Проблема Куроша, теорема о высоте, нильпотентность радикала и тождество алгебраичности

А. Я. БЕЛОВ
Московский институт открытого образования,
Еврейский университет, Иерусалим
e-mail: akanel@mail.ru

УДК 512.552.4+512.554.32+512.664.2

Ключевые слова: полиномиальное тождество, проблема Куроша, высота, тождество Капелли, тождество алгебраичности.

Аннотация

Работа посвящена взаимосвязи между проблемой Куроша и теоремой Ширшова о высоте. В центре внимания находится тождество алгебраичности, с помощью которого и получаются основные результаты, например прямое комбинаторное доказательство теоремы о нильпотентности радикала вместе с явными оценками на индекс нильпотентности. Доказано, что если A — конечно порождённая PI-алгебра, Y — её конечное подмножество и для любого ассоциативно-коммутативного кольца $R \supset \mathbb{F}$ любой фактор тензорного произведения $R \otimes A$, для которого все проекции элементов из Y алгебраичны, является конечномерной R-алгеброй, то A имеет ограниченную существенную высоту над Y. Если же, кроме того, Y порождает A как алгебру, то A имеет ограниченную высоту над Y в смысле Ширшова.

Кроме того, работа содержит доказательство теоремы Размыслова—Кемера—Брауна о нильпотентности радикала конечно порождённой PI-алгебры, отличное от первоначального. Доказательство позволяет получить конструктивные оценки.

Главной целью данной работы является развитие техники, связанной с тождеством алгебраичности, а также развитие своего рода «операционного исчисления» для операторов, связанных с символьными выражениями в PI-алгебрах (операторов «переноса» и «вставки»).

Abstract

A. Ya. Belov, The Kurosh problem, height theorem, nilpotency of the radical, and algebraicity identity, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 2, pp. 3—29.

The paper is devoted to relations between the Kurosh problem and the Shirshov height theorem. The central point and main technical tool is the identity of algebraicity. The main result of this paper is the following. Let A be a finitely generated PI-algebra and Y be a finite subset of A. For any Noetherian associative and commutative ring $R \supset \mathbb{F}$, let any factor of $R \otimes A$ such that all projections of elements from Y are algebraic over $\pi(R)$ be a Noetherian R-module. Then A has bounded essential height over Y. If, furthermore, Y generates A as an algebra, then A has bounded height over Y in the Shirshov sense.

The paper also contains a new proof of the Razmyslov–Kemer–Braun theorem on radical nilpotence of affine PI-algebras. This proof allows one to obtain some constructive estimates.

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 2, с. 3—29.

The main goal of the paper is to develope a “virtual operator calculus.” Virtual operators (pasting, deleting and transfer) depend not only on an element of the algebra but also on its representation.

1. Введение

А. И. Ширшовым [17, 18] была доказана теорема об ограниченности высоты конечно порождённой PI-алгебры степени m над множеством слов длины не больше m.

Теорема А. И. Ширшова о высоте. *Пусть A — конечно порождённая PI-алгебра. Тогда существуют конечный набор элементов Y и число $H \in \mathbb{N}$, такие что A линейно представима множеством элементов вида*

$$v_1^{k_1} v_2^{k_2} \cdots v_h^{k_h}, \quad \text{где} \quad h \leqslant H, \quad v_i \in Y.$$

В качестве Y можно взять набор слов степени не выше m.

Такой набор Y называется *базисом Ширшова*. Элемент x *линейно представим множеством* M, если он принадлежит его линейной оболочке $\mathrm{Span}(M)$. Если $A = \mathrm{Span}(M)$, то A *линейно представима множеством* M.

Из этой теоремы вытекает положительное решение проблемы Куроша [7] и других проблем бернсайдовского типа для PI-колец. Ведь если Y — базис Ширшова и все элементы из Y алгебраичны, то алгебра A конечномерна. Тем самым теорема Ширшова даёт явное указание множества элементов, алгебраичность которых ведёт к конечномерности всей алгебры.

Следствие 1.1. *Если A — PI-алгебра степени m и все слова от образующих A степени не выше m алгебраичны, то A локально конечна.* □

Итак, ограниченность высоты над Y влечёт положительное решение «проблемы Куроша над Y». (И. П. Шестаков поставил вопрос о локальной конечности алгебр с алгебраическим множеством слов длины не выше сложности. Гипотеза Шестакова была независимо доказана в [13, 16]. С. Амицур поставил вопрос об ограниченности высоты над указанным множеством. Этот вопрос был решён в [1], ответ на него был также анонсирован в [15]. Множествам Y, над которыми положительно решается проблема Куроша, посвящён ряд работ. Обсуждение комбинаторных вопросов, с этим связанных, можно найти, например, в [1—3, 14].) Наша цель состоит в обращении этого утверждения.

Вместо понятия *высоты* удобнее пользоваться близким понятием *существенной высоты*. Алгебра A имеет *существенную высоту* h над конечным множеством Y, называемым *s-базисом*, если можно выбрать такое конечное множество $D \subset A$, что A линейно представима элементами вида $t_1 \cdots t_l$, где $l \leqslant 2h+1$ и для каждого i либо $t_i \in D$, либо $t_i = y_i^{k_i}$, $y_i \in Y$, причём множество таких i, что $t_i \notin D$, содержит не более h элементов.

Отметим, что если алгебра конечномерна, то она имеет ограниченную существенную высоту (равную нулю) над пустым множеством.

Говоря неформально, любое длинное слово есть произведение периодических частей и «прокладок» ограниченной длины. Существенная высота есть число таких периодических кусков, а обычная ещё учитывает «прокладки».

Теорема 1.2 (А. Я. Белов). *Пусть A — градуированная алгебра, Y — конечное множество однородных элементов. Тогда если при всех n алгебра $A/Y^{(n)}$ нильпотентна, то Y есть s-базис A. Если при этом Y порождает A как алгебру, то Y — базис Ширшова алгебры A.* □

В формулировке $Y^{(n)}$ обозначает идеал, порождённый n-ми степенями элементов из Y.

Как показывает следующий пример, непосредственное обращение проблемы Куроша для неградуированного случая имеет отрицательное решение. Пусть $A = \mathbb{Q}[x, 1/x]$. Любая проекция π, такая что элемент $\pi(x)$ алгебраичен, имеет конечномерный образ. Однако множество $\{x\}$ не является s-базисом алгебры $\mathbb{Q}[x, 1/x]$. Ограниченность существенной высоты есть некоммутативное обобщение условия целости. Нам потребуется следующее определение.

Определение 1.3. Множество $M \subset A$ называется *курошевым*, если любая проекция $\pi\colon A \otimes K[X] \to A'$, в которой образ $\pi(M)$ цел над $\pi(K[X])$, конечномерна над $\pi(K[X])$.

Теперь можно сформулировать обобщение теоремы 1.2 на неоднородный случай.

Теорема 1.4 (А. Я. Белов). *Пусть A — PI-алгебра, $M \subseteq A$ — некоторое курошево подмножество в A. Тогда M — s-базис алгебры A.*

Таким образом, ограниченность существенной высоты есть некоммутативное обобщение свойства *целости*.

Следующее предложение относится к связи между теоремами 1.4 и 1.2.

Предложение 1.5. *Пусть A — градуированная алгебра, Y состоит из однородных элементов положительной степени однородности. Если фактор $A/Y^{(n)}$ при всех n нильпотентен, то Y — курошево множество.* □

Замечание. Отметим, что в случае PI-алгебр Ли положительно решается проблема Куроша, но теорема о высоте не выполняется.

Теорема 1.4 была доказана в [2], однако, в отличие от ситуации с теоремой 1.2, её доказательство не было чисто комбинаторным и использовало структурную теорию. Для понимания проблем, связанных с алгебраическими PI-алгебрами, путь, основанный на работе с тождеством алгебраичности, нам представляется принципиальным. (Так, нильпотентность радикала в конечно порождённой PI-алгебре, в которой выполняется тождество алгебраичности, была доказана Ю. П. Размысловым [11]. Позднее А. Р. Кемер [6] в случае нулевой характеристики установил справедливость указанного тождества. А. Браун [20] установил нильпотентность радикала конечно порождённых PI-алгебр над произвольным нётеровым ассоциативно-коммутативным кольцом и тем самым получил окончательный ответ на вопрос, поставленный В. Н. Латышевым [8].)

Нашей целью является получение наиболее естественного доказательства этой теоремы, основанного на работе с тождеством алгебраичности. Техника, развитая при доказательстве теоремы 1.4, эффективно работает и в доказательстве нильпотентности радикала. Возникает любопытное «операторное исчисление» на операторах переноса (определённых только на записях элементов).

Теорема 1.4 переносится на некоторый класс колец, асимптотически близкий к ассоциативным, куда входят, в частности, альтернативные и йордановы алгебры (см. [2]). Теорема о высоте для альтернативных PI-алгебр была установлена в [10], для йордановых PI-алгебр — в [1], для API-алгебр Ли — в [9].

2. Основные определения и конструкции

Для организации индукционного процесса нам понадобится следующие определение и техническое предложение.

Определение 2.1. Назовём множество $Y = \{y_\alpha\}_{\alpha=1}^m$ *курош-высотным порядка* (i, m), если любая проекция $\pi\colon A\otimes R\to A'$, в которой образы элементов $\pi(y_1),\dots,\pi(y_i)$ целы над $\pi(R)$, имеет ограниченную существенную высоту над $\{\pi(y_{i+1}),\dots,\pi(y_m)\}$.

