Нормальный вид и схемы квадратичных форм*

В. М. ЛЕВЧУК
Красноярский государственный университет
e-mail: levchuk@lan.krasu.ru

О. А. СТАРИКОВА
Северный международный университет
e-mail: star-olga@yandex.ru

УДК 512.7

Ключевые слова: QF-схема, квадрика, нормальный вид, проективная эквивалентность, локальное кольцо коэффициентов.

Аннотация

В работе представлено полученное авторами решение задачи построения «нормального» диагонального вида квадратичных форм над локальными кольцами $R = 2R$ главных идеалов с QF-схемами порядка 2. Для случая, когда максимальный идеал нильпотентен, дано комбинаторное выражение числа классов проективно конгруэнтных квадрик проективного пространства над R. Для проективных плоскостей приводятся перечисления квадрик с точностью до проективной эквивалентности, рассматриваются также проективные плоскости для случая основного кольца с неглавным максимальным идеалом.

Рассматривается нормальный вид квадратичных форм над полями p-адических чисел; соответствующие QF-схемы имеют порядок 4 или 8. Отмечаются некоторые нерешённые вопросы для QF-схем. Выделяемые конечные QF-схемы локального и элементарного типов реализуются QF-схемами поля и могут иметь сколь угодно большой порядок.

Abstract

V. M. Levchuk, O. A. Starikova, A normal form and schemes of quadratic forms, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 1, pp. 161—178.

We present a solution of the problem of the construction of a normal diagonal form for quadratic forms over a local principal ideal ring $R = 2R$ with a QF-scheme of order 2. We give a combinatorial representation for the number of classes of projective congruence quadrics of the projective space over R with nilpotent maximal ideal. For the projective planes, the enumeration of quadrics up to projective equivalence is given; we also consider the projective planes over rings with nonprincipal maximal ideal. We consider the normal form of quadratic forms over the field of p-adic numbers. The corresponding QF-schemes have order 4 or 8. Some open problems for QF-schemes are mentioned. The distinguished finite QF-schemes of local and elementary types (of arbitrarily large order) are realized as the QF-schemes of a field.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00824а).

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 1, с. 161—178.

Согласно [10, следствие 3.4] в модуле над локальным кольцом с обратимым элементом 2 симметричная форма с обратимой матрицей всегда допускает ортогональный базис. Однако роль вырожденных форм при переходе к кольцам коэффициентов существенно возрастает. Кольцо, над которым диагонализируемы все квадратичные формы, в сущности, всегда есть локальное кольцо $R = 2R$ главных идеалов [8, 9, 12]. В разделе 1 такие кольца характеризует лемма 1.2. Теорема 1.3 даёт диагональный вид формы в терминах степеней максимального идеала и элементов фактор-группы мультипликативной группы R^* обратимых элементов кольца R по подгруппе квадратов R^{*2}. При $R^* = R^{*2}$ получен и нормальный вид формы.

Задачу построения нормального вида, когда $|R^* : R^{*2}| = 2$, решают теорема 2.1 при $1 + R^{*2} \subseteq R^{*2}$ (распространение закона инерции вещественных квадратичных форм, см. также [20, 22]) и теорема 2.2 при наличии в $1 + R^{*2}$ обратимого неквадрата. В ненулевом фактор-кольце R кольца $F[[x]]$ формальных степенных рядов над полем F имеет место равенство индексов $|R^* : R^{*2}| = |F^* : F^{*2}|$, и нормальный вид формы над R по теореме 1.3 в значительной степени определён нормальным видом форм над F. Для поля p-адических чисел индекс равен 4 или 8 (при $p = 2$) [7, p. 56], и нормальный вид здесь известен (см. предложение 2.3).

Группа $G = R^*/R^{*2}$ вместе с определённым отображением её на подмножества из G называется QF-схемой или схемой квадратичных форм кольца R. QF-схема поля полностью определяет его кольцо Витта, как показывают результаты [23, 24, 26]. В тех же работах рассматриваются QF-схемы с абстрактной группой G показателя 2. В разделе 2 отмечаются нерешённые вопросы, в частности, всякая ли QF-схема реализуется QF-схемой поля [26, проблема 1]. Известно, что QF-схемами поля реализуются выделенные из конечных QF-схем G локальные и элементарные типы, даже сколь угодно больших порядков $|G|$ [17, 26]. Схемы колец коэффициентов R из теорем 2.1 и 2.2 являются локальными типами, которые исчерпывают все QF-схемы с $|G| = 2$ (см. раздел 2).

В разделе 3 в ограничениях теорем 2.1 и 2.2 на кольцо R с точностью до проективных конгруэнтностей перечислены квадрики проективного пространства, ассоциированного со свободным R-модулем ранга больше 2 (теорема 3.2). С точностью до проективностей квадрики перечисляются в разделе 3 для проективной плоскости при тех же ограничениях на R (см. также предложение 3.1), а в теореме 4.3 из раздела 4 — для случая основного локального кольца $F[[x, y]]/\langle x^2, xy, y^2\rangle$ с неглавным идеалом, где $F = 2F$ — поле, $|F^* : F^{*2}| = 2$.

Теории рефлексивных форм и геометрических образов второго порядка разработаны достаточно глубоко (см. [2, 3, 15, 25] и др.). С развитием K-теории возрастал интерес к переходу от полей к алгебрам и кольцам коэффициентов, исследовался нормальный вид квадратичных форм над дедекиндовыми областями и областями Безу характеристики, отличной от 2 [7, гл. 7 и 8; 28, гл. 6], группы Гротендика и Витта полулокальных колец и инварианты квадратичных пространств [13, 14, 19, 21, 29]. Бенц [18] рассматривает классические геометрии

Мёбиуса, Лагерра и Минковского как проективные прямые над ассоциативно-коммутативными алгебрами (см. также [5, 6]). В результатах разделов 3 и 4 находит применение обобщённая основная теорема проективной геометрии [1, 27].

1. Диагонализация

Всюду далее кольцо коэффициентов R является ассоциативно-коммутативным кольцом с единицей.

Симметричные матрицы A и B и соответствующие им формы над R называем проективно конгруэнтными (или конгруэнтными), если $B = kUAU^{\mathrm{T}}$ (соответственно $B = UAU^{\mathrm{T}}$) для обратимой матрицы U и обратимого элемента $k \in R$. Некоторые инварианты диагонализируемых симметричных матриц выявляет следующая лемма.

Лемма 1.1. *Если симметричная матрица над локальным кольцом приводится конгруэнтным преобразованием к диагональному виду* $\mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, *то набор идеалов* $\langle d_i \rangle$ *не зависит от выбора преобразования.*

Исследуем условия конгруэнтной приводимости симметричной матрицы A над R к диагональному виду.

Конгруэнтное преобразование UAU^{T} матрицы A называется элементарным, если матрица U является трансвекцией, элементарной диагональной или мономиальной матрицей. Элемент матрицы, порождающий наибольший для неё главный идеал, назовём ведущим. Допустим, что A имеет ведущий элемент a и $2 \in R^*$. Тогда стандартный алгоритм позволяет привести матрицу A элементарными конгруэнтными преобразованиями к клеточно-диагональному виду $\mathrm{diag}(b, B)$ с ведущим элементом b, причём $\langle b \rangle = \langle a \rangle$. Если клетка B также имеет ведущий элемент, то к ней применяем аналогичное преобразование. И так далее.

Если все симметричные матрицы (хотя бы (2×2)-матрицы) над выбранным кольцом обладают ведущим элементом, то любые два главных идеала (а поэтому и всякие два максимальных идеала) кольца инцидентны. Такие кольца локальны, и мы приходим к локальным кольцам главных идеалов. Последние характеризует следующая лемма.

