# Радикал RN и слабо разрешимый радикал линейных групп над ассоциативными кольцами

**А. Ю. ГОЛУБКОВ**
*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана*
e-mail: golubkov@mccme.ru

УДК 512.743.3+512.552.12

**Ключевые слова:** первичный радикал, радикал Левицкого, слабо разрешимый радикал, достижимая подгруппа, субинвариантная подгруппа, группа Шевалле, кольцо с инволюцией, линейная группа, унитарная группа.

**Аннотация**

Настоящая работа посвящена вычислению радикалов RN и RN* и слабо разрешимого радикала для ряда основных классических линейных групп над кольцами, включая унитарную группу над кольцом с инволюцией и матричные группы, нормализуемые элементарными группами Шевалле.

**Abstract**

*A. Yu. Golubkov, The radical RN and the weakly solvable radical of linear groups over associative rings*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 2, pp. 31—115.

The present paper is devoted to the computation of the radicals RN and RN* and the weakly solvable radical for a number of basic classical linear groups over rings, including the unitary group over a ring with involution and matrix groups normalized by elementary Chevalley groups.

## 1. Введение

Использование того или иного радикала Куроша—Амицура в структурной теории алгебраической системы определяется возможностью получения приемлемого описания связанного с ним радикального и (или) полупростого классов. К сожалению, в отличие от ассоциативных алгебр, для групп подобный подход является излишне укрупнённым и потому мало применимым. Не составляют исключения и рассматриваемые в настоящей работе радикалы групп RN и RN* и слабо разрешимый радикал T.

Тем не менее, учитывая ориентированность конструкции радикала на структуру алгебр, вполне законно поставить вопрос о наличии взаимосвязей между радикалами ассоциативной алгебры с единицей и аналогичными им по конструкции радикалами подгрупп группы её обратимых элементов, предполагая, конечно же, что в данной алгебре выполнены некоторые условия, определяющие зависимость между её обратимыми и необратимыми элементами. Приведённое ниже исследование посвящено изучению этого вопроса для нижнего ниль-радикала (первичного радикала, или радикала Бэра) и локально нильпотентного радикала (радикала Левицкого) в следующих случаях:

1) для подгрупп мультипликативных групп алгебр с полиномиальными тождествами;
2) для подгрупп линейной группы над ассоциативной алгеброй, нормализуемых её элементарной подгруппой;
3) для подгрупп линейной группы над ассоциативной алгеброй, нормализуемых элементарными группами Шевалле (последние можно определить над произвольным ассоциативным кольцом, хотя это и не имеет столь эффектных последствий, как в коммутативном случае);
4) для подгрупп унитарной группы над алгеброй с инволюцией, нормализуемых её элементарной подгруппой.

Сразу же оговоримся, что под групповыми аналогами радикала ассоциативных алгебр подразумеваются радикалы групп в смысле Куроша—Амицура, которые получаются в результате переноса на язык групп одного из эквивалентных описаний исходного радикала алгебр. Для этого наиболее естественно воспользоваться характеризацией выбранного радикала как нижнего радикала, определяемого соответствующим классом радикальных алгебр. Так, например, в данной работе в качестве аналога нижнего ниль-радикала алгебр мы возьмём хорошо известный в теории групп радикал RN, а в качестве аналога локально нильпотентного радикала — перенесённый из алгебр Ли слабо разрешимый радикал T. На выбор подходящей групповой версии ниль-радикала алгебр влияет и то, каким образом интерпретируется условие нильпотентности алгебры: либо как нильпотентность, либо как разрешимость группы. Поэтому аналогами локально нильпотентного радикала для групп можно считать не только слабо разрешимый радикал, но и нижние радикалы, определяемые классами локально нильпотентных и локально разрешимых групп. Правда, для исследуемых здесь случаев подобное изменение не внесёт ничего нового в полученные результаты. Важную роль в наших рассмотрениях будет играть также первичный радикал групп, который получается в результате трансформации одного из описаний нижнего ниль-радикала алгебр, но не вкладывается в схему радикала Куроша—Амицура.

## 1.1. Первичный радикал, радикал $\mathrm{RN}^*$ и локально нильпотентный радикал ассоциативных алгебр

Все рассматриваемые ниже кольца и алгебры, если не оговаривается противное, предполагаются ассоциативными, а символ $F$ везде обозначает ассоциативное коммутативное кольцо с единицей.

