёбнера, дифференциальные стандартные базисы допускают несколько эквивалентных определений. Они основываются на понятии *дифференциальной редукции* (или просто редукции, если ясно, о чём идёт речь).

Многочлен f *элементарно* (*дифференциально*) *редуцируется* относительно многочлена s, если существует $k \geqslant 0$, такое что $M = \operatorname{lm} \delta^k s$ делит некоторый моном Q в f. Результатом редукции является многочлен

$$\tilde{f} = f - \frac{\operatorname{cf}(f, Q)}{\operatorname{lcf} \delta^k s} \frac{Q}{M} \delta^k s,$$

где $\operatorname{cf}(f, Q)$ — коэффициент в многочлене f перед Q. Отношение редукции получается из элементарной редукции рефлексивно-транзитивным замыканием. Это отношение мы будем записывать так: $f \xrightarrow[s]{\delta} \tilde{f}$. Каждая цепочка элементарных редукций всегда обрывается, так как множество всех дифференциальных мономов является вполне упорядоченным [26].

Предложение 5 ([9, 22]). *Следующие условия эквивалентны*:

1) *S является дифференциальным стандартным базисом идеала $[S]$ в смысле определения* 11, *т. е. для любого $f \in [S]$, $f \neq 0$, найдутся $s \in S$, $\theta \in \Theta$, такие что $\operatorname{lm}_\prec \theta s \mid \operatorname{lm}_\prec f$*;
2) *$f \xrightarrow[S]{\delta} 0$ для любого $f \in [S]$*;
3) *для любого $f \in [S]$ найдётся $j \geqslant 0$, такое что $f \xrightarrow[S_j]{} 0$*;

[1] Заметим, что в работах Оливье и Карра-Ферро на упорядочение $\prec$ накладывались дополнительные свойства, связанные с дифференцированием кольца.

4) *множество* $\{\mathrm{lm}_\prec \theta s \mid s \in S,\ \theta \in \Theta\}$ *порождает (вообще говоря, недифференциальный) мономиальный идеал* $(\mathrm{lm}_\prec f \mid f \in [S])$;
5) $f \in [S]$ *тогда и только тогда, когда* $f \xrightarrow[s]{\delta} 0$;
6) *для каждого* $f \in [S]$ *существует* S-представление $f = \sum\limits_{i=1}^{k} p_i s_i$, *где* $s_i \in \Theta S$, $p_i \in \mathcal{F}\{y\}$ *и* $\mathrm{lm}_\prec p_i s_i \preccurlyeq \mathrm{lm}_\prec f$;
7) *все* s*-полиномы элементов множества* ΘS *дифференциально редуцируются относительно* S *к нулю.* □

Через $\mathrm{DSB}_\prec(S, [F])$ будем для краткости обозначать условие «S является дифференциальным стандартным базисом идеала $[F]$ относительно $\prec$», а через $\mathrm{DSB}_\prec(S)$ — условие $\mathrm{DSB}_\prec(S, [S])$.

Пример 7 ([21, с. 85]). Идеал $[y^2 + y + 1]$ обладает дифференциальным стандартным базисом относительно $\prec_{\mathrm{lex}}$ из двух элементов: $\{y^2 + y + 1,\ y'\}$.

Определение 12. Стандартный базис S идеала I называется *минимальным*, если никакое собственное подмножество S не является стандартным базисом I. Базис называется *редуцированным*, если каждый элемент $s \in S$ дифференциально редуцирован относительно $S \setminus \{s\}$.

Оливье [21, 22] предложил процесс пополнения, который, в случае если он останавливается, возвращает минимальный стандартный базис. Этот процесс существенно использует критерии отбора нужных s-полиномов, аналогичные критериям Бухбергера [4]. Однако даже если стандартный базис конечен, процесс Оливье может не остановиться.

Если стандартный базис идеала известен и конечен, то он позволяет эффективно решить задачу принадлежности произвольного многочлена этому идеалу. Так, например, обстоит дело с идеалами, порождёнными наборами линейных многочленов. В общем же случае стандартные базисы бесконечны. Тем не менее иногда (например, в случае радикального идеала [15, 16] или если идеал порождён однородными по весу многочленами) проверить принадлежность *данного* многочлена идеалу всё-таки можно, вычислив лишь несколько первых элементов бесконечного базиса (до заданного веса). По этому поводу см. [11,21].

Не так давно автор получил красивые примеры конечных стандартных базисов, а также некоторые критерии их конечности [2,28], обобщающие результаты Карра-Ферро [10], что дало новый импульс к развитию этой темы.

Из [19] следует теорема 8.

Теорема 8 ([2]). *Для любого* $n > 1$ *идеал* $[y^n]$, $n > 1$, *обладает конечным дифференциальным стандартным базисом* $\{y^n\}$ *при любом* β*-упорядочении и не обладает конечным стандартным базисом ни при каком* δ*-лексикографическом упорядочении.* □

Теорема 9 ([28]). *Пусть* $\prec$ *— согласованное с квазилинейностью упорядочение, а* $[F]$ *содержит* $\prec$*-квазилинейный многочлен. Тогда* $[F]$ *обладает конечным дифференциальным стандартным базисом относительно* $\prec$. □

Теорема 10 ([28]). *Пусть $\prec$ — δ-лексикографическое упорядочение, а $[F]$ — собственный дифференциальный идеал в $\mathcal{F}\{y\}$. Идеал $[F]$ обладает конечным дифференциальным стандартным базисом относительно $\prec$, если и только если в $[F]$ содержится $\prec$-квазилинейный многочлен.* □

Теорема 11 ([28]). *Если идеал обладает конечным дифференциальным стандартным базисом при каком-то δ-лексикографическом упорядочении, то он обладает им и при чистом лексикографическом упорядочении.* □

На теореме 10 основан предложенный автором процесс пополнения [28], возвращающий (при δ-лексикографическом упорядочении) редуцированный дифференциальный стандартный базис идеала, если он конечен. Он называется «улучшенным процессом Оливье». В отличие от оригинального процесса Оливье, улучшенный процесс гарантированно останавливается, если идеал обладает конечным стандартным базисом.

