Предельные T-пространства

Е. А. КИРЕЕВА
Московский педагогический государственный университет
e-mail: kireeva_elena@yahoo.com, eakir@rol.ru

УДК 512.552

Ключевые слова: T-пространство, T-идеал, тождество, многообразие, свободная алгебра многообразия.

Аннотация

Пусть F — поле простой характеристики p, $\mathbf{V}_p$ — многообразие ассоциативных алгебр без 1 над F, заданное тождествами $[[x,y],z]=0$ и $x^4=0$, если $p=2$, и тождествами $[[x,y],z]=0$ и $x^p=0$, если $p>2$ (здесь $[x,y]=xy-yx$). Пусть A/V_p — свободная алгебра счётного ранга многообразия $\mathbf{V}_p$, S — T-пространство в алгебре A/V_p, порождённое элементами $x_1^2x_2^2\ldots x_k^2+V_2$, где $k\in\mathbb{N}$, если $p=2$, и элементами $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}[x_1,x_2]\ldots x_{2k-1}^{\alpha_{2k-1}}x_{2k}^{\alpha_{2k}}[x_{2k-1},x_{2k}]+V_p$, где $k\in\mathbb{N}$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_{2k}\in\{0,p-1\}$, если $p>2$. Известно, что S не является конечно порождённым как T-пространство. В работе доказано, что S является предельным, то есть максимальным неконечно-порождённым, T-пространством. Как следствие получено предельное T-пространство в свободной ассоциативной F-алгебре без 1 счётного ранга.

Abstract

E. A. Kireeva, Limit T-spaces, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 1, pp. 135—159.

Let F be a field of prime characteristic p and let $\mathbf{V}_p$ be the variety of associative algebras over F without unity defined by the identities $[[x,y],z]=0$ and $x^4=0$ if $p=2$ and by the identities $[[x,y],z]=0$ and $x^p=0$ if $p>2$ (here $[x,y]=xy-yx$). Let A/V_p be the free algebra of countable rank of the variety $\mathbf{V}_p$ and let S be the T-space in A/V_p generated by $x_1^2x_2^2\cdots x_k^2+V_2$, where $k\in\mathbb{N}$ if $p=2$ and by $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}[x_1,x_2]\cdots x_{2k-1}^{\alpha_{2k-1}}x_{2k}^{\alpha_{2k}}[x_{2k-1},x_{2k}]+V_p$, where $k\in\mathbb{N}$ and $\alpha_1,\ldots,\alpha_{2k}\in\{0,p-1\}$ if $p>2$. As is known, S is not finitely generated as a T-space. In the present paper, we prove that S is a limit T-space, i.e., a maximal nonfinitely generated T-space. As a corollary, we have constructed a limit T-space in the free associative F-algebra without unity of countable rank.

1. Введение

Пусть F — поле, A — свободная ассоциативная F-алгебра без единицы счётного ранга со свободными порождающими $x_1,x_2,\ldots$ (для обозначения которых мы будем иногда использовать также символы x, y и z). Векторное подпространство U свободной алгебры A называется *T-пространством*, если U — вполне

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 1, с. 135—159.

характеристическое подпространство в A, т. е. если $\alpha(U) \subseteq U$ для любого эндоморфизма α алгебры A. Если Т-пространство является также идеалом, то оно называется Т-идеалом. Примерами Т-пространств, не являющихся Т-идеалами, могут служить линейная оболочка коммутаторов $[f, g]$ $(f, g \in A)$ свободной алгебры A или множество всех центральных многочленов алгебры матриц порядка 2 и выше.

Элемент $v = v(x_1, \ldots, x_n) \in A$ (а также выражение $v = 0$) называется *тождеством* ассоциативной F-алгебры G, если $v(g_1, \ldots, g_n) = 0$ для любых $g_1, \ldots, g_n \in G$. Например, всякая коммутативная алгебра удовлетворяет тождеству $[x, y] = 0$ (здесь $[x, y] = xy - yx$), всякая ниль-алгебра ограниченного индекса удовлетворяет тождеству $x^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, алгебра Грассмана удовлетворяет тождеству $[[x, y], z] = 0$. Если $\{v_t \mid t \in \Omega\}$ — произвольное, но фиксированное множество тождеств, то класс всех ассоциативных F-алгебр, удовлетворяющих одновременно всем тождествам v_t $(t \in \Omega)$, называется *многообразием*. Основные определения, факты и библиографию, относящуюся к тождествам и многообразиям ассоциативных алгебр, можно найти в [2, 17, 18].

Хорошо известно, что между множеством всех многообразий ассоциативных F-алгебр и множеством всех Т-идеалов алгебры A существует естественное взаимно-однозначное соответствие. Именно, если $\mathbf{V}$ — многообразие ассоциативных F-алгебр, то соответствующий ему Т-идеал V алгебры A — это множество всех тождеств, удовлетворяющихся в каждой алгебре из $\mathbf{V}$. С другой стороны, если V — Т-идеал в A, то соответствующее ему многообразие $\mathbf{V}$ — это многообразие, определяемое системой тождеств $\{v \mid v \in V\}$.

Если $\mathbf{V}$ — многообразие ассоциативных F-алгебр, V — соответствующий этому многообразию Т-идеал в A, то фактор-алгебра A/V с порождающими $x_1 + V, x_2 + V, \ldots$ называется *свободной алгеброй* (счётного ранга) *многообразия* $\mathbf{V}$ или *относительно свободной ассоциативной алгеброй*. В относительно свободных алгебрах понятие Т-пространства вводится аналогично тому, как это сделано в свободной ассоциативной алгебре. Именно, векторное подпространство U в алгебре A/V называется Т-пространством, если $\alpha(U) \subseteq U$ для любого эндоморфизма α алгебры A/V.

Первым систематически изучать Т-пространства, прежде всего с точки зрения их конечной порождённости, начал А. В. Гришин (см. [5]). Им был построен первый пример неконечнопорождённого Т-пространства над полем положительной характеристики (характеристики 2) [6]. Примеры неконечнопорождённых Т-пространств над бесконечным полем характеристики $p > 2$ были получены В. В. Щиголевым в [13]. Впоследствии В. В. Щиголевым [14] был построен целый ряд примеров неконечнопорождённых Т-пространств над произвольным полем характеристики $p > 0$.

Неконечнопорождённые Т-пространства сыграли важную роль в решении проблемы Шпехта (первоначально поставленной в [19]): верно ли, что каждое многообразие ассоциативных алгебр может быть задано конечной системой тождеств? Или, эквивалентно: верно ли, что каждый Т-идеал свободной ассоциативной алгебры счётного ранга конечно порождён как Т-идеал? Если основное поле F имеет характеристику 0, то ответ на этот вопрос утвердительный, это было доказано А. Р. Кемером в [7]. Если же F — поле положительной характеристики p, то проблема Шпехта имеет отрицательное решение, что было показано А. Я. Беловым [3], А. В. Гришиным [6] (для $p = 2$) и В. В. Щиголевым [12] (см. также [4,15,20]). Отметим, что тремя авторами были построены различные примеры неконечнопорождённых T-идеалов в алгебре A, но в каждой из работ решающую роль играло некоторое неконечнопорождённое T-пространство. Позднее другими авторами были приведены другие примеры неконечнопорождённых T-идеалов, однако при построении всех этих примеров также использовались неконечнопорождённые T-пространства (см. [1,16]).

Естественный вопрос, возникающий при исследовании T-пространств, связан с поиском границы между конечно порождёнными и неконечнопорождёнными T-пространствами в свободных алгебрах многообразий. Назовём T-пространство U в свободной (относительно свободной) ассоциативной алгебре *почти конечно порождённым* или *предельным*, если U является максимальным неконечнопорождённым T-пространством, т. е. если оно не является конечно порождённым, но всякое T-пространство в данной алгебре, содержащее U как собственное подмножество, конечно порождено. Как следует из леммы Цорна, если в свободной алгебре существуют неконечнопорождённые T-пространства, то существуют и максимальные неконечнопорождённые, т. е. предельные, T-пространства. Однако конкретных примеров таких T-пространств до сих пор известно не было. Основной целью данной работы является построение примеров предельных T-пространств в свободных алгебрах многообразий ассоциативных алгебр над полями положительной характеристики и изучение их связи с известными примерами неконечнопорождённых T-пространств.

Пусть F — поле простой характеристики p, обозначим через $\mathbf{V}_p$ многообразие ассоциативных алгебр без единицы над F, заданное тождествами

$$[[x, y], z] = 0, \quad x^4 = 0,$$

если $p = 2$, и тождествами

$$[[x, y], z] = 0, \quad x^p = 0,$$

если $p > 2$. Пусть V_p — T-идеал алгебры A, соответствующий многообразию $\mathbf{V}_p$, так что A/V_p — свободная алгебра многообразия $\mathbf{V}_p$ счётного ранга.

Пусть $p = 2$. Положим

$$Q_k = x_1^2 x_2^2 \ldots x_k^2,$$

где $k \in \mathbb{N}$. Пусть теперь $p > 2$. Положим

$$R_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{2k}} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} [x_1, x_2] \ldots x_{2k-1}^{\alpha_{2k-1}} x_{2k}^{\alpha_{2k}} [x_{2k-1}, x_{2k}],$$

где $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_t \in \{0, p-1\}$ для всех $t = 1, \ldots, 2k$.

Обозначим через S T-пространство в алгебре A/V_p, порождённое элементами

$$Q_k + V_2 \quad (k \geqslant 1), \tag{1}$$

если $p = 2$, и элементами

$$R_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{2k}} + V_p \quad (k \geqslant 1), \tag{2}$$

если $p > 2$. Известно, что S не является конечно порождённым как T-пространство (А. В. Гришин [6] для $p = 2$ и В. В. Щиголев для простого $p > 2$ (см. [13], а также [14, § 2.1])).

Отметим, что, как было показано в [9], $\mathbf{V}_p$ является минимальным многообразием, свободные алгебры которого содержат неконечнопорождённые T-пространства. Это означает, что в свободных алгебрах любого собственного подмногообразия данного многообразия все T-пространства конечно порождены. Отметим также, что для $p > 2$ многообразие $\mathbf{V}_p$ порождается бесконечномерной алгеброй Грассмана над полем F [11].

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *S — предельное T-пространство в алгебре A/V_p.*

Утверждение теоремы 1 вытекает из следующего предложения.

Предложение 1. *Если H — T-пространство в алгебре A/V_p, $H \supseteq S$ и $H \neq S$, то H конечно порождено (как T-пространство).*

Предложение 1, в свою очередь, является следствием следующего предложения.

Предложение 2. *Если H — T-пространство в алгебре A/V_p, $H \supseteq S$ и $H \neq S$, то найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что*

$$x_{2n+1}[x_1, x_2]\,[x_3, x_4] \ldots [x_{2n-1}, x_{2n}] + V_p \in H.$$

Идея поиска предельных T-пространств в многообразии $\mathbf{V}_p$ путём доказательства для них предложения 2 принадлежит А. Н. Красильникову.

Следствиями теоремы 1 являются следующие теоремы. Обозначим через $\mathbf{U}_p$ многообразие ассоциативных алгебр без единицы над полем F, задаваемое тождеством $[[x, y], z] = 0$. Пусть U_p — T-идеал алгебры A, соответствующий многообразию $\mathbf{U}_p$, так что A/U_p — свободная алгебра многообразия $\mathbf{U}_p$ счётного ранга. Обозначим через $\bar{S}$ T-пространство в A/U_p, порождённое элементами

$$Q_k + U_2 \quad (k \geqslant 1), \quad x_1 x_2^4 + U_2,$$

если $p = 2$, и элементами

$$R_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{2k}} + U_p \quad (k \geqslant 1), \quad x_1^p + U_p, \quad x_1 x_2^p + U_p,$$

если $p > 2$.

Теорема 2. *$\bar{S}$ — предельное T-пространство в алгебре A/U_p.*

Иначе говоря, предельным в алгебре A/U_p будет T-пространство, порождённое теми же элементами, что и в предыдущем случае, плюс T-идеал, порождённый элементом $x^4 + U_p$, если $p = 2$, и элементом $x^p + U_p$, если $p > 2$.

Аналогично, добавляя к исходному Т-пространству в свободной ассоциативной алгебре A Т-идеал, порождённый элементом $[[x, y], z]$, получаем предельное Т-пространство в алгебре A.

Именно, обозначим через $\bar{\bar{S}}$ Т-пространство в алгебре A, порождённое элементами

$$Q_k \quad (k \geqslant 1), \quad x_1 x_2^4, \quad [[x_1, x_2], x_3], \quad x_1[[x_2, x_3], x_4],$$

если $p = 2$, и элементами

$$R_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{2k}} \quad (k \geqslant 1), \quad x_1^p, \quad x_1 x_2^p, \quad [[x_1, x_2], x_3], \quad x_1[[x_2, x_3], x_4],$$

если $p > 2$.

Теорема 3. *$\bar{\bar{S}}$ — предельное Т-пространство в алгебре A.*

Заметим, что предельными в минимальных многообразиях $\mathbf{V}_p$ оказались уже известные Т-пространства, более того, построенные в качестве первых примеров неконечнопорождённых Т-пространств. Все появившиеся впоследствии серии примеров неконечнопорождённых Т-пространств в свободных алгебрах над полями (построенные В. В. Щиголевым в алгебрах A/V_p и A/U_p и, как следствие, в алгебре A) оказываются лежащими в соответствующих предельных Т-пространствах. В связи с этим возникает вопрос: не будет ли предельное Т-пространство единственным для каждой из алгебр?

Материал в статье располагается следующим образом. В разделе 2 доказываются предложение 1 и теоремы 1, 2 и 3 в предположении, что уже доказаны лемма 1 и предложение 2. В разделе 3 доказываются лемма 1, а также предложение 2 для $p = 2$. В разделе 4 доказывается предложение 2 для произвольного простого $p > 2$.