Предложение 2.2. *Пусть Y — курошево множество, $y\in Y$, $Y' = Y\setminus\{y\}$, $A' = \mathbb{F}[x_1,\dots,x_k]\otimes A/I$. Тогда если проекция элемента y цела над $\mathbb{F}[x_1,\dots,x_k]$, то проекция множества Y' есть курошево множество, если считать кольцо $\mathbb{F}[x_1,\dots,x_k]$ основным кольцом.* $\square$

Мы будем доказывать, что курош-высотное множество порядка (i, m) является курош-высотным множеством порядка $(i-1, m)$. Курошево множество Y является курош-высотным порядка $(|Y|, |Y|)$, а если Y — s-базис, то Y курош-высотно порядка $(0, |Y|)$. Таким образом получается теорема 1.4. Далее с помощью очевидных соображений (через рассмотрение проекций алгебры, в которых элементы $\pi(y_j)$, $j<i$, алгебраичны) ситуация сводится к случаю $i=1$. Разбор этого случая, по сути, ничем не отличается от доказательства основной теоремы, когда $|Y|=1$.

Пусть алгебра A имеет фиксированный набор образующих. Тогда любой элемент $z\in A$ есть линейная комбинация слов степени не выше l. Минимальное такое l назовём *l-длиной элемента* z и будем обозначать $l(z)$. Пусть Y, D — конечные множества, удовлетворяющие условиям, описанным в определении существенной высоты, $z\in A$. Через $L_{YD}(z)$ обозначается минимальная существенная высота членов (с множеством прокладок D), которыми линейно представим элемент z.

Определение 2.3. Пусть $I = (i_1,\dots,i_r)$ — мультииндекс, $|I| = \sum\limits_\alpha i_\alpha$, $\lambda_I\in\mathbb{F}$. Тождество вида

$$f = \sum_{\sigma\in S_{r+1}}\sum_{|I|=N}\lambda_I c_{\sigma(0)}x^{i_0}c_{\sigma(1)}x^{i_1}\cdots x^{i_{r-1}}c_{\sigma(r)} = 0$$

называется *тождеством слабой алгебраичности порядка* r. Тождество вида
$$f = \sum_{|I|=N} \lambda_I c_0 x^{i_0} c_1 x^{i_1} \cdots x^{i_{r-1}} c_r = 0$$
называется *тождеством алгебраичности порядка* r. Если вместе с тождеством f для любой перестановки $\sigma \in \mathrm{S}_r$ выполняется тождество
$$f_\sigma = \sum_{|I|=N} \lambda_I c_0 x^{i_{\sigma(0)}} c_1 x^{i_{\sigma(1)}} \cdots x^{i_{\sigma(r-1)}} c_r = 0,$$
то тождество f называется *тождеством сильной алгебраичности порядка* r. *Глубина* $D(f)$ тождества f (сильной, слабой) алгебраичности есть максимальная степень переменной x, которая участвует в одном из слагаемых.

Ясно, что $D(f) < N$ и $\deg(f) = N + r + 1$.

Порядок алгебраичности — это число участков, состоящих из степеней x, или «карманов», а глубина — максимальное содержание одного «кармана». Слабая алгебраичность допускает перестановки c_i. Сильная алгебраичность означает, что «карманы» можно переставлять, не меняя коэффициентов λ_I. В этом случае для любого полилинейного по всем z_i полинома $g = g(\vec{y}, z_1, \ldots, z_r)$, где $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_s)$, выполняется тождество
$$f_g = \sum_{|I|=N} \lambda_I g(a_0 x^{i_{\sigma(0)}} b_0, \ldots, a_{r-1} x^{i_{\sigma(r-1)}} b_{r-1}, \vec{y}) = 0.$$
Докажем, что в PI-алгебре степени m выполняется тождество сильной алгебраичности.

Зафиксируем переменные $c_0, \ldots, c_r$ и x. С каждым многочленом f вида
$$f = \sum_{|I|=N} \lambda_I c_0 x^{i_1} c_1 x^{i_2} \cdots x^{i_r} c_r$$
свяжем многочлен $S(f) \in \mathbb{K}[\gamma_1, \ldots, \gamma_r]$ от r коммутирующих переменных
$$S(f) = \sum_{|I|=N} \lambda_I \gamma_1^{i_1} \gamma_2^{i_2} \cdots \gamma_r^{i_r},$$
который будем называть *символом многочлена* f; γ_i есть *операторы вставки* в соответствующие места степеней переменной x. Обратно, с многочленом
$$g = \sum_{|I|=N} \lambda_I \gamma_1^{i_1} \gamma_2^{i_2} \cdots \gamma_r^{i_r}$$
свяжем многочлен
$$\theta(g)(x, c_0; c_1, \ldots, c_r) = \sum_{|I|=N} \lambda_I c_0 x^{i_1} c_1 x^{i_2} \cdots x^{i_r} c_r.$$

Докажем наличие тождества сильной алгебраичности в произвольной PI-алгебре. Данное утверждение было впервые доказано А. Р. Кемером. С его помощью было показано локальное выполнение тождества Капелли и тем самым, в силу результата Ю. П. Размыслова, нильпотентность радикала в нулевой характеристике. Впоследствии [2] автор получил другое доказательство этого факта с использованием техники «перекачки».

Перейдём к доказательству. Рассмотрим операторы

$$\mathrm{AD}_{ij}(f) = f|_{c_i \to c_i x} - f|_{c_j \to x c_j},$$

действующие на многочленах, полилинейных по каждому c_i. В свободной алгебре оператор AD_{ij} обращает в нуль члены, содержащие множители $c_i x^k c_j$ ($k \geqslant 0 \in \mathbb{Z}$), и не обращает в нуль остальные члены. С помощью операторов AD_{ij} легко уничтожить все полилинейные произведения, в которых порядок следования c_i отличен от их следования в члене $P = c_0 x^{k_1} c_1 x^{k_2} \cdots x^{k_r} c_r$. При этом сам P в нуль не обратится и возникнет выражение, отвечающее правой части тождества алгебраичности:

$$f_\sigma = \sum_{|I|=N} \lambda_I c_0 x^{i_{\sigma(0)}} c_1 x^{i_{\sigma(1)}} c_2 \cdots x^{i_{\sigma(r-1)}} c_r.$$

Покажем, что это выражение обращается в нуль в любой PI-алгебре с полилинейным тождеством степени r. В самом деле, с помощью тождества вида

$$y_1 \cdots y_r = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_r \setminus \mathrm{Id}} \alpha_\sigma y_{\sigma(1)} \cdots y_{\sigma(r)}$$

член $c_0 x^{k_1} c_1 x^{k_2} \cdots x^{k_r} c_r$ перерабатывается в линейную комбинацию членов, в которых порядок следования c_i нарушен и применение композиции «расталкивающих операторов» AD_{ij} каждый такой член обращает в нуль. Доказательство выполнения тождества сильной алгебраичности аналогично и предоставляется читателю.

Суммируя приведённые рассуждения, имеем следующее утверждение.

Предложение 2.4. *Многочлен f есть тождество в алгебре степени m, если $r = m$ и $S(f)$ делится на значение определителя Вандермонда $\prod_{i<j}(\gamma_i - \gamma_j)$.* □

Мы доказали также следующее предложение.

Предложение 2.5.

1. *В PI-алгебре степени m выполняется тождество сильной алгебраичности. При этом r можно положить равным m.*
2. *Если в PI-алгебре выполняется тождество слабой алгебраичности, то в ней выполняется тождество сильной алгебраичности того же порядка.* □

Слабая алгебраичность порядка m степени $m^2/2$ непосредственно следует из полилинейного тождества степени m. В [2] с помощью счёта размерностей доказано, что если в PI-алгебре выполняется тождество слабой алгебраичности, то в ней выполняется тождество сильной алгебраичности того же порядка. Поэтому в произвольной PI-алгебре степени m выполняется тождество сильной алгебраичности. При этом r можно положить равным m.

Сильная алгебраичность позволяет организовать процесс «перекачки» и доказать выполнение тождества Капелли, а вместе с тем и теорему Брауна о нильпотентности радикала. (Можно показать нильпотентность любого конечно базируемого T-идеала, лежащего в радикале, что позволяет иметь запас тождеств, необходимых для работы с центральными полиномами. А можно воспользоваться результатом работы [4] о нильпотентности индекса n препятствия к представимости алгебры, в которой выполняется тождество Капелли порядка n.)

Опишем процесс перекачки [1, 2] более подробно.

Предложение 2.6. *Рассмотрим следующую игру. Дано n куч предметов. Первый игрок может выбрать любые m куч и каждую из них разложить на правую и левую части. Второй игрок правые части нетождественно переставляет. Тогда первый игрок может добиться того, чтобы все кучи, кроме $m-1$, содержали по не более чем $m-1$ предметов.*

Замечание. Данное предложение предлагалось в качестве задачи на Московской городской олимпиаде (задача № 6, 9-й класс, 1995 год).

Доказательство. Упорядочим кучи. Составим вектор, i-я координата которого есть количество предметов в i-й куче. Упорядочим их лексикографически. Покажем, что если первый игрок не может увеличить вектор, соответствующий кучам, то расположение предметов в кучах искомое.

В самом деле, пусть имеется m куч; $k_1, \ldots, k_m$ — соответствующие количества предметов. Пусть $k_i \geqslant m$ для любого i. Положим $k_i = k'_i + q_i$, $q_i = i$, $k'_i = k_i - i$. Поскольку $k_i \geqslant m$, $k'_i \geqslant 0$. Остаётся применить предложение 2.7. □

Предложение 2.7. *Пусть $k_i \geqslant m$, положим $k_i = k'_i + q_i$. Пусть $k'_i \geqslant 0$ и $q_j > q_i$ при $j > i$. Тогда для любой нетождественной перестановки $\sigma \in \mathrm{S}_m$ вектор $\vec{k_\sigma} = (k'_1 + q_{\sigma(1)}, \ldots, k'_m + q_{\sigma(m)})$ лексикографически меньше вектора $\vec{k} = (k'_1 + q_1, \ldots, k'_m + q_m)$.*

Доказательство. Если $\sigma(1) \neq 1$, то $\sigma(1) > 1$ и $k'_1 + q_{\sigma(1)} > k'_1 + q_1$. Тогда $\vec{k_\sigma} \succ \vec{k}$. Если $\sigma(1) = 1$, то мы имеем индукционный спуск от m к $m-1$. □

Из предложения 2.6 получается следующая лемма.