Лемма 1.2. *Все нетривиальные идеалы кольца R тогда и только тогда являются степенями фиксированного идеала, когда R есть локальное кольцо с главным максимальным идеалом.*

Доказательство. Допустим, что нетривиальные идеалы кольца R исчерпываются степенями J^k $(k \geqslant 1)$ фиксированного идеала J. Тогда R есть локальное кольцо, в котором любые два идеала инцидентны, а J — его единственный максимальный идеал. Поэтому любой собственный идеал I кольца R лежит в J и даже в любом главном идеале из J, не содержащемся в I. Так как любая возрастающая цепочка идеалов в R обрывается через конечное число шагов, то существует наибольший главный идеал $\langle\varepsilon\rangle$, лежащий в J. Поскольку все главные идеалы кольца R, лежащие в J, инцидентны $\langle\varepsilon\rangle$, то должно выполняться равенство $J = \langle\varepsilon\rangle$.

Предположим, что R есть локальное кольцо с главным максимальным идеалом $J = \langle\varepsilon\rangle$. Покажем, что произвольный нетривиальный идеал T кольца R является степенью идеала J. Пересечение всех степеней идеала J есть нулевой идеал. Поэтому существует такое целое число $i \geqslant 1$, что $T \subseteq J^i$ и $T \nsubseteq J^{i+1}$. Следовательно, каждый элемент t из T представляется в виде $t = a_t\varepsilon^i$ при $a_t \in R$. Кроме того, найдётся такой элемент t, что $a_t \notin J$; иначе $T \subseteq J^{i+1}$. В силу локальности кольца R в этом случае a_t есть обратимый элемент, и поэтому $T \supseteq J^i$. Отсюда $T = J^i$. Лемма доказана. □

Пусть R — локальное кольцо с главным максимальным идеалом $\langle\varepsilon\rangle$ и M_{R^*} — система представителей смежных классов группы R^* по подгруппе квадратов $R^{*2} = \{a^2 \mid a \in R^*\}$, содержащая единицу кольца R. Матрицу над R назовём канонической, если она имеет вид

$$\operatorname{diag}(k_1\varepsilon^{t_1}, k_2\varepsilon^{t_2}, \ldots, k_r\varepsilon^{t_r}, 0, \ldots, 0),$$
$$0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_r, \quad \varepsilon^{t_r} \neq 0, \quad k_i \in M_{R^*}, \quad (1)$$

где при $t_{i-1} = t_i$ в случае линейно упорядоченной системы M_{R^*} предполагаем также $k_{i-1} \leqslant k_i$. С использованием лемм 1.1 и 1.2 в [9, 12] доказана следующая теорема.

Теорема 1.3. *Пусть R — локальное кольцо с главным максимальным идеалом $\langle\varepsilon\rangle$ и обратимым элементом* 2. *Тогда всякая симметричная матрица A над R конгруэнтна канонической матрице* (1) *с однозначно определёнными показателями $t_1, t_2, \ldots, t_r$.*

Отметим, как пример, что в поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел систему $M_{\mathbb{Q}^*}$ дают целые числа, не делящиеся на квадраты простых чисел. Для вещественно замкнутого поля F [4, § 81] имеем $1 + F^{*2} \subset F^{*2} + F^{*2} \subset F^{*2}$, и можно полагать $M_{F^*} = \{-1, 1\}$. Если $R = F$ — конечное поле характеристики $p > 2$ или $R = \mathbb{Z}_{p^m}$ или $R = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ есть кольцо целых p-адических чисел, то $|R^* : R^{*2}| = 2$.

Замечание 1.4. Если в основном кольце с обратимым элементом 2 элемент j лежит в радикале Джекобсона, то при $c_1 = 1 - j/2$ получаем $1 - j = c_1^2[1 - j^2/(2c_1)^2]$. Для элемента в квадратной скобке аналогично найдём c_2. Продолжая индуктивно, находим элементы $c_m \in R^*$, такие что

$$1 - j = c_m^2 \pmod{\langle j^{2^m}\rangle}, \quad c_{m+1} = c_m \pmod{\langle j^{2^m}\rangle}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Это показывает, что $1 - j$ есть обратимый квадрат как при условии нильпотентности элемента j, так и в случае, когда основным является кольцо формальных степенных рядов от одной или нескольких переменных над полем.

Всякое ненулевое фактор-кольцо R кольца $F[[x]]$ формальных степенных рядов от x над полем $F = 2F$ есть локальная F-алгебра (см. также алгебру плюральных чисел [5,6]). Её максимальный идеал J является главным, причём

$$R^{*2} = F^{*2} \times (1 + J), \quad |R^* : R^{*2}| = |F^* : F^{*2}|,$$

так что можно полагать $M_{R^*} = M_{F^*}$.

Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1.5. *Если матрица A над локальным кольцом R конгруэнтна диагональной матрице D, то D мономиально конгруэнтна диагональной матрице UAU^{T} с такой матрицей U над R, что её главная диагональ единична, а все угловые миноры обратимы.*

Доказательство. Допустим, что для обратимой $(n \times n)$-матрицы $V = \|v_{ij}\|$ над R имеем $VAV^{\mathrm{T}} = D$. В силу обратимости V и локальности кольца R хотя бы одно алгебраическое дополнение V_{in} и произведение $v_{in}V_{in}$ обратимы в R. Так как диагональность матриц сохраняется при мономиальной конгруэнтности, то для всякой мономиальной матрицы S матрица SDS^{T} также диагональна и равна $(SV)A(SV)^{\mathrm{T}}$. В то же время заменой V на $SV = U = \|u_{ij}\|$ можно произвести в V произвольную перестановку строк и умножить каждую строку на произвольный обратимый элемент из R. В частности, такими преобразованиями можем добиться условия обратимости произведения $u_{nn}U_{nn}$ и равенства $u_{nn} = 1$. Далее аналогичные преобразования применяем к строкам, содержащим минор U_{nn}. Индукция по n приводит к требуемой в лемме матрице U. □

Для построения ортогональных групп наряду с исследованием связей конгруэнтных матриц A и $D = UAU^{\mathrm{T}}$ вида (1) целесообразно выявлять свойства преобразующей матрицы U. Матрица A для подходящих обратимых диагональных клеток A_j и нулевой клетки O имеет клеточно-диагональный вид

$$A = \mathrm{diag}(A_1\varepsilon^{f_1}, A_2\varepsilon^{f_2}, \ldots, A_q\varepsilon^{f_q}, O), \quad 0 \leqslant f_1 < f_2 < \ldots < f_q, \quad \varepsilon^{f_q} \neq 0. \qquad (2)$$

Подобные клеточные разбиения матриц $U = \|U_{ij}\|$ и D дают клетки D_j.

Согласно [9] справедлива следующая лемма.

Лемма 1.6. *Пусть A_j, D_j и U_{ij} — выбранные выше клетки над произвольным локальным кольцом R с главным максимальным идеалом $J = \langle\varepsilon\rangle$. Тогда клетки U_{tt}, $1 \leqslant t \leqslant q$, обратимы и, кроме того,*

$$U_{tt}A_tU_{tt}^{\mathrm{T}} = D_t \pmod J, \quad 1 \leqslant t \leqslant q; \quad U_{tj} = O \pmod{R\varepsilon^{f_t - f_j}}, \quad 1 \leqslant j < t \leqslant q.$$

2. Нормальный вид и схемы квадратичных форм

Заметим, что теорема 1.3 даёт также нормальный диагональный вид квадратичных форм и их матриц при $R^{*2} = R^*$, например, когда R является ненулевым фактор-кольцом кольца $F[[x]]$ формальных степенных рядов от x над алгебраически (или даже квадратично) замкнутым полем $F = 2F$.