В заключение автор приносит искреннюю благодарность А. Н. Красильникову за постановку задачи, указанную выше идею и полезное обсуждение полученных результатов, а также А. В. Гришину за обсуждение теоремы 2.

2. Основные утверждения

Нам понадобится следующая лемма, которая будет доказана в разделе 3.

Лемма 1. *Пусть $p = 2$. Тогда Т-пространство S содержит все элементы вида*

$$\Pi + V_2, \tag{3}$$

$$\Pi \cdot [x_i, x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_m}] + V_2 \quad (m > 1), \tag{4}$$

$$\Pi \cdot x_i[x_i, x_j] + V_2, \tag{5}$$

$$\Pi \cdot x_i[x_i, x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_m}] + V_2 \quad (m > 1), \tag{6}$$

$$\Pi \cdot x_i[x_i, x_j]\,[x_k, x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_m}] + V_2 \quad (m > 1), \tag{7}$$

где Π — произведение элементов вида x_s^2, $x_s x_t[x_s, x_t]$ и $[x_s, x_t]$ $(s < t)$ и во всех случаях, кроме первого, может отсутствовать, все индексы попарно различны.

Можно проверить, что в этом случае S является линейной оболочкой элементов вида (3)—(7).

Следствие 1. *Пусть $p = 2$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$*

$$[x_1, x_2]\,[x_3, x_4] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}] + V_p \in S.$$

Заметим, что если $p > 2$, то элементы указанного в следствии 1 вида входят в порождающее множество Т-пространства S.

Доказательство предложения 1. Пусть H — Т-пространство в алгебре A/V_p, $H \supseteq S$ и $H \neq S$. Тогда согласно предложению 2 в H лежит элемент

$$x_{2n+1}[x_1, x_2]\,[x_3, x_4] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}] + V_p \tag{8}$$

для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что по следствию 1 для $p = 2$ и по определению для $p > 2$ элемент

$$[x_1, x_2]\,[x_3, x_4] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}] + V_p \tag{9}$$

лежит в S и, следовательно, в H. Обозначим через J Т-пространство в алгебре A/V_p, порождённое элементами (8) и (9). Ясно, что J является Т-идеалом, порождённым элементом (9), $J \subseteq H$. Следовательно, фактор-алгебра $(A/V_p)/J$ удовлетворяет тождеству $[x_1, x_2]\,[x_3, x_4] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}] = 0$, а также тождеству $x^n = 0$, где $n = 4$, если $p = 2$, и $n = p$, если $p > 2$, и, как следует из [8] (см. также [9]), все Т-пространства в $(A/V_p)/J$ конечно порождены. Так как H/J — Т-пространство в $(A/V_p)/J$ и, следовательно, конечно порождено и $H \cap J = J$ также конечно порождено, то и H конечно порождено. □

Доказательство теоремы 2. Пусть $p = 2$. Тогда для любых $u, v \in A/U_2$ имеем $[u, v^2] = [[u, v], v]$, т. е.

$$[u, v^2] = 0. \tag{10}$$

Следовательно, элемент v^2, а значит, и v^4 лежит в центре алгебры A/U_2. Обозначим через I Т-пространство в алгебре A/U_2, порождённое элементами $x_1^4 + U_2$, $x_1 x_2^4 + U_2$. Ясно, что I является Т-идеалом, порождённым элементом $x_1^4 + U_2$, $I \subseteq \bar{S}$. Таким образом, $\bar{S}/I \cong S$ — предельное Т-пространство в алгебре $(A/U_p)/I \cong A/V_p$, откуда получаем, что $\bar{S}$ является предельным Т-пространством в алгебре A/U_p.

Пусть теперь $p > 2$. Нетрудно проверить, что следствием тождества $[[x, y], z] = 0$ является тождество

$$[x^n, y] = n x^{n-1}[x, y] \tag{11}$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, элемент v^p лежит в центре алгебры A/U_p для любого $v \in A/U_p$. Далее рассуждаем аналогично случаю $p = 2$. □

Доказательство теоремы 3. Обозначим через I Т-пространство в алгебре A, порождённое элементами $[[x_1, x_2], x_3]$, $x_1[[x_2, x_3], x_4]$. Заметим, что так как

$$[[[x_1, x_2], x_3], x_4] = [[x_1, x_2], x_3]x_4 - x_4[[x_1, x_2], x_3] \in I,$$

то $[[x_1, x_2], x_3]x_4 \in I$, и так как

$$x_1[[[x_2, x_3], x_4], x_5] = x_1[[x_2, x_3], x_4]x_5 - x_1x_5[[x_2, x_3], x_4] \in I,$$

то $x_1[[x_2, x_3], x_4]x_5 \in I$. Таким образом, I — T-идеал в алгебре A, порождённый элементом $[[x_1, x_2], x_3]$. Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 2. $\square$

Рассмотрим теперь в A/V_p подмножество G всех элементов

$$x_{i_1}^{\alpha_1} \ldots x_{i_l}^{\alpha_l}[x_{j_1}, x_{j_2}] \ldots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}] + V_p,$$

таких что $l, m \in \mathbb{Z}$, $l, m \geqslant 0$, $l + m > 0$, $i_1 < \ldots < i_l$, $j_1 < \ldots < j_{2m}$; $\alpha_t \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, если $p > 2$, и $\alpha_t \in \{1, 2, 3\}$, если $p = 2$ $(t = 1, 2, \ldots, l)$. Хорошо известно (см. [10]), что в алгебре с тождеством $[[x, y], z] = 0$ имеют место тождества

$$[x, z]\,[y, t] = -[x, t]\,[y, z], \quad [x, y]\,[x, z] = 0. \tag{12}$$

Используя равенства $xy = yx + [x, y]$ и $[x, y]z + V_p = z[x, y] + V_p$ и тождества (12), как следствие получаем следующую лемму.

Лемма 2. *Алгебра A/V_p является линейной оболочкой множества G.*

3. Случай поля характеристики 2

Нам понадобятся следующие вспомогательные леммы.

Лемма 3. *Пусть U — T-пространство в алгебре A/V_2, $h \cdot x_i^2 + V_2 \in U$ и $h \cdot x_i^2 x_j^2 + V_2 \in U$, где $i \neq j$ и в элемент $h \in A$ не входит порождающий x_i или h отсутствует. Тогда $h \cdot x_i x_j [x_i, x_j] + V_2 \in U$.*

Доказательство. Рассмотрим эндоморфизм φ алгебры A/V_2, такой что $\varphi(x_i + V_2) = x_i x_j + V_2$, $\varphi(x_t + V_2) = x_t + V_2$ для всех $t \neq i$. Тогда $\varphi(h \cdot x_i^2 + V_2) \in U$. Заметим, что

$$\varphi(h \cdot x_i^2 + V_2) = h \cdot (x_i x_j)^2 + V_2 = h \cdot x_i^2 x_j^2 + h \cdot x_i x_j [x_i, x_j] + V_2.$$

Так как $h \cdot x_i^2 x_j^2 + V_2 \in U$, то $h \cdot x_i x_j [x_i, x_j] + V_2 \in U$. $\square$

Лемма 4. *Пусть U — T-пространство в алгебре A/V_2, $h \cdot x_i^2 + V_2 \in U$, где в элемент $h \in A$ не входит порождающий x_i или h отсутствует. Тогда $h \cdot [x_i, x_j] + V_2 \in U$ для любого порождающего $x_j + V_2$.*

Доказательство. Рассмотрим эндоморфизмы ψ и χ алгебры A/V_2, такие что $\psi(x_i + V_2) = x_i + x_j + V_2$, $\psi(x_t + V_2) = x_t + V_2$ для всех $t \neq i$, $\chi(x_i + V_2) = x_j + V_2$, $\chi(x_t + V_2) = x_t + V_2$ для всех $t \neq i$. Тогда $\psi(h \cdot x_i^2 + V_2) \in U$ и $\chi(h \cdot x_i^2 + V_2) \in U$. Заметим, что

$$\psi(h \cdot x_i^2 + V_2) = h \cdot (x_i + x_j)^2 + V_2 = h \cdot x_i^2 + h \cdot x_j^2 + h \cdot [x_i, x_j] + V_2,$$
$$\chi(h \cdot x_i^2 + V_2) = h \cdot x_j^2 + V_2.$$

Таким образом,

$$h\cdot[x_i,x_j]+V_2=h\cdot x_i^2+V_2+\psi(h\cdot x_i^2+V_2)+\chi(h\cdot x_i^2+V_2)\in U. \qquad \square$$

Лемма 5. *Пусть U — Т-пространство в алгебре A/V_2, $i\neq j$, $h\cdot[x_i,x_j]+V_2\in U$ и в элемент $h\in A$ не входят порождающие x_i, x_j или h отсутствует. Тогда $h\cdot x_i[x_i,x_j]+V_2\in U$.*

Доказательство. Рассмотрим эндоморфизм θ алгебры A/V_2, такой что $\theta(x_j+V_2)=x_ix_j+V_2$, $\theta(x_t+V_2)=x_t+V_2$ для всех $t\neq j$. Тогда

$$\theta(h\cdot[x_i,x_j]+V_2)=h\cdot[x_i,x_ix_j]+V_2=h\cdot x_i[x_i,x_j]+V_2\in U. \qquad \square$$

Доказательство леммы 1. Так как все элементы вида $x_1^2x_2^2\dots x_k^2+V_2$ ($k\geqslant 1$) лежат в Т-пространстве S, то с помощью рассуждений по индукции, используя леммы 3 и 4, а также подходящие автоморфизмы алгебры A/V_2, действующие как перестановки на множестве порождающих, получаем, что в S лежат все элементы вида $\Pi+V_2$, где Π — произведение элементов вида x_s^2, $x_sx_t[x_s,x_t]$ и $[x_s,x_t]$, т. е. вида (3). Воспользовавшись леммой 5 для элементов вида $\Pi\cdot[x_i,x_j]+V_2\in S$, получаем, что в S лежат все элементы вида (5). Тогда, применив подходящие эндоморфизмы алгебры A/V_2, получим, что в S лежат также все элементы вида (4), (6) и (7). $\square$

Доказательство предложения 2 для случая $p=2$.

1. Рассмотрим элементы из множества G (см. лемму 2). Так как алгебра A/V_2 есть фактор-алгебра алгебры A/U_2, то в ней имеет место тождество (10). Значит, любое произведение g из множества G можно переписать в виде

$$g=g_1g_2g_3, \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}
&g_1=x_{i_1}\dots x_{i_l}+V_2 \quad (i_1<\dots<i_l),\\
&g_2=x_{j_1}^2\dots x_{j_m}^2+V_2 \quad (j_1<\dots<j_m),\\
&g_3=[x_{k_1},x_{k_2}]\dots[x_{k_{2n-1}},x_{k_{2n}}]+V_2 \quad (k_1<\dots<k_{2n}),
\end{aligned}$$

при этом некоторые (но не все) множители g_i могут отсутствовать. Назовём множители g_1, g_2 и g_3 соответственно начальной, средней и конечной частью произведения g. Число l назовём длиной произведения g_1.

Пусть g — произведение вида (13). Обозначим через $C_1=C_1(g)$ множество всех порождающих алгебры A/V_2, которые входят в g_1 и не входят в g_2 и g_3, через $C_{12}=C_{12}(g)$ множество всех порождающих алгебры A/V_2, которые входят в g_1 и g_2 и не входят в g_3, через $C_{123}=C_{123}(g)$ множество всех порождающих алгебры A/V_2, которые входят в g_1, g_2 и g_3. Аналогично определим C_2, C_3, C_{13}, C_{23}. Положим

$$D=D(g)=C_1\cup C_{12}\cup C_{13}\cup C_{123}, \quad C=C(g)=D\cup C_2\cup C_3\cup C_{23}.$$

Таким образом, $D(g)$ — это множество всех порождающих алгебры A/V_2, входящих в начальную часть произведения g, а $C(g)$ — это множество всех порождающих алгебры A/V_2, входящих в произведение g.

2. Заметим, что если $f \in H$, $f \notin S$ и $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in S$, то мы можем отбросить f_1, т. е. заменить f на f_2, так как тогда $f_2 \notin S$ (иначе $f \in S$) и $f_2 \in H$ (так как $f_2 = f + f_1$). Этим приёмом мы будем часто пользоваться в дальнейшем.

3. Рассмотрим теперь эндоморфизмы $\varphi = \varphi_{i,s,t}\colon A/V_2 \to A/V_2$, такие что $\varphi(x_i + V_2) = x_i + [x_s, x_t] + V_2$, $\varphi(x_j + V_2) = x_j + V_2$ для всех $j \neq i$. Тогда если g — произведение вида (13), то

$$g + \varphi(g) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_i + V_2 \text{ не входит в } g_1, \\ \tilde{g}_1 g_2 g_3 [x_s, x_t], & \text{если } x_i + V_2 \text{ входит в } g_1. \end{cases}$$

Здесь $\tilde{g}_1$ — произведение, полученное из g_1 отбрасыванием множителя x_i.