3.4. Задача принадлежности для идеалов, порождённых композицией дифференциальных многочленов

В [3] автор совместно с М. В. Кондратьевой получил несколько результатов, касающихся идеалов, порождённых композицией многочленов. Они основываются на так называемых *подготовительных многочленах* Ритта и Колчина [17,23]. Имеется алгоритм, который для каждого дифференциального многочлена $p \in \mathcal{F}\{y\}$ строит подготовительный многочлен $p_g \in \mathcal{F}\{x\}\{y\}$ относительно другого многочлена $g \in \mathcal{F}\{x\}$. Ритт доказал [23, с. 64], что для любых p и g многочлен p_g существует и единствен.

Теорема 12 ([3, следствие 3]). *Пусть многочлен g является лексикографически квазилинейным. Тогда $p \in [f \circ g]$ тогда и только тогда, когда $p_g \in [f]$.* □

Так, если g — лексикографически квазилинейный многочлен и $n > 0$, данная теорема сводит проверку включения $p \in [g^n]$ к проверке того, что $p_g \in [y^n]$. Это, в свою очередь, может быть сделано с помощью редукции относительно дифференциального стандартного базиса $\{y^n\}$ идеала $[y^n]$ при любом β-упорядочении (теорема 8). В данной работе мы явно построим упорядочение, при котором уже идеал $[g^n]$ будет обладать конечным дифференциальным стандартным базисом (предложение 10).

4. Основные результаты

4.1. Однородные упорядочения

Определение 13. Назовём упорядочение $\prec$ *полностью однородным*[1], если для любых мономов $P, Q \in \mathbb{M}$, таких что $P \prec Q$, следует, что $P \circ y_1 \prec Q \circ y_1$.

[1]От просто *однородных* упорядочений требуется, чтобы неравенство выполнялось для мономов P и Q с одинаковыми степенью и весом.

Замечание. Ясно, что для полностью однородных упорядочений выполняется более сильное условие:

$$P \prec Q \implies P \circ y_i \prec Q \circ y_i$$

для любого $i \geqslant 0$.

Пример 8. Упорядочения lex, deglex и degrevlex являются полностью однородными.

Пример 9. Упорядочение wtlex не является полностью однородным. В самом деле, $y^3 \prec_{\mathrm{wtlex}} y_1$, но $y^3 \circ y_1 = y_1^3 \succ_{\mathrm{wtlex}} y_2 = y_1 \circ y_1$.

Теорема 13. *Полностью однородное упорядочение согласовано с квазилинейностью.*

Доказательство. Пусть $\prec$ — полностью однородное упорядочение и $y_m \succ M$. Запишем моном M в виде

$$M = \prod_{k=1}^{d} y_{i_k},$$

где индексы i_k могут совпадать. Тогда

$$M \circ y_1 = \prod_{k=1}^{d} y_{i_k+1},$$

а каждый моном в δM имеет вид

$$\left(y_{i_j+1} \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant d \\ k \neq j}} y_{i_k} \right)$$

для некоторого j. Так как $\prec$ полностью однородно, получаем, что

$$y_{m+1} \succ M \circ y_1 = y_{i_j+1} \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant d \\ k \neq j}} y_{i_k+1} \succ y_{i_j+1} \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant d \\ k \neq j}} y_{i_k}$$

для любого j, $1 \leqslant j \leqslant d$. В частности, $y_{m+1} \succ \mathrm{lm}_{\prec} \delta M$. $\square$

Пример 10. Пусть $\prec$ — допустимое упорядочение, матрица которого имеет в качестве первой строки геометрическую прогрессию

$$\begin{pmatrix} 1 & c & c^2 & \ldots & c^s & \ldots \end{pmatrix},$$

где $c \geqslant 1$, а мономы, эквивалентные относительно этой весовой строки, сравниваются некоторым полностью однородным упорядочением (например, лексикографически). Тогда $\prec$ является полностью однородным.

Доказательство. Пусть

$$P = \prod_{i=0}^{k} y_i^{\alpha_i}, \quad Q = \prod_{i=0}^{k} y_i^{\beta_i}.$$

Тогда

$$P \prec Q \implies \sum_{i=0}^{k} c^i(\alpha_i - \beta_i) \leqslant 0 \iff$$
$$\iff c\sum_{i=0}^{k} c^i(\alpha_i - \beta_i) \leqslant 0 \iff \sum_{i=0}^{k} c^{i+1}(\alpha_i - \beta_i) \leqslant 0.$$

Мономы $P\circ y_1$ и $Q\circ y_1$ эквивалентны относительно первой строки матрицы тогда и только тогда, когда эквивалентны P и Q. Поэтому на самом деле последнее неравенство строгое и $P \circ y_1 \prec Q \circ y_1$. $\square$

При $c = 1$ таким образом получается упорядочение deglex. Следующее предложение обращает результат этого примера.

Предложение 6. *Если упорядочение $\prec$ является полностью однородным, то либо $\prec$ — лексикографическое упорядочение, либо его можно задать матрицей, имеющей в качестве первой строки геометрическую прогрессию*

$$\begin{pmatrix}1 & c & c^2 & \ldots & c^s & \ldots\end{pmatrix},$$

где $c \geqslant 1$.

Доказательство. Пусть $n > 1$ и $\mathcal{M}_n$ — матрица упорядочения $\prec_n$ из согласованного набора. Пусть

$$\begin{pmatrix}a_0 & a_1 & \ldots & a_n\end{pmatrix} -$$

её первая строка. Предположим, что при $1 \leqslant i < n$ имеем $a_i > 0$ и $a_{i+1} > 0$. Рассмотрим при $j \in \{i, i+1\}$ множества

$$Q_j = \left\{ \frac{n}{m} \;\middle|\; 1 \neq y_{j-1}^m \prec y_j^n \right\} \subset \mathbb{Q}.$$

Так как

$$y_{j-1}^m \prec y_j^n \implies ma_{j-1} \leqslant na_j \implies \frac{n}{m} \geqslant \frac{a_{j-1}}{a_j} \quad \text{при} \quad a_j > 0,\ m > 0,$$