Лемма 2.8 (о перекачке). *Пусть A — PI-алгебра, в которой выполняется полилинейное тождество f степени m. Пусть слово W имеет вид*

$$W = c_0 v_1 c_1 \cdots v_m c_{m+1},$$

где c_i — буквы, не входящие в слова v_j. Тогда W по модулю $\mathrm{T}(f)$ можно представить в виде линейной комбинации слов вида

$$W' = c_{i_0} v'_1 c_{i_1} \cdots v'_m c_{i_{m+1}},$$

где c_i не входят в слова v'_j и не более чем $m-1$ слово v'_i имеет длину, большую чем $m-1$. □

Смысл этой леммы заключается в том, что с помощью тождества почти все символы из «куч» v_i можно собрать в $m-1$ кучу v'_i.

Мы выступаем в роли первого игрока, когда представляем слово W в виде произведения $W_0 \cdots W_{m+1}$, «разрезая» при этом слова v_i. Далее тождество перерабатывает $W_0 \cdots W_{m+1}$ в сумму слов, где W_i нетождественно переставлены. Второй игрок выбирает самое «неприятное» слагаемое.

Итак, наша цель — доказать теорему 1.4, работая с алгебраичностью. (В случае, когда A — градуированная алгебра, а Y — множество градуированных элементов ненулевой степени однородности, теорема 1.4 получается непосредственно с помощью перекачки [1].) Нас будут интересовать *частичные тождества*, когда вместо переменной x_i можно подставлять только степени соответствующего ей элемента y_i.

Займёмся теперь *группировкой членов* в тождестве (сильной) алгебраичности. Упорядочим мультииндексы I лексикографически, слева направо.

Определение 2.9. Пусть

$$f = \sum_{|I|=n} \lambda_I F(\vec{y}; x^{i_1}, \ldots, x^{i_n}) -$$

система тождеств сильной алгебраичности. Запишем её члены в порядке убывания мультииндекса $I = (i_1, \ldots, i_n)$. Рассмотрим такие члены, что $\lambda_I \neq 0$. Определим

$$I_1 = \max(i_1), \quad I_2 = \max_{i_1=I_1}(i_2), \ldots, \quad I_n = \max_{i_1=I_1,\, \ldots,\, i_{n-1}=I_{n-1}}(i_n).$$

n-хвостом системы f назовём саму систему f, а её *$n-k$-хвостом* — выражение

$$\sum_{i_1=I_1,\ldots,i_k=I_k} \lambda_I F(\vec{y}; x^{i_1}, \ldots, x^{i_n}).$$

Аналогичным образом определяются *хвосты тождества алгебраичности*, а также *хвосты частичных тождеств*. Отметим, что хвосты тождества (сильной) алгебраичности ведут себя как (сильная) алгебраичность.

Указанная группировка осуществляется для следующей цели. Мы стремимся «откачать» вхождения переменной x, находящиеся между c_0 и c_1, направо, а если это не удаётся, то откачать направо вхождения из второго «кармана» (между c_1 и c_2), и т. д.

Определение 2.10. Пусть B — ассоциативная алгебра, $\{\beta_i\}$ — её образующие, $\{b_i\}_{i\in I}$ — множество всех её элементов, $\{\sigma_{ij}\}_{i\in I;\ j=1,\ldots,m}$ — набор независимых коммутативных переменных. *Каноническим алгебраическим представлением порядка m* назовём алгебру

$$\hat{B}^{(m)} = B[\sigma_{ij}] / \operatorname{id}(\{b_i^m + \sigma_{i1} b_i^{m-1} + \ldots + \sigma_{im}\}_{i\in I})$$

(здесь $\operatorname{id}(X)$ означает идеал, порождённый множеством X).

Если индекс i будет пробегать множество, отвечающее словам степени не выше s от образующих алгебры B, то получившийся объект мы будем называть *каноническим алгебраическим представлением длины s порядка m* и обозначать $\hat{B}^{(m,s)}$.

Определение 2.11. Пусть B — ассоциативная алгебра, $b \in B$. Расширим алгебру B свободными коммутирующими константами σ_i, $i = 1, \ldots, n-1$, и рассмотрим фактор по идеалу $\mathrm{id}(b^m + \sigma_1 b^{m-1} + \ldots + \sigma_m)$. Алгебра B естественным образом отображается в эту алгебру, а ядро этого отображения называется *препятствием к алгебраичности порядка m элемента b*. Ядро при каноническом алгебраическом представлении порядка m называется *препятствием к алгебраичности порядка m*.

Говоря неформально, если все элементы алгебры B (слова длины не больше s) мы «принудительно» сделаем алгебраическими степени m, то получим каноническое алгебраическое представление степени m (соответственно длины s).

Аналогичным образом определяется идеал J_k — *препятствие к представимости матрицами порядка k над нётеровым кольцом*.

Из того факта, что любая алгебра A с алгебраическим множеством слов длины не меньше $\deg(A)$ конечномерна над центром, следует лемма.

Лемма 2.12 (о каноническом представлении).

1. *Каноническое алгебраическое представление является нётеровым модулем над значениями оператора следа. То же верно для представления длины s, если s не превосходит m или $\mathrm{PIdeg}(B)$.*
2. *Если B представима матрицами порядка m, то естественные отображения $B \to \hat{B}^{(m)}$, $B \to \hat{B}^{(m,s)}$ являются вложениями.*

Тождеством Капелли C_n порядка n называется разреженное тождество

$$C_n = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} \cdots y_{n-1} x_{\sigma(n)}.$$

Для алгебры произвольной сигнатуры *тождеством Капелли* называется система тождеств вида

$$C_n = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} (-1)^\sigma F(\vec{y}; x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}),$$

где F пробегает множество многочленов, линейных по всем x_i.

Тождества Капелли C_n выполняется во всех алгебрах размерности меньше n. Например, в алгебре матриц порядка n выполняется тождество C_{n^2+1}, но не выполняется C_{n^2}.

Пусть многочлен $F(\vec{y}, x_1, \ldots, x_n)$ полилинеен и кососимметричен по переменным x_i, $a \in A$. Определим операторы σ_a^k равенством

$$\sigma_a^k(F) = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} F(\vec{y}, x_1, \ldots, x_n)|_{x_{i_1} = a x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} = a x_{i_k}}.$$

Операторы σ_a^k определены только на записях элементов, и результат их применения, вообще говоря, может зависеть от представления элемента алгебры A в виде многочлена F и выбора системы $\{x_i\}$.

Сформулируем основную леммы работы [4], которая служит своего рода аналогом теоремы Гамильтона—Кэли.

Лемма 2.13.

1. *Пусть многочлен $F(\vec{y}, x_1, \ldots, x_n)$ полилинеен и кососимметричен по переменным x_i, $a \in A$, a — оператор умножения на $\bar{a}$. Тогда по модулю C_{n+1} выполняется равенство*
$$\bar{a}^n(y) = \sum_k (-1)^k \bar{a}^{n-k} \delta_a^k(F).$$
2. *Пусть в алгебре A выполняется система тождеств Капелли порядка $n+1$, и пусть многочлен F полилинеен и кососимметричен по переменным $\{x_i\}_{i=1}^n$, $\{z_i\}_{i=1}^n$. Тогда значение $\sigma_a^k(F)$ не зависит от того, какая группа переменных, $\{x_i\}$ или $\{z_i\}$, используются. В этом случае операторы σ_a^k и σ_b^s коммутируют.*
3. *Подпространство $\mathrm{T}(g)$, кососимметрическое по наборам переменных из Λ_i, где $\Lambda_1 = \{x_i\}_{i=1}^n$, $\Lambda_2 = \{z_i\}_{i=1}^n$, является нётеровом модулем над операторами вида $\sigma_k(a)$. Любой идеал, порождённый элементами не из Λ_i, отображающийся в нуль при каноническом представлении, является нулевым. Ограничение на это пространство отображения в каноническое алгебраическое представление порядка $k\big((k+1)(m+2)-2\big)$ является вложением.*

Доказательство. Пункты 1 и 2 устанавливаются вычислениями, которые мы здесь приводить не будем.

Наметим доказательство пункта 3. Отметим только один очень важный для нас момент в рассуждениях работы [4]. Умножение на полином g обращает в нуль препятствие к алгебраическому представлению порядка $n+1$. Идея доказательства следующая. Если формально добавить коэффициенты λ_i характеристического полинома для одного оператора a и наложить характеристическое уравнение $a^{n+1} = \sum \lambda_i a^{n+1-i}$, то, поставив в соответствие λ_i операторы $\sigma_i(a)$, можно получить, что ядро $K = \mathrm{Ker}(\Psi)$ отображения
$$\Psi\colon A \to A' = A[\{\lambda_i\}] \,/\, \mathrm{id}\Big(a^{n+1} - \sum \lambda_i a^{n+1-i}\Big)$$
при умножении на g обращается в нуль. Теперь возьмём другой элемент a_1 алгебры A, перейдём к алгебре A' и в этой новой алгебре опять наложим на него соотношения. Объединение всевозможных возникающих ядер содержит препятствие к алгебраичности порядка $n+1$, а с другой стороны — аннулируется умножением на любое значение g. □

Можно использовать и несколько более простые (но худшие для оценок) рассуждения, основанные на коммутировании операторов $\sigma_k(a)$ и $\sigma_s(b)$ по модулю $\mathrm{T}(C_{n+1})$ в T-пространствах, порождённых многочленами, имеющими две группы по n антикоммутирующих переменных [4]. Здесь достаточно простой интерпретации $\lambda_i(a) \to \sigma_i(a)$.