Напомним, что *нормальным рядом* алгебры $R$ над кольцом $F$ называется любая индексированная порядковыми числами возрастающая цепочка её подалгебр

$$R_0 = \{0\} \subseteq R_1 \subseteq \ldots \subseteq R_\beta \subseteq \ldots \subseteq R_\alpha = R,$$

в которой для каждого $\beta$, $\beta < \alpha$, подалгебра $R_\beta$ является идеалом подалгебры $R_{\beta+1}$ и для всякого предельного трансфинита $\gamma$, $\gamma \leqslant \alpha$, подалгебра $R_\gamma$ совпадает с объединением $\bigcup\limits_{\beta<\gamma} R_\beta$. Фактор-алгебры $R_{\beta+1}/R_\beta$, $\beta < \alpha$, называют факторами нормального ряда $\{R_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$.

Элемент $R_\tau$ нормального ряда $\{R_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$ называется *достижимым по ряду*, если для некоторого конечного набора трансфинитов $\tau \leqslant \tau_1 \leqslant \ldots \leqslant \tau_n \leqslant \alpha$ цепочка

$$R_0 = \{0\} \subseteq R_\tau \subseteq R_{\tau_1} \subseteq \ldots \subseteq R_{\tau_n} \subseteq R_\alpha = R$$

образует конечный нормальный ряд алгебры $R$.

**Определение 1.1.** Подалгебру алгебры $R$ называют субинвариантной (достижимой), если она является членом некоторого (конечного) нормального ряда подалгебр $R$.

Понятия достижимой и субинвариантной подалгебры можно объединить следующим образом.

**Определение 1.2.** Скажем, что подалгебра $A$ алгебры $R$ является $\alpha$-субинвариантной для некоторого трансфинита $\alpha$, если в алгебре $R$ существует такой нормальный ряд

$$R_0 = \{0\} \subseteq R_1 \subseteq \ldots \subseteq R_\beta \subseteq \ldots \subseteq R_\alpha = R,$$

что $A$ является идеалом подалгебры $R_1$. При этом не предполагается, что все члены данного ряда являются попарно различными.

Трансфинит $\alpha$ мы будем называть также *глубиной субинвариантности* (для конечных $\alpha$ *глубиной достижимости*) подалгебры $A$ в алгебре $R$.

Аналогичным образом, с точностью до замены подалгебр, фактор-алгебр и идеалов на подгруппы, фактор-группы и нормальные подгруппы, вводятся понятия нормального ряда подгрупп, его достижимого по ряду элемента, субинвариантной и достижимой подгруппы и их глубины (см. [21]).

**Определение 1.3.** Алгебра над кольцом $F$ называется первичной, если произведение любых двух её ненулевых идеалов отлично от нуля, и полупервичной, если она не содержит ненулевых нильпотентных идеалов.

**Определение 1.4.** Идеал алгебры над кольцом $F$ называется первичным, если её фактор-алгебра по этому идеалу является первичной.

Совокупность всех первичных идеалов алгебры $R$ над кольцом $F$ называют *первичным спектром* алгебры $R$ и обозначают $\mathrm{Spec}(R)$. Пересечение

$$\mathrm{Rad}(R) = \bigcap_{P \in \mathrm{Spec}(R)} P$$

всех первичных идеалов алгебры $R$ называется *первичным радикалом* (*радикалом Бэра* или *нижним ниль-радикалом*) этой алгебры.

На классе ассоциативных алгебр над кольцом $F$ первичный радикал $\mathrm{Rad}$ совпадает с нижним радикалом $\mathrm{RN}$, определяемым классом нильпотентных алгебр (см. [1, гл. 1]), т. е. является наименьшим среди радикалов в смысле Куроша—Амицура $\tau$ на данном классе, относительно которых $\tau$-радикальны все нильпотентные ассоциативные алгебры над кольцом $F$.