то $\inf Q_j \geqslant \frac{a_{j-1}}{a_j}$. С другой стороны, из

$$\frac{n'}{m'} > \frac{a_{j-1}}{a_j} \implies \frac{n'}{m'} \in Q_j$$

следует, что $\inf Q_j = \frac{a_{j-1}}{a_j}$. В силу полной однородности упорядочения $Q_i = Q_{i+1}$. Поэтому

$$\frac{a_{i-1}}{a_i} = \inf Q_i = \inf Q_{i+1} = \frac{a_i}{a_{i+1}}.$$

Вернёмся теперь к доказательству утверждения. Предположим, что $a_0 = 0$. Пусть $i \geqslant 1$ — номер первого ненулевого элемента первой строки матрицы $\mathcal{M}_n$. Если $i < n$, то $a_{i-1} = 0$, $a_i > 0$ и $a_{i+1} > 0$, т. е. $0 = \frac{a_{i-1}}{a_i} \neq \frac{a_i}{a_{i+1}}$ — противоречие. Значит, при каждом $n > 1$ верно, что в первой строке матрицы $\mathcal{M}_n$ согласованного набора первый ненулевой элемент — это a_n. Поэтому $y_n \succ y_i^k$ для всех

$n > 1$, $i < n$, $k \geqslant 0$. В частности, $y_2 \succ y_1^k$. Ввиду полной однородности $\prec$ имеем $y_1 \succ y_0^k$. Объединяя это со сказанным выше, получаем, что $y_n \succ y_i^k$ при всех $i < n$, $k \geqslant 0$ для любого $n \geqslant 0$. Тогда $\prec = \prec_{\mathrm{lex}}$.

Осталось рассмотреть случай $a_0 \neq 0$. Получаем, что $0 < a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Из доказанного выше следует, что первая строка матрицы $\mathcal{M}_n$ образует ненулевую геометрическую прогрессию. При этом понятно, что можно считать $a_0 = 1$. Новые строки добавляются в матрицы согласованного набора не в начало (иначе они бы начинались с нулей), поэтому у бесконечной матрицы упорядочения $\prec$ будет первая строка вида

$$\begin{pmatrix} 1 & c & c^2 & \ldots & c^s & \ldots \end{pmatrix},$$

где $c = a_1 \geqslant a_0 = 1$. □

4.2. Связь дифференциальных стандартных базисов с базисами Грёбнера

Определение 14. Пусть заданы множества $S_i \subset \mathcal{R}_i$, $i \geqslant 0$, причём $S_i \subset S_{i+1}$, а $\prec_i$ — *согласованные* мономиальные упорядочения на $\mathbb{M}_i$ (в том смысле, что ограничение $\prec_{i+k}$ на $\mathbb{M}_i$ совпадает с $\prec_i$ для любого $k > 0$). Будем говорить, что $\{G_k\}_{k=0}^{\infty}$ — *согласованный с множествами S_k набор базисов Грёбнера*, если для каждого $i \geqslant 0$ G_i — базис Грёбнера идеала $(S_i) \triangleleft \mathcal{R}_i$ относительно $\prec_i$, такой что

1) $S_i \subset G_i$;
2) для любого $h \in G_i \setminus S_i$ выполнено $\mathrm{lm}_{\prec_i} h \notin (\mathrm{lm}_{\prec_i} S_i)$;
3) если $\mathrm{lm}_{\prec_i} h_i = \mathrm{lm}_{\prec_j} h_j$, где $h_i \in G_i \setminus S_i$, $h_j \in G_j \setminus S_j$ при некоторых $i, j \geqslant 0$, то $h_i = h_j$.

Предложение 7. *Согласованный набор базисов Грёбнера $\{G_k\}_{k=0}^{\infty}$ существует.*

Доказательство. Ясно, что каждое множество многочленов P можно дополнить до базиса Грёбнера G идеала (P) в соответствующем кольце *минимальным образом*, т. е. так, чтобы старший моном каждого многочлена $h \in G \setminus P$ был редуцирован относительно $G \setminus \{h\}$.

Будем строить G_i по индукции. Дополним минимальным образом множество S_0 до базиса Грёбнера G_0 в $\mathcal{R}_0 = \mathcal{F}[y]$. Пусть базисы G_i, $0 \leqslant i \leqslant k$, уже построены и удовлетворяют требованиям согласованности. Рассмотрим множество

$$H = \left\{ h \in \bigcup_{i=0}^{k} (G_i \setminus S_i) \;\middle|\; \mathrm{lm}_{\prec} h \notin (\mathrm{lm}_{\prec} S_{k+1}) \right\}.$$

Понятно, что $H \subset (G_k) = (S_k) \subset (S_{k+1})$ и все многочлены в H имеют различные старшие мономы. Возьмём теперь за G_{k+1} минимальное дополнение множества $S_{k+1} \cup H$ до базиса Грёбнера идеала (S_{k+1}) в $\mathcal{R}_{k+1}$. □

Теорема 14. *Пусть* $S \subset \mathcal{F}\{y\}$ — *непустое множество многочленов и* $S_i = (\Theta S) \cap \mathcal{R}_i$. *Пусть* $\{G_k\}_{k=0}^{\infty}$ — *согласованный с* S_k *набор базисов Грёбнера идеалов* $(S_k) \lhd \mathcal{R}_k$ *относительно* $\prec_k$. *Множество* S *является дифференциальным стандартным базисом идеала* $[S]$ *относительно* $\prec$ *тогда и только тогда, когда* $S_i = \bigcap\limits_{k \geqslant i} G_k$.

Доказательство. Необходимость. Пусть S — дифференциальный стандартный базис идеала $[S]$. Ясно, что $S_i \subset \bigcap\limits_{k \geqslant i} G_k \subset [S]$ по построению базисов Грёбнера G_k. Пусть $f \in \bigcap\limits_{k \geqslant i} G_k$. Так как $f \in [S]$, получаем, что $f \xrightarrow[S]{\delta} 0$. Значит, найдётся $j \geqslant i$, такое что $f \xrightarrow[S_j]{} 0$. В частности, $\mathrm{lm}_{\prec_j} f \in (\mathrm{lm}_{\prec_j} S_j)$. Из того, что $f \in G_j$, следует, что $f \in S_j$ по построению G_j. Но $f \in G_i \subset \mathcal{R}_i$, т. е. $f \in S_j \cap \mathcal{R}_i = S_i$, что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть $f \in [S]$. Найдётся такое $i \geqslant 0$, что для всех $j \geqslant i$ справедливо $f \in (S_j)$. Так как G_j — базис Грёбнера идеала (S_j), то для f существует G_j-представление вида

$$f = \sum_{\alpha=1}^{A} p_\alpha s_\alpha + \sum_{\beta=1}^{B} q_\beta h_\beta, \tag{1}$$