Рассмотрим также эндоморфизмы $\psi = \psi_{i,s}\colon A/V_2 \to A/V_2$, такие что $\psi(x_i + V_2) = x_i + x_s + V_2$, $\psi(x_j + V_2) = x_j + V_2$ для всех $j \neq i$, и эндоморфизмы $\chi = \chi_{i,s}\colon A/V_2 \to A/V_2$, такие что $\chi(x_i + V_2) = x_s + V_2$, $\chi(x_j + V_2) = x_j + V_2$ для всех $j \neq i$. Пусть g — произведение вида (13), причём g_1 состоит из одного порождающего, т. е. $g_1 = x_j + V_2$. Пусть либо порождающий $x_i + V_2$ входит ровно в одну из частей g_1, g_2 или g_3, т. е. $g = x_i g_2 g_3$, или $g = x_j x_i^2 \tilde{g}_2 g_3$, где $j \neq i$, или $g = x_j g_2 \tilde{g}_3 [x_i, x_u]$, где $i \neq j$, $i \neq u$, либо порождающий $x_i + V_2$ входит в g_1 и g_2 и не входит в g_3, т. е. $g = x_i x_i^2 \tilde{g}_2 g_3$, либо порождающий $x_i + V_2$ входит в g_2 и g_3 и не входит в g_1, т. е. $g = x_j x_i^2 \tilde{g}_2 \tilde{g}_3 [x_i, x_u]$, где $i \neq j$, $i \neq u$. Пусть $x_s + V_2$, $x_t + V_2$ — порождающие A/V_2, не входящие в g. Положим $h_1 = g + \psi_{i,s}(g) + \chi_{i,s}(g)$, тогда

$$h_1 = \begin{cases} 0, & \text{если } x_i + V_2 \text{ входит только в } g_1, \\ & \text{или только в } g_3 \\ x_j \tilde{g}_2 g_3 [x_i, x_s], & \text{если } x_i + V_2 \text{ входит только в } g_2, \\ x_i x_s^2 \tilde{g}_2 g_3 + x_s g_2 g_3 + & \\ \quad + x_i \tilde{g}_2 g_3 [x_i, x_s] + x_s \tilde{g}_2 g_3 [x_i, x_s], & \text{если } x_i + V_2 \text{ входит в } g_1,\ g_2 \\ & \text{и не входит в } g_3, \\ x_j g_2 \tilde{g}_3 [x_s, x_u] + x_j x_s^2 \tilde{g}_2 g_3, & \text{если } x_i + V_2 \text{ входит в } g_2,\ g_3 \\ & \text{и не входит в } g_1. \end{cases}$$

Заметим, что если порождающий $x_i + V_2$ входил в начальную и среднюю части произведения g, то $h_1 = h' + h''$, где $h' = x_i x_s^2 \tilde{g}_2 g_3 + x_s g_2 g_3$ и $h'' = x_i \tilde{g}_2 g_3 [x_i, x_s] + x_s \tilde{g}_2 g_3 [x_i, x_s]$, причём $h'' \in S$. Пусть теперь $h_1' = h'$, если $x_i + V_2$ входил в начальную и среднюю части произведения g, и $h_1' = h_1$ в остальных случаях. Положим $h_2 = h_1' + \psi_{s,t}(h_1') + \chi_{s,t}(h_1')$. Получаем

$$h_2 = \begin{cases} 0, & \text{если } x_i + V_2 \text{ входит ровно в одну из частей } g_1,\ g_2 \text{ или } g_3, \\ g_1 \tilde{g}_2 g_3 [x_s, x_t], & \text{если } x_i + V_2 \text{ входит в } g_1 \text{ и } g_2, \text{ или } g_2 \text{ и } g_3. \end{cases}$$

4. Заметим, что если элемент $f = \sum\limits_t \alpha_t g^{(t)}$ лежит в H и мы зафиксировали произведение $g^{(1)}$, то мы можем отбросить все слагаемые $g^{(t)}$, для которых набор порождающих, входящих в $g^{(t)}$, отличается от набора порождающих, входящих в $g^{(1)}$, т. е. f можно заменить на элемент $f' = \sum\limits_k \alpha_{t_k} g^{(t_k)} \in H$, где для любого k справедливо $C^{(t_k)} = C^{(1)}$.

Действительно, пусть $g^{(1)} = g^{(1)}(x_{j_1} + V_2, \ldots, x_{j_q} + V_2)$ и $\tau = \tau_{j_1,\ldots,j_q}$ — такой эндоморфизм алгебры A/V_2, что $\tau(x_{j_u} + V_2) = x_{j_u} + V_2$ для $u = 1, 2, \ldots, q$, $\tau(x_j + V_2) = 0$ для $j \notin \{j_1, \ldots, j_q\}$. Применим τ к элементу f и получим элемент f'_0, в котором для любого k в $g^{(t_k)}$ не входят никакие порождающие $x_j + V_2$ для $j \notin \{j_1, \ldots, j_q\}$.

Далее, пусть ξ_i — такие эндоморфизмы алгебры A/V_2, что $\xi_i(x_j + V_2) = x_j + V_2$ для $j \neq i$ и $\xi_i(x_i + V_2) = 0$. Легко проверить, что $f'_1 = f'_0 + \xi_{j_1}(f'_0) \in H$ — линейная комбинация элементов вида (13), в каждый из которых обязательно входит порождающий $x_{j_1} + V_2$. Рассматривая $f'_2 = f'_1 + \xi_{j_2}(f'_1) \in H$ и так далее, мы получим элемент $f' = f'_q = \sum\limits_k \alpha_{t_k} g^{(t_k)} \in H$, где $g^{(t_k)}$ — попарно различные произведения вида (13), в каждое из которых входят в точности порождающие $x_{j_1} + V_2, \ldots, x_{j_q} + V_2$ и не входят никакие другие.

Отметим, что если $f \in H \setminus S$, то в результате этой операции мы получаем элемент, лежащий в H, но не обязательно в $H \setminus S$.

5. Пусть $f \in H$, $f \notin S$, $f = \sum\limits_t \alpha_t g^{(t)}$, где $\alpha_t \in F$, $\alpha_t \neq 0$, $g^{(t)}$ — попарно различные произведения вида (13). Обозначим $C^{(t)} = C(g^{(t)})$. Заметим, что мы можем считать, что в элементе f для любого t выполняется $C_1^{(t)} \cup C_{12}^{(t)} \neq \varnothing$, т. е. в начальную часть каждого слагаемого $g^{(t)}$ входит хотя бы один порождающий, который не входит в его конечную часть.

Действительно, нетрудно проверить, что из тождеств (12) следует тождество

$$yz[y, u] = zy[y, u]. \tag{14}$$

Тогда, учитывая тождества (12), (10) и (14), получаем, что если для некоторого t выполнено $C_1^{(t)} \cup C_{12}^{(t)} = \varnothing$, то $g^{(t)} \in S$, так как тогда $g^{(t)}$ имеет вид (3) (если длина начальной части $g_1^{(t)}$ чётная) или (5) (если длина $g_1^{(t)}$ нечётная). Таким образом, все слагаемые $g^{(t)}$, где $C_1^{(t)} \cup C_{12}^{(t)} = \varnothing$, можно отбросить, как было отмечено в пункте 2.

6. Пусть теперь $f \in H$, $f \notin S$. Ясно, что, применив, если необходимо, подходящий автоморфизм алгебры A/V_2, мы можем считать, что в f входят порождающие $x_1 + V_2, \ldots, x_q + V_2$ для некоторого $q \in \mathbb{N}$ и не входят порождающие $x_j + V_2$ для всех $j > q$. Пусть $f = \sum\limits_{t \in N_0} \alpha_t g^{(t)}$, где N_0 — некоторое конечное множество индексов и для всех $t \in N_0$ выполняется $\alpha_t \in F$, $\alpha_t \neq 0$, $g^{(t)}$ — попарно различные произведения вида (13), причём $C_1^{(t)} \cup C_{12}^{(t)} \neq \varnothing$. Обозначим символом M_0 множество всех $g^{(t)}$ для $t \in N_0$.

Пусть $\max\limits_{t\in N_0}\left|D^{(t)}\right| = d_{\max}$. Положим

$$M_1 = \left\{g^{(t)} \in M_0 \;\middle|\; \left|D^{(t)}\right| = d_{\max}\right\}.$$

Пусть $g^{(t)} \in M_1$ тогда и только тогда, когда $t \in N_1$ ($N_1 \subseteq N_0$).

Пусть $\max\limits_{t\in N_1}\left|C_{123}^{(t)}\right| = c_{\max\text{-}123}$. Выберем элемент $g^{(u_1)} \in M_1$, такой что $\left|C_{123}^{(u_1)}\right| = c_{\max\text{-}123}$. Положим

$$M_2 = \left\{g^{(t)} \in M_1 \;\middle|\; C_{123}^{(t)} = C_{123}^{(u_1)}\right\}.$$

Пусть $g^{(t)} \in M_2$ тогда и только тогда, когда $t \in N_2$ ($N_2 \subseteq N_1$).

Пусть $\min\limits_{t\in N_2}\left|C_{13}^{(t)}\right| = c_{\min\text{-}13}$. Выберем элемент $g^{(u_2)} \in M_2$, такой что $\left|C_{13}^{(u_2)}\right| = c_{\min\text{-}13}$. Положим

$$M_3 = \left\{g^{(t)} \in M_2 \;\middle|\; C_{13}^{(t)} = C_{13}^{(u_2)}\right\}.$$

Пусть $g^{(t)} \in M_3$ тогда и только тогда, когда $t \in N_3$ ($N_3 \subseteq N_2$).

Пусть $\max\limits_{t\in N_3}\left|C_{12}^{(t)} \cup C_{23}^{(t)}\right| = c_{\max\text{-}12\text{-}23}$. Выберем элемент $g^{(u_3)} \in M_3$, такой что $\left|C_{12}^{(u_3)} \cup C_{23}^{(u_3)}\right| = c_{\max\text{-}12\text{-}23}$. Положим

$$M_4 = \left\{g^{(t)} \in M_3 \;\middle|\; C_{12}^{(t)} \cup C_{23}^{(t)} = C_{12}^{(u_3)} \cup C_{23}^{(u_3)}\right\}.$$

Пусть элемент $g^{(t)} \in M_5$ тогда и только тогда, когда $t \in N_4$ ($N_4 \subseteq N_3$).

И наконец, пусть $\max\limits_{t\in N_4}\left|C_2^{(t)}\right| = c_{\max\text{-}2}$. Выберем элемент $g^{(u_4)} \in M_4$, такой что $\left|C_2^{(u_4)}\right| = c_{\max\text{-}2}$. Положим

$$M_5 = \left\{g^{(t)} \in M_4 \;\middle|\; C_2^{(t)} = C_2^{(u_4)}\right\}.$$

Пусть $g^{(t)} \in M_5$ тогда и только тогда, когда $t \in N_5$ ($N_5 \subseteq N_4$).

Возможны два случая.

А. Найдётся $t \in N_5$, такой что $C_{12}^{(t)} \neq \varnothing$.

В. Для всех $t \in N_5$ выполнено $C_{12}^{(t)} = \varnothing$.

7. Рассмотрим случай А. Здесь возможны следующие подслучаи.

А1. Найдутся такие $t_0 \in N_5$ (будем считать $t_0 = 1$) и $x_i + V_2 \in C_{12}^{(1)}$, что в M_5 не содержится таких элементов $g^{(t)}$, что

$$\begin{aligned}
&C_1^{(t)} = C_1^{(1)}, \quad C_2^{(t)} = C_2^{(1)}, \quad C_3^{(t)} = C_3^{(1)}, \quad C_{13}^{(t)} = C_{13}^{(1)}, \quad C_{123}^{(t)} = C_{123}^{(1)},\\
&C_{12}^{(t)} = \left(C_{12}^{(1)} \setminus \{x_i + V_2\}\right) \cup \{x_k + V_2\} \quad (\text{для некоторого } k \neq i),\\
&x_k + V_2 \in C_{23}^{(1)}, \quad C_{23}^{(t)} = \left(C_{23}^{(1)} \setminus \{x_k + V_2\}\right) \cup \{x_i + V_2\},
\end{aligned} \tag{15}$$

а также таких элементов $g^{(t)}$, что

$$\begin{aligned}
&C_1^{(t)} = C_1^{(1)} \cup \{x_k + V_2\} \quad (\text{для некоторого } k \neq i), \quad C_{12}^{(t)} = C_{12}^{(1)} \setminus \{x_i + V_2\},\\
&C_{23}^{(t)} = C_{23}^{(1)} \cup \{x_i + V_2\}, \quad x_k + V_2 \in C_3^{(1)}, \quad C_3^{(t)} = C_3^{(1)} \setminus \{x_k + V_2\},\\
&C_{123}^{(t)} = C_{123}^{(1)}, \quad C_{13}^{(t)} = C_{13}^{(1)}, \quad C_2^{(t)} = C_2^{(1)}.
\end{aligned} \tag{16}$$

A2. Для каждого $t \in N_5$ и каждого $x_i + V_2 \in C_{12}^{(t)}$ найдётся такой $t' \in N_5$, для которого выполняется одно из условий пункта A1 (если заменить 1 на t и t на t').

Мы покажем, что в случае A1 элемент f можно преобразовать в рамках T-пространства H таким образом, что слагаемое $g^{(1)}$ перейдёт в элемент $x_{2s+1}[x_1, x_2] \ldots [x_{2s-1}, x_{2s}] + V_2$ для некоторого $s \in \mathbb{N}$, а остальные слагаемые перейдут в 0 или будут отброшены в процессе преобразований (как элементы из S, а значит, и из H). Заметим, что в этом случае нет необходимости следить, чтобы получаемый на каждом шаге элемент не лежал в S. Для случая A2 мы покажем, что элемент $f \in H \setminus S$ можно заменить на элемент $f' \in H \setminus S$, для которого выполняется условие пункта A1.

8. Рассмотрим случай A1. Отбросим в элементе $f = \sum\limits_{t \in N_0} \alpha_t g^{(t)}$ все слагаемые $g^{(t)}$, такие что набор порождающих, входящих в $g^{(t)}$, не совпадает с набором порождающих, входящих в $g^{(1)}$, т. е. $C^{(t)} \neq C^{(1)}$. Обозначим полученный элемент через f'. Таким образом, получаем

$$f' = \sum_{t \in N_0'} \alpha_t g^{(t)} \in H,$$

где $N_0' \subseteq N_0$ и для всех $t \in N_0'$ выполняется $C^{(t)} = C^{(1)}$.