Для индекса $|R^* : R^{*2}| > 1$ вопрос построения (единственного) «нормального» вида по конгруэнтности вызывает трудности, которые ниже будут рассматриваться в рамках теории схем квадратичных форм. Случай $|R^* : R^{*2}| = 2$

исследовался авторами ранее, и вначале мы приведём две теоремы, доказанные в [9, 12].

Следующая теорема распространяет закон инерции вещественных квадратичных форм (см. также [20, 22]) на случай локальных колец коэффициентов, в которых обратимые квадраты образуют полугруппу по сложению. Она выявляет «нормальный» вид

$$\begin{aligned}&[-(x_1^2+\ldots+x_{s_1}^2)+(x_{s_1+1}^2+\ldots+x_{r_1}^2)]\varepsilon^{i_1}+\ldots+\\&\quad+[-(x^2_{r_1+\ldots+r_{q-1}+1}+\ldots+x^2_{r_1+\ldots+r_{q-1}+s_q})+\\&\quad+(x^2_{r_1+\ldots+r_{q-1}+s_q+1}+\ldots+x^2_{r_1+\ldots+r_{q-1}+r_q})]\varepsilon^{i_q},\end{aligned}\qquad(3)$$

где $q>0$, $0\leqslant i_1<\ldots<i_q$, $\varepsilon^{i_q}\neq 0$, а целые числа $r_j>0$ и s_j таковы, что $0\leqslant s_j\leqslant r_j$ для всех j и $r_1+\ldots+r_q\leqslant n$.

Теорема 2.1. *Пусть R — локальное кольцо с обратимым элементом 2 и главным максимальным идеалом $J=\langle\varepsilon\rangle$, причём $|R^*:R^{*2}|=2$, $1+J\subset R^{*2}$ и $1+R^{*2}\subset R^{*2}$. Тогда всякая ненулевая квадратичная форма над R приводится к диагональному виду* (3) *обратимым R-линейным преобразованием неизвестных, причём показатели $i_1,\ldots,i_q$ и целые числа $r_1,\ldots,r_q,s_1,\ldots,s_q$ не зависят от способа приведения.*

При ограничении $R^*\cap(1+R^{*2})\not\subseteq R^{*2}$ нормальный вид выявляет следующая теорема.

Теорема 2.2. *Пусть R — локальное кольцо с обратимым элементом 2 и главным максимальным идеалом $J=\langle\varepsilon\rangle$, причём $|R^*:R^{*2}|=2$, $1+J\subset R^{*2}$ и $1+R^{*2}$ содержит обратимый неквадрат k. Тогда всякая симметричная матрица над R конгруэнтна единственной диагональной матрице вида*

$$\begin{aligned}&\mathrm{diag}(\delta_i\varepsilon^i,\varepsilon^i,\ldots,\varepsilon^i,\ldots,\delta_m\varepsilon^m,\varepsilon^m,\ldots,\varepsilon^m,0,\ldots,0),\\&\qquad\qquad\delta_i,\ldots,\delta_m\in\{1,k\},\quad 0\leqslant i<\ldots<m,\quad \varepsilon^m\neq 0.\end{aligned}\qquad(4)$$

Далее приводятся некоторые сведения теории схем квадратичных форм, методами которой изучаются свойства фактор-группы R^*/R^{*2} поля или кольца R. Для любых элементов $a=rR^{*2}$ и $b=sR^{*2}$ группы $G=R^*/R^{*2}$ полагаем

$$D(a,b)=\{tR^{*2}\mid t\in(rR^2+sR^2)\cap R^*\}.$$

Когда R — поле, известны следующие свойства:

1) $D(1,a)$ — подгруппа группы G и $a\in D(1,a)$;
2) $a\in D(1,-b)\iff b\in D(1,-a)$;
3) $bD(1,-a)\cap D(1,-ac)\cap dD(1,-c)\neq\varnothing\implies aD(1,-b)\cap D(1,-bd)\cap\cap cD(1,-d)\neq\varnothing$.

Группа $G=R^*/R^{*2}$ с отображением $a\to D(1,a)$ из G на подмножества из G и выделенным элементом -1 называется QF-схемой поля R. Это понятие переносится и на кольца. QF-схема поля полностью определяет его кольцо Витта, как показывают результаты [23, 24, 26]. QF-схему определяют также и как абстрактную группу $G = (G, \cdot, 1)$ экспоненты 2 с выделенным элементом $-1 \in G$, $-a := (-1)a$ и отображением $a \to D(1, a)$, удовлетворяющим условиям 1)—3). Остаётся открытым следующий вопрос [26, проблема 1]: всякая ли QF-схема реализуется как QF-схема поля?

Известно, что существует в точности три различных QF-схемы для $|G| = 2$:

$$\begin{aligned} &L_1\colon && 1 \neq -1, \quad D(1,1) = \{1\},\\ &L_{1,1}\colon && 1 \neq -1, \quad D(1,1) = G,\\ &L_{1,0}\colon && 1 = -1. \end{aligned}$$

QF-схема L_1, очевидно, реализуется как QF-схема поля, а также локального кольца R с ограничением $1 + R^{*2} \subset R^{*2}$, равносильным равенству $D(1, 1) = \{1\}$. Нормальный вид квадратичных форм над таким кольцом R даёт теорема 2.1.

Для QF-схемы $L_{1,0}$ имеем $D(1, 1) = D(1, -1)$. Полагая $G = \{1, r\}$, из эквивалентности условий $r \in D(1, -1)$ и $1 \in D(1, -r)$ для неё получаем $D(1, 1) = G$, как и для QF-схемы $L_{1,1}$. С другой стороны, равенство $D(1, 1) = G$ для QF-схемы поля или кольца R эквивалентно условию $R^* \cap (1 + R^{*2}) \nsubseteq R^{*2}$. Таким образом, QF-схемы $L_{1,1}$ и $L_{1,0}$ реализуются как QF-схемы полей и колец R с условием $R^* \cap (1 + R^{*2}) \nsubseteq R^{*2}$. Независимо от того, какая из схем $L_{1,1}$ и $L_{1,0}$ ставится в соответствие такому кольцу R, нормальный вид квадратичных форм над R описывается теоремой 2.2 единообразно.

Два поля F_1 и F_2 называют *квадратично эквивалентными*, если изоморфны ассоциированные с ними QF-схемы, т. е. существует изоморфизм $\psi\colon G_1 \to G_2$ их групп с условием $\psi(D(1, a)) = D(1, \psi(a))$ и $\psi(-1) = -1$.

Как отмечается в [26], слишком амбициозно рассчитывать на решение общей задачи классификации полей с точностью до квадратичной эквивалентности. Более достижимой представляется такая классификация полей с конечной ассоциированной схемой квадратичных форм.

QF-схемы естественным путём образуют категорию с произведениями и дают описания объектов, равносильные описаниям посредством «кватернионных» отображений или посредством сильно представленных колец Витта [26, теорема 2.2]. Как показывают результаты Кула [23, 24], всякое поле характеристики, отличной от 2, квадратично эквивалентно полю характеристики 0. С другой стороны, если QF-схемы G и G_1 реализуются как схемы поля, то это верно и для их произведения $G \times G_1$. Если G реализуется схемой поля F, а G_1 — схема с группой $\langle x \rangle$ порядка 2, то их произведение $G \times G_1 := G[x]$ даёт групповое расширение G и реализуется, например, как схема поля $F((t))$ формальных степенных рядов.