3. Доказательство основной теоремы

Начнём с модельного примера. Рассмотрим случай, когда выполняется система частичных тождеств алгебраичности порядка 2 на элементы из Y. (Система таких частичных тождеств первого порядка означает нильпотентность элементов из Y. Тогда вся алгебра, в силу условия курошевости, конечномерна, т. е. имеет ограниченную существенную высоту над пустым множеством.)

Запишем частичное тождество алгебраичности двумя способами:

$$y_i^n C y^r = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ki} x^{r+n-k} C x^{r+k}, \quad \lambda_{ki} \in \mathbb{F},$$

$$y_i^n C y^r = \sum_{k=1}^{n} \lambda'_{ki} x^{r+k} C x^{r+n-k}, \quad \lambda'_{ki} \in \mathbb{F}.$$

Первая запись будет использована при выносе степеней направо, вторая — налево.

Займёмся теперь условием «курошевости» множества Y. Расширим алгебру A центральными константами a_{ij} и рассмотрим фактор-алгебры $\mathbb{F}[a_{ij}] \otimes A$ по идеалу, порождённому элементами вида

$$y_i^n - \sum_k a_{ik} y_i^{n-k}.$$

Получившаяся алгебра A' цела и конечномерна над кольцом $\mathbb{F}[a_{ij}]$ (элементы алгебры A и их естественные образы, когда нет недоразумений, обозначаются одинаково).

Дальнейшие рассуждения мы разобьём на этапы.

1. Y можно считать подмножеством множества образующих алгебры A. Для любого фиксированного R достаточно показать ограниченность существенной высоты для произведения всех идеалов $y_i^{(R)}$, порождённых R-ми степенями элементов из Y. Этот идеал линейно представим словами, содержащими R-ю степень каждой буквы из Y. Такие участки будут называться *большими степенями*.

В самом деле, рассмотрим фактор $A/y_i^{(R)}$ и набор $Y' = Y \setminus \{y_i\}$. Проекция Y' является курошевым множеством в алгебре A', и рассуждение завершает индукция по числу элементов курошева множества Y.

2. Отметим в слове участки, являющиеся R-ми степенями элементов y_i. Туда мы будем перекачивать оставшееся содержимое слова. В итоге слова приведутся к виду произведений степеней переменных y_i, между которыми стоят участки ограниченной длины. Такое приведение означает установление ограниченности существенной высоты над Y, поскольку конечное множество $D(Y)$ из определения существенной высоты можно взять состоящим из таких «прокладок».

Определим оператор вставки τ_i, который увеличивает только что зафиксированную «большую» степень y_i на 1. Подчеркнём, что этот оператор определён только на записях и результат его применения зависит от представления элемента в указанном виде, в частности от фиксации большой степени. Ясно, что операторы τ_i коммутируют.

3. Итак, зафиксируем в слове w вхождение «больших» (т. е. бо́льших R) степеней элементов y_i для каждого i. Слово w разбивается на такие участки и промежутки между ними. Будем обрабатывать эти участки по одному. Достаточно добиться того, чтобы данный участок имел длину не выше h, где h — некоторая константа, определённая для всей алгебры.

Итак, зафиксируем участок P слова w. Для каждого y_i можно сказать, находится ли участок, состоящий из его степени, правее или левее P. В зависимости от этого выберем «операторную» интерпретацию умножения на добавленные переменные a_{ij}.

Если указанная степень элемента y_i находится правее P, то будем интерпретировать умножение на a_{ik} оператором $\lambda_{ki}\tau_i^k$, а если она находится левее — то оператором $\lambda'_{ki}\tau_i^k$.

4. Воспользуемся условием «курошевости» набора Y. Каждый участок P можно представить в виде

$$\sum_l \lambda_{l,\vec{k}} \prod a_{ij}^{k_{ijl}} P_{ijl},$$

где $\vec{k}$ означает набор чисел k_{ijl}, $\lambda_{l,\vec{k}} \in \mathbb{F}$.

Остаётся воспользоваться операционной интерпретацией коэффициентов a_i, а также курошевостью Y (над «операторами выноса» всё алгебраично).

Таким образом, случай частичной алгебраичности второго порядка разобран.

Замечание. Если бы выполнялась система частичных тождеств сильной алгебраичности произвольного порядка, имеющих вид

$$F(\vec{y}; x^{r+q_1}, \ldots, x^{r+q_n}) = \sum_{I,\, q_{i_1} < q_1} \lambda_I F(\vec{y}; x^{r+q_{i_1}}, \ldots, x^{r+q_{i_n}}),$$

то прошли бы примерно те же рассуждения, что и для частичной алгебраичности порядка 2. Путём переупорядочения членов можно добиться только неравенства $q_{i_1} \leqslant q_1$. Трудности вызывает случай $q_{i_1} = q_1$, который и не позволяет напрямую осуществлять «откачку». Собственно, в преодолении этих трудностей и заключается техническая основа данной работы.

3.1. Строение препятствий к алгебраичности

Данный раздел посвящён своего рода гомологической идее. В нём строятся рекуррентные соотношения, описывающие препятствия к алгебраичности.

Пусть A — $\mathbb{F}$-алгебра, $Y = \{y_i\} \subset A$ — её конечное подмножество, a_{ij} — набор дополнительных констант, $A' = \mathbb{F}[a_{ij}] \otimes A$. Тогда $0 \to A \to A'$. Алгебра A' градуирована степенями элементов a_{ij}. Индекс i всегда связан с номером y_i в Y, индекс j связан с показателем степени.

Нас интересует неоднородный (относительно градуировки, связанной с a_{ij}) идеал J в алгебре A', порождённый элементами вида

$$y_i^n - \sum_j a_{ij} y_i^{n-j}.$$

Нам особенно важно изучить пересечения $J \cap A$ и $\bigl(J + V_{h,D}(A')\bigr) \cap A$, где $V_{h,D}(A')$ есть множество элементов A' существенной высоты h над Y при фиксированном множестве прокладок D.

Каждый элемент $\psi \in J$ представим в виде суммы

$$\psi = \sum_I \prod a_{ij}^{I_{ij}} \sum_{l,k} V_{k,I} \Bigl(y_l^n - \sum_m a_{lm} y_l^{n-m} \Bigr) U_{k,I}, \tag{1}$$

где $V_{Ik}, U_{Ik} \in A$, I означает мультииндекс, компоненты которого нумеруются парами чисел (i,j).

В равенстве (1) осуществлена группировка членов близкой степени однородности, которая отражает процесс поэтапного вывода соотношений. Однако полезна и другая группировка членов, при которой объединяются вместе слагаемые при одинаковых степенях a_{ij}. Выпишем соответствующее выражение:

$$\psi = \sum_I \prod_{(i,j)} a_{ij}^{I_{ij}} \Biggl[\sum_{l,k,m} -V_{k,I-\vec{e}_{lm}} y_l^{n-m} U_{k,I-\vec{e}_{lm}} + \sum_{l,k} V_{k,I} y_l^n a_{lm} y_l^{n-m}) U_{k,I} \Biggr], \tag{2}$$

где $\vec{e}_{lm}$ — вектор, у которого координата с номером (l,m) равна единице, а остальные — нули.

Нас интересует процесс наращивания степеней при a_{ij}. Это, по сути, процесс поэтапного вывода равенства нулю для препятствия к алгебраичности. Выпишем несколько частных случаев выражений (1) и (2), когда Y состоит из одного элемента. (В силу замечаний, сделанных в начале раздела 2, нам достаточно рассмотреть эту ситуацию; см. определение 2.1 и предложение 2.2.) Вот выражения для элементов из J в случае $|Y| = 1$:

$$\psi = \sum_I \prod a_j^{I_j} \sum_k V_{k,I} \Bigl(y^n - \sum_m a_{lm} y^{n-m} \Bigr) U_{k,I}, \tag{3}$$

$$\psi = \sum_I \prod_{(i,j)} a_j^{I_j} \Biggl[\sum_{k,m} -V_{k,I-\vec{e}_m} y^{n-m} U_{k,I-\vec{e}_m} + \sum_k V_{k,I} y^n U_{k,I} \Biggr]. \tag{4}$$

Здесь мультииндекс I имеет только одну компоненту j, j-я координата вектора $\vec{e}_j$ равна 1, а остальные — нули, $U, V \in A$ — прокладки.

Равенства нулю коэффициентов

$$\sum_{l,k,m} -V_{k,I-\vec{e}_{lm}} y_l^{n-m} U_{k,I-\vec{e}_{lm}} + \sum_{l,k} V_{k,I} y_l^n a_{lm} y_l^{n-m} U_{k,I} = 0, \tag{5}$$

$$\sum_{k,m} -V_{k,I-\vec{e}_m} y^{n-m} U_{k,I-\vec{e}_m} + \sum_k V_{k,I} y^n U_{k,I} = 0 \tag{6}$$

при $a_{ij}^{I_{ij}}$ и при $a_j^{I_j}$ в равенствах (2) и (4) соответственно задают своего рода «линейную рекурренту на A».

Существование решений с данными $V_{i,k,0}$ и $U_{i,k,0}$ ($V_{k,0}$ и $U_{k,0}$) означает принадлежность элемента $\sum\limits_{i,k} V_{i,k,0}y_i^nU_{i,k,0}$ (соответственно $\sum\limits_{k} V_{k0}y^nU_{k_0}$) препятствию к алгебраичности элементов из Y порядка n.