Пусть

$$D^{(1)} = \{x_{i_1} + V_2,\ x_{i_2} + V_2, \ldots,\ x_{i_{d-1}} + V_2,\ x_{i_d} + V_2\},$$

где $d = d_{\max}$, $i_d = i$. Положим

$$f_0^{(1)} = f', \quad f_1^{(1)} = f_0^{(1)} + \varphi_{i_1, q+1, q+2}\bigl(f_0^{(1)}\bigr).$$

Ясно, что $f_1^{(1)} \in H$, причём

$$f_1^{(1)} = \sum_t \alpha_t \bigl(g^{(t)} + \varphi_{i_1, q+1, q+2}\bigl(g^{(t)}\bigr)\bigr)$$

и

$$g^{(t)} + \varphi_{i_1, q+1, q+2}\bigl(g^{(t)}\bigr) = \\ = \begin{cases} 0, & \text{если } x_{i_1} + V_2 \text{ не входит в } g_1^{(t)}, \\ \tilde{g}_1^{(t)} g_2^{(t)} g_3^{(t)} [x_{q+1}, x_{q+2}], & \text{если } x_{i_1} + V_2 \text{ входит в } g_1^{(t)}, \end{cases}$$

где произведение $\tilde{g}_1^{(t)}$ получено из $g_1^{(t)}$ отбрасыванием множителя x_{i_1}. Положим

$$f_2^{(1)} = f_1^{(1)} + \varphi_{i_2, q+3, q+4}\bigl(f_1^{(1)}\bigr), \ldots,\ f_{d-1}^{(1)} = f_{d-2}^{(1)} + \varphi_{i_{d-1}, q+2d-3, q+2d-2}\bigl(f_{d-2}^{(1)}\bigr).$$

Рассмотрим элемент $f_{d-1}^{(1)} \in H$ и произведения $g^{(t)}$, где $t \in N_0'$. Если $t \notin N_1$, т. е. $g^{(t)} \in M_0 \setminus M_1$, то $|D^{(t)}| < d_{\max}$, т. е. либо найдётся порождающий $x_j + V_2$ $(j \neq i)$, такой что $x_j + V_2 \in D^{(1)}$, $x_j + V_2 \notin D^{(t)}$, тогда произведение $g^{(t)}$ перешло в 0, либо $D^{(t)} = D^{(1)} \setminus \{x_i + V_2\}$, тогда вместо произведения $g^{(t)}$ появилось произведение $\bar{g}^{(t)} = \bar{g}_2^{(t)}\bar{g}_3^{(t)} \in S$, где $\bar{g}_2^{(t)} = g_2^{(t)}$ и

$$\bar{g}_3^{(t)} = g_3^{(t)}\,[x_{q+1}, x_{q+2}] \dots [x_{q+2d-3}, x_{q+2d-2}].$$

Если теперь $t \in N_1 \cap N_0'$, т. е. $g^{(t)} \in M_1$, то $\left|D^{(t)}\right| = d_{\max}$, т. е. либо, так же как и в предыдущем случае, найдётся порождающий $x_j + V_2$ $(j \neq i)$, такой что $x_j + V_2 \in D^{(1)}$, $x_j + V_2 \notin D^{(t)}$, тогда произведение $g^{(t)}$ перешло в 0, либо $D^{(t)} = (D^{(1)} \setminus \{x_i + V_2\}) \cup \{x_k + V_2\}$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ (возможно, $k = i$), тогда вместо произведения $g^{(t)}$ появилось произведение $\bar{g}^{(t)} = x_k\bar{g}_2^{(t)}\bar{g}_3^{(t)}$, где $\bar{g}_2^{(t)}$ и $\bar{g}_3^{(t)}$ такие, как определено выше. В частности, $\bar{g}^{(1)} = x_i g_2^{(1)}\bar{g}_3^{(1)}$.

Обозначим $\bar{C}^{(t)} = C(\bar{g}^{(t)})$. Заметим, что если порождающий $x_k + V_2$ входит в конечную часть $g_3^{(t)}$ произведения $g^{(t)}$, т. е. $x_k + V_2 \in C_{13}^{(t)} \cup C_{123}^{(t)}$, то $x_k + V_2 \in \bar{C}_{13}^{(t)} \cup \bar{C}_{123}^{(t)}$, т. е. порождающий $x_k + V_2$ входит в $\bar{g}_3^{(t)}$, и $\bar{g}^{(t)} \in S$. Ясно, что $\bar{g}^{(1)} \notin S$, так как $x_i + V_2 \in C_{12}^{(1)}$.

Таким образом, получаем, что $f_{d-1}^{(1)} = \sum\limits_{t \in N_0''} \alpha_t \bar{g}^{(t)}$, где $N_0'' \subseteq N_0'$. Отбросим в элементе $f_{d-1}^{(1)}$ все слагаемые $\bar{g}^{(t)} \in S$. Обозначим полученный элемент через $f_d^{(1)}$. Тогда получаем $f_d^{(1)} \in H$, $f_d^{(1)} = \sum\limits_{t \in N_1'} \alpha_t \bar{g}^{(t)}$, где $N_1' \subseteq N_1 \cap N_0''$ (ясно, что $1 \in N_1'$) и для всех $t \in N_1'$ выполняется $x_k + V_2 \in C_1^{(t)} \cup C_{12}^{(t)}$, причём либо $i = k$, и тогда $D^{(t)} = D^{(1)}$, либо $i \neq k$, и тогда $x_k + V_2 \notin D^{(1)}$, $x_i + V_2 \notin D^{(t)}$.

Отбросим теперь в элементе $f_d^{(1)}$ все такие произведения $\bar{g}^{(t)}$, что множество порождающих, входящих в $\bar{g}^{(t)}$, не совпадает с множеством порождающих, входящих в $\bar{g}^{(1)}$, т. е. $\bar{C}^{(t)} \neq \bar{C}^{(1)}$. Обозначим полученный элемент через $f_{d+1}^{(1)}$. Заметим, что если существует такой порождающий $x_j + V_2$, что $x_j + V_2 \in C_1^{(1)}$, $x_j + V_2 \notin C_1^{(t)}$ (ясно, что $j \neq i, k$), то $x_j + V_2 \in C_{12}^{(t)} \cup C_{13}^{(t)} \cup C_{123}^{(t)}$, следовательно, $x_j + V_2 \in \bar{C}_2^{(t)} \cup \bar{C}_3^{(t)} \cup \bar{C}_{23}^{(t)}$, т. е. $x_j + V_2 \in \bar{C}^{(t)}$, но $x_j + V_2 \notin \bar{C}^{(1)}$, и элемент $\bar{g}^{(t)}$ будет отброшен. Аналогично, если существует такой порождающий $x_j + V_2$, что $j \neq k$, $x_j + V_2 \in C_1^{(t)}$, $x_j + V_2 \notin C_1^{(1)}$ (ясно, что $j \neq i$), то $x_j + V_2 \in C_{12}^{(1)} \cup C_{13}^{(1)} \cup C_{123}^{(1)}$, следовательно, $x_j + V_2 \in \bar{C}_2^{(1)} \cup \bar{C}_3^{(1)} \cup \bar{C}_{23}^{(1)}$, т. е. $x_j + V_2 \in \bar{C}^{(1)}$, но $x_j + V_2 \notin \bar{C}^{(t)}$, и элемент $\bar{g}^{(t)}$ также будет отброшен. Получаем $f_{d+1}^{(1)} \in H$, $f_{d+1}^{(1)} = \sum\limits_{t \in N_1''} \alpha_t \bar{g}^{(t)}$, где $N_1'' \subseteq N_1'$ и для всех $t \in N_1''$ либо $C_1^{(t)} = C_1^{(1)}$, $x_k + V_2 \in C_{12}^{(t)}$, либо $C_1^{(t)} = C_1^{(1)} \cup \{x_k + V_2\}$.

Положим

$$f_{d+2}^{(1)} = \psi_{i,q+2d-1}\big(f_{d+1}^{(1)}\big) + \chi_{i,q+2d-1}\big(f_{d+1}^{(1)}\big) + f_{d+1}^{(1)}.$$

Пусть элемент $\bar{f}_{d+2}^{(1)}$ получен из $f_{d+2}^{(1)}$ отбрасыванием слагаемых, лежащих в S. Положим

$$f_{d+3}^{(1)} = \psi_{q+2d-1,q+2d}\big(\bar{f}_{d+2}^{(1)}\big) + \chi_{q+2d-1,q+2d}\big(\bar{f}_{d+2}^{(1)}\big) + \bar{f}_{d+2}^{(1)}.$$

Ясно, что $f_{d+3}^{(1)} \in H$. Получаем $f_{d+3}^{(1)} = \sum\limits_{t \in N_1''} \alpha_t \bar{\bar{g}}^{(t)}$,

$$\bar{\bar{g}}^{(t)} = \begin{cases} 0, & \text{если } x_i + V_2 \text{ входит ровно в одну из частей} \\ & \bar{g}_1^{(t)},\ \bar{g}_2^{(t)} \text{ или } \bar{g}_3^{(t)}, \\ x_k \bar{\bar{g}}_2^{(t)} \bar{\bar{g}}_3^{(t)}, & \text{если } x_i + V_2 \text{ входит в } \bar{g}_1^{(t)} \text{ и } \bar{g}_2^{(t)} \text{ или в } \bar{g}_2^{(t)} \text{ и } \bar{g}_3^{(t)}, \end{cases}$$

где произведение $\bar{\bar{g}}_2^{(t)}$ получено из $\bar{g}_2^{(t)}$ отбрасыванием множителя x_i^2, $\bar{\bar{g}}_3^{(t)} = \bar{g}_3^{(t)} \cdot [x_{q+2d-1}, x_{q+2d}]$.

Получаем, что если $i = k$ и $x_i + V_2 \in C_1^{(t)}$ в элементе $\bar{g}^{(t)}$, то $x_i + V_2 \in \bar{C}_1^{(t)}$ и $\bar{g}^{(t)}$ перешло в 0, и если $i \neq k$ и $x_i + V_2 \in C_2^{(t)} \cup C_3^{(t)}$, то $x_i + V_2 \in \bar{C}_2^{(t)} \cup \bar{C}_3^{(t)}$ и $\bar{g}^{(t)}$ также перешло в 0. Таким образом, $f_{d+3}^{(1)} = \sum\limits_{t \in N_1'''} \alpha_t \bar{\bar{g}}^{(t)}$, где $N_1''' \subseteq N_1''$, причём если $i = k$, то $x_i + V_2 \in C_{12}^{(t)}$, и если $i \neq k$, то $x_i + V_2 \in C_{23}^{(t)}$. Обозначим $\bar{\bar{C}}^{(t)} = C(\bar{\bar{g}}^{(t)})$.

Положим $q_1 = q + 2d$. Пусть $C_{123}^{(1)} = \{x_{j_1} + V_2, \ldots, x_{j_{m'}} + V_2\}$, $C_{23}^{(1)} = \{x_{j_{m'+1}} + V_2, \ldots, x_{j_m} + V_2\}$. Положим

$$f_0^{(2)} = f_{d+3}^{(1)}, \quad f_1^{(2)} = \psi_{j_1, q_1+1}\big(f_0^{(2)}\big) + \chi_{j_1, q_1+1}\big(f_0^{(2)}\big) + f_0^{(2)}.$$

Пусть $\bar{f}_1^{(2)}$ получен из $f_1^{(2)}$ отбрасыванием слагаемых, лежащих в S. Положим

$$f_2^{(2)} = \psi_{q_1+1, q_1+2}\big(\bar{f}_1^{(2)}\big) + \chi_{q_1+1, q_1+2}\big(\bar{f}_1^{(2)}\big) + \bar{f}_1^{(2)}.$$

Положим далее

$$f_3^{(2)} = \psi_{q_1+3, q_1+4}\big(f_2^{(2)}\big) + \chi_{q_1+3, q_1+4}\big(f_2^{(2)}\big) + f_2^{(2)}, \ldots,$$
$$f_{2m-1}^{(2)} = \psi_{j_m, q_1+m-1}\big(f_{2m-2}^{(2)}\big) + \chi_{j_m, q_1+m-1}\big(f_{2m-1}^{(2)}\big) + f_{2m-2}^{(2)}.$$

Пусть $\bar{f}_{2m-1}^{(2)}$ получен из $f_{2m-1}^{(2)}$ отбрасыванием слагаемых, лежащих в S. Положим

$$f_{2m}^{(2)} = \psi_{q_1+2m-1, q_1+2m}\big(\bar{f}_{2m-1}^{(2)}\big) + \chi_{q_1+2m-1, q_1+2m}\big(\bar{f}_{2m-1}^{(2)}\big) + \bar{f}_{2m-1}^{(2)}.$$

Рассмотрим элемент $f_{2m}^{(2)}$ и произведения $\bar{\bar{g}}^{(t)}$, где $t \in N_1'''$. Ясно, что $f_{2m}^{(2)} \in H$. Заметим, что если произведение $\bar{\bar{g}}^{(t)}$ такое, что $t \notin N_2$, т. е. $g^{(t)} \in M_1 \setminus M_2$, то $\big|C_{123}^{(t)}\big| \leqslant c_{\max\text{-}123}$, $C_{123}^{(t)} \neq C_{123}^{(1)}$, следовательно, найдётся такой порождающий $x_j + V_2$, что $x_j + V_2 \in C_{123}^{(1)}$, $x_j + V_2 \notin C_{123}^{(t)}$ (ясно, что $j \neq i, k$). Тогда $x_j + V_2 \in C_{12}^{(t)} \cup C_{13}^{(t)}$, т. е. $x_j + V_2 \in \bar{\bar{C}}_2^{(t)} \cup \bar{\bar{C}}_3^{(t)}$, и произведение $\bar{\bar{g}}^{(t)}$ перешло в 0. Если же произведение $\bar{\bar{g}}^{(t)}$ такое, что $t \in N_2$, т. е. $g^{(t)} \in M_2$, то $C_{123}^{(t)} = C_{123}^{(1)}$, тогда если $i = k$, то $C_{12}^{(t)} \cup C_{13}^{(t)} = C_{12}^{(1)} \cup C_{13}^{(1)}$, и если $i \neq k$, то либо $x_k + V_2 \in C_1^{(t)}$, $C_{12}^{(t)} \cup C_{13}^{(t)} = (C_{12}^{(1)} \setminus \{x_i + V_2\}) \cup C_{13}^{(1)}$, либо $x_k + V_2 \in C_{12}^{(t)}$, $(C_{12}^{(t)} \setminus \{x_k + V_2\}) \cup C_{13}^{(t)} = (C_{12}^{(1)} \setminus \{x_i + V_2\}) \cup C_{13}^{(1)}$. В этом случае, если найдётся такой порождающий $x_j + V_2$, что $x_j + V_2 \in C_{23}^{(1)}$, $x_j + V_2 \notin C_{23}^{(t)}$, и $j \neq k$ для последнего случая (т. е.