Если поле F невещественное, его *уровнем* называется наименьшее положительное число $s = s(F)$, такое что -1 есть сумма s квадратов из F; иначе $s(F) = \infty$. Известно [16], что целые числа, встречающиеся как уровни некоторого поля, всегда являются степенями числа 2, однако до сих не решена следующая проблема: существует ли невещественное поле F уровня $s(F) > 4$, у которого группа F^*/F^{*2} конечна.

Уровень поля F и его инварианты $\lambda_p(F)$ символьной длины изучались для некоторых ситуаций вместе с соответствующими инвариантами поля $F(X_1, \dots, X_m)$ рациональных функций и поля $F((X_1))\dots((X_m))$. В частности, доказано [17, следствие 4.3], что если $\mathrm{char}(F) \neq 2$, $|F^*/F^{*2}| = 2^n$, $L = F((X_1))\dots((X_{m-n}))$, $m \geqslant 2n-1$, то $|L^*/L^{*2}| = 2^m$, $s(L) = s(F)$ и символьная длина $\lambda_2(L)$ равна $[m/2]$, когда поле F невещественно, и равна $[(m+1)/2]$ в остальных случаях.

Схемы «локального типа» выделяются из конечных QF-схем G с помощью кватернионного отображения $G \times G$ на группу порядка 2. Классификация локальных типов известна. Локальных типов с $|G| = 2^{2k}$, $k \geqslant 1$, существует в точности два. Один из них уровня 1, он обозначается через $L_{2k,0}$, а другой, уровня 2, — через $L_{2k,1}$. Кроме того, существует единственный локальный тип L_{2k-1} с $|G| = 2^{2k-1}$, $k \geqslant 1$. Каждый локальный тип реализуется как QF-схема поля. Так, $L_{2,0} = L_{1,0}[x]$, $L_{2,1} = L_{1,1}[x]$. Локальные типы $L_{2k,0}$, $L_{2k,1}$, L_{2k-1}, $k \geqslant 2$, реализуются QF-схемами подходящих конечных расширений локального поля 2-адических чисел $\mathbb{Q}_2$.

Скажем, что G — *QF-схема элементарного типа*, если либо $|G| = 1$, либо схему G можно построить конечным числом операций прямого произведения и группового расширения из схем

$$L_1,\ L_{1,0},\ L_{1,1},\ L_{2k,0},\ L_{2k,1},\ L_{2k-1}, \quad k \geqslant 2.$$

Каждая схема элементарного типа реализуется как QF-схема поля. Маршалл [26, § 3] выделяет два вопроса об элементарных типах; их решение известно во многих частных случаях, но в целом вопросы остаются открытыми.

Гипотеза об элементарных типах (ограниченная форма). Всякая конечная QF-схема, которая реализуется как QF-схема поля, является схемой элементарного типа.

Гипотеза об элементарных типах (общая форма). Всякая конечная QF-схема является схемой элементарного типа.

Отметим, что полю p-адических чисел $\mathbb{Q}_{p^\infty}$, или, кратко, $\mathbb{Q}_p$, соответствует QF-схема $L_{2,0}$ при условии $p \equiv 1 \pmod 4$ и $L_{2,1}$ при условии $p \equiv 3 \pmod 4$. Индекс $|\mathbb{Q}_p^* : \mathbb{Q}_p^{*2}|$ для поля $\mathbb{Q}_p$ равен 8 при $p = 2$ и 4 при $p > 2$ [7, с. 56].

Рассмотрим классификацию классов конгруэнтных симметричных матриц и квадратичных форм над полем p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$.

Полную систему инвариантов симметричной матрицы A над полем $\mathbb{Q}_p$, согласно [7, теорема 1.1], составляют её ранг, $\det(A) \cdot \mathbb{Q}_p^{*2}$ и инвариант $c(A)$, определяемый по конгруэнтной диагональной форме $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ матрицы A через символ Гильберта (a_i, a_j) норменного вычета. Как показано в [7], наборы

$$(\mathrm{rank}(A),\, \det(A) \cdot \mathbb{Q}_p^{*2},\, c(A)), \quad c(A) = \prod_{i<j} (a_i, a_j),$$

пробегают все значения, кроме случая $\operatorname{rank}(A) = 1$ и случая $\operatorname{rank}(A) = 2$, $\det(A) \in -\mathbb{Q}_p^{*2}$, в которых $c(A) = 1$. Классы конгруэнтных симметричных матриц над $\mathbb{Q}_p$ нетрудно перечислить явно, используя систему инвариантов.

Ограничимся случаем невырожденных матриц. Выбрав при $p > 2$ произвольный квадратичный невычет r по модулю p, составим систему представителей смежных классов группы $\mathbb{Q}_p^*$ по $\mathbb{Q}_p^{*2}$:

$$M_{\mathbb{Q}_p^*} = \{1, r, p, pr\} \quad (p > 2).$$

Тогда классы конгруэнтности невырожденных симметричных (2×2)-матриц над полем $\mathbb{Q}_p$ исчерпываются классами с представителями

$$\begin{gathered}\operatorname{diag}(1,1), \quad \operatorname{diag}(1,r), \quad \operatorname{diag}(1,p), \quad \operatorname{diag}(1,pr), \\ \operatorname{diag}(r,p), \quad \operatorname{diag}(r,pr), \quad \operatorname{diag}(p,\delta p),\end{gathered} \tag{5}$$

где $\delta = r$ для $p \equiv 1 \pmod 4$ и $\delta = 1$ для $p \equiv 3 \pmod 4$. Для матриц степеней не меньше 3 классы конгруэнтности представляют восемь матриц

$$\begin{pmatrix} E & O \\ O & A \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E & & & O \\ & r & & \\ & & p & \\ O & & & p\delta \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где A — одна из семи матриц (5).

В случае $p = 2$, полагая

$$M_{\mathbb{Q}_2^*} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\},$$

аналогично получаем 15 классов для $n = 2$ и 16 классов для $n = 3$. Матрицы

$$\begin{gathered}\pm\operatorname{diag}(1,1), \quad \pm\operatorname{diag}(1,2), \quad \pm\operatorname{diag}(1,5), \quad \pm\operatorname{diag}(1,10), \quad \operatorname{diag}(1,-1), \\ \lambda\cdot\operatorname{diag}(1,-2), \quad \lambda\cdot\operatorname{diag}(1,-10), \quad \mu\cdot\operatorname{diag}(1,-5) \quad (\lambda \in \{1,5\},\ \mu \in \{1,2\})\end{gathered} \tag{7}$$

представляют все классы конгруэнтности невырожденных симметричных (2×2)-матриц над полем $\mathbb{Q}_2$. Классы конгруэнтности невырожденных симметричных матриц степеней не меньше 3 представляют матрицы

$$\begin{pmatrix} E & O \\ O & B \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E & & & O \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ O & & & -1 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где B — одна из пятнадцати матриц (7). Итак, мы получили следующее утверждение.

Предложение 2.3. *Всякая симметричная невырожденная матрица степени n над полем p-адических чисел $\mathbb{Q}_{p^\infty}$ конгруэнтна единственной диагональной матрице из* (5) *при $n = 2$ и из* (6) *при $n \geqslant 3$ в случае $p > 2$, а в случае $p = 2$ — из* (7) *при $n = 2$ и из* (8) *при $n \geqslant 3$.*

3. Перечисление квадрик проективного пространства

В этом разделе рассматривается задача перечисления квадрик проективного пространства, тесно связанная с построением нормального вида квадратичных форм.