Положим $\|a_{m,l}\| = m$ и, соответственно,

$$\|I\| = \sum_i \sum_j \|a_{ij}\| \cdot I_{ij} = \sum_{ij} jI_j.$$

Норма $\|I\|$ интерпретируется как *номер шага*. Процесс суммирования $\sum\limits_I$ можно записать как

$$\sum_I = \sum_q \sum_{\|I\|=q}.$$

Положим также $|I| = \sum I_{ij}$. Эта величина интерпретируется как «*количество случаев выноса степеней элементов из Y*».

Таким образом, с помощью системы линейных рекуррент мы формализовали понятие *процесса приведения*.

Естественно, в процессе приведения длина свободных участков может расти. Поэтому мы вначале обрабатываемые слова разобьём на блоки по M букв. Число шагов приведения и максимальная длина свободных участков в таких блоках на промежуточных шагах ограничена константой $N(M)$. Каждый такой блок приводится к сумме $\sum\limits_I \vec{a}^IP_I$, где $H_{\mathrm{Ess}}(P_I) < h$.

Отметим, что после приведения степени элементов из Y можно скачать вместе (о процедуре перекачки см. с. 9). Наша ближайшая цель — организовать процесс приведения так, чтобы в больших «временных» масштабах он был монотонен. Перейдём к формальному изложению соответствующей процедуры и техники, связанной с «перекачкой».

Мы рассматриваем слова, содержащие вхождения букв y_i, символизирующих элементы из Y.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.1 (о перекачке с помощью алгебраичности). *Пусть в алгебре A выполняется тождество алгебраичности порядка n и глубины h. Тогда произведение $c_0y_{i_1}^{k_1}c_1\cdots y_{is}^{k_s}c_s$ линейно представимо произведениями вида $c_0y_{i_1}^{k_1'}c_1\cdots y_{is}^{k_s'}c_s$, такими что для любого j множество показателей $k_s' \geqslant h$ при элементах $y_{i_s} = y_j$ состоит не более чем из $n-1$ элементов.* □

Данная лемма позволяет собирать вместе содержимое «пролётов», т. е. участков, куда входят большие степени элементов y_i.

Определение 3.2. Пусть W — слово. Назовём вхождение y_i в W *внутренним*, если на расстоянии, не превосходящем m ($m = \deg(A)$), от данного вхождения имеются вхождения только y_i. Внутренними могут считаться только вхождения элементов из Y. *Шириной* $\mathrm{Wide}(W)$ называется количество невнутренних вхождений всех букв (иначе говоря, $|W|$ минус число внутренних вхождений). *Пролётом в* W называется максимальное подслово длины не меньше m, являющееся степенью элемента из Y.

Отметим, что все внутренние вхождения каждого $y_i \in Y$ можно «перекачать» в $n-1$ группу. В процессе «перекачки» количество внутренних вхождений не уменьшается и ширина не увеличивается. Мы будем стремиться понизить ширину. Если окажется, что у любого участка, свободного от вхождения $2m$-х степеней можно понизить ширину, то это даст ограниченность существенной высоты (с учётом перекачки, собирающей степени вместе).

Поскольку множество Y курошево, существует такое K, что для любого слова произвольной длины M существует система равенств типа (2) и (5), таких что элементы, стоящие при достаточно высоких степенях a_{ij}, линейно представимы словами длины не больше K (K не зависит от M). Рассмотрим систему указанных равенств.

Определение 3.3. *M-подъёмом* называется такое наименьшее N, что в системе равенств типа (5) и (2), удовлетворяющих свойствам предыдущего абзаца, участвуют только элементы из A, линейно представимые словами длины не больше N. Под *курошевым процессом степени* n понимается набор систем указанных равенств, соответствующих идеалу, порождённому элементами вида

$$y_i^n - \sum_j a_{ij} y^{n-j}.$$

Это «степень принудительной алгебраичности». *Высотой курошевости* при курошевом процессе порядка n называется величина K, указанная в абзаце, непосредственно предшествующем данному определению.

Теперь покажем, что процесс спуска можно организовать так, чтобы подъёмы были не слишком большими.

Предложение 3.4 (организация спуска). *Пусть множество Y курошево, m — минимальная степень тождества алгебраичности, M — высота курошевости Y при курошевом процессе порядка n, $K > N$, и пусть N есть величина подъёма для слов степени K. Тогда для любого слова W существует такая система равенств* (5) *и* (2)*, что*

$$\max_{|I|=l,k} \mathrm{Wide}(U_{k,I} y^l U_{k,I}) > \max_{|I|=l+n,k} \mathrm{Wide}(U_{k,I} y^l U_{k,I}).$$

Иными словами, спуск может быть организован «монотонным с шагом N».

Доказательство. Разобьём W на блоки длины $N > K$. Будем проводить процесс отдельно для каждого такого блока. Ясно, что этот процесс удовлетворяет условиям данного предложения. Получится «линейная комбинация» (с коэффициентами из $\mathbb{F}[a_{ij}]$) слов, длина которых меньше $|W|$. Применим указанный процесс ещё раз к получившимся словам и т. д.

Ясно, что в конце концов получатся слова длины не больше $K-1$. $\square$

Следствие 3.5 (из доказательства). *Можно добиться того, чтобы система равенств, описанная в условиях предыдущего предложения, обладала следующими свойствами*:

а) *если* $|I'| > |I|$, *то*

$$\max_{kl} \mathrm{Wide}(U_{k,I} y^l U_{k,I}) - M < \max_{kl} \mathrm{Wide}(U_{k,I'} y^l U_{k,I'});$$

б) *при некотором* $Q > KN$ *если* $|I'| > |I| + Q$, *то*

$$\max_{kl} \mathrm{Wide}(U_{k,I} y^l U_{k,I}) < \max_{kl} \mathrm{Wide}(U_{k,I'} y^l U_{k,I'}). \qquad \square$$

Итак, спуск может быть организован с отклонением от монотонности не больше чем на Q.

Определение 3.6. Процесс приведения, удовлетворяющий заключению предыдущего следствия, называется *каноническим*.

Подведём некоторые итоги. Выпишем систему «линейных рекуррент» для общего случая:

$$\sum_{l,k,m} -V_{k,I-\vec{e}_{lm}} y_l^{n-m} U_{k,I-\vec{e}_{lm}} + \sum_{l,k} V_{k,I} y_l^n a_{lm} y_l^{n-m} U_{k,I} = 0 \tag{7}$$

и для случая $|Y| = 1$:

$$\sum_{k,m} -V_{k,I-\vec{e}_m} y^{n-m} U_{k,I-\vec{e}_m} + \sum_k V_{k,I} y^n U_{k,I} = 0, \tag{8}$$

которая обладает следующими свойствами.

Пусть $Q_t = \max_{|I|=t,kl} \mathrm{Wide}(U_{k,I} y^l U_{k,I})$. Тогда

а) при $t' > t$ $Q_t - M > Q_{t'}$;

б) при $Q > 10MKN$, если $t' > t + Q$, то $Q_t > Q_{t'} + 10M$.

Данные равенства выполняются по модулю членов, ширина которых меньше некоторой константы H.

Замечание. Если сумма членов при $|I| = 0$ даёт препятствие к алгебраичности Y порядка n, то можно указать систему равенств типа (7) и (8) с ограниченным $|I|$, которые выполнены при всех I (при этом выполнения условий а) и б) не требуется).

Данные равенства оформляют идею поэтапного приведения. В начале стоит элемент из однородной компоненты нулевой степени:

$$\sum_{kl} V_{kl} y_l^n U_{kl}.$$

При коэффициенте $\vec{a}^I$ стоит сумма

$$\sum_{l,k,m} -V_{k,I-\vec{e}_{lm}} y_l^{n-m} U_{k,I-\vec{e}_{lm}} + \sum_{l,k} V_{k,I} y_l^n a_{lm} y_l^{n-m} U_{k,I}, \tag{9}$$

которая сравнима с нулём по модулю членов ширины, меньшей H.

Для получения основного результата нам потребуется развить своего рода «операторное исчисление» для операторов, действующих на записях.

3.2. Алгебра виртуальных операторов

Наша цель — разработать формализм виртуальных операторов, определённых на записях элементов (т. е. вместе с таким оператором рассматривается представление элементов в виде, позволяющем его применять), и в качестве иллюстрации доказать основную теорему. Автор убеждён, что такого рода формализм может оказаться полезным довольно часто.

Пусть в алгебре выполняется тождество частичной алгебраичности порядка n для элемента $y_1 \in Y$ и Y есть курош-высотное множество порядка $(1, |Y|-1)$. Наша цель, в силу соображений, высказанных в начале раздела 2, — доказать курошевость Y. Поэтому мы фактически работаем в ситуации, когда $|Y| = 1$.

Начнём с модельного примера — частичной алгебраичности порядка 3. Частичное тождество алгебраичности (если переупорядочить подходящим образом члены) можно записать так:

$$W = c_0 y^{n_1} c_1 y^{n_2} c_2 y^{n_3} c_3 = \sum_{n_2' < n_2,\, n_3' > n_3} \lambda_{\vec{n}'} c_0 y^{n_1'} c_1 y^{n_2'} c_2 y^{n_3'} c_3 + \\ + \sum_{n_2' < n_2,\, n_3' < n_3} \lambda_{\vec{n}'} c_0 y^{n_1'} c_1 y^{n_2'} c_2 y^{n_3'} c_3 + \sum_{n_2' = n_2,\, n_3' > n_3} \lambda_{\vec{n}'} c_0 y^{n_1'} c_1 y^{n_2'} c_2 y^{n_3'} c_3.$$

Если бы не было третьей группы членов, то мы бы действовали примерно так же, как и в случае частичных тождеств алгебраичности второго порядка («выкачивая» из средней группы). Аналогичным образом мы бы действовали, если бы не было членов первой и второй группы.