Радикал $\mathrm{Rad}$ можно также описать следующим образом. Для любой алгебры $R$ над кольцом $F$ обозначим через $\eta(R)$ сумму всех её нильпотентных идеалов и определим возрастающую цепочку идеалов $\{\eta_\alpha(R) \mid \alpha \geqslant 0\}$ алгебры $R$, в которой $\eta_0(R) = \{0\}$,

$$\eta_{\alpha+1}(R)/\eta_\alpha(R) = \eta\bigl(R/\eta_\alpha(R)\bigr)$$

для всех порядковых чисел $\alpha \geqslant 0$ и

$$\eta_\alpha(R) = \bigcup_{\beta<\alpha} \eta_\beta(R)$$

для каждого предельного трансфинита $\alpha$. Тогда согласно [1] первичный радикал $\mathrm{Rad}(R)$ алгебры $R$ совпадает с объединением

$$\hat{\eta}(R) = \bigcup_{\alpha\geqslant 0} \eta_\alpha(R)$$

всех идеалов этой цепочки.

Кроме того, хорошо известна характеризация первичного радикала ассоциативной алгебры в терминах строго нильпотентных элементов.

**Определение 1.5.** Элемент $r$ алгебры $R$ называется строго нильпотентным, если для любой цепочки элементов $\{r_i\}_{i=0}^{\infty}$ алгебры $R$, в которой $r_0 = r$ и $r_{i+1} \in \in Rr_iRr_iR$ для каждого $i \geqslant 0$, найдётся такой номер $j \geqslant 0$, что $r_k = 0$ для всех $k \geqslant j$.

**Предложение 1.6 ([1, с. 43, следствие 5]).** *Первичный радикал* $\mathrm{Rad}(R)$ *алгебры $R$ над кольцом $F$ совпадает с множеством всех её строго нильпотентных элементов.*

Во всякой ассоциативной алгебре $R$ над кольцом $F$ существует наибольший локально нильпотентный идеал $\mathrm{L}(R)$, в фактор-алгебре $R/\mathrm{L}(R)$ по которому нет ненулевых локально нильпотентных идеалов. Отображение $\mathrm{L}\colon R \mapsto \mathrm{L}(R)$ является радикалом в смысле Куроша—Амицура на классе ассоциативных алгебр над кольцом $F$, который принято называть их локально нильпотентным радикалом или радикалом Левицкого. Хорошо известно, что локально нильпотентный радикал $\mathrm{L}$ является *специальным*, т. е. для каждой ассоциативной алгебры $R$ над кольцом $F$ радикал $\mathrm{L}(R)$ совпадает с пересечением всех её первичных идеалов, фактор-алгебры по которым не содержат ненулевых локально нильпотентных идеалов (см., например, [1, гл. 1]).

Нетрудно заметить, что большинство из отмеченных свойств радикала L являются следствиями совпадения класса локально нильпотентных ассоциативных алгебр над кольцом $F$ с классом всех ассоциативных алгебр $A$ над этим кольцом, в которых для всякого конечного набора элементов $B$ найдётся такое целое $k = k(B) \geqslant 1$, что равенство $b_1 \cdots b_k = 0$ выполняется при любых $b_1, \ldots, b_k \in B$.

Как и в рассмотренном К. К. Щукиным в [43, 44] случае групп, можно доказать, что в произвольной ассоциативной алгебре $R$ над кольцом $F$ среди её идеалов, обладающих возрастающим нормальным рядом с нильпотентными факторами, существует наибольший идеал $\mathrm{RN}^*(R)$. Несложно также показать, что соответствие $\mathrm{RN}^*\colon R \mapsto \mathrm{RN}^*(R)$ удовлетворяет на классе ассоциативных алгебр над кольцом $F$ всем условиям определения радикала в смысле Куроша—Амицура. Подробное доказательство этого факта приводится в [13]. В той же работе установлены следующие свойства радикала $\mathrm{RN}^*$.

**Предложение 1.7.** *Радикал $\mathrm{RN}^*(R)$ любой алгебры $R$ над кольцом $F$ является её локально нильпотентным идеалом.*

**Предложение 1.8.** *В любой алгебре $R$ над кольцом $F$ со счётным множеством порождающих локально нильпотентный радикал $\mathrm{L}(R)$ совпадает с радикалом $\mathrm{RN}^*(R)$.*

Важную роль в наших дальнейших построениях будет играть возможность выражения радикалов Rad, L и $\mathrm{RN}^*$ алгебры матриц $\mathrm{M}_n(R)$ над алгеброй с единицей $R$ через соответствующие радикалы алгебры коэффициентов $R$.