где $p_\alpha, q_\beta \in \mathcal{R}_j$, $s_\alpha \in S_j$, а h_β — различные многочлены из $G_j \setminus S_j$, причём $\mathrm{lm}_{\prec_j} p_\alpha s_\alpha \preccurlyeq \mathrm{lm}_{\prec_j} f$ и $\mathrm{lm}_{\prec_j} q_\beta h_\beta \preccurlyeq \mathrm{lm}_{\prec_j} f$. Предположим, что ни при каком $j \geqslant i$ нет G_j-представления многочлена f с $B = 0$. Рассмотрим тогда при всех $j \geqslant i$ G_j-представления с минимально возможным мономом $M = \max\limits_{1 \leqslant \beta \leqslant B} \mathrm{lm}_{\prec_j} q_\beta h_\beta$, а среди них выберем G_j-представление с минимальным мономом $Q = \mathrm{lm}_{\prec} h$, где $M = \mathrm{lm}_{\prec_j} qh$. Это можно сделать, так как множество всех мономов является вполне упорядоченным относительно $\prec_j$. Заметим, что при зафиксированных j и M такой многочлен h определён однозначно.

Так как $h \in (G_j) \subset [S]$, то найдётся индекс $j' \geqslant j$, такой что $h \in (S_{j'})$. По предположению $S_{j'} = \bigcap\limits_{k \geqslant j'} G_k$. Понятно, что $h \notin S_{j'}$ (иначе было бы $h \in S_{j'} \cap \mathcal{R}_j = S_j$). Значит, для некоторого $l \geqslant j'$ имеем $h \notin G_l$. Рассмотрим G_l-представление многочлена h:

$$h = \sum_{\alpha'=1}^{C} p_{\alpha'} s_{\alpha'} + \sum_{\beta'=1}^{D} q_{\beta'} h_{\beta'}. \tag{2}$$

Заметим, что если $D > 0$, то $\mathrm{lm}_{\prec_l}(q_{\beta'} h_{\beta'}) \preccurlyeq_l h$, но $\mathrm{lm}_{\prec_l} h_{\beta'} \prec_l \mathrm{lm}_{\prec_l} h$, где $1 \leqslant \beta' \leqslant D$, потому что в противном случае имело бы место равенство $h = h_{\beta'} \in G_l$. Подставляя выражения вида (2) для h в (1), получаем G_l-представление многочлена f, в котором либо $B = 0$, либо моном $\max\limits_{1 \leqslant \beta \leqslant B} \mathrm{lm}_{\prec_j} q_\beta h_\beta$ меньше M, либо $\mathrm{lm}_{\prec} h$ меньше Q, где $M = \mathrm{lm}_{\prec_j} qh$. В любом случае это противоречит выбору G_j-представления многочлена f. Итак, для каждого $f \in [S]$ имеется G_j-представление (1) с $B = 0$ (затрагивающее только многочлены из ΘS), а значит, S — дифференциальный стандартный базис $[S]$ относительно $\prec$. $\square$

4.3. Поведение дифференциальных стандартных базисов при композиции

Определение 15. (*Дифференциальной*) *композицией* с дифференциальным многочленом ψ называется дифференциальный эндоморфизм $\mathcal{F}\{y\} \to \mathcal{F}\{y\}$, при котором $y \mapsto \psi$. Образ многочлена $f \in \mathcal{F}\{y\}$ при дифференциальной композиции будем обозначать через $f \circ \psi$.

Кроме того, мы будем рассматривать недифференциальные композиции в кольце $\mathcal{F}\{y\} \simeq \mathcal{F}[y, y_1, y_2, \ldots]$ с бесконечным набором многочленов $\Psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots)$.

Лемма 1. *Пусть U и V — непустые непересекающиеся множества независимых переменных, $\prec_{U,V}$ — мономиальное упорядочение на мономах от переменных из $U \cup V$ и $\prec_U$ — ограничение $\prec_{U,V}$ на мономы от переменных из U. Следующие условия эквивалентны*:

1) *G — базис Грёбнера идеала $I \lhd \mathcal{F}[U]$ относительно $\prec_U$;*
2) *$G \subset \mathcal{F}[U]$ и G — базис Грёбнера идеала $I \lhd \mathcal{F}[U, V]$ относительно $\prec_{U,V}$.*

Доказательство. Утверждение очевидно, так как добавление новых неизвестных не влияет на редуцируемость s-полиномов элементов из G относительно G к нулю. $\square$

Лемма 2. *Пусть для каждого $i \geqslant 0$ заданы множества $S_i \subset \mathcal{R}_i$, $S_i \subset S_{i+1}$, а $\prec_i$ — согласованные мономиальные упорядочения на $\mathbb{M}_i$. Пусть, далее, $\psi_i \in \mathcal{R}_i$, $\Psi_i = (\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_i)$, причём*

1) *композиция с Ψ_i совместима с упорядочением $\prec_i$;*
2) *$\mathrm{lm}_\prec \psi_i = y_i^{\lambda_i}$ для некоторых $\lambda_i > 0$.*

Тогда из того, что $\{G_k\}_{k=0}^{\infty}$ — согласованные с множествами S_k базисы Грёбнера относительно $\prec_k$, следует, что $\{G_k \circ \Psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ — согласованные с множествами $S_k \circ \Psi_k$ базисы Грёбнера относительно $\prec_k$.

Доказательство. Ясно, что при каждом $k \geqslant 0$ мономы $\mathrm{lm}_{\prec_k} \Psi_k$ образуют перестановку степеней. По теореме 2, если G_k — базис Грёбнера (S_k) при $\prec_k$, $G_k \circ \Psi_k$ является базисом Грёбнера идеала $(S_k \circ \Psi_k)$ при том же упорядочении $\prec_k$.

Очевидно, что

$$S_k \subset G_k \iff S_k \circ \Psi_k \subset G_k \circ \Psi_k$$

(обратная импликация справедлива потому, что композиция с Ψ_k является инъективным отображением, см. замечание к теореме 2).