Будем работать со словами вида $W = \prod W_i$, где $W_i = C_i y^{n_i} D_i$. Такая запись удобна потому, что куски W_i слова W будут вначале обрабатываться по отдельности.

Предыдущее равенство можно записать в виде

$$W_1 C_2 y^{n_2} D_2 W_3 = \sum_{n_2' < n_2} \lambda_{\vec{n}'} W_1' C_2 y^{n_2'} D_2 W_3' + \\ + \sum_{n_2' = n_2,\, n_3' > n_3} \lambda_{\vec{n}', i} \delta^i(W_1; W_3)(W_1 C_2 y^{n_2'} D_2 W_3),$$

где $\delta(W_1; W_3)$ есть сумма операторов выноса из W_1 в W_3.

Положим $\Delta(W_1; W_3) = \sum \lambda_{\vec{n}', i} \delta^i(W_1; W_3)$. Если применить виртуальный (т. е. определённый на записях) оператор Δ достаточное число раз, то при надлежащей организации процесса произойдёт уменьшение ширины, причём сколь угодно сильное. (Поскольку выносы членов можно символически обозначать буквами, ведущими себя как переменные, над которыми элементы из Y алгебраичны.)

В процессе преобразований куска W_2 с помощью третьей группы членов также происходят промежуточные подъёмы, однако процесс устроен так, что их величины ограниченны. Поэтому если падение внутри W_1 больше величины промежуточных подъёмов в W_2, то мы остановим процесс, поскольку уменьшилась ширина. Это означает, что внутри W_2 степень при y удовлетворяет символическому уравнению

$$y^{n_2} = \sum \alpha_j y^{n_2-j} + y^{n_2}\Delta,$$

где Δ — малый оператор (т. е. результат его применения в достаточно высокой степени имеет меньшую ширину). Возникает идея написать равенство

$$y^{n_2} = \frac{1}{1-\Delta}\sum \alpha_j y^{n_2-j} = y^{n_2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\Delta^k\right)\left(\sum \alpha_j y^{n_2-j}\right).$$

Далее в силу «малости» оператора Δ оборвать ряд, получив в невязке сумму членов меньшей ширины. (Коммутирование нужных операторов обеспечивает процедура «откатки» (см. (10), (11)), которая также обеспечивается «операторным исчислением».) Отметим, что в доказательстве теоремы Амицура высокая степень Δ обращается в нуль на препятствии к алгебраичности, так что ряд обрывается. Всё это служит оформлением такого соображения: если что-то не может быть перенесено в «хвост», то происходит обработка «головой», которая имеет меньший порядок, и эта обработка приводит к уменьшению ширины.

Чтобы при последовательном применении оператора выноса Δ произошло уменьшение ширины, необходимо, чтобы приводились члены при произведениях операторов a_{ij}, связанных с переносами, в одинаковом количестве (что означает коммутирование операторов a_{ij}). Тогда можно воспользоваться равенствами (7) и (8).

Коммутирование обеспечивается, когда перекачка происходит только с фиксированными вхождениями степеней в W_2 и W_3. Поэтому n_2 выбирается достаточно большим, чтобы переносы из W_1 смогли произвести уменьшение, пока происходит выкачка из W_2. Ниже эти соображения сформулированы более строго.

Мы будем вести индукцию по порядку алгебраичности. Пусть $W = W_1 \cdots W_q$, $W_i = C_i y^{n_i} D_i$. Аналогичным образом можно считать, что вхождения степеней y внутри W_1 удовлетворяют символическому равенству

$$y^{n_1} = \frac{1}{1-\Delta}\sum \alpha_j y^{n_2-j} = y^{n_1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\Delta^k\right)\left(\sum \alpha_j y^{n_2-j}\right).$$

Здесь оператор Δ отвечает $(n-1)$-хвосту частичного тождества алгебраичности f порядка n. Можно сказать иначе: если вынос из W_1 не происходит в течение долгого времени, то у остатка $W_2 \cdots W_n$ сильно уменьшается ширина.

Поскольку $(n-1)$-хвост есть более сложное образование, то можно, наоборот, выкачку переменной из W_1 считать малым оператором и записать это

символически
$$y^{n_1} = \sum W'\Delta' + y^{n_1}\Delta.$$

Разумеется, трудности, связанные с коммутированием операторов выноса, остаются. Их преодоление основано на иерархии показателей обрабатываемых степеней переменной y внутри W_i. Подробности будут обсуждены ниже. Ещё раз подчеркнём, что все «операторы» определены только на записях, которые к тому же подгоняются для обеспечения нужных свойств (коммутирования операторов вставки).

Для дальнейшего нам понадобится следующее определение.

Определение 3.7. Аффинный оператор
$$B\colon (n_1, \ldots, n_k) \to (n'_1, \ldots, n'_k)$$
называется *хорошим*, если при всех неотрицательных $(n_1, \ldots, n_k)$ выполняются следующие неравенства: $n_1 \geqslant n'_1$; если же $n_1 = n'_1$, то $n_2 \geqslant n'_2$; если же $n_1 = n'_1$, $n_2 = n'_2$, то $n_3 \geqslant n'_3$ и т. д. Тождество (частичной, сильной) алгебраичности называется *хорошим*, если оно имеет вид
$$c_0 y^{n_1} c_1 \cdots y^{n_k} c_k = \sum \lambda_{\vec{n}'} c_0 y^{n'_1} c_1 \cdots y^{n'_k} c_k,$$
причём каждый вектор степеней $\vec{n}' = (n'_1, \ldots, n'_k)$ связан с вектором $\vec{n}$ хорошим оператором.

Предложение 3.8. *Тождество алгебраичности имеет следствие, хорошее при некотором упорядочивании членов.* □

Теперь всё готово для доказательства основного утверждения.

Представим частичное тождество алгебраичности f в виде $\mathrm{Id} = \sum t_i$, где t_i — его собственный $(n-i)$-хвост, Id — тождественный оператор.

Разобьём произведения элементов алгебры, ширину которых мы хотим понизить, на участки, которые будем обозначать W_i. В символическом виде равенству $\mathrm{Id} = \sum t_i$ соответствует операторное равенство $\sum \tau_i = 1$, τ_i — соответствующие операторы выноса, 1 — тождественный оператор.

Можно добиться того (см. предложение 3.4), чтобы при $k > M$ «виртуальный» оператор τ_1^k при фиксированных участках внутри W_i приводил к понижению ширины участка W_1 (при этом фиксация обрабатываемых степеней элемента y внутри W_i для $i > 1$ необходима, чтобы обеспечить коммутирование виртуальных констант a_{ij}).

С другой стороны, в силу символического равенства
$$\tau_1^l = \Bigl(1 - \sum_{i>1} \tau_i\Bigr)^l$$
можно проводить «откатку» на небольшую длину (пока набор участков вида $y^{n'_i}$ внутри W_i при $i > 1$ фиксирован). В самом деле:
$$1 = 1^q = \Bigl(\sum \tau_i\Bigr)^q = \sum_{l \geqslant k} \lambda_{l,\vec{n}} \tau_1^l \prod_{i>1} \tau_i^{n_i} + \sum_{l<k} \lambda_{l,\vec{n}} \tau_1^l \prod_{i>1} \tau_i^{n_i}. \tag{10}$$

Операторы в первой сумме сокращают ширину W_1, а операторы из второй суммы можно переписать в виде

$$\sum_{l<k} \lambda_{l,\vec{n}} \Bigl(1 - \sum_{i>1} \tau_i\Bigr)^l \prod_{i>1} \tau_i^{n_i}. \tag{11}$$

Таким образом, мы пришли к ситуации, когда τ_1 в каждом члене либо не присутствует вовсе, либо присутствует в достаточной степени и понижает ширину W_1. Итак, мы избавились от членов, увеличивающих ширину W_1 — «левого конца» слова W.

Замечание. Отметим, что легко добиться тем же способом, чтобы показатели степеней при τ_1 были кратны k (величине этапа уменьшения в предложении 3.4). Кроме того, W_1 можно разбить на участки и занумеровать их так, чтобы при всех l применение оператора τ^k с номером l обрабатывало l-й участок. Это обеспечивает коммутирование операторов выноса и выполнение равенства (10). Те же замечания относительно организации «откатки» относятся и к выносам из других участков W_i.

Итак, величина W приводится к виду

$$W = \sum W_\alpha + \sum W_\beta.$$

Здесь члены из $\sum W_\alpha$ имеют меньшую ширину левого конца (т. е. W_1), а $\sum W_\beta$ есть результат действия частичного тождества алгебраичности порядка, меньшего исходного порядка k. При этом организация членов такова, что не уменьшается степень элемента y внутри последнего участка W_k, а если она не изменяется, то не уменьшается степень y внутри предпоследнего участка W_{k-1}, и т. д. Сказанное выше верно как для членов из суммы $\sum W_\alpha$, так и для членов из $\sum W_\beta$. Как нетрудно убедиться, это даёт спуск от частичной алгебраичности порядка 3 к порядку 2 и доказывает основную теорему для этого случая.

Завершим доказательство основной теоремы в общем случае. В силу индукционных соображений можно считать, что множество Y состоит из одного элемента (см. определение 2.1 курош-высотного множества). Мы будем иметь дело с достаточно быстро растущими наборами показателей степеней

$$n_1 \ll n_2 \ll \ldots \ll n_k$$

и с выражениями вида

$$W(\vec{n}) = C_1 y^{n_1} D_1 C_2 y^{n_2} D_2 \cdots C_k y^{n_k} D_k.$$

Соотношения $n_i \ll n_{i+1}$ необходимы, чтобы обеспечить «откатку» на каждом этапе (т. е. локальное коммутирование и выполнение равенства (10)). Конкретный смысл этим неравенствам будет дан на с. 23.