**Замечание 1.9.** Для всякой алгебры $R$ с единицей 1 над кольцом $F$ при любом целом $n \geqslant 1$ выполнены следующие равенства:

$$\mathrm{Rad}\big(\mathrm{M}_n(R)\big) = \mathrm{M}_n\big(\mathrm{Rad}(R)\big),$$
$$\mathrm{RN}^*\big(\mathrm{M}_n(R)\big) = \mathrm{M}_n\big(\mathrm{RN}^*(R)\big), \quad \mathrm{L}\big(\mathrm{M}_n(R)\big) = \mathrm{M}_n\big(\mathrm{L}(R)\big).$$

**Доказательство.** Для первичного радикала Rad это равенство хорошо известно (см., например, [23]). Из определения радикалов $\mathrm{RN}^*$ и L следуют включения

$$\mathrm{M}_n\big(\mathrm{RN}^*(R)\big) \subseteq \mathrm{RN}^*\big(\mathrm{M}_n(R)\big), \quad \mathrm{M}_n\big(\mathrm{L}(R)\big) \subseteq \mathrm{L}\big(\mathrm{M}_n(R)\big).$$

Наличие в алгебре $R$ единицы позволяет описать каждый идеал $I$ алгебры матриц $\mathrm{M}_n(R)$ как кольцо матриц $\mathrm{M}_n(J)$ над идеалом $J$ алгебры $R$, состоящим из коэффициентов матриц, которые входят в идеал $I$. В частности, это верно для радикалов $\mathrm{RN}^*\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$ и $\mathrm{L}\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$ алгебры $\mathrm{M}_n(R)$, которые при помощи идеалов $A$ и $B$ коэффициентов составляющих их матриц можно представить в виде $\mathrm{RN}^*\big(\mathrm{M}_n(R)\big) = \mathrm{M}_n(A)$ и $\mathrm{L}\big(\mathrm{M}_n(R)\big) = \mathrm{M}_n(B)$. Обратившись к диагональным матрицам из идеала $\mathrm{L}\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$, мы сразу получаем отсюда, что идеал $B$ алгебры $R$ является локально нильпотентным. Поэтому $\mathrm{L}\big(\mathrm{M}_n(R)\big) = \mathrm{M}_n\big(\mathrm{L}(R)\big)$ и $B = \mathrm{L}(R)$.

Пусть теперь $\{A_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$ — возрастающий нормальный ряд подалгебр радикала $\mathrm{RN}^*\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$ с нильпотентными факторами. Для каждого трансфинита $\beta$,

$0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, положим $A'_\beta = \{r \in R \mid rE \in A_\beta\}$, где через $E$ обозначена единичная матрица. Тогда подалгебры $\{A'_\beta\}$ составляют нормальный ряд идеала $A'_\alpha = \bigl\{r \bigm| rE \in \mathrm{RN}^*\bigl(\mathrm{M}_n(R)\bigr)\bigr\} = A$ алгебры $R$, все факторы которого являются нильпотентными алгебрами. Значит, $A$ является $\mathrm{RN}^*$-радикальным идеалом алгебры $R$ и содержится в её наибольшем идеале с такими свойствами $\mathrm{RN}^*(R)$. С другой стороны, радикал $\mathrm{RN}^*(R)$ также лежит в идеале $A$ (см. выше), и следовательно, $\mathrm{RN}^*\bigl(\mathrm{M}_n(R)\bigr) = \mathrm{M}_n\bigl(\mathrm{RN}^*(R)\bigr)$, $A = \mathrm{RN}^*(R)$. □

Напомним, что *инволюцией* алгебры $R$ над кольцом $F$ называется любой её $F$-антиавтоморфизм $*$ порядка два, $*\colon r \mapsto r^*$, $r \in R$. Другими словами, отображение $*$ должно удовлетворять следующим условиям: $(a + fb)^* = a^* + fb^*$ и $(ab)^* = b^*a^*$ для любых $a, b \in R$ и $f \in F$. Для краткости алгебру $R$ с фиксированной инволюцией $*$ мы будем называть *$*$-алгеброй*. Инвариантные относительно инволюции $*$ идеалы $*$-алгебры $R$ называются её *$*$-идеалами*. Отметим, что фактор-алгебра $R/I$ алгебры $R$ по её $*$-идеалу $I$ тоже является алгеброй с инволюцией $*\colon r + I \mapsto r^* + I^* = r^* + I$, $r \in R$, которую индуцирует исходная инволюция $*$.