случая $i \neq k$, $x_k + V_2 \in C_{12}^{(t)}$), то либо $x_j + V_2 \in C_2^{(t)} \cup C_3^{(t)}$, т. е. $x_j + V_2 \in \in \bar{\bar{C}}_2^{(t)} \cup \bar{\bar{C}}_3^{(t)}$ и элемент $\bar{\bar{g}}^{(t)}$ перешёл в 0, либо $x_j + V_2 \in C_1^{(t)}$ (во втором случае это имеет место, если $i \neq k$, $j = k$), тогда $\bar{\bar{g}}^{(t)}$ также перешёл в 0. Получаем $f_{2m}^{(2)} = \sum\limits_{t \in N_2'} \alpha_t \breve{g}^{(t)}$ ($N_2' \subseteq N_2 \cap N_1'''$), где $\breve{g}^{(t)} = x_k \breve{g}_2^{(t)} \breve{g}_3^{(t)}$, произведение $\breve{g}_2^{(t)}$ получено из $\bar{\bar{g}}_2^{(t)}$ отбрасыванием множителя $x_{j_1}^2 \ldots x_{j_m}^2$,

$$\breve{g}_3^{(t)} = \bar{\bar{g}}_3^{(t)}[x_{q_1+1}, x_{q_1+2}] \ldots [x_{q_1+2m-1}, x_{q_1+2m}],$$

причём если $i = k$ или $i \neq k$, $x_k + V_2 \in C_1^{(t)}$, то $C_{23}^{(1)} \subseteq C_{23}^{(t)}$, и если $i \neq k$, $x_k + V_2 \in \in C_{12}^{(t)}$, то либо $x_k + V_2 \notin C_{23}^{(1)}$ и тогда также $C_{23}^{(1)} \subseteq C_{23}^{(t)}$, либо $x_k + V_2 \in C_{23}^{(1)}$ и тогда $C_{23}^{(1)} \setminus \{x_k + V_2\} \subseteq C_{23}^{(t)}$. Обозначим $\breve{C}^{(t)} = C(\breve{g}^{(t)})$.

Положим $q_2 = q_1 + 2m$. Пусть

$$\big(C_{12}^{(1)} \setminus \{x_i + V_2\}\big) = \{x_{k_1} + V_2, \ldots, x_{k_{n'}} + V_2\}, \quad C_2^{(1)} = \{x_{k_{n'+1}} + V_2, \ldots, x_{k_n} + V_2\}.$$

Положим

$$f_0^{(3)} = f_{2m}^{(2)}, \quad f_1^{(3)} = \psi_{k_1, q_2+1}\big(f_0^{(3)}\big) + \chi_{k_1, q_2+1}\big(f_0^{(3)}\big) + f_0^{(3)}.$$

Ясно, что $f_1^{(3)} \in H$. Получаем

$$f_1^{(3)} = \sum_{t \in N_2'} \alpha_t (\psi_{k_1, q_2+1}(\breve{g}^{(t)}) + \chi_{k_1, q_2+1}(\breve{g}^{(t)}) + \breve{g}^{(t)}),$$

где

$$\psi_{k_1, q_2+1}(\breve{g}^{(t)}) + \chi_{k_1, q_2+1}(\breve{g}^{(t)}) + \breve{g}^{(t)} = \\ = \begin{cases} 0, & \text{если } x_{k_1} + V_2 \text{ входит в } \breve{g}_1^{(t)} \text{ или } \breve{g}_3^{(t)}, \\ x_k \breve{\breve{g}}_2^{(t)} \breve{g}_3^{(t)} \cdot [x_{k_1}, x_{q_2+1}], & \text{если } x_{k_1} + V_2 \text{ входит в } \breve{g}_2^{(t)}, \end{cases}$$

где произведение $\breve{\breve{g}}_2^{(t)}$ получено из $\breve{g}_2^{(t)}$ отбрасыванием множителя $x_{k_1}^2$.

Положим далее

$$f_2^{(3)} = \psi_{k_2, q_2+2}\big(f_1^{(3)}\big) + \chi_{k_2, q_2+2}\big(f_1^{(3)}\big) + f_1^{(3)}, \ldots,$$
$$f_n^{(3)} = \psi_{k_n, q_2+n}\big(f_{n-1}^{(3)}\big) + \chi_{k_n, q_2+n}\big(f_{n-1}^{(3)}\big) + f_{n-1}^{(3)}.$$

Рассмотрим элемент $f_n^{(3)}$ и произведения $\breve{g}^{(t)}$, где $t \in N_2'$. Если произведение $\breve{g}^{(t)}$ такое, что $t \notin N_3$, т. е. $g^{(t)} \in M_2 \setminus M_3$, тогда $\big|C_{13}^{(t)}\big| \geqslant c_{\min\text{-}13}$, $C_{13}^{(t)} \neq C_{13}^{(1)}$. Следовательно, найдётся такой порождающий $x_j + V_2$, что $x_j + V_2 \in C_{13}^{(t)}$, $x_j + V_2 \notin C_{13}^{(1)}$ (ясно, что $j \neq i, k$). Тогда $x_j + V_2 \in C_{12}^{(1)}$, т. е. $x_j + V_2 \in \breve{C}_2^{(1)}$, и элемент $\breve{g}^{(t)}$ перешёл в 0. Если произведение $\breve{g}^{(t)}$ такое, что $t \in N_3 \cap N_2'$, т. е. $g^{(t)} \in M_3$, то $C_{13}^{(t)} = C_{13}^{(1)}$. Тогда если $i = k$, то $C_{12}^{(t)} = C_{12}^{(1)}$, и если $i \neq k$, то либо $C_{12}^{(t)} = C_{12}^{(1)} \setminus \{x_i + V_2\}$, если $x_k + V_2 \in C_1^{(t)}$, либо $C_{12}^{(t)} \setminus \{x_k + V_2\} = C_{12}^{(1)} \setminus \{x_i + V_2\}$, если $x_k + V_2 \in C_{12}^{(t)}$.

Покажем, что если произведение $\breve{g}^{(t)}$ такое, что $t \notin N_4$, т. е. $t \in (N_3 \setminus N_4) \cap N_2'$ и, следовательно, $g^{(t)} \in M_3 \setminus M_4$, то оно уже перешло в 0. Действительно, тогда $\left|C_{12}^{(t)} \cup C_{23}^{(t)}\right| \leqslant c_{\max\text{-}12\text{-}23}$, $C_{12}^{(t)} \cup C_{23}^{(t)} \neq C_{12}^{(1)} \cup C_{23}^{(1)}$. Получаем, что если $i = k$, то $\left|C_{23}^{(t)}\right| \leqslant \left|C_{23}^{(1)}\right|$, $C_{23}^{(t)} \neq C_{23}^{(1)}$, что невозможно, так как $C_{23}^{(1)} \subseteq C_{23}^{(t)}$. Если $i \neq k$, $x_k + V_2 \in C_1^{(t)}$, то $\left|C_{23}^{(t)}\right| \leqslant \left|C_{23}^{(1)} \cup \{x_i + V_2\}\right|$, $C_{23}^{(t)} \neq C_{23}^{(1)} \cup \{x_i + V_2\}$, что невозможно, так как в этом случае $C_{23}^{(1)} \cup \{x_i + V_2\} \subseteq C_{23}^{(t)}$. И наконец, если $i \neq k$, $x_k + V_2 \in C_{12}^{(t)}$, то $\left|C_{23}^{(t)} \cup \{x_k + V_2\}\right| \leqslant \left|C_{23}^{(1)} \cup \{x_i + V_2\}\right|$, $C_{23}^{(t)} \cup \{x_k + V_2\} \neq$ $\neq C_{23}^{(1)} \cup \{x_i + V_2\}$, что невозможно, так как в этом случае $C_{23}^{(1)} \cup \{x_i + V_2\} \subseteq$ $\subseteq C_{23}^{(t)} \cup \{x_k + V_2\}$.

Если теперь произведение $\breve{g}^{(t)}$ такое, что $t \in N_4 \cap N_2'$, т. е. $g^{(t)} \in M_4$, то $C_{12}^{(t)} \cup C_{23}^{(t)} = C_{12}^{(1)} \cup C_{23}^{(1)}$, т. е. если $i = k$, то $C_{23}^{(t)} = C_{23}^{(1)}$, $C_2^{(t)} \cup C_3^{(t)} = C_2^{(1)} \cup C_3^{(1)}$, а если $i \neq k$, то либо $x_k + V_2 \in C_1^{(t)}$, $C_{23}^{(t)} = C_{23}^{(1)} \cup \{x_i + V_2\}$, $C_2^{(t)} \cup C_3^{(t)} \cup \{x_k + V_2\} =$ $= C_2^{(1)} \cup C_3^{(1)}$, либо $x_k + V_2 \in C_{12}^{(t)}$, $x_k + V_2 \in C_{23}^{(1)}$, $C_{23}^{(t)} \setminus \{x_k + V_2\} = C_{23}^{(1)} \setminus \{x_i + V_2\}$, $C_2^{(t)} \cup C_3^{(t)} \cup \{x_k + V_2\} = C_2^{(1)} \cup C_3^{(1)}$. Тогда если произведение $\breve{g}^{(t)}$ такое, что $t \notin N_5$, т. е. $g^{(t)} \in M_4 \setminus M_5$, то $\left|C_2^{(t)}\right| \leqslant c_{\max\text{-}2}$, $C_2^{(t)} \neq C_2^{(1)}$, следовательно, найдётся такой порождающий $x_j + V_2$, что $x_j + V_2 \in C_2^{(1)}$, $x_j + V_2 \notin C_2^{(t)}$ (ясно, что $j \neq i$). Тогда $x_j + V_2 \in C_3^{(t)}$ или $x_j + V_2 \in C_1^{(t)}$ (если $j = k$, $i \neq k$), т. е. $x_j + V_2 \in \breve{C}_3^{(t)} \cup \breve{C}_1^{(t)}$, и элемент $\breve{g}^{(t)}$ также перешёл в 0. Получаем, что $f_n^{(3)} = \sum\limits_{t \in N_5'} \alpha_t \hat{g}^{(t)}$, где $N_5' \subseteq N_5$, $\hat{g}^{(t)} = x_k \hat{g}_3^{(t)}$, так как $\hat{g}_2^{(t)}$ получен из $\breve{g}^{(t)}$ отбрасыванием множителя $x_{k_2}^2 \ldots x_{k_n}^2$ и, следовательно, отсутствует,

$$\hat{g}_3^{(t)} = \breve{g}_3^{(t)}[x_{k_1}, x_{q_2+1}] \cdot [x_{k_2}, x_{q_2+2}] \ldots [x_{k_n}, x_{q_2+n}].$$

Таким образом, множество N_5' состоит из 1 и таких $t \in N_5$, что для $g^{(t)}$ выполняются условия (15) или (16). Однако согласно предположению таких элементов среди $g^{(t)}$ нет. Таким образом, все элементы вида (13), кроме $g^{(1)}$, входящие в f, перешли в 0 или были отброшены, и мы получаем, что $\alpha_1 x_{r_{2s+1}}[x_{r_1}, x_{r_2}] \ldots [x_{r_{2s-1}}, x_{r_{2s}}] + V_2 \in H$, откуда, применив подходящий автоморфизм алгебры A/V_2, действующий как перестановка на множестве порождающих, получаем, что $x_{2s+1}[x_1, x_2] \ldots [x_{2s-1}, x_{2s}] + V_2 \in H$.