По предложению 3 композиция с Ψ_k совместима с неделимостью. Поэтому для любых мономов M и N из $\mathbb{M}_k$

$$M \circ \mathrm{lm}_{\prec_k} \Psi_k \mid N \circ \mathrm{lm}_{\prec_k} \Psi_k \iff M \mid N.$$

В частности,

$$M \circ \operatorname{lm}_{\prec_k} \Psi_k = N \circ \operatorname{lm}_{\prec_k} \Psi_k \iff M = N.$$

Для $s \in S_k$ и $h \in G_k \setminus S_k$, используя предложение 2, получаем

$$\operatorname{lm}_{\prec_k}(s \circ \Psi_k) \mid \operatorname{lm}_{\prec_k}(h \circ \Psi_k) \iff \\ \iff \operatorname{lm}_{\prec_k} s \circ \operatorname{lm}_{\prec_k} \Psi_k \mid \operatorname{lm}_{\prec_k} h \circ \operatorname{lm}_{\prec_k} \Psi_k \iff \operatorname{lm}_{\prec_k} s \mid \operatorname{lm}_{\prec_k} h.$$

Наконец, для произвольных $h_i \in G_i \setminus S_i$, $h_j \in G_j \setminus S_j$, где $0 \leqslant i \leqslant j$, снова применяя предложения 2 и 3, получаем, что

$$\operatorname{lm}_{\prec_i}(h_i \circ \Psi_i) = \operatorname{lm}_{\prec_j}(h_j \circ \Psi_j) \iff \operatorname{lm}_{\prec_j}(h_i \circ \Psi_j) = \operatorname{lm}_{\prec_j}(h_j \circ \Psi_j) \iff \\ \iff (\operatorname{lm}_{\prec_j} h_i) \circ \operatorname{lm}_{\prec_j} \Psi_j = (\operatorname{lm}_{\prec_j} h_j) \circ \operatorname{lm}_{\prec_j} \Psi_j \iff \\ \iff \operatorname{lm}_{\prec_j} h_i = \operatorname{lm}_{\prec_j} h_j \iff \operatorname{lm}_{\prec_i} h_i = \operatorname{lm}_{\prec_j} h_j.$$

Поэтому наборы базисов Грёбнера $\{G_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{G_k \circ \Psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ согласованны или несогласованны одновременно. □

Лемма 3 (обобщение [13, лемма 4.4]). *Пусть $\Psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots)$ — произвольный набор дифференциальных многочленов. Если $[F] = [S]$, то $[F \circ \Psi] = [S \circ \Psi]$.*

Доказательство. Пусть $h \in [F \circ \Psi]$. Тогда $h = \sum_i p_i(f_i \circ \Psi)$, где $f_i \in F$. Но $F \subset [S]$, поэтому $f_i = \sum_j q_{ij} s_j$, где $s_j \in S$. Значит,

$$h = \sum_i p_i \left(\left(\sum_j q_{ij} s_j \right) \circ \Psi \right) = \sum_i p_i \sum_j (q_{ij} \circ \Psi)(s_j \circ \Psi) = \\ = \sum_j \left(\sum_i p_i (q_{ij} \circ \Psi) \right) (s_j \circ \Psi) \in [S \circ \Psi],$$

откуда $[F \circ \Psi] \subset [S \circ \Psi]$. Обратное включение доказывается аналогично. □

Лемма 4. *Пусть $\prec$ — допустимое упорядочение. Пусть $[F] = [S]$ и $\Psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots)$ — набор дифференциальных многочленов, таких что $\operatorname{lm}_{\mathrm{lex}} \psi_k = y_k$. Пусть*

$$\mathrm{DSB}_{\prec}(S) \iff \mathrm{DSB}_{\prec}(S \circ \Psi).$$

Тогда

$$\mathrm{DSB}_{\prec}(S, [F]) \iff \mathrm{DSB}_{\prec}(S \circ \Psi, [F \circ \Psi]).$$

Доказательство. При $[F] = [S]$ из леммы 3 вытекает, что $[S \circ \Psi] = [F \circ \Psi]$. С учётом этого имеем

$$\mathrm{DSB}_{\prec}(S, [F]) \implies \mathrm{DSB}_{\prec}(S) \iff \mathrm{DSB}_{\prec}(S \circ \Psi) \implies \mathrm{DSB}_{\prec}(S \circ \Psi, [F \circ \Psi]).$$

Пусть $\psi_k = c_k y_k + T_k$, где $c_k \in \mathcal{F}$, $c_k \neq 0$, $T_k \in \mathcal{R}_{k-1}$. Обозначим через τ гомоморфизм композиции с Ψ. Тогда τ — автоморфизм кольца $\mathcal{F}[y, y_1, y_2, \ldots]$ над $\mathcal{F}$:

обратным отображением служит композиция с индуктивно определяемыми многочленами
$$\phi_k = c_k^{-1}(y_k - \tau^{-1}(T_k)) = c_k^{-1}(y_k - T_k \circ \Phi_{k-1})),$$
где $\Phi_{k-1} = (\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{k-1})$. В наших обозначениях $(H \circ \Psi) \circ \Phi = H$ для любого множества многочленов H. Очевидно, что $\mathrm{lm}_{\mathrm{lex}}\, \phi_k = y_k$.