**Определение 1.10.** Алгебра над кольцом $F$ с инволюцией $*$ называется $*$-первичной, если произведение любых её ненулевых $*$-идеалов отлично от нуля, и $*$ -полупервичной, если она не содержит ненулевых нильпотентных $*$-идеалов. Назовём $*$-идеал $*$-алгебры $*$-первичным, если её фактор-алгебра по этому идеалу $*$-первична относительно индуцированной $*$ инволюции.

**Предложение 1.11 ([8, 10]).** *Первичный радикал алгебры $R$ над кольцом $F$ с единицей $1$ и инволюцией $*$ совпадает с пересечением всех её $*$-первичных идеалов.*

В $*$-алгебре $R$ для всякого локально нильпотентного ($\mathrm{RN}^*$-радикального) идеала $I$ сопряжённый с ним идеал $I^* = \{a^* \mid a \in I\}$ является её локально нильпотентным ($\mathrm{RN}^*$-радикальным) идеалом. Поэтому радикалы $\mathrm{L}(R)$ и $\mathrm{RN}^*(R)$ алгебры $R$ являются $*$-идеалами.

Воспользовавшись стандартными рассуждениями из доказательства специальности локально нильпотентного радикала (см. [1, гл. 1]), можно легко получить следующий результат.

**Замечание 1.12.** Локально нильпотентный радикал $\mathrm{L}(R)$ алгебры $R$ над кольцом $F$ с инволюцией $*$ совпадает с пересечением всех её $*$-первичных идеалов, фактор-алгебры по которым не содержат ненулевых локально нильпотентных идеалов.

Как известно, нетривиальные элементы центра первичной алгебры не могут быть делителями нуля. Аналогом этого свойства для $*$-первичных алгебр служит следующее утверждение.

**Замечание 1.13 ([8, 10]).** Пусть в $*$-первичной алгебре $R$ с единицей $1$ над кольцом $F$ ненулевой элемент $a$ её центра $Z(R)$ удовлетворяет одному из следующих условий: или $a^* = a$, или $a^* = -a$, или $a = 1 + b$ для некоторого элемента $b$, $bb^* = 1$. Тогда $a$ не является делителем нуля в алгебре $R$.

## 1.2. Радикалы RN и RN*, первичный, локально нильпотентный и слабо разрешимый радикалы групп

Связанные с классом абелевых групп радикалы RN и RN* в смысле Куроша—Амицура на классе всех групп определяются точно так же, как и в случае алгебр: во всякой группе $A$ нижний радикал $\mathrm{RN}(A)$, определяемый классом абелевых групп, является наибольшей из всех её нормальных подгрупп, имеющих нормальный ряд с абелевыми факторами, все члены которого достижимы по ряду, а радикал $\mathrm{RN}^*(A)$ — наибольшей из всех нормальных подгрупп этой группы, обладающих нормальным рядом с абелевыми факторами. Естественно, что в данном определении ряды с абелевыми факторами можно равносильным образом заменить рядами, все факторы которых являются нильпотентными или разрешимыми.

Интерес к исследованиям радикалов RN и RN* в теории групп появился почти одновременно с возникновением в середине прошлого века само́й теории радикалов (см., в частности, [21, 22, 43, 44]). Наиболее существенным свойством этих радикалов для наших целей является их тесная взаимосвязь с другим классическим понятием теории групп — локально нильпотентным радикалом PH, или радикалом Плоткина—Хирша, который определяется в любой группе $A$ как наибольшая из всех её локально нильпотентных нормальных подгрупп и обозначается через $\mathrm{PH}(A)$ (см. [31, 54]). Основу соотношений между радикалами RN, RN* и PH составляют записанные ниже в виде предложений выводы работ Б. И. Плоткина [32], Р. Бэра [46] и Ш. С. Кемхадзе [17].

**Определение 1.14.** Элемент группы $A$ называется достижимым (субинвариантным), если порождённая им циклическая подгруппа достижима (субинвариантна) в группе $A$. Группы, все элементы которых являются достижимыми, принято называть ниль-группами. Группы, все элементы которых являются субинвариантными, называют квазинильпотентными.