С помощью частичного тождества алгебраичности порядка k можно получить следующее преобразование:

$$W(\vec{n}) = \sum\nolimits_1 W(\vec{n}') + \sum\nolimits_2 W(\vec{n}').$$

При этом

- в слагаемых из суммы $\sum_1 W(\vec{n}')$ сокращена ширина участка W_1;
- в слагаемых из суммы $\sum_2 W(\vec{n}')$ выполнено неравенство $n_2' \leqslant n_2$.

Поскольку может происходить «накачка» степеней y из W_1 в W_2, воспользуемся операторным исчислением. Подействуем несколько раз частичной алгебраичностью и применим «откатку» (см. равенство (10)). Мы добьёмся преобразования

$$W(\vec{n}) = \sum\nolimits_1 W(\vec{n}') + \sum\nolimits_2 W(\vec{n}') + \sum\nolimits_3 W(\vec{n}') + \ldots + \sum\nolimits_{k-1} W(\vec{n}')$$

со следующими свойствами:

- в слагаемых из суммы $\sum_1 W(\vec{n}')$ сокращена ширина участка W_1 и это понижение ширины больше подъёма внутри W_2;
- в слагаемых из суммы $\sum_2 W(\vec{n}')$ выполнено неравенство $n_2' < n_2$, ширина W_1 не увеличена, ширина W_2 уменьшена и это понижение ширины больше подъёма внутри W_3;
- в слагаемых из суммы $\sum_3 W(\vec{n}')$ выполнено равенство $n_2' = n_2$, ширина W_1 не увеличена и понижение ширины внутри W_3 больше подъёма внутри W_4;
- и т. д.

Кроме того, в силу замечания на с. 22 процесс можно считать организованным так, что преобразования выноса из W_1 коммутируют между собой.

Для осуществления «откаток» нужно, чтобы участки внутри W_i при $i > 2$ остались теми же. Для этого достаточно взять $n_i \gg n_{i-1}$ (оценки будут даны ниже).

Продолжая этот процесс (см. замечание на с. 22), можно добиться того, чтобы промежуточный подъём W_k в членах из $\sum_1, \ldots, \sum_{k-1}$ был меньше суммы сокращений ширин в W_i, $i < k$. При этом показатели обрабатываемых степеней внутри W_i при $i > k$ берутся с запасом: $n_i \gg n_k$.

Легко видеть, что такой процесс обеспечивает понижение ширины всего W, что и требуется для доказательства основной теоремы.

Техника виртуальных операторов («откаток») вместе со следствием 3.5 позволяет обеспечить монотонность процедуры приведения и тем самым преодолеть трудности, связанные с неоднородностью.

Перейдём к оценкам. Придадим конкретный смысл знаку $\ll$ в неравенствах $n_1 \ll n_2 \ll \ldots \ll n_k$. Пусть в алгебре выполняется тождество частичной алгебраичности порядка n для элемента $y_1 \in Y$ и Y есть курош-высотное множество порядка $(1, |Y| - 1)$. Наша цель — доказать курошевость множества Y. Тогда в силу замечаний, сделанных в начале этого раздела, основная теорема будет доказана.

Воспользуемся следствием 3.5. Зафиксируем канонический процесс понижения ширины для алгебраичности порядка n элемента y. Введём функцию $U_Y(n)$, выражающую максимальный промежуточный подъём ширины в равенствах (5), (6) (равенство выбирается в зависимости от типа процесса). Далее,

$K_Y(n)$ есть минимальное число выносов при этом процессе, гарантированно понижающее ширину более чем на $3U_Y(n)$. Положим $n_1 = n$, $n_2 = nK_Y(n_1)$.

Последовательность чисел $\{n_i\}$ строится индуктивно. Пусть числа $\{n_j\}_{j<i}$ уже построены и соответствующие канонические процессы внутри W_j при $j < i$ зафиксированы. Положим $U^{(i)} = U_Y(n_i)$, $K^{(i)} = K_Y(n_i)$, $n_{i+1} = 3n_iK^{(i)}$ и затем зафиксируем канонический процесс внутри W_i.

Легко видеть, что это действие хвостов устроено как действие виртуальных коэффициентов при наложении соотношений типа алгебраичности и что полученная таким образом последовательность $\{n_i\}$ пригодна для осуществления спуска.

Отметим, что при этом условия, связанные с накачкой (понижение ширины в W_{i-1} превосходит промежуточный подъём внутри W_i) также могут быть выполнены. Дело в том, что в соответствующих членах не уменьшается отвечающий числу n_i участок (с показателем n_i'), а скорость роста построенной последовательности $\{n_i\}$ предохраняет от вырождения степеней, больших чем n_j, при $j > i$.

Замечание. Работа с тождеством алгебраичности аналогична работе с тождеством Капелли, поскольку при подстановке вместо альтернирующих переменных степеней одного элемента y получается тождество (сильной) алгебраичности. Для многочленов такого рода проходят все рассуждения работы [4], в частности, можно определить виртуальные операторы $\sigma_i(y^s)$ через сумму операторов вставки и получить аннулирование препятствия к алгебраичности элемента y. Рассуждения из [4], связанные с нарастанием порядка многочлена Капелли в идеалах, переводятся на язык нарастания хвостов (хвост порядка k осуществляет затягивание по модулю хвостов высшего порядка). Таким образом, имеет место «универсальная затягиваемость», т. е. имеется хвост, такой что элемент y ведёт себя как элемент, алгебраичный над аналогами операторов $\sigma_k(y)$. В этом случае все большие степени y перекачиваются в данный хвост. С другой стороны, имеется хвост меньшего порядка, универсально затягивающий по модулю универсально затягивающего хвоста, и т. д. Эти хвосты являются результатами подстановки в многочлены Капелли меньшего порядка степеней y. Универсальное затягивание позволяет получить более короткое доказательство основной теоремы, однако нашей целью является также указать на возможность своего рода «операторного исчисления» для виртуальных операторов, определённых только на записях.

3.3. Теорема Амицура и виртуальные операторы

В данном разделе в качестве иллюстрации изложенной выше техники даётся прямое комбинаторное доказательство теоремы Амицура о нильпотентности радикала для случая нулевой характеристики. Для представимых алгебр нильпотентность радикала непосредственно следует из коммутативного случая, и мы считаем её установленной.

Ввиду изложенных в разделах 3.1, 3.2 соображений константы a_{ij} можно интерпретировать как операторы выноса. В качестве m можно взять число этапов приведения к нулю элемента x из препятствия к алгебраичности множества Y порядка n. Тогда имеем следующее утверждение.

Предложение 3.9. *Пусть в алгебре A выполняются частичные тождества алгебраичности порядка n и глубины h на элементы из Y. Пусть x принадлежит к препятствию к алгебраичности порядка h элементов из Y, m — число этапов приведения, каждый элемент t_i содержит набор неперекрывающихся $(n-1)$-хвостов этих частичных тождеств алгебраичности. Тогда $Qt_1t_2\cdots t_m = 0$.* □

Теорема 3.10 (С. Амицур [19]). *Пусть A — конечно порождённая PI-алгебра, $J(A)$ — радикал Джекобсона алгебры A, $x \in J(A)$. Тогда элемент x нильпотентен.*

Мы докажем эту теорему в случае нулевой характеристики основного поля.

Если A представима, то теорема Амицура считается установленной. Пусть $a_1, \ldots, a_s$ — образующие A, $Y = \{y_i\}_{i=1}^{s}$ — множество слов длины не выше $m = \deg(A)$. В силу теоремы о высоте Y — курошево множество и образ алгебры A при любом морфизме $\varphi\colon A \to B$, при котором образ множества Y алгебраичен над центром $Z(B)$, порождает нётерову $Z(B)$-алгебру, очевидным образом представимую. Поэтому существуют такие N и k, что препятствие к представимости матрицами порядка N содержит k-ю степень радикала $J(A)$, а также препятствие к алгебраичности порядка m элементов из Y.

При доказательстве нильпотентности элемента x из радикала можно считать, что x принадлежит препятствию к алгебраичности порядка n элементов из Y.

Можно считать установленной для любого $y_i \in Y$ нильпотентность $J(A)$ по модулю идеала $y_i^{(n)}$. Можно считать также, что указанная нильпотентность установлена по модулю произведения всех таких идеалов.

Можно считать, что существует такое R, что если $x \in J(A)$, то $x^R \in \operatorname{id}\bigl(y_1^{(m)}y_2^{(m)}\cdots y_s^{(m)}\bigr)$. В частности, это значит, что для случая выполнения частичных тождеств алгебраичности порядка 1 теорема Амицура установлена.

Рассмотрим систему частичных тождеств сильной алгебраичности элементов из Y. Индукция будет осуществляться так. По модулю хвостов частичных тождеств алгебраичности нильпотентность радикала будет считаться установленной (индукция по порядку), а наличие хвоста означает возможность осуществить «затягивание» и, значит, проинтерпретировать внешние константы, над которыми элементы из Y «алгебраичны».

Изначально тождество сильной алгебраичности есть. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.11.

1. *Пусть каждое $y_i \in Y$ удовлетворяет частичному тождеству алгебраичности порядка k_i, t_i — соответствующие (k_i-1)-хвосты, T_i — идеалы, ими*

порождённые, $T = \prod_{i=1}^{s} T_i$, z — *препятствие к алгебраичности элементов* y_i *порядка* n_i, *где* n_i — *глубины частичных тождеств алгебраичности.* (*Это понятие определяется аналогично препятствию к алгебраичности порядка* n *одного элемента.*) *Тогда* $zT^k = 0$ *при некотором* k.