Повторяя теперь рассуждения для множества $S \circ \Psi$ и композиции с Φ, получаем обратную импликацию $\mathrm{DSB}(S \circ \Psi, [F \circ \Psi]) \implies \mathrm{DSB}(S, [F])$. $\square$

Теорема 15. *Пусть $\prec$ — допустимое упорядочение на дифференциальных мономах, $r \geqslant 0$ и $\psi \in \mathcal{R}_r$ — дифференциальный многочлен, причём $\mathrm{lm}_\prec \delta^k \psi = y_{r+k}$ при всех $k \geqslant 0$. Рассмотрим набор*
$$\Psi = (y, y_1, \ldots, y_{r-1}, \psi, \delta\psi, \delta^2\psi, \ldots).$$
Пусть $S \subset \mathcal{F}[y_r, y_{r+1}, y_{r+2}, \ldots] = \mathcal{F}\{y_r\}$. Тогда
$$\mathrm{DSB}_\prec(S, [F] \lhd \mathcal{F}\{y\}) \iff \mathrm{DSB}_\prec(S \circ \Psi, [F \circ \Psi] \lhd \mathcal{F}\{y\}).$$

Доказательство. Как обычно, будем через $\prec_k$ обозначать ограничение $\prec$ на $\mathbb{M}_k$ и положим $H_k = (\Theta F) \cap \mathcal{R}_k$ для произвольного множества многочленов H. Так как $S \subset \mathcal{F}\{y_r\}$ и ограничение композиции с набором Ψ с $\mathcal{F}\{y\}$ на $\mathcal{F}\{y_r\}$ — дифференциальный гомоморфизм над $\mathcal{F}$, получаем, что $S_k \circ \Psi = (S \circ \Psi)_k$. По условию $S_i = \varnothing$ при $i < r$.

Положим $\Psi_k = (\psi, \psi_1, \ldots, \psi_k)$. Пусть $\{G_k\}_{k=r}^{\infty}$ — согласованный с S_k набор базисов Грёбнера. Поскольку $\mathrm{lm}_\prec \psi_k = y_k$, композиция с Ψ_k совместима с упорядочением $\prec_k$ и $\mathrm{lm}_{\prec_k} \Psi_k$ является (тривиальной) перестановкой степеней. Применяя к композиции с Ψ лемму 2, получаем, что $\{G_k \circ \Psi\}_{k=r}^{\infty}$ — согласованный с $(S \circ \Psi)_k$ набор базисов Грёбнера.

Так как отображение композиции с Ψ инъективно, то для любых множеств $A, B \subset \mathcal{F}\{y\}$
$$A \circ \Psi = B \circ \Psi \iff A = B$$
и, кроме того,
$$(A \cap B) \circ \Psi = (A \circ \Psi) \cap (B \circ \Psi).$$
Поэтому при всех $i \geqslant r$
$$\left(\bigcap_{k \geqslant i} G_k\right) \circ \Psi = \bigcap_{k \geqslant i} (G_k \circ \Psi).$$
По теореме 14 из $S_k \circ \Psi = (S \circ \Psi)_k$ следует, что
$$\mathrm{DSB}_\prec(S) \iff \forall i \geqslant r\ S_i = \bigcap_{k \geqslant i} G_k \iff$$
$$\iff \forall i \geqslant r\ S_i \circ \Psi = \left(\bigcap_{k \geqslant i} G_k\right) \circ \Psi = \bigcap_{k \geqslant i} (G_k \circ \Psi) = (S \circ \Psi)_i \iff$$
$$\iff \mathrm{DSB}_\prec(S \circ \Psi).$$

Теперь для завершения доказательства остаётся заметить, что $\prec$-квазилинейный многочлен всегда является lex-квазилинейным, и воспользоваться леммой 4. $\square$

Теорема 16. *Пусть упорядочение на дифференциальных мономах $\prec$ является полностью однородным, а $\psi \in \mathcal{F}\{y\}$ — $\prec$-квазилинейный многочлен, причём $\mathrm{lm}_\prec \delta^k\psi = y_{r+k}$ для всех $k \geqslant 0$. Тогда*

$$\mathrm{DSB}_\prec(S, [F] \lhd \mathcal{F}\{y\}) \iff \mathrm{DSB}_\prec(S \circ \Psi, [F \circ \Psi] \lhd \mathcal{F}\{y\}).$$

Доказательство. Пусть $\operatorname{ord}\psi = y_r$ и $\sigma\colon \mathcal{F}\{y\} \to \mathcal{F}\{y\}$ — дифференциальная композиция с многочленом y_r. Для многочленов из $\mathcal{R}_k$ предста́вим дифференциальную композицию с ψ в виде композиции следующих отображений:

$$\mathcal{R}_k = \mathcal{F}[y_0, y_1, \ldots, y_k] \overset{\sigma_k}{\simeq} \mathcal{F}[y_r, y_{r+1}, \ldots, y_{r+k}] \overset{\iota_k}{\hookrightarrow}$$
$$\overset{\iota_k}{\hookrightarrow} \mathcal{F}[y_0, y_1, \ldots, y_{r+k}] \xrightarrow{\phi_k} \mathcal{F}[y_0, y_1, \ldots, y_{r+k}],$$

где $\sigma_k\colon y_i \mapsto y_{i+r}$, $0 \leqslant i \leqslant k$, — ограничение σ на $\mathcal{R}_k$, являющееся изоморфизмом над $\mathcal{F}$, ι_k — вложение, а ϕ_k — ограничение композиции с набором $\prec_{r+k}$-квазилинейных многочленов $\Phi = (y_0, y_1, \ldots, y_{r-1}, \psi, \delta\psi, \delta^2\psi, \ldots)$ на $\mathcal{R}_k$.

При полностью однородном упорядочении для любых мономов M, N выполнено

$$M \prec N \iff \sigma(M) \prec \sigma(N)$$

и S-представление любого многочлена при отображении σ переходит в $\sigma(S)$-представление (и наоборот). Поэтому с учётом леммы 1

$$\mathrm{DSB}_\prec(S, [F] \lhd \mathcal{F}\{y\}) \iff \mathrm{DSB}_\prec(S \circ y_r, [F \circ y_r] \lhd \mathcal{F}\{y\}).$$

Заметим, что $S \circ y_r \subset \mathcal{F}\{y_r\}$. Поэтому множество $S \circ y_r$ и набор Φ удовлетворяют условиям теоремы 15, откуда и следует искомое утверждение. $\square$

Замечание. Отметим, что если многочлен ψ не является лексикографически квазилинейным, то старшие мономы его производных, вообще говоря, не образуют перестановку степеней. Поэтому техника, развитая в этом разделе, неприменима к таким многочленам.

4.4. Применения теорем о композиции дифференциальных стандартных базисов

Замечание. Дифференциальная композиция любого лексикографического дифференциального стандартного базиса с квазилинейным многочленом по теореме 16 снова даёт лексикографический стандартный базис. Это хорошо согласуется с необходимым и достаточным критерием конечности такого базиса (теорема 10). Действительно, композиция lex-квазилинейных многочленов — снова lex-квазилинейный многочлен. Аналогичные рассуждения справедливы и для полностью однородного упорядочения deglex (отметим, что deglex-квазилинейные многочлены являются просто линейными). Однако для произвольного (неоднородного) δ-лексикографического упорядочения вычисление дифференциального стандартного базиса, вообще говоря, не коммутирует с композицией с квазилинейным многочленом.