9. Рассмотрим случай А2. Пусть $M_5 = \{g^{(1)}, \ldots, g^{(u)}\}$. Заметим, что множества $C_{123}^{(t)}$, $C_{13}^{(t)}$, $C_2^{(t)}$, $C_{12}^{(t)} \cup C_{23}^{(t)}$, $C_1^{(t)} \cup C_3^{(t)}$, а также $|C_1 \cup C_{12}|$ одинаковы для всех элементов $g^{(t)}$ из M_5. Вынесем за скобки все общие для слагаемых $g^{(1)}, \ldots, g^{(u)}$ множители вида x_s^2 из средних частей, множители вида $x_s x_t [x_s, x_t]$ из начальных и конечных частей и множители вида $[x_s, x_t]$ из конечных частей. Получаем

$$f = \Pi \cdot \sum_{t=1}^{u} \alpha_t h^{(t)} + \ldots,$$

где многоточием обозначаются слагаемые, не лежащие в M_5, Π — произведение элементов вида x_s^2, $x_s x_t[x_s, x_t]$ и $[x_s, x_t]$, а элементы $h^{(t)}$ удовлетворяют следующим условиям: средние части у них отсутствуют, т. е. $h^{(t)} = h_1^{(t)} h_3^{(t)}$, множества $C^{(t)} = C_1^{(t)} \cup C_3^{(t)} \cup C_{13}^{(t)}$, а также длины начальных частей $h_1^{(t)}$ для всех $t \in N_5$ одинаковы, $C_{13}(h^{(t)}) = \varnothing$ для всех $t \in N_5$, либо $C_{13}(h^{(t)}) = \{x_j + V_2\}$ для некоторого j и всех $t \in N_5$, и для любого $t = 1, \ldots, u$ и любого $x_i + V_2 \in C_1(h^{(t)})$ найдётся $v \neq t$, $v \in \{1, \ldots, u\}$, такой что $C_1(h^{(v)}) = (C_1(h^{(t)}) \setminus \{x_i + V_2\}) \cup \{x_k + V_2\}$ для некоторого $k \neq i$, где $x_k + V_2 \in C_3(h^{(t)})$, $C_3(h^{(v)}) = (C_3(h^{(t)}) \setminus \{x_k + V_2\}) \cup$ $\cup \{x_i + V_2\}$.

Пусть $|C_1(h^{(t)})| = s$. Рассмотрим на множестве наборов длины s попарно различных порождающих алгебры A/V_2 линейный порядок $\leqslant$, полагая

$$\{x_{i_1} + V_2, \ldots, x_{i_s} + V_2\} < \{x_{j_1} + V_2, \ldots, x_{j_s} + V_2\},$$

где $i_1 < \ldots < i_s$ и $j_1 < \ldots < j_s$, тогда и только тогда, когда $i_1 < j_1$, или $i_1 = j_1$, $i_2 < j_2$,…, или $i_1 = j_1$,…, $i_{s-1} = j_{s-1}$, $i_s < j_s$. Заметим, что

$$\sum_{t=1}^{r} x_{v_1} \ldots x_{v_{t-1}} x_{v_{t+1}} \ldots x_{v_r} [x_{v_t}, x_v] + V_2 = [x_{v_1} \ldots x_{v_r}, x_v] + V_2,$$
$$\sum_{t=1}^{r} x_{v_1} \ldots x_{v_{t-1}} x_{v_{t+1}} \ldots x_{v_r} x_v [x_{v_t}, x_v] + V_2 = x_v [x_{v_1} \ldots x_{v_r}, x_v] + V_2.$$

Выберем среди всех элементов $h^{(t)}$ такой, что набор порождающих, входящих в $C_1(h^{(t)})$, наименьший. Будем считать, что этот элемент — $h^{(1)}$ и $C_1(h^{(t)}) =$ $= \{x_{i_1} + V_2, \ldots, x_{i_k} + V_2\}$ $(i_1 < \ldots < i_k)$, т. е. $h_1^{(1)} = x_{i_1} \ldots x_{i_{k-1}} x_{i_k} + V_2$ или $h_1^{(1)} = x_{i_1} \ldots x_{i_{k-1}} x_{i_k} x_j + V_2$. Рассмотрим элементы $h^{(t)}$ $(t \neq 1)$, такие что $C_1(h^{(t)}) = \{x_{i_1} + V_2, \ldots, x_{i_{k-1}} + V_2, x_{i_k^{(t)}} + V_2\}$, $i_{k^{(t)}} > i_k$ (такие t существуют согласно условию). Пусть $i_{k^{(2)}} = i'_k$ наименьший среди таких индексов $i_{k^{(t)}}$. Тогда $h_1^{(2)} = x_{i_1} \ldots x_{i_{k-1}} x_{i'_k} + V_2$ или $h_1^{(2)} = x_{i_1} \ldots x_{i_{k-1}} x_{i'_k} x_j + V_2$, $h^{(1)} = h_1^{(1)} [x_{i'_k}, x_j] \cdot \tilde{\Pi}$, $h^{(2)} = h_1^{(2)} [x_{i_k}, x_j] \cdot \tilde{\Pi}$, где $\tilde{\Pi}$ получен из Π умножением на некоторое произведение коммутаторов. Так как к элементу $f \in H \setminus S$ можно добавить слагаемое

$$\alpha_1 \cdot \tilde{\Pi} \cdot [x_{i_1} \ldots x_{i_{k-1}} x_{i_k} x_{i'_k}, x_j] + V_2 \in S$$

или

$$\alpha_1 \cdot \tilde{\Pi} \cdot x_j [x_{i_1} \ldots x_{i_{k-1}} x_{i_k} x_{i'_k}, x_j] + V_2 \in S$$

соответственно, то сумму $\alpha_1 h^{(1)} + \alpha_2 h^{(2)}$ можно заменить на сумму

$$(\alpha_1 + \alpha_2) h^{(2)} + \alpha_1 \cdot \tilde{\Pi} \cdot \sum_{t=1}^{k-1} x_{i_1} \ldots x_{i_{t-1}} x_{i_{t+1}} \ldots x_{i_k} x_{i'_k} [x_{i_t}, x_j] + V_2$$

или

$$(\alpha_1 + \alpha_2) h^{(2)} + \alpha_1 \cdot \tilde{\Pi} \cdot \sum_{t=1}^{k-1} x_{i_1} \ldots x_{i_{t-1}} x_{i_{t+1}} \ldots x_{i_k} x_{i'_k} x_j [x_{i_t}, x_j] + V_2$$

соответственно, где во всех слагаемых q начиная со второго набор порождающих, входящих в $C_1(q)$, больше, чем соответствующий набор для первого слагаемого. Заметим, что вновь полученные слагаемые также лежат в M_5.

Получаем, что или для преобразованного таким образом элемента f имеет место случай A1, или в множестве M_5 пропал по крайней мере один элемент, имевший наименьший набор порождающих, составляющих $C_1(h^{(t)})$. Продолжая далее аналогичные преобразования, мы либо на каком-то шаге получим случай A1, либо M_5 окажется пустым, так как общий набор порождающих, входящих в преобразуемые слагаемые, остаётся неизменным и, следовательно, существует максимальный набор порождающих, который может составлять множество $C_1(h^{(t)})$.

Если множество M_5 оказалось пустым, то выберем другой элемент из M_4 и проделаем аналогичные операции для нового M_5, и так далее (аналогичные рассуждения, если M_4 окажется пустым, и так далее). Таким образом, после серии преобразований мы либо получим случай A1, либо M_1 окажется пустым, т. е. мы исключим все слагаемые с максимальной длиной начальной части $d_{\max}$. Ясно, что, продолжая далее аналогичные преобразования, мы через конечное число шагов получим случай A1, так как мы каждый раз добавляем или исключаем слагаемые из пространства S, а элемент f не лежит в пространстве S.

Таким образом, случай A полностью разобран.

10. Случай B рассматривается аналогично A с помощью разбиения на два подслучая.

Предложение 2 доказано для $p = 2$. □

4. Случай поля характеристики $p > 2$

Лемма 6. *Пусть $p > 2$. Тогда T-пространство S содержит все элементы вида*

$$\Pi + V_p, \tag{17}$$

$$\Pi \cdot \sum_{t=1}^{s} \beta_t x_{i_1}^{\beta_1} \ldots x_{i_{t-1}}^{\beta_{t-1}} x_{i_t}^{\beta_t - 1} x_{i_{t+1}}^{\beta_{t+1}} \ldots x_{i_s}^{\beta_s} x_j^{\beta}[x_{i_t}, x_j] + V_p \ (s > 1), \tag{18}$$

где $0 < \beta_1, \ldots, \beta_s \leqslant p-1$, $0 \leqslant \beta \leqslant p-1$, Π — произведение элементов вида $x_u^{\gamma} x_v^{\delta}[x_u, x_v]$ $(u < v,\ 0 \leqslant \gamma,\ \delta \leqslant p-1)$ и во втором случае может отсутствовать, все индексы попарно различны.

Доказательство. Заметим, что если $k \in \{1, \ldots, p-2\}$, $[x_i, x_j] \cdot h + V_p \in S$, где $i \neq j$, в элемент $h \in A$ не входят порождающие x_i, x_j (или h отсутствует), то, рассматривая эндоморфизм $\theta\colon A/V_p \to A/V_p$, такой что $\theta(x_i + V_p) = x_i^{k+1} + V_p$, $\theta(x_t + V_p) = x_t + V_p$ для всех $t \neq i$, и учитывая тождество (11), получаем

$$\theta([x_i, x_j] \cdot h + V_p) = (k+1) x_i^k [x_i, x_j] \cdot h + V_p \in S.$$

Так как $k+1 \in \{2,\dots,p-1\}$, то $k+1 \neq 0$ в поле F, следовательно, $x_i^k[x_i,x_j]\cdot h+ +V_p \in S$. Рассуждая таким образом для различных элементов вида (2) и применяя подходящие автоморфизмы алгебры A/V_p, действующие как перестановки на множестве порождающих, получаем, что в T-пространстве S лежат все элементы вида (17).

Докажем, что в T-пространстве S лежат все элементы вида (18). Пусть $s \in \mathbb{N}$, $\beta_1,\dots,\beta_s \in \{1,\dots,p-1\}$. Рассмотрим элемент $f = \Pi \cdot x_j^{\beta}[x_i,x_j] + V_p \in S$, где произведение $\Pi \in A$ такое, как описано в формулировке леммы, $i \neq j$, $\beta \in \{0,1,\dots,p-1\}$, в Π не входят порождающие x_i, x_j. Пусть $i_1,i_2,\dots,i_s$ — попарно различные индексы, такие что $\{i_1,\dots,i_s\} \cap \{i,j\} = \varnothing$, порождающие $x_{i_1},\dots,x_{i_s}$ не входят в произведение Π. Рассмотрим эндоморфизм $\chi\colon A/V_p \to A/V_p$, такой что $\chi(x_i+V_p) = x_{i_1}^{\beta_1}\dots x_{i_s}^{\beta_s}+V_p$, $\chi(x_t+V_p) = x_t+V_p$ для всех $t \neq i$, тогда, учитывая тождества (14) и (11), получаем

$$\begin{aligned}\chi(f) &= \Pi\cdot x_j^{\beta}[x_{i_1}^{\beta_1}\dots x_{i_s}^{\beta_s},x_j]+V_p = \\ &= \Pi\cdot(x_{i_1}^{\beta_1}x_j^{\beta}[x_{i_2}^{\beta_2}\dots x_{i_s}^{\beta_s},x_j] + \beta_1 x_{i_1}^{\beta_1-1}x_{i_2}^{\beta_2}\dots x_{i_s}^{\beta_s}x_j^{\beta}[x_{i_1},x_j]) + V_p = \dots = \\ &= \Pi\cdot\sum_{t=1}^{s}\beta_t x_{i_1}^{\beta_1}\dots x_{i_{t-1}}^{\beta_{t-1}}\,x_{i_t}^{\beta_t-1}\,x_{i_{t+1}}^{\beta_{t+1}}\dots x_{i_s}^{\beta_s}\,x_j^{\beta}[x_{i_t},x_j]+V_p \in S. \qquad \square\end{aligned}$$

Доказательство предложения 2 для случая $p > 2$.

1. Пусть $p > 2$. Рассмотрим элементы множества G (см. лемму 2), т. е. произведения

$$g = g_1 g_2, \tag{19}$$

где

$$\begin{aligned}&g_1 = x_{i_1}^{\beta_1}\dots x_{i_l}^{\beta_l}+V_p \quad (i_1<\dots<i_l,\quad 1\leqslant \beta_t < p,\quad t=1,\dots,l),\\ &g_2 = [x_{j_1},x_{j_2}]\dots[x_{j_{2m-1}},x_{j_{2m}}]+V_p \quad (j_1<\dots<j_{2m}).\end{aligned}$$

При этом одна из частей g_1 или g_2 может отсутствовать. Назовём g_1 начальной частью произведения g, g_2 — его конечной частью.

Пусть g — элемент вида (19). Обозначим через $C_1 = C_1(g)$ множество всех порождающих алгебры A/V_p, которые входят в g_1 и не входят в g_2, через $C = C(g)$ — множество всех порождающих алгебры A/V_p, которые входят в g.

Пусть h — полиоднородный элемент алгебры A/V_p. Будем обозначать через $\deg h$ степень элемента h, через $\deg_i h$ степень элемента h по порождающему x_i+V_p.

2. Заметим, что, как и в случае $p=2$, если $f \in H$, $f \notin S$ и $f = f_1+f_2$, где $f_1 \in S$, то мы можем отбросить f_1, т. е. заменить f на $f_2 = f - f_1 \in H\setminus S$.

3. Рассмотрим теперь эндоморфизмы $\varphi = \varphi_{i,s,t}\colon A/V_p \to A/V_p$, полагая $\varphi_{i,s,t}(x_i+V_p) = x_i+[x_s,x_t]+V_p$ и $\varphi_{i,s,t}(x_j+V_p) = x_j+V_p$ для $j \neq i$. Тогда если g — произведение вида (19), то

$$\varphi(g)-g = \begin{cases}0, & \text{если } x_i+V_p \text{ не входит в } g_1,\\ \beta_i\tilde{g}_1 g_2[x_s,x_t], & \text{если } x_i+V_p \text{ входит в } g_1.\end{cases}$$

Здесь $\tilde{g}_1 = x_{i_1}^{\beta_1} \dots x_i^{\beta_i - 1} \dots x_{i_l}^{\beta_l} + V_p$, т. е. $\tilde{g}_1$ — произведение, которое отличается от g_1 тем, что порождающий $x_i + V_p$ входит в $\tilde{g}_1$ в степени на единицу меньше.