Проективное пространство $\mathrm{P}(V)$, ассоциированное со свободным R-модулем V, составляют из всех R-свободных прямых слагаемых ранга 1 в V. Напомним, что для свободных модулей M и N отображение $\alpha\colon \mathrm{P}(M) \to \mathrm{P}(N)$ называют проективностью ассоциированных проективных пространств, если оно биективно и $\alpha p_1 \subset \alpha p_2 + \alpha p_3$ тогда и только тогда, когда $p_1 \subset p_2 + p_3$ для всех $p_1, p_2, p_3 \in \mathrm{P}(M)$. Классическая основная теорема проективной геометрии распространена в [27] на свободные модули M и N конечного ранга не меньше 3 над коммутативными кольцами. Обобщённая основная теорема проективной геометрии показывает, что всякая проективность пространства $\mathrm{P}(M)$ на $\mathrm{P}(N)$ совпадает с однозначно определённым полулинейным изоморфизмом между ними.

Пусть V — свободный R-модуль конечного ранга $n > 1$. Точки ассоциированного с V проективного пространства $\mathrm{P}(V) = RP_{n-1}$ можно представлять в виде R^*v для всевозможных унимодулярных векторов $v = (v_1, \ldots, v_n) \in V$, координаты которых, по определению, порождают единичный идеал кольца R. Квадрикой проективного пространства RP_{n-1} называют множество его точек v, определяемых уравнением $vAv^{\mathrm{T}} = 0$ с ненулевой симметричной $(n \times n)$-матрицей A над R. Очевидно, матрицы λA при всех $\lambda \in R^*$ определяют одну и ту же квадрику.

Квадратичные формы, а также соответствующие им квадрики называем *проективно эквивалентными*, если они переводятся друг в друга проективными преобразованиями. К одной из основных в теории квадрик относится задача их классификации и перечисления с точностью до проективностей.

Проективные линейные преобразования пространства RP_{n-1} соответствуют элементам $U \in \mathrm{PGL}_n(K)$ по правилу $v \mapsto vU$ $(v \in RP_{n-1})$. В силу обобщённой основной теоремы проективной геометрии [27] всякая проективность пространства RP_{n-1} $(n > 2)$ на себя есть произведение его однозначно определённых проективного линейного преобразования и автоморфизма, индуцированного автоморфизмом основного кольца R. Таким образом, при проективном преобразовании матрица A квадратичной формы переходит в $kUA^{\sigma}U^{\mathrm{T}}$ для подходящих $U \in \mathrm{PGL}_n(K)$, $k \in R^*$ и автоморфизма $\sigma \in \mathrm{Aut}\, R$. Отсюда вытекает следующее предложение.

Предложение 3.1. *Пусть $R = 2R$ есть локальное кольцо с главным максимальным идеалом $\langle\varepsilon\rangle$, причём $(\mathrm{Aut}\, R)\varepsilon \subseteq \varepsilon R^{*2}$ и $|R^* : R^{*2}| = 2$. Если в RP_{n-1} $(n > 2)$ две квадрики проективно эквивалентны, то они являются и проективно конгруэнтными.*

Пусть кольцо R выбрано как в теореме 1.3 и его максимальный идеал нильпотентен ступени s. Тогда число $N(n,s)$ классов проективно конгруэнтных квадрик в RP_{n-1} при $|R^*:R^{*2}|=m$ конечно и не превосходит числа $\binom{n+ms}{n}$; случай $m=1$ показывает, что оценка здесь достижимая.

В ограничениях теорем 2.1 и 2.2 на R число $N(n,s)$ несложно найти явно. Используем следующие обозначения: $[\ldots]$ — целая часть числа, $\Omega_q(m)$ — совокупность упорядоченных наборов $(n_1,\ldots,n_q)$ целых чисел $n_j>0$ с суммой m, наконец, число $\binom{p}{q}'$ равно $\binom{p}{q}$ для целых чисел $p\geqslant q\geqslant 0$ и равно 0 в других случаях.

Теорема 3.2. *Пусть R — локальное кольцо с нильпотентным ступени s главным максимальным идеалом, $2\in R^*$ и $|R^*:R^{*2}|=2$. Тогда число классов проективно конгруэнтных квадрик пространства RP_{n-1} $(n>2)$ равно*

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{q=1}^{\min\{m,s\}}\binom{s}{q}2^{q-1}\left\{\binom{m/2-1}{q-1}'+\binom{m-1}{q-1}\right\}$$

в случае $R^*\cap(1+R^2)\not\subseteq R^{*2}$ и

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{q=1}^{\min\{m,s\}}\binom{s}{q}\left\{\binom{m/2-1}{q-1}'+\sum_{(n_1,\ldots,n_q)\in\Omega_q(m)}\left[\frac{1}{2}\prod_{j=1}^{q}(n_j+1)\right]\right\}$$

в случае $1+R^{*2}\subseteq R^{*2}$.

Доказательство. Условие нильпотентности главного максимального идеала, в силу замечания 1.4, даёт включение $1+J\subset R^{*2}$ из теорем 2.1 и 2.2. Каждая матрица (1) представляется в виде

$$\operatorname{diag}(\varepsilon^{t_1}A_1,\varepsilon^{t_2}A_2,\ldots,\varepsilon^{t_q}A_q,0),\quad 0\leqslant t_1<t_2<\ldots<t_q<s,$$

где $A_i=\operatorname{diag}(k,k,\ldots,k,1,1,\ldots,1)$ — диагональные клетки размерности n_i и $\{k,1\}=M_{R^*}$. Число неквадратов k в клетке A_i обозначаем через s_i.

Классы квадрик с фиксированными A_i биективны наборам $(t_1,t_2,\ldots,t_q)$, и их число равно $\binom{s}{q}$. Классы проективно конгруэнтных матриц с выбранными набором $(n_1,\ldots,n_q)$ и клеткой A_i, не конгруэнтной (или конгруэнтной) kA_i, биективны с классами конгруэнтных (соответственно проективно конгруэнтных) матриц, которые ставятся в соответствие набору $(n_1,\ldots,n_{i-1},n_{i+1},\ldots,n_q)$. Поэтому

$$N(n,s)=\sum_{m=1}^{n}\sum_{q=1}^{\min\{m,s\}}\binom{s}{q}\sum_{(n_1,\ldots,n_q)\in\Omega_q(m)}Q(n_1,n_2,\ldots,n_q),\tag{9}$$

где $Q(n_1,n_2,\ldots,n_q)$ — число классов проективно конгруэнтных квадрик с фиксированными $t_1,\ldots,t_q$. При $R^*\cap(1+R^2)\not\subseteq R^{*2}$ по теореме 2.1 имеем $0\leqslant s_i\leqslant 1$, причём конгруэнтность A_i и kA_i равносильна чётности числа n_i. В каждом из $|\Omega_q(m/2)|$ случаев со всеми чётными n_i число $Q(n_1,n_2,\ldots,n_q)$ равно 2^q;

в остальных случаях оно равно 2^{q-1}. Внутреннюю сумму в (9) теперь легко находим, используя равенство $|\Omega_q(m)| = \binom{m-1}{q-1}$.