Предложение 8. *Пусть ограничение упорядочения $\prec$ на мономы от $y_r, y_{r+1}, y_{r+2}, \ldots$ при некотором $r \geqslant 0$ является β-упорядочением. Тогда $\mathrm{DSB}_{\prec}(y_r^n)$ для всех $n > 0$.*

Доказательство. Пусть

$$M \prec' N \iff M \circ y_r \prec N \circ y_r.$$

Ясно, что $\prec'$ — β-упорядочение. По теореме 8 имеем $\mathrm{DSB}_{\prec'}(y^n)$. Но тогда $\mathrm{DSB}_{\prec}(y_r^n, [y_r^n] \lhd \mathcal{F}\{y_r\})$. Следовательно, по лемме 1 выполняется условие $\mathrm{DSB}_{\prec}(y_r^n, [y_r^n] \lhd \mathcal{F}\{y\})$. □

Замечание. В частности, предложение 8 справедливо и для обычных β-упорядочений.

Предложение 9. *Пусть $\prec$ — β-упорядочение и ψ — $\prec$-квазилинейный многочлен, причём $\prec$ является согласованным с квазилинейностью для ψ (т. е. производная $\delta^n\psi$ является $\prec$-квазилинейной для всех $n \geqslant 0$). Тогда для любого $n > 0$ многочлен ψ^n образует дифференциальный стандартный базис идеала $[\psi^n]$ относительно $\prec$.*

Доказательство. Так как $\prec$ — β-упорядочение, то по предложению 8 $\{y_r^n\}$ — дифференциальный стандартный базис $[y_r^n]$ относительно $\prec$. Рассуждая как в доказательстве теоремы 16, представ́им дифференциальную композицию y^n с ψ в виде композиции y_r^n с набором $\prec$-квазилинейных многочленов

$$\Psi = (y_0, y_1, \ldots, y_{r-1}, \psi, \delta\psi, \delta^2\psi, \ldots).$$

По теореме 15 $\{\psi^n\}$ является дифференциальным стандартным базисом $[\psi^n]$ относительно $\prec$. □

Автором совместно с М. В. Кондратьевой выдвинута следующая гипотеза.

Гипотеза ([3, 28]). Пусть $\prec$ — согласованное с квазилинейностью β-упорядочение. Для того чтобы идеал I обладал конечным дифференциальным стандартным базисом при $\prec$, необходимо и достаточно, чтобы либо I содержал $\prec$-квазилинейный многочлен, либо I порождался некоторой степенью $\prec$-квазилинейного многочлена.

Эту гипотезу частично подтверждают теорема 9 и предложение 9.

Предложение 10. *Пусть $k \geqslant 0$. Тогда найдётся такое упорядочение $\prec$, что для любого лексикографически квазилинейного многочлена f порядка k и любого $n \geqslant 1$ идеал $[f^n]$ обладает дифференциальным стандартным базисом из одного f^n относительно $\prec$.*

Доказательство. Выберем в качестве $\prec$ так называемое *смешанное* lex-revlex *упорядочение порядка* k, которое определим матрицей

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccc}
y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_{k-1} & y_k & y_{k+1} & y_{k+2} & \dots & y_{2k-1} & y_{2k} & y_{2k+1} & \dots
\end{array}\\
\left(\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & 1 & 2 & 3 & \dots & k & k+1 & k+2 & \dots \\
\multicolumn{13}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
 & & & & & & & & & & & & \dots \\
 & & & & & & & & & & & -1 & \\
 & & & & & & & & & & -1 & & \\
 & & & & & & & & & -1 & & & \\
 & & & & & & & & \dots & & & & \\
 & & & & & & & -1 & & & & & \\
 & & & & & & -1 & & & & & & \\
 & & & & & -1 & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & \dots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & & & & \\
1 & & & & & & & & & & & &
\end{array}\right)
\end{array}.
$$

Первая строка этой матрицы сравнивает мономы от $y_r, y_{r+1}, y_{r+2}, \dots$ относительно веса $\mathrm{wt} - (k-1)\deg$. Ясно, что f является $\prec$-квазилинейным. Более того, любая производная f будет $\prec$-квазилинейной. Действительно, пусть y_{k+r} и M — два монома из $\delta^r f$, причём $M = PQ$, где $P \prec_{\mathrm{lex}} y_k$, а $Q \succcurlyeq_{\mathrm{lex}} y_k$. При этом M является слагаемым в r-й производной некоторого монома из f, меньшего y_k (а значит, не большего $y_{k-1}^{\deg M}$). Понятно, что $\mathrm{wt}\, M - \mathrm{wt}\, y_{k-1}^{\deg M} \leqslant r$, откуда

$$(\mathrm{wt}\, Q - (k-1)\deg Q) + (\mathrm{wt}\, P - (k-1)\deg P) \leqslant r$$

и $\mathrm{wt}\, Q - (k-1)\deg Q \leqslant r$, потому что $\mathrm{wt}\, P \leqslant \mathrm{wt}\, y_{k-1}^{\deg P}$. (Равенство здесь достигается, только когда Q входит в $\delta^r(y_{k-1}^{\deg Q})$.) Тогда уже относительно первой строки матрицы упорядочения $\prec$ моном y_{k+r} будет иметь вес $r+1$, а моном M — вес не более r.

Легко видеть, что построенное упорядочение удовлетворяет предложению 8. В самом деле, соответствующее ему упорядочение $\prec'$ является β-упорядочением (wt+deg)revlex. Поэтому идеал $[y_k^n]$ имеет конечный дифференциальный стандартный базис $\{y_k^n\}$ относительно $\prec$. Теперь доказательство следует из теоремы 15 (рассуждения такие же, как и в доказательстве предложения 9). $\square$

Заключение

В работе доказано, что композиция с квазилинейными многочленами при полностью однородных упорядочениях коммутирует с вычислением дифференциального стандартного базиса. Для этого была развита специальная техника, сводящая вопросы о композиции дифференциальных базисов к аналогичным задачам для базисов Грёбнера обычных колец многочленов и к теоремам Хуна Хонга о поведении базисов Грёбнера при композиции. С помощью этой техники была установлена конечность некоторых дифференциальных стандартных базисов. Кроме того, были полностью охарактеризованы однородные дифференциальные упорядочения.