2. *Пусть* z *лежит в препятствии к алгебраичности порядка* m *элемента* $y_i \in \in Y$. *Тогда* $zT_i^{(n)} = 0$.

Вначале укажем индукционный процесс, с помощью которого из данной леммы выводится теорема Амицура. В самом деле, пусть $x \in J(A)$. Ведя индукцию по числу алгебраических элементов из Y, можно считать, что некоторая степень x лежит в препятствии к алгебраичности порядка m элемента $y_i \in Y$. Лемма позволяет перейти к фактору по модулю T_i. Доказательство завершается индукцией по суммарной длине хвостов всех частичных тождеств.

Теперь докажем саму лемму.

Доказательство. Пункт 1 очевидным образом следует из п. 2. Рассмотрим элемент zt^n. Имеет место равенство

$$uy_i^n vt = \sum uy_i^{n-i} va_{ij}(t),$$

где $a_i(t)$ есть результат замены $(k-1)$-хвоста в выражении t на сумму членов, у которых самое левое вхождение y_i имеет степень $n-i$. Отметим, что оператор a_{ij} действует только на записях. При этом все его применения относятся к разным t_i и потому коммутируют. Поэтому можно интерпретировать константы, над которыми y_i алгебраично, как операторы a_{ij} и рассуждать как в начале данного раздела, работая с записями.

Поскольку основное поле в нашем случае имеет нулевую характеристику, то обстоятельство, что поглощение может происходить в разные хвосты одного типа, преодолевается усреднением. Поэтому такие выносы можно обозначать одной константой и проходят предыдущие рассуждения в силу коммутирования операторов выноса a_{ij} и их «локально корректной» определённости (независимо от представления обрабатываемого участка произведения, но в зависимости от хвостов, используемых для выноса).

Остаётся воспользоваться предложением 3.9. □

Замечание. В общем случае локальная корректность обеспечивается аналогично методам работы [4]. Здесь мы рассматриваем альтернирование степеней одного элемента и доказываем аналогичные леммы.

3.4. Доказательство основной теоремы методом Размыслова—Зубрилина

В этом разделе, как и в предыдущем, используются рассуждения, связанные с операционной интерпретацией дополнительных центральных констант a_{ij}, над которыми целы элементы y_i.

Будем вести доказательство индукцией по числу элементов множества Y. Если это число равно нулю, то алгебра A конечномерна и, следовательно, имеет ограниченную существенную высоту над пустым множеством.

Пусть $y_i \in Y$, $Y' = Y \setminus \{y_i\}$. Можно считать, что любая алгебра

$$A' = \mathbb{F}[a_{ik}] \otimes A \,/\, \mathrm{id}\biggl(y_i^n - \sum_j y_i^{n-k} a_{ik}\biggr)$$

имеет ограниченную существенную высоту над естественным образом множества Y'.

Поскольку PI-алгебра A является конечно порождённой, в ней выполняется система тождеств Капелли некоторого порядка $n+1$. Будем вести теперь индукцию по n. Случай $n = 1$ очевиден. Для индуктивного перехода достаточно показать ограниченность существенной высоты над Y у вербального идеала, порождённого системой C_n, что позволяет перейти к фактору A/C_n.

Пусть $C_n(\vec{y}, x_1, \ldots, x_n)$ — многочлен Капелли, полилинейный и кососимметричный по всем x_i. Расширим алгебру A в многообразии $\mathrm{Var}(A)$ свободными переменными $x_1, \ldots, x_n$. Рассмотрим пространство многочленов S, полилинейных и кососимметричных по набору $\{x_i\}$. Воспользовавшись леммой 2.13, дадим операторную интерпретацию констант $a_{ik} = \sigma_k(y_i)(F)$. Таким образом, пространство S имеет ограниченную существенную высоту над Y. Сформулируем результат в виде леммы.

Лемма 3.12. *Идеал, порождённый значениями C_n, в которых вместо альтернирующих переменных подставлены слова ограниченной длины, имеет ограниченную существенную высоту над любым курошевым множеством Y.* □

Но тогда и любой идеал J, порождённый любым значением $P \in \mathrm{T}(C_n)$, имеет ограниченную существенную высоту $h + |P|$ над Y. Здесь $|P|$ означает максимальную длину слова, через которое выражается P. Следовательно, имеет ограниченную существенную высоту любой идеал, порождённый конечным набором значений C_n.

Пусть H — высота алгебры A по модулю $\mathrm{T}(C_n)$. Тогда каждое слово v длины $10H$ и ширины более $2H$ (см. определение 3.2) линейно представимо словами меньшей ширины, а также элементом $q(v)$ из $\mathrm{T}(C_n)$. Пусть L — максимальная длина слова в представлениях элементов вида $q(v)$, где $|v| < 10H$.

Рассмотрим слово, содержащее непересекающиеся подслова W_1 и W_2 ширины $L + 2h + 2m$ и $10H + 2m$ соответственно. Отметим, что изменение подслова может изменить вклад в общую ширину только букв, входящих в это подслово, а также букв, находящихся на расстоянии не больше m от его концов. Слово W_2 линейно представимо подсловами более чем в два раза меньшей ширины и элементом $P(W_2) \in \mathrm{T}(C_n)$, являющимся линейной комбинацией слов длины не более L. Но идеал, порождённый P, имеет ширину не более $L + H$, что меньше $10H + 2m$, а значит, и ширины исходного слова W. Тем самым W линейно представимо словами меньшей ширины, что завершает доказательство.

Отметим, что вместо суммы длин слов, входящих в P, можно брать сумму ширин слов, подставляемых в многочлены Капелли, из которых получается P, и получить лучшие оценки на ширины.

Замечание. Вместо обычных многочленов Капелли можно рассматривать частичные тождества Капелли, в которые вместо переменных x_i подставляются степени одного элемента из Y. Это система частичных тождеств сильной алгебраичности. Для них справедливы лемма Зубрилина и все соображения данного раздела. Такое частичное тождество алгебраичности обладает свойством «универсального затягивания» по модулю частичных тождеств высшего порядка: оно способно поглотить любую степень y. Доказать такую алгебраичность легче, чем справедливость тождества Капелли. Легче получить и соответствующие конструктивные оценки. Мы используем произвольные тождества алгебраичности и идём более сложным путём с единственной целью: проиллюстрировать версию операционного исчисления для операторов, определённых на записях. Хотя данная иллюстрация может показаться недостаточной, само наличие такого исчисления автору представляется достаточно интересным.

Литература

[1] Белов А. Я. О базисе Ширшова относительно свободных алгебр сложности n // Мат. сб. — 1988. — Т. 135, № 31. — С. 373—384.

[2] Белов А. Я., Борисенко В. В., Латышев В. Н. Мономиальные алгебры // Итоги науки и техн. Сер. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. Т. 26. — М.: ВИНИТИ, 2002. — С. 35—214.

[3] Днестровская тетрадь. — 4-е изд. — Новосибирск: Изд. Ин-та матем. СО АН СССР, 1993.

[4] Зубрилин К. А. Алгебры, удовлетворяющие тождествам Капелли // Мат. сб. — 1995. — Т. 186, № 3. — С. 53—64.

[5] Зубрилин К. А. О классе нильпотентности препятствия для представимости алгебр, удовлетворяющих тождествам Капелли // Фундамент. и прикл. мат. — 1995. — Т. 1, № 2. — С. 409—430.

[6] Кемер А. Р. Нематричные многообразия, многообразия со степенным ростом и конечно порождённые PI-алгебры: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. — Новосибирск, 1981.

[7] Курош А. Г. Проблемы теории колец, связанные с проблемой Бернсайда о периодических группах // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1941. — Т. 5. — С. 233—240.

[8] Латышев В. Н. Нематричные многообразия ассоциативных алгебр: Дис. . . . докт. физ.-мат. наук. — М., 1977.

[9] Мищенко С. П. Вариант теоремы о высоте для алгебр Ли // Мат. заметки. — 1990. — Т. 47, № 4. — С. 83—89.

[10] Пчелинцев С. В. Теорема о высоте для альтернативных алгебр // Мат. сб. — 1984. — Т. 124, № 4. — С. 557—567.

[11] Размыслов Ю. П. Алгебры, удовлетворяющие тождественным соотношениям типа Капелли // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1981. — Т. 45, № 1. — С. 143—166.

[12] Размыслов Ю. П. Тождества алгебр и их представлений. — М.: Наука, 1989.

[13] Уфнаровский В. А. Теорема о независимости и её следствия // Мат. сб. — 1985. — Т. 128, № 1. — С. 124—132.

[14] Уфнаровский В. А. Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре // Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. математики. Фундаментальные направления. Т. 57. — М.: ВИНИТИ, 1990. — С. 5—177.

[15] Чекану Г. П. К теореме Ширшова о высоте // XIX Всесоюзн. алгебр. конф.: Тезисы сообщ. I. — Львов, 1987. — С. 306.

[16] Чекану Г. П. О локальной конечности алгебр // Мат. исследования. — 1988. — № 105. — С. 153—171.

[17] Ширшов А. И. О некоторых неассоциативных ниль-кольцах и алгебраических алгебрах // Мат. сб. — 1957. — Т. 41, № 3. — С. 381—394.

[18] Ширшов А. И. О кольцах с тождественными соотношениями // Мат. сб. — 1957. — Т. 43, № 2. — С. 277—283.

[19] Amitsur S. A generalization of Hilbert's Nullstellensatz // Proc. Amer. Math. Soc. — 1957. — Vol. 8, no. 4. — P. 649—656.

[20] Braun A. The radical in a finitely generated PI-algebra // Bull. Amer. Math. Soc. — 1982. — Vol. 7, no. 2. — P. 385—386.