Различным $\prod_{i=1}^{q}(n_i+1)$ наборам $(s_1, \ldots, s_q)$ с ограничениями $0 \leqslant s_i \leqslant n_i$ по теореме 2.2 при $1 + R^{*2} \subset R^{*2}$ соответствуют различные классы конгруэнтных матриц, причём конгруэнтность A_i и kA_i равносильна равенству $n_i = 2s_i$. Для фиксированного i можем считать $0 \leqslant s_i \leqslant n_i - s_i$. Число случаев с $s_i < n_i - s_i$ равно $[(n_i+1)/2]$. Если m чётно, то в $|\Omega_q(m/2)|$ случаях все n_i чётны и число $Q(n_1, \ldots, n_q)$ равно

$$\left[\frac{n_1+1}{2}\right] + 1$$

при $q = 1$ и равно

$$\left[\frac{n_q+1}{2}\right]\prod_{j=1}^{q-1}(n_j+1) + Q(n_1, \ldots, n_{q-1})$$

для $q > 1$. Требуемую форму $N(n,s)$ вновь даёт (9) и равенство $[(ab)/2] = [a/2]b + [b/2]$ для целых чисел a, b с нечётным a. Теорема доказана. □

Замечание 3.3. Г. П. Егорычев сообщил авторам, что методами интегрального представления найденное в теореме 3.2 комбинаторное выражение числа $N(n,s)$ удаётся свернуть при $1 + R^{*2} \subseteq R^{*2}$ к виду

$$N(n,s) = T(n,2s) + T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor, s\right), \quad T(n,p) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\binom{n+p}{p},$$

а в случае $R^* \cap (1 + R^2) \nsubseteq R^{*2}$ имеем

$$N(n,s) = S(n,s) + S\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor, s\right),$$

где

$$S(n,s) = -\frac{1}{2} + \sum_{q=0}^{s} 2^{q-1}\binom{s}{q}\binom{n}{q}.$$

С учётом [11, теорема 5] доказанная теорема завершает перечисление классов проективно эквивалентных квадрик проективной плоскости RP_2 в ограничениях теорем 2.1 и 2.2 на кольцо R.

4. Случай локального кольца с неглавным идеалом

Используемые методы удаётся применить и в случае основного локального кольца с максимальным идеалом, не являющимся главным.

Пусть R — кольцо формальных степенных рядов от переменных x, y над полем F или его фактор-кольцо по степени не меньше 2 максимального идеала.

Максимальный идеал $J = \langle x, y\rangle$ в R (радикал Джекобсона) единствен и поэтому является характеристическим. Кроме того, сумма $R = F + J$ прямая и

$$R^* = F^* + J = F^* \times (1 + J).$$

Если $\phi \in \operatorname{Aut}(R)$, то проекции $a^\sigma \in F$ и $a^\lambda \in J$ элемента a^ϕ $(a \in F)$ определяют автоморфизм σ поля F и гомоморфизм λ аддитивной группы F^+ в J^+, для которых отображение $a \to 1 + (a^\sigma)^{-1} a^\lambda$ $(a \in F^*)$ есть гомоморфизм группы F^* в $1 + J$. Обратно, всякий автоморфизм σ поля F и гомоморфизм $\lambda\colon F^+ \to J^+$, выбранный как выше, определяют автоморфизм $a \to a^\sigma + a^\lambda$ $(a \in F)$ кольца R, тождественный на J. Такие автоморфизмы в группе $\operatorname{Aut}(R)$ образуют подгруппу $\mathcal{A}_F(R)$ — стабилизатор радикала. Автоморфизмы R как F-алгебры с единицей образуют подгруппу $\mathcal{A}(R)$ — стабилизатор F. По доказанному, оба стабилизатора в произведении дают $\operatorname{Aut}(R)$.

Очевидно, любая матрица $\alpha = \|a_{ij}\| \in \mathrm{GL}_2(F)$ индуцирует автоморфизм

$$\tilde\alpha(t) = t \;\; (t \in F), \quad \tilde\alpha(x) = a_{11}x + a_{12}y, \quad \tilde\alpha(y) = a_{21}x + a_{22}y,$$

причём $\tilde{}\colon \mathrm{GL}_2(F) \to \mathcal{A}(R)$ — изоморфное вложение. Отсюда вытекает следующая лемма.

Лемма 4.1. *Группа автоморфизмов кольца R допускает факторизацию $\operatorname{Aut}(R) = \mathcal{A}_F(R)\mathcal{A}(R)$. Когда идеал J нильпотентен ступени 2, подгруппа $\mathcal{A}(R)$ совпадает с $\widetilde{\mathrm{GL}}_2(F)$ и действует транзитивно на F-линейно независимых парах элементов из J.*

Исследуем квадрики проективной плоскости RP_2 над кольцом

$$R = F[[x, y]]/\langle x^2, xy, y^2\rangle, \quad J = \langle x, y\rangle, \quad J^2 = 0,$$

где $F = 2F$ — поле с обратимым неквадратом k и индексом $|F^* : F^{*2}| = 2$.

Выделим квадрики со следующими матрицами ранга 1 (по модулю J):

$$D_\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & y & \delta x \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Лемма 4.2. *Квадрики с матрицами D_0 и D_k проективно неэквивалентны, недиагонализируемы и, с точностью до проективностей, исчерпывают все недиагонализируемые квадрики ранга больше 0 проективной плоскости RP_2.*

Доказательство. Произвольная симметричная матрица ранга больше 0 над R имеет обратимый и, следовательно, ведущий элемент, а потому (см. раздел 1) проективно конгруэнтна матрице вида

$$A = \operatorname{diag}(1, A_0), \quad A_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Если клетка A_0 имеет ведущий элемент или какой-либо из идеалов $\langle a\rangle$ и $\langle c\rangle$ содержит $\langle b\rangle$, то A_0 и A — диагонализируемые матрицы. Поэтому при условии недиагонализируемости матрицы A можем считать без ограничения общности, что $a, b, c \in J$ и элементы a и b F-линейно независимы.

По лемме 4.1 отображение $a \mapsto x$, $b \mapsto y$ определяет автоморфизм кольца R из $\mathcal{A}(R)$. Индуцированный автоморфизм переводит A в матрицу

$$\operatorname{diag}(1, B), \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ y & \alpha x + \beta y \end{pmatrix}$$

для некоторых $\alpha, \beta \in F$. Полагая $\alpha_1 = \alpha + (\beta/2)^2$, находим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta/2 & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1 & -\beta/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -\beta x/2 + y \\ -\beta x/2 + y & \alpha_1 x \end{pmatrix}.$$

Умножив её второй столбец и вторую строку на элемент t, получаем конгруэнтную матрицу B_t. Уравнение $\alpha_1 x t^2 = \delta x$ разрешимо относительно $t \in F^*$ лишь при единственном δ из $\{0, 1, k\}$. Фиксируя решение t, выберем кольцевой автоморфизм $x \mapsto x$, $t(-\beta x/2 + y) \mapsto y$ из $\mathcal{A}(R)$. Индуцированный автоморфизм переводит матрицу $\operatorname{diag}(1, B_t)$ в матрицу (10) с $\delta \in \{0, 1, k\}$. Наконец, соотношения

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x-y) & 0 \\ 0 & 2(x+y) \end{pmatrix}$$

доказывают диагонализируемость матрицы D_1. Тем самым доказана проективная эквивалентность A матрице D_0 или D_k.

Пусть $A = D_\delta$, $\delta \in \{0, k\}$, и предположим, что для какой-либо матрицы $U = \|\alpha_{ij}\| \in \mathrm{GL}_3(R)$ матрица UAU^{T} является диагональной. Учитывая, что мономиальная конгруэнтность сохраняет диагональность матриц, матрицу U можем выбрать с единичной главной диагональю по лемме 1.5. Тогда условие диагональности матрицы UAU^{T} приводит к равенствам

$$\begin{aligned} \alpha_{21} + \alpha_{12}x + \alpha_{13}y + \alpha_{12}\alpha_{23}y + \delta\alpha_{13}\alpha_{23}x = 0, \\ \alpha_{31} + \alpha_{12}\alpha_{32}x + \alpha_{13}\alpha_{32}y + \alpha_{12}y + \delta\alpha_{13}x = 0, \\ \alpha_{21}\alpha_{31} + \alpha_{32}x + \alpha_{23}\alpha_{32}y + y + \delta\alpha_{23}x = 0. \end{aligned}$$

Первые два равенства дают $\alpha_{21}, \alpha_{31} \in J$. Используя последнее равенство, соотношение $J^2 = 0$ и линейную независимость элементов x и y, получаем, что $\alpha_{32} + \delta\alpha_{23} \in J$, $\alpha_{23}\alpha_{32} + 1 \in J$, откуда $\delta\alpha_{23}^2 \in 1 + J$. Мы пришли к противоречию с одним из соотношений $\delta \in \{0, k\}$ и $1 + J \subset R^{*2}$. Таким образом, недиагонализируемость матриц D_0 и D_k установлена.