Благодарности

Автор благодарит научного руководителя Е. В. Панкратьева, М. В. Кондратьеву, Д. В. Трушина и всех остальных участников семинара по компьютерной и дифференциальной алгебре механико-математического факультета МГУ.

Работа была частично выполнена в течение Специального семестра по базисам Грёбнера (1 февраля—31 июля 2006 г.), г. Линц, Австрия.

Литература

[1] Аржанцев И. В. Базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений. — М.: МЦНМО, 2003.

[2] Зобнин А. И. О стандартных базисах в кольце дифференциальных многочленов // Фундамент. и прикл. мат. — 2003. — Т. 9, вып. 3. — С. 89—102.

[3] Зобнин А. И., Кондратьева М. В. Задача принадлежности дифференциальному идеалу, порождённому композицией многочленов // Программирование. — 2006. — Т. 32, № 3. — С. 3—9.

[4] Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. — М.: Мир, 2000.

[5] Латышев В. Н. Комбинаторная теория колец. Стандартные базисы. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.

[6] Панкратьев Е. В. Стандартные базисы в дифференциальной алгебре // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2003. — № 3. — С. 48—56.

[7] Трушин Д. В. Идеал сепарант в кольце дифференциальных многочленов. — Препринт. — 2006.

[8] Becker T., Weispfenning W. Gröbner Bases. A Computational Approach to Commutative Algebra. — New York: Springer, 1993. — (Grad. Texts Math.; Vol. 141).

[9] Carrà Ferro G. Gröbner bases and differential algebra // Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes. Proc. 5th Int. Conf., AAECC-5, Menorca/Spain 1987. — Berlin: Springer, 1989. — (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 356). — P. 129—140.

[10] Carrà Ferro G. Differential Gröbner bases in one variable and in the partial case // Math. Comput. Modelling. — 1997. — Vol. 25, no. 8—9. — P. 1—10.

[11] Gallo G., Mishra B., Ollivier F. Some constructions in rings of differential polynomials // Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes. Proc. 9th Int. Symp., AAECC-9, New Orleans/LA (USA) 1991. — Berlin: Springer, 1991. — (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 539). — P. 171—182.

[12] Gutierrez J., San Miguel R. R. Reduces Gröbner bases under composition // J. Symbolic Comput. — 1998. — Vol. 26, no. 4. — P. 433—444.

[13] Hong H. Gröbner basis under composition. I // J. Symbolic Comput. — 1998. — Vol. 25, no. 5. — P. 643—663.

[14] Hong H. Gröbner basis under composition. II // Proc. of the 1996 Int. Symp. on Symbolic and Algebraic Computation, ISSAC '96, Zurich, Switzerland, July 24—26, 1996 / Y. N. Lakshman, ed. — ACM Press, 1996. — P. 79—85.

[15] Hubert E. Notes on triangular sets and triangulation-decomposition algorithms. I: Polynomial systems // Symbolic and Numerical Scientific Computation. Second Int. Conf., SNSC 2001, Hagenberg, Austria, September 12—14, 2001. Revised papers / F. Winkler, ed. — Berlin: Springer, 2003. — (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 2630). — P. 1—39.

[16] Hubert E. Notes on triangular sets and triangulation-decomposition algorithms. II: Differential systems // Ibid. — P. 40—87.

[17] Kolchin E. R. Differential Algebra and Algebraic Groups. — Academic Press, 1973.

[18] Kondratieva M. V., Levin A. B., Mikhalev A. V., Pankratiev E. V. Differential and Difference Dimension Polynomials. — Kluwer Academic, 1999.

[19] Levi H. On the structure of differential polynomials and on their theory of ideals // Trans. Amer. Math. Soc. — 1942. — Vol. 51. — P. 532—568.

[20] Mansfield E. Differential Gröbner bases: Ph.D. Thesis. — Univ. of Sydney, 1991.

[21] Ollivier F. Le problème de l'identifiabilité structurelle globale: These de doctorat. — Paris, 1990.

[22] Ollivier F. Standard bases of differential ideals // Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes, Proc. 8th Int. Conf., AAECC-8, Tokyo/Jap. 1990. — Berlin: Springer, 1991. — (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 508). — P. 304—321.

[23] Ritt J. F. Differential Algebra. — New York: Amer. Math. Soc., 1950. — (Colloquium Publications; Vol. 33).

[24] Robbiano L. Term orderings on the polynomial ring // Computer Algebra, EUROCAL '85, Proc. Eur. Conf., Linz/Austria 1985, Vol. 2. — Berlin: Springer, 1985. — (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 204). — P. 513—517.

[25] Robbiano L. On the theory of graded structures // J. Symbolic Comput. — 1986. — Vol. 2. — P. 139—170.

[26] Zobnin A. Essential properties of admissible orderings and rankings // Proc. of the 64th Workshop on General Algebra "64. Arbeitstagung Allgemeine Algebra", Olomouc, Czech Republic, May 30—June 2, 2002 and of the 65th Workshop on General Algebra "65. Arbeitstagung Allgemeine Algebra", Potsdam, Germany, March 21—23, 2003 / I. Chajda, ed. — Klagenfurt : Verlag Johannes Heyn, 2004. — (Contrib. Gen. Algebra; Vol. 14). — P. 205—221.

[27] Zobnin A. On testing the membership to differential ideals // Proc. of CASC-2004, St. Petersburg. — 2004. — P. 485—496.

[28] Zobnin A. Admissible orderings and finiteness criteria for differential standard bases // Symbolic and Algebraic Computation, Int. Symp. ISSAC 2005, Beijing, China, July 24—27, 2005, Proceedings / M. Kauers, ed. — ACM Press, 2005. — P. 365—372.

[29] Zobnin A. Some results on differential Gröbner bases // Proc. of A3L-2005. Conf. in Honor of the 60th Birthday of Volker Weispfenning. — 2005. — P. 309—314.