4. Заметим, что если элемент $f = \sum\limits_t \alpha_t g^{(t)}$ лежит в H и мы зафиксировали элемент $g^{(1)}$, то, так же как и в случае $p = 2$, мы можем отбросить все слагаемые $g^{(t)}$, для которых набор порождающих, входящих в $g^{(t)}$, отличается от набора порождающих, входящих в $g^{(1)}$, т. е. f можно заменить на элемент $f' = \sum\limits_k \alpha_{t_k} g^{(t_k)} \in H$, где для любого k справедливо $C^{(t_k)} = C^{(1)}$. Здесь, так же как и в предыдущем случае, если $f \in H \setminus S$, то f' лежит в H, но не обязательно в $H \setminus S$.

5. Пусть теперь $f \in H$, $f \notin S$, $f = \sum\limits_t \alpha_t g^{(t)}$, где $\alpha_t \in F$, $\alpha_t \neq 0$, $g^{(t)}$ — попарно различные элементы вида (19). Положим $C_1^{(t)} = C(g_1^{(t)})$. Учитывая тождество (14), получаем, что если для некоторого t справедливо $C_1^{(t)} = \varnothing$, то $g^{(t)} \in S$. Таким образом, учитывая пункт 2, мы можем считать, что в элементе f для любого t выполняется $C_1^{(t)} \neq \varnothing$.

6. Пусть теперь $f \in H$, $f \notin S$. Ясно, что, применив, если необходимо, подходящий автоморфизм алгебры A/V_p, мы можем считать, что в f входят порождающие $x_1 + V_p, \dots, x_q + V_p$ для некоторого $q \in \mathbb{N}$ и не входят порождающие $x_j + V_p$ для всех $j > q$. Пусть $f = \sum\limits_{t \in N_0} \alpha_t g^{(t)}$, где N_0 — некоторое конечное множество индексов и для всех $t \in N_0$ выполняется $\alpha_t \in F$, $\alpha_t \neq 0$, $g^{(t)}$ — попарно различные элементы вида (19), причём $C_1^{(t)} \neq \varnothing$. Обозначим через M_0 множество всех $g^{(t)}$ для $t \in N_0$.

Пусть $\max\limits_{t \in N_0} \deg g_1^{(t)} = m_{\max}$. Положим

$$M_1 = \bigl\{ g^{(t)} \in M_0 \mid \deg g_1^{(t)} = m_{\max} \bigr\}.$$

Пусть $g^{(t)} \in M_1$ тогда и только тогда, когда $t \in N_1$ $(N_1 \subseteq N_0)$. Выберем элемент $g^{(u_1)} \in M_1$.

Положим

$$M_2 = \{ g^{(t)} \in M_1 \mid (\forall i \in \mathbb{N}) \ \deg_i g^{(t)} = \deg_i g^{(u_1)} \}.$$

Пусть $g^{(t)} \in M_2$ тогда и только тогда, когда $t \in N_2$ $(N_2 \subseteq N_1)$.

Заметим, что элементы $g^{(t)}$, входящие в множество M_2, составляют полиоднородную компоненту элемента f, которую можно выделить, если поле F бесконечно. Для наших рассуждений, однако, конечность поля F не имеет значения.

Возможны два случая.

C1. Найдутся такие $t_0 \in N_2$ (будем считать $t_0 = 1$) и $x_i + V_p \in C_1^{(1)}$, что в M_2 не содержится таких элементов $g^{(t)}$, что

$$\deg_i g_1^{(t)} = \deg_i g_1^{(1)} - 1,$$
$$\deg_k g_1^{(t)} = \deg_k g_1^{(1)} + 1 \quad (\text{для некоторого } k \neq i),$$
$$\deg_u g_1^{(t)} = \deg_u g_1^{(1)} \quad (\text{для всех } u \neq i, k).$$

C2. Для каждого $t \in N_2$ и каждого $x_i + V_p \in C_1^{(t)}$ найдётся такой $t' \in N_2$, для которого выполняется одно из условий пункта C1 (если заменить 1 на t и t на t').

Так же, как для $p = 2$, мы покажем, что в случае C1 элемент f можно преобразовать в рамках T-пространства H таким образом, что слагаемое $g^{(1)}$ перейдёт в элемент $x_{2s+1}[x_1, x_2] \dots [x_{2s-1}, x_{2s}] + V_2$ для некоторого $s \in \mathbb{N}$, а остальные слагаемые перейдут в 0 или будут отброшены в процессе преобразований. В этом случае нет необходимости следить, чтобы получаемый на каждом шаге элемент не лежал в S. Для случая C2 мы покажем, что элемент $f \in H \setminus S$ можно заменить на элемент $f' \in H \setminus S$, для которого выполняется условие пункта C1.

7. Рассмотрим случай C1. Пусть $g_1^{(1)} = x_{i_1}^{\beta_1} \dots x_{i_r}^{\beta_r} \dots x_{i_s}^{\beta_s} + V_p$, $i_r = i$.

В случае $\beta_r > 1$ положим

$$f_0^{(1)} = f, \quad f_1^{(1)} = \varphi_{i_r, q+1, q+2}(f_0^{(1)}) - f_0^{(1)}.$$

Тогда $f_1^{(1)} \in H$, причём $f_1^{(1)} = \sum\limits_{t \in N_0} \alpha_t(\varphi_{i_r, q+1, q+2}(g^{(t)}) - g^{(t)})$ и

$$\varphi_{i_r, q+1, q+2}(g^{(t)}) - g^{(t)} = \begin{cases} 0, & \text{если } x_{i_r} + V_p \text{ не входит в } g_1^{(t)}, \\ \gamma_{tr} \tilde{g}_1^{(t)} g_2^{(t)} [x_{q+1}, x_{q+2}], & \text{если } x_{i_r} + V_p \text{ входит в } g_1^{(t)}. \end{cases}$$

Здесь γ_{tr} — степень, в которой $x_{i_r} + V_p$ входит в $g_1^{(t)}$, $\tilde{g}_1^{(t)}$ — произведение, которое отличается от $g_1^{(t)}$ тем, что порождающий $x_{i_r} + V_p$ входит в $\tilde{g}_1^{(t)}$ в степени на единицу меньше.

Положим

$$f_2^{(1)} = \varphi_{i_r, q+3, q+4}\big(f_1^{(1)}\big) - f_1^{(1)}, \dots, \; f_{\beta_r - 1}^{(1)} = \varphi_{i_r, q+2\beta_r - 3, q+2\beta_r - 2}\big(f_{\beta_r - 2}^{(1)}\big) - f_{\beta_r - 2}^{(1)}.$$

Получаем, что если порождающий $x_{i_r} + V_p$ входит в произведение $g_1^{(t)}$ в степени $\gamma_{tr} < \beta_r - 1$, то $g^{(t)}$ перешёл в 0. Если порождающий $x_{i_r} + V_p$ входит в произведение $g_1^{(t)}$ в степени $\gamma_{tr} \geqslant \beta_r - 1$, то $g^{(t)}$ перешёл в произведение $\bar{g}^{(t)} = \bar{g}_1^{(t)} \bar{g}_2^{(t)}$, где $\bar{g}_1^{(t)}$ отличается от $g_1^{(t)}$ тем, что порождающий $x_{i_r} + V_p$ входит в $\bar{g}_1^{(t)}$ в степени $\gamma'_{tr} = \gamma_{tr} - \beta_r + 1$,

$$\bar{g}_2^{(t)} = g_2^{(t)} \cdot [x_{q+1}, x_{q+2}] \dots [x_{q+2\beta_r - 3}, x_{q+2\beta_r - 2}].$$

Таким образом, получаем, что $f_{\beta_r - 1}^{(1)} \in H$, $f_{\beta_r - 1}^{(1)} = \sum\limits_{t \in N'_0} \bar{g}^{(t)}$, где $N'_0 \subseteq N_0$, $\gamma_{tr} > \beta_r$ для $t \in N'_0$. Положим $q_1 = q + 2\beta_r - 2$, $f_0^{(2)} = f_{\beta_r - 1}^{(1)}$.

В случае $\beta_r = 1$ положим $f_0^{(2)} = f$ ($N'_0 = N_0$, $\bar{g}^{(t)} = g^{(t)}$ для всех t), $q_1 = q$.

Положим теперь

$$
\begin{aligned}
&f_1^{(2)} = \varphi_{i_1,q_1+1,q_1+2}\big(f_0^{(2)}\big) - f_0^{(2)}, \ldots,\\
&\quad f_{\beta_1}^{(2)} = \varphi_{i_1,q_1+2\beta_1-1,q_1+2\beta_1}\big(f_{\beta_1-1}^{(2)}\big) - f_{\beta_1-1}^{(2)},\\
&f_0^{(3)} = f_{\beta_1}^{(2)}, \quad f_1^{(3)} = \varphi_{i_2,q_2+1,q_2+2}\big(f_0^{(3)}\big) - f_0^{(3)}, \ldots,\\
&\quad f_{\beta_2}^{(3)} = \varphi_{i_2,q_2+2\beta_2-1,q_2+2\beta_2}\big(f_{\beta_2-1}^{(3)}\big) - f_{\beta_2-1}^{(3)},\\
&\ldots\\
&f_0^{(r)} = f_{\beta_{r-2}}^{(r-1)}, \quad f_1^{(r)} = \varphi_{i_{r-1},q_{r-1}+1,q_{r-1}+2}\big(f_0^{(r)}\big) - f_0^{(r)}, \ldots,\\
&\quad f_{\beta_{r-1}}^{(r)} = \varphi_{i_{r-1},q_{r-1}+2\beta_{r-1}-1,q_{r-1}+2\beta_{r-1}}\big(f_{\beta_{r-1}-1}^{(r)}\big) - f_{\beta_{r-1}-1}^{(r)},\\
&f_0^{(r+1)} = f_{\beta_{r-1}}^{(r)}, \quad f_1^{(r+1)} = \varphi_{i_{r+1},q_r+1,q_r+2}\big(f_0^{(r+1)}\big) - f_0^{(r+1)}, \ldots,\\
&\quad f_{\beta_{r+1}}^{(r+1)} = \varphi_{i_{r+1},q_r+2\beta_{r+1}-1,q_r+2\beta_{r+1}}\big(f_{\beta_{r+1}-1}^{(r+1)}\big) - f_{\beta_{r+1}-1}^{(r+1)},\\
&\ldots\\
&f_0^{(s)} = f_{\beta_{s-1}}^{(s-1)}, \quad f_1^{(s)} = \varphi_{i_s,q_{s-1}+1,q_{s-1}+2}\big(f_0^{(s)}\big) - f_0^{(s)}, \ldots,\\
&\quad f_{\beta_s}^{(s)} = \varphi_{i_s,q_{s-1}+2\beta_s-1,q_{s-1}+2\beta_s}\big(f_{\beta_s-1}^{(s)}\big) - f_{\beta_s-1}^{(s)}.
\end{aligned}
$$

где $q_u = q_{u-1} + 2\beta_{u-1}$ для $u = 2, \ldots, r$, $q_u = q_{u-1} + 2\beta_u$ для $u = r+1, \ldots, s$.

Рассмотрим элемент $f_{\beta_s}^{(s)} \in H$. Пусть порождающие $x_{i_1} + V_p, \ldots, x_{i_s} + V_p$ входят в произведение $g_1^{(t)}$ в степенях $\gamma_{t1}, \ldots, \gamma_{ts}$ соответственно, где $\gamma_{t1}, \ldots, \gamma_{ts} \geqslant 0$. Рассмотрим случай $t \in N_0' \setminus N_1$, т. е. $g^{(t)} \in M_0 \setminus M_1$. Ясно, что если $\gamma_{t1} < \beta_1$, или $\gamma_{t2} < \beta_2, \ldots$, или $\gamma_{t(r-1)} < \beta_{r-1}$, или $\gamma_{tr} < \beta_r - 1$, или $\gamma_{t(r+1)} < \beta_{r+1}, \ldots$, или $\gamma_{ts} < \beta_s$, то элемент $g^{(t)}$ перешёл в 0. Если $\gamma_{t1} \geqslant \beta_1, \ldots, \gamma_{t(r-1)} \geqslant \beta_{r-1}$, $\gamma_{tr} \geqslant \beta_r - 1$, $\gamma_{t(r+1)} \geqslant \beta_{r+1}, \ldots, \gamma_{ts} \geqslant \beta_s$, то

$$\gamma_{t1} + \ldots + \gamma_{ts} \geqslant \beta_1 + \ldots + \beta_s - 1 = m_{\max} - 1.$$

С другой стороны,

$$\gamma_{t1} + \ldots + \gamma_{ts} \leqslant \deg g_1^{(t)} < \deg g_1^{(1)} = \beta_1 + \ldots + \beta_s = m_{\max}.$$

Следовательно, $\gamma_{t1} = \beta_1, \ldots, \gamma_{t(r-1)} = \beta_{r-1}$, $\gamma_{tr} = \beta_r - 1$, $\gamma_{t(r+1)} = \beta_{r+1}, \ldots, \gamma_{ts} = \beta_s$ и $g_1^{(t)} = x_{i_1}^{\beta_1} \ldots x_{i_r}^{\beta_r - 1} \ldots x_{i_s}^{\beta_s} + V_p$. Тогда элемент $\bar{g}^{(t)}$ перешёл в элемент $\bar{\bar{g}}^{(t)} = \bar{\bar{g}}_2^{(t)} \in S$, где

$$\bar{\bar{g}}_2^{(t)} = \bar{g}_2^{(t)} \cdot [x_{q_1+1}, x_{q_1+2}] \ldots [x_{q_{s-1}+2\beta_s-1}, x_{q_{s-1}+2\beta_s}].$$

Если $t \in N_0' \cap N_1$, т. е. $g^{(t)} \in M_1$, то либо, как и в предыдущем случае, $g^{(t)}$ перешёл в 0, либо имеет место один из следующих случаев:

а) $\deg_u g_1^{(t)} = \deg_u g_1^{(1)}$ для всех u, т. е. $g_1^{(t)} = g_1^{(1)}$;

б) $\deg_i g_1^{(t)} = \deg_i g_1^{(1)} - 1$, $\deg_k g_1^{(t)} = \deg_k g_1^{(1)} + 1$ (для некоторого $k \neq i$), $\deg_u g_1^{(t)} = \deg_u g_1^{(1)}$ (для всех $u \neq i, k$).