Допустим, что квадрики с матрицами D_0 и D_k проективно эквивалентны. Пусть первая из них переводится во вторую подходящим кольцевым автоморфизмом с условием $x \mapsto a$, $y \mapsto b$ и проективным линейным преобразованием с обратимой матрицей $U = \|u_{ij}\|$. Таким образом, приходим к равенству

$$U \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} U^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & y & kx \end{pmatrix}.$$

Из него получаем обратимость элемента u_{11} и отношения $u_{21}, u_{31} \in J$. Сравнение в матричном равенстве соответствующих диагональных элементов даёт равенства

$$x = u_{22}^2 a + 2u_{22}u_{23}b, \quad kx = u_{32}^2 a + 2u_{32}u_{33}b.$$

Отсюда и из условия $J^2 = 0$ вытекает обратимость элементов u_{22} и u_{32}, а также равенство

$$(ku_{22}^2 - u_{32}^2)a = 2(u_{32}u_{33} - ku_{22}u_{23})b.$$

Полученное равенство и F-линейная независимость элементов a и b из J дают соотношение $ku_{22}^2 - u_{32}^2 \in J$, противоречащее включению $1 + J \subset R^{*2}$. Это завершает доказательство леммы. □

Недиагонализируемая квадрика ранга 0 проективной плоскости RP_2, как и в лемме 4.2, проективно эквивалентна квадрике с матрицей

$$\begin{pmatrix} x & y & 0 \\ y & \delta x & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \tag{11}$$

для некоторых $a, b \in R$ и $\delta \in \{0, 1, k\}$.

Случай $a = 0$, $b \in F^*x$ легко приводит к дополнительным ограничениям $b = x$ и $\delta = 0$. Если же $a = 0$, $b \in Fx + F^*y$, то координаты $(1,2)$ и $(2,1)$ матрицы (11) преобразуются в множество Fx; аннулируя их, приходим к случаю $b = 0$, $\delta = 0$, $a \in \{x, kx\}$. Когда $\langle b \rangle \subseteq \langle a \rangle$, получаем $b = 0$ и $\delta \in \{0, k\}$, причём либо $a = \delta_1 y$, $\delta_1 \in \{0, 1, k\}$, либо $a \in \delta_2(x + Fy)$, $\delta_2 \in \{1, k\}$. С другой стороны, число классов проективно эквивалентных квадрик, содержащих квадрику с одной из матриц (11) при $b = 0$, $a \in \delta_2(x + Fy)$ (аналогично при ограничении F-линейной независимости элементов a, b) существенно зависит от F, и при имеющемся произволе в выборе поля F это число не обязано быть даже конечным.

Далее мы исследуем диагонализируемые квадрики проективной плоскости RP_2. По лемме 1.1 квадрики, проективно эквивалентные квадрике с матрицей

$$D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, d_3),$$

определяют набор идеалов $\langle d_i \rangle$ с точностью до автоморфизмов кольца R. Последние сохраняют отношение инцидентности идеалов.

Допустим вначале, что все три идеала $\langle d_i \rangle$ попарно неинцидентны. Тогда D проективно эквивалентна одной из четырёх матриц

$$D_{\alpha,\beta} = \operatorname{diag}(\alpha x, \beta y, x + y), \quad \alpha, \beta \in \{1, k\}.$$

Очевидно, автоморфизм из $\mathcal{A}(R)$, переставляющий x и y, приводит $D_{k,1}$ к матрице, мономиально конгруэнтной $D_{1,k}$. Если $-1 \in F^{*2}$, то автоморфизм $x \mapsto -k^{-1}x$, $y \mapsto k^{-1}(x + y)$ переводит $D_{1,k}$ в матрицу, мономиально конгруэнтную матрице $D_{-k^{-1},k^{-1}}$, а поогледняя конгруэнтна $D_{k,k}$. В случае, когда -1 не является квадратом в F, полагаем $k = -1$ и автоморфизмом $x \mapsto -y$, $y \mapsto x + y$ из $\mathcal{A}(R)$ приводим матрицу $D_{1,k} = D_{1,-1}$ к матрице, мономиально конгруэнтной $D_{1,1}$.

Покажем, что матрицы

$$D_{1,1} = \mathrm{diag}(x, y, x+y), \quad D_{k,k} = k \cdot \mathrm{diag}(x, y, k^{-1}(x+y)) \tag{12}$$

не являются проективно эквивалентными. Предположим противное. Тогда существуют F-линейно независимые элементы $a, b \in J$ и обратимая матрица $U = \|u_{ij}\|$ с единичной главной диагональю (по лемме 1.5), для которых матрица $D_{k,k}$ мономиально конгруэнтна матрице $U\,\mathrm{diag}(a, b, a+b)U^{\mathrm{T}}$. Так как последняя диагональна, то в силу F-линейной независимости a и b выполняются равенства

$$\begin{aligned} u_{21} + u_{13}u_{23} = u_{12} + u_{13}u_{23} = u_{31} + u_{13} = u_{12}u_{32} + u_{13} = \\ = u_{21}u_{31} + u_{23} = u_{32} + u_{23} = 0 \,(\mathrm{mod}\ J), \end{aligned} \tag{13}$$

и поэтому $u_{31}(1 + u_{32}^2), u_{32}(1 + u_{31}^2) \in J$.

Допустим, что элементы $1 + u_{31}^2$, $1 + u_{32}^2$ лежат в идеале J. Учитывая замечание 1.4, получим, что $u_{31}^2, u_{32}^2 \in -(1+J) \subseteq -R^{*2}$, откуда следует, что $-1 \in R^{*2}$. Следовательно, для подходящих элементов $r \in F$ и $\delta, \mu \in \{\pm 1\}$ по модулю идеала J выполняются равенства $-1 = r^2$, $u_{31} = \delta r$, $u_{32} = \mu r$. Вместе с (13) это показывает, что по модулю идеала J $u_{13} = -\delta r$, $u_{23} = -\mu r$, $u_{12} = u_{21} = \delta\mu$. Отсюда $\det(U) = 0 \,(\mathrm{mod}\ J)$, вопреки невырожденности матрицы U.

Таким образом, по крайней мере один из элементов u_{31} или u_{32} принадлежит J. Но тогда из равенств (13) легко следует, что $u_{ij} \in J$, $i \neq j$, и $U = E$ $(\mathrm{mod}\ J)$. Следовательно, матрица $D_{1,1}$ проективно эквивалентна $D_{k,k}$ тогда и только тогда, когда матрица $D_{1,1}$ автоморфна матрице, мономиально конгруэнтной матрице $D_{k,k}$, с точностью до умножения диагональных элементов на обратимые квадраты. Однако указанная автоморфность приводит к противоречивому равенству $R^{*2} = kR^{*2}$, поэтому матрицы $D_{1,1}$ и $D_{k,k}$ не являются проективно эквивалентными.

Пусть теперь два из трёх идеалов $\langle d_i \rangle$ неинцидентны. Когда один из них инцидентен с оставшимся идеалом, матрица D по модулю J имеет ранг не больше 1 и лемма 4.1 даёт проективную эквивалентность матрицы D одной из матриц

$$\mathrm{diag}(1, x, y), \quad \mathrm{diag}(x, y, 0), \quad \mathrm{diag}(x, y, x), \quad \mathrm{diag}(x, y, kx). \tag{14}$$

В случае попарной инцидентности всех идеалов $\langle d_i \rangle$ по лемме 4.1, с точностью до автоморфизма, индуцированного автоморфизмом кольца R из $\mathcal{A}(R)$, матрица D лежит над локальным подкольцом $F + Fx$ главных идеалов. Когда обратимый неквадрат k представляется в поле F суммой квадратов, матрица D должна быть по теореме 2.2 проективно эквивалентной, помимо единичной матрицы E, в точности одной из следующих 12 матриц рангов $r = 0$, $r = 1$ и $r = 2$:

$$\mathrm{diag}(1, 1, 0), \quad \mathrm{diag}(1, k, 0), \quad \mathrm{diag}(1, 1, x), \quad \mathrm{diag}(1, k, x); \tag{15}$$

$$\mathrm{diag}(1, 0, 0), \quad \mathrm{diag}(1, x, 0), \quad \mathrm{diag}(1, x, x), \quad \mathrm{diag}(1, x, kx); \tag{16}$$

$$\mathrm{diag}(x, 0, 0), \quad \mathrm{diag}(x, x, 0), \quad \mathrm{diag}(x, kx, 0), \quad \mathrm{diag}(x, x, x). \tag{17}$$

Поэтому здесь существует ровно 19 классов диагонализируемых квадратичных форм в RP_2. Когда F есть поле с условием $1 + F^{*2} \subset F^{*2}$, по теореме 2.1 этот список расширяется лишь двумя классами, которые представляются матрицами

$$\mathrm{diag}(1, 1, k), \quad \mathrm{diag}(x, x, kx). \tag{18}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4.3. *Пусть $R = F[[x, y]]/\langle x^2, xy, y^2\rangle$, где F — поле характеристики, отличной от 2, с индексом $|F^* : F^{*2}| = 2$. Тогда недиагонализируемые проективно эквивалентные квадрики проективной плоскости RP_2 образуют в случае ранга больше 0 в точности два класса, представляемые матрицами D_0 и D_k из* (10)*, а в случае ранга 0 число классов зависит от выбора F и не обязательно конечно. Классы проективно эквивалентных диагонализируемых квадрик при $F^* \cap (1 + F^{*2}) \not\subseteq F^{*2}$ представляются 19 матрицами E,* (12), (14)—(17)*, а в случае $1 + F^{*2} \subset F^{*2}$ список дополняется двумя классами, которые представляются матрицами* (18).

Литература

[1] Автоморфизмы классических групп / Под ред. Ю. И. Мерзлякова. — М.: Мир, 1976.

[2] Артин Э. Геометрическая алгебра. — М.: Наука, 1969.

[3] Бурбаки Н. Алгебра. Модули, кольца, формы. — М.: Наука, 1966.

[4] Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. — М.: Наука, 1979.

[5] Вишневский В. В., Розенфельд Б. А., Широков А. П. О развитии геометрии пространств над алгебрами // Изв. высш. учебн. завед. — 1984. — № 7. — С. 38—44.

[6] Вишневский В. В., Широков А. П., Шурыгин В. В. Пространства над алгебрами. — Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1985.

[7] Касселс Д. Рациональные квадратичные формы. — М.: Мир, 1982.

[8] Левчук В. М., Старикова О. А. Квадрики и симметрические формы модулей над локальным кольцом главных идеалов // Междунар. алгебр. конф. (тезисы докл.). — М., 2004.

[9] Левчук В. М., Старикова О. А. Квадратичные формы проективных пространств над кольцами // Мат. сб. — 2006. — № 6. — С. 97—110.

[10] Милнор Дж., Хьюзмоллер Д. Симметрические билинейные формы. — М.: Наука, 1986.

[11] Старикова О. А. Перечисление квадрик проективных плоскостей и пространств над локальными кольцами главных идеалов // Алгебра и теория моделей. Вып. 4. — Новосибирск: НГТУ, 2003. — С. 110—115.

[12] Старикова О. А. Перечисление квадрик и симметричных форм модулей над локальными кольцами: Дис.... канд. физ.-мат. наук. — Магадан: Северный международный университет, 2004.

[13] Baeza R. Quadratic Forms over Semilocal Rings. — Berlin: Springer, 1978. — (Lect. Notes Math.; Vol. 655).

[14] Baeza R. On the classification of quadratic forms over semilocal rings // Bull. Soc. Math. France, Suppl., Mém. — 1979. — Vol. 59. — (Colloque sur les Formes Quadratiques II (Montpellier, 1977)). — P. 7—10.

[15] Baeza R. The norm theorem for quadratic forms over a field of characteristic 2 // Comm. Algebra. — 1990. — Vol. 18, no. 5. — P. 1337—1348.

[16] Becher K. J. On the number of square classes of a field of finite level // Documenta Math. Extra Volume, Quadratic forms LSU. — 2001. — P. 65—84.

[17] Becher K. J., Hoffmann D. W. Symbol lengths in Milnor K-theory // Homology Homotopy Appl. — 2004. — Vol. 6, no. 1. — P. 17—31.

[18] Benz W. Vorlesungen über Geometrie der Algebren. — Berlin: Springer, 1973.

[19] Colliot-Thelene J.-L. Formes quadratiques sur les anneaux semi-locaux reguliers // Bull. Soc. Math. France, Suppl., Mém. — 1979. — Vol. 59. — (Colloque sur les Formes Quadratiques II (Montpellier, 1977)). — P. 13—31.

[20] Corduneanu A. An elementary proof of the inertial law for real quadratic forms // Gaz. Mat., Ser. Inf. Stiint. Perfect. Metod. — 1997. — Vol. 15, no. 1. — P. 41—46.

[21] Estes D. R., Guralnick R. M. A stable range for quadratic forms over commutative rings // J. Pure Appl. Algebra. — 1997. — Vol. 120, no. 3. — P. 255—280.

[22] Honix E. A. Totally indefinite quadratic forms over formally real fields // Indag. Math. — 1985. — Vol. 47, no. 3. — P. 305—312.

[23] Kula M. Fields and quadratic form schemes // Ann. Math. Sil. — 1985. — Vol. 1 (13). — P. 7—22.

[24] Kula M. Counting Witt rings // J. Algebra. — 1998. — Vol. 206, no. 2. — P. 568—587.

[25] Lam T. Y. The Algebraic Theory of Quadratic Forms. — Reading: Benjamin/Cummings Publ., 1980.

[26] Marshall M. The elementary type conjecture in quadratic form theory // Algebraic and Arithmetic Theory of Quadratic Forms. Proc. of the Int. Conf., Universidad de Talca, Talca and Pucon, Chile, December 11—18, 2002 / R. Baeza, ed. — Providence: Amer. Math. Soc., 2004. — (Contemp. Math.; Vol. 344). — P. 275—293.

[27] Ojanguren M., Sridharan R. A note on the fundamental theorem of projective geometry // Comment Math. Helv. — 1969. — Vol. 44. — P. 310—315.

[28] Scharlau W. Quadratic and Hermitian Forms. — Berlin: Springer, 1985.

[29] Yucas J. L. A classification theorem for quadratic forms over semilocal rings // Ann. Math. Sil. — 1986. — Vol. 2, no. 14. — P. 7—12.