Положим $w = i$ или $w = k$ соответственно. Получаем, что элемент $\bar{g}^{(t)}$ перейдёт в элемент $\bar{\bar{g}}^{(t)} = x_w \bar{\bar{g}}_2^{(t)}$, где $\bar{\bar{g}}_2^{(t)}$ такой, как определено выше. Заметим, что если порождающий $x_w + V_p$ входит в $g_2^{(t)}$, то $x_w + V_p$ входит в $\bar{\bar{g}}_2^{(t)}$ и, следовательно, $\bar{\bar{g}}^{(t)} \in S$. Обозначим $\bar{\bar{C}}^{(t)} = C(\bar{\bar{g}}^{(t)})$, $\bar{\bar{C}}_1^{(t)} = C(\bar{\bar{g}}_1^{(t)})$.

Отбросим в элементе $f_{\beta_s}^{(s)}$ все произведения $\bar{\bar{g}}^{(t)} \in S$. Обозначим полученный элемент через $\bar{f}$. Получаем $\bar{f} = \sum\limits_{t \in N_1'} \alpha_t \bar{\bar{g}}^{(t)} \in H$, где $N_1' \subseteq N_1 \cap N_0'$, $x_w + V_p$ не входит в $g_2^{(t)}$. Ясно, что $1 \in N_1'$, так как $x_i + V_p \in C_1^{(1)}$.

Отбросим теперь в элементе $\bar{f}$ все такие произведения $\bar{\bar{g}}^{(t)}$, что набор порождающих, входящих в $\bar{\bar{g}}^{(t)}$, не совпадает с набором порождающих, входящих в $\bar{\bar{g}}^{(1)}$, т. е. $\bar{\bar{C}}^{(t)} \neq \bar{\bar{C}}^{(1)}$. Обозначим полученный элемент через $\bar{\bar{f}}$. Пусть $t \in N_1' \setminus N_2$, т. е. $g^{(t)} \in M_1 \setminus M_2$. Покажем, что тогда $\bar{\bar{C}}^{(t)} \neq \bar{\bar{C}}^{(1)}$ и, следовательно, элемент $\bar{\bar{g}}^{(t)}$ будет отброшен.

В случае а), то есть если $g_1^{(t)} = g_1^{(1)}$, найдётся порождающий $x_u + V_p$, такой что $\deg_u g_2^{(t)} \neq \deg_u g_2^{(1)}$. Получаем либо $\deg_u g_2^{(t)} = 1$, $\deg_u g_2^{(1)} = 0$, либо $\deg_u g_2^{(t)} = 0$, $\deg_u g_2^{(1)} = 1$, т. е. либо порождающий $x_u + V_p$ входит в $g_2^{(t)}$ и не входит в $g_2^{(1)}$, либо наоборот. Ясно, что $u \neq i$, так как иначе $x_i + V_p$ входит в $g_2^{(t)}$. Тогда либо $x_u + V_p$ входит в $\bar{\bar{g}}_2^{(t)}$ и не входит в $\bar{\bar{g}}_2^{(1)}$, т. е. $x_u + V_p \in \bar{\bar{C}}^{(t)}$, $x_u + V_p \notin \bar{\bar{C}}^{(1)}$, либо $x_u + V_p$ входит в $\bar{\bar{g}}_2^{(1)}$ и не входит в $\bar{\bar{g}}_2^{(t)}$, т. е. $x_u + V_p \notin \bar{\bar{C}}^{(t)}$, $x_u + V_p \in \bar{\bar{C}}^{(1)}$, откуда $\bar{\bar{C}}^{(t)} \neq \bar{\bar{C}}^{(1)}$.

В случае б) возможны следующие варианты. Если $x_i + V_p$ не входит в $g_2^{(t)}$, то он не входит в $\bar{\bar{g}}_2^{(t)}$, т. е. $x_i + V_p \notin \bar{\bar{C}}^{(t)}$, но $x_i + V_p \in \bar{\bar{C}}^{(1)}$. Если $x_k + V_p$ не входит в $g_2^{(1)}$, то он не входит в $\bar{\bar{g}}_2^{(1)}$, т. е. $x_k + V_p \in \bar{\bar{C}}^{(t)}$, но $x_k + V_p \notin \bar{\bar{C}}^{(1)}$. Если же $x_i + V_p$ входит в $g_2^{(t)}$ и $x_k + V_p$ входит в $g_2^{(1)}$, т. е. $\deg_i g^{(t)} = \deg_i g^{(1)}$, $\deg_k g^{(t)} = \deg_k g^{(1)}$, то тогда найдётся порождающий $x_u + V_p$, такой что $u \neq i, k$, $\deg_u g^{(t)} \neq \deg_u g^{(1)}$, т. е. $\deg_u g_2^{(t)} \neq \deg_u g_2^{(1)}$, и, следовательно, как и в случае а), $\bar{\bar{C}}^{(t)} \neq \bar{\bar{C}}^{(1)}$.

Таким образом, получаем $\bar{\bar{f}} = \sum\limits_{t \in N_2'} \bar{\bar{g}}^{(t)} \in H$, где $N_2' \subseteq N_1' \cap N_2$ и для всех $t \in N_2'$ имеет место один из описанных выше случаев. Ясно, что случаю а) удовлетворяет единственный элемент $g^{(1)}$, а элементов, удовлетворяющих случаю б), в M_2 нет согласно условию. Следовательно, $\bar{\bar{f}} = \alpha_1 x_i \bar{\bar{g}}_2^{(1)}$, откуда, применив подходящий автоморфизм алгебры A/V_p, получаем $x_{2s+1}[x_1, x_2] \ldots [x_{2s-1}, x_{2s}] + V_p \in H$ для некоторого $s \in \mathbb{N}$.

8. Рассмотрим случай С2. Пусть для всех $t \in N_2$ выполнено $C^{(t)} = \{x_{i_1} + V_p, \ldots, x_{i_s} + V_p\}$ $(i_1 < \ldots < i_s)$, т. е. $\deg_{i_v} g^{(t)} = \beta_v > 0$ для $v = 1, \ldots, s$, $\deg_v g^{(t)} = 0$ для всех $v \neq i_1, \ldots, i_s$. Тогда $g_1^{(t)} = x_{i_1}^{\gamma_{t1}} \ldots x_{i_s}^{\gamma_{ts}}$, где либо $\gamma_{tj} = \beta_j$ и тогда $x_{i_j} + V_p \in C_1^{(t)}$, либо $\gamma_{tj} = \beta_j - 1$ и порождающий $x_{i_j} + V_p$ входит также в $g_2^{(t)}$ (таких случаев будет l, где l — некоторое натуральное число, одно для всех $t \in N_2$). Рассмотрим все такие элементы $g^{(u)} \in M_2$, что $\deg_{i_1} g_1^{(u)} = \beta_1 - 1$. Пусть $x_{i_{j_1}} + V_p, \ldots, x_{i_{j_m}} + V_p$ $(j_1 < \ldots < j_m)$ — все такие порождающие, что

$\deg_{i_{j_v}} g_1^{(u)} = \beta_{j_v}$ ($v = 1,\ldots,m$, $j_v \in \{1,\ldots,s\}$). Ясно, что тогда $g^{(u)}$ можно переписать в виде

$$g^{(u)} = \Pi \cdot x_{i_1}^{\beta_1 - 1} x_{i_{j_1}}^{\beta_{j_1}} \ldots x_{i_{j_m}}^{\beta_{j_m}} x_v^{\beta}[x_{i_1}, x_v] + V_p,$$

где $\beta \geqslant 0$, Π — произведение элементов вида $x_a^{\gamma} x_b^{\delta}[x_a, x_b]$ $(\gamma, \delta \geqslant 0)$, порождающие $x_v + V_p$, $x_{i_1} + V_p$, $x_{i_{j_1}} + V_p, \ldots$, $x_{i_{j_m}} + V_p$ не входят в Π, все индексы попарно различны.

Так как к элементу $f \in H \setminus S$ можно добавить слагаемое

$$-\alpha_u \beta_1^{-1} \cdot \Pi \cdot x_v^{\beta}\big[x_{i_1}^{\beta_1} x_{i_{j_1}}^{\beta_{j_1}} \ldots x_{i_{j_m}}^{\beta_{j_m}}, x_v\big] + V_p \in S$$

(см. лемму 6), то элемент $\alpha_u g^{(u)}$ можно заменить на сумму

$$-\alpha_u \beta_1^{-1} \cdot \Pi \cdot \sum_{t=1}^{m} \beta_{j_t} x_{i_1}^{\beta_1} x_{i_{j_1}}^{\beta_{j_1}} \ldots x_{i_{j_{t-1}}}^{\beta_{j_{t-1}}} x_{i_{j_t}}^{\beta_{j_t} - 1} x_{i_{j_{t+1}}}^{\beta_{j_{t+1}}} \ldots x_{i_{j_m}}^{\beta_{j_m}} x_v^{\beta}[x_{i_{j_t}}, x_v] + V_p.$$

Заметим, что вновь полученные слагаемые лежат в M_2. Таким образом, мы либо добьёмся того, чтобы во все элементы множества M_2 порождающий $x_{i_1} + V_p$ входил только в начальную часть, т. е. мы получим случай C1 для любого из элементов M_2 и порождающего $x_{i_1} + V_p$, либо множество M_2 окажется пустым. Если множество M_2 оказалось пустым, то выберем другой элемент из M_1 и проделаем аналогичные операции для нового M_2, и так далее. После серии преобразований мы либо получим случай C1, либо M_1 окажется пустым, т. е. мы исключим все слагаемые, у которых степень начальной части $m_{\max}$. Ясно, что, продолжая далее аналогичные преобразования, мы через конечное число шагов получим случай C1, так как мы каждый раз добавляем или исключаем слагаемые из пространства S, а элемент f не лежит в пространстве S.

Предложение 2 доказано для $p > 2$. □

Литература

[1] Аладова Е. В. Неконечнобазируемая система тождеств в нильалгебрах над полем характеристики 3 // Чебышёвский сб. — 2004. — Т. 5, вып. 1 (3). — С. 5—19.

[2] Бахтурин Ю. А., Ольшанский А. Ю. Тождества // Совр. пробл. математики. Фундаментальные направления. Т. 18. — М.: ВИНИТИ, 1988. — С. 117—240.

[3] Белов А. Я. О нешпехтовых многообразиях // Фундамент. и прикл. мат. — 1999. — Т. 5, вып. 1. — С. 47—66.

[4] Белов А. Я. Контрпримеры к проблеме Шпехта // Мат. сб. — 2000. — Т. 191, № 3. — С. 13—24.

[5] Гришин А. В. О конечной базируемости систем обобщённых многочленов // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1990. — Т. 54, № 5. — С. 899—927.

[6] Гришин А. В. Примеры не конечной базируемости T-пространств и T-идеалов в характеристике 2 // Фундамент. и прикл. мат. — 1999. — Т. 5, вып. 1. — С. 101—118.

[7] Кемер А. Р. Конечная базируемость тождеств ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. — 1987. — Т. 26. — С. 597—641.

[8] Киреева Е. А. О конечной порождённости вполне инвариантных подмодулей в некоторых относительно свободных ассоциативных алгебрах // Научные труды математического факультета МПГУ. — М.: Прометей, 2000. — С. 269—276.

[9] Киреева Е. А., Красильников А. Н. О некоторых экстремальных многообразиях ассоциативных алгебр // Мат. заметки. — 2005. — Т. 78, вып. 4. — С. 542—558.

[10] Латышев В. Н. О выборе базы в одном T-идеале // Сиб. мат. журн. — 1963. — Т. 4, № 5. — С. 1122—1126.

[11] Чирипов П. Ж., Сидеров П. Н. О базисах тождеств некоторых многообразий ассоциативных алгебр // Плиска. — 1981. — Т. 2. — С. 103—115.

[12] Щиголев В. В. Примеры бесконечно базируемых T-идеалов // Фундамент. и прикл. мат. — 1999. — Т. 5, вып. 1. — С. 307—312.

[13] Щиголев В. В. Примеры бесконечно базируемых T-пространств // Мат. сб. — 2000. — Т. 191. — С. 143—160.

[14] Щиголев В. В. Бесконечно базируемые T-пространства и T-идеалы: Дис.. . . канд. физ.-мат. наук. — М., 2002.

[15] Grishin A. V. On non-Spechtianness of the variety of associative rings that satisfy the identity $x^{32} = 0$ // Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. — 2000. — No. 6. — P. 50—51.

[16] Gupta C. K., Krasilnikov A. N. A non-finitely based system of polynomial identities which contains the identity $x^6 = 0$ // Quart. J. Math. — 2002. — Vol. 53. — P. 173—183.

[17] Drensky V. S. Free Algebras and PI-Algebras. — Singapore: Springer Singapore, 2000.

[18] Rowen L. H. Ring Theory. Boston: Academic Press, 1991.

[19] Specht W. Gesetze in Ringen // Math. Z. — 1950. — Vol. 52. — P. 557—589.

[20] Shchigolev V. V. Construction of non-finitely based T-ideals // Comm. Algebra. — 2001. — Vol. 29, no. 9. — P. 3935—3942.