Множества всех достижимых и всех субинвариантных элементов группы $A$ обычно обозначают $\bar{\sigma}(A)$ и $\sigma(A)$ и называют её *ниль-радикалом* и *квазинильпотентным радикалом*.

**Предложение 1.15.** *Во всякой группе $A$ любые две достижимые (субинвариантные) конечно порождённые нильпотентные подгруппы порождают достижимую (субинвариантную) нильпотентную подгруппу.*

Из доказательства этого результата (см. [46]) вытекает следующее замечание.

**Замечание 1.16.** Во всякой группе $A$ любое конечное семейство конечно порождённых достижимых нильпотентных подгрупп порождает достижимую нильпотентную подгруппу, глубина достижимости и индекс нильпотентности которой не превышают некоторых величин, зависящих только от количеств порождающих, индексов нильпотентности и глубин достижимости подгрупп из этого семейства.

Как известно, в нильпотентной группе индекса нильпотентности $k$ каждая подгруппа является достижимой и, более того, имеет глубину достижимости не выше $k-1$ (см., например, [21]). Достижимые (субинвариантные) элементы достижимых (субинвариантных) подгрупп любой группы являются её достижимыми (субинвариантными) элементами. Поэтому ниль-группы (квазинильпотентные группы) локально нильпотентны и их можно также определить как группы, в которых достижимыми (субинвариантными) являются все их конечно порождённые подгруппы, или, что равносильно, как группы, которые порождаются своими достижимыми (субинвариантыми) конечно порождёнными нильпотентными подгруппами.

Отсюда сразу вытекает, что в произвольной группе $A$ ниль-радикал $\bar{\sigma}(A)$ и квазинильпотентный радикал $\sigma(A)$ совпадают с подгруппами, порождёнными всеми достижимыми и соответственно всеми субинвариантыми нильпотентными подгруппами этой группы. Кроме того, их можно описать следующим образом.

**Предложение 1.17.** *Во всякой группе $A$ ниль-радикал $\bar{\sigma}(A)$ является наибольшей нормальной ниль-подгруппой, порождённой всеми достижимыми ниль-подгруппами этой группы, квазинильпотентный радикал $\sigma(A)$ — наибольшей нормальной квазинильпотентной подгруппой, порождённой всеми её субинвариантными квазинильпотентными подгруппами.*

Так как образы членов нормального ряда группы $A$ при действии любого её гомоморфизма составляют нормальный ряд в образе этой группы, каждый гомоморфизм группы $A$ переводит её достижимые (субинвариантные) элементы в достижимые (субинвариантные) элементы её образа. Последнее, в частности, означает, что подгруппы $\bar{\sigma}(A)$ и $\sigma(A)$ инвариантны относительно всех автоморфизмов группы $A$ (т. е. являются её характеристическими нормальными подгруппами).

В [43,44] К. К. Щукин установил, что на классе всех групп каждый наследственный радикал в смысле Куроша—Амицура $\tau$ является идеально наследственным, т. е. для всякой нормальной подгруппы $B$ любой группы $A$ выполняется равенство $\tau(B) = B \cap \tau(A)$. В частности, это справедливо для радикалов $\mathrm{RN}$ и $\mathrm{RN}^*$. Аналогичное равенство имеет место и для локально нильпотентного радикала групп $\mathrm{PH}$, хотя он и не является радикалом в смысле Куроша—Амицура. Поэтому в любой группе $A$ радикалы $\mathrm{RN}(A)$, $\mathrm{RN}^*(A)$ и $\mathrm{PH}(A)$ содержат все достижимые нильпотентные подгруппы. Следовательно, если теперь объединить сказанное с теоремой Бэра—Кемхадзе, получим следующее утверждение.

**Предложение 1.18.** *Во всякой группе $A$ выполняются включения*

$$\bar{\sigma}(A) \subseteq \mathrm{PH}(A) \cap \mathrm{RN}(A) \subseteq \sigma(A) = \mathrm{PH}(A) \cap \mathrm{RN}^*(A).$$

В каждой группе $A$ для любого трансфинита $\alpha$ определим индуктивно нормальные подгруппы $\bar{\sigma}_\alpha(A)$ и $\sigma_\alpha(A)$ в соответствии со следующим правилом:

1) подгруппы $\bar{\sigma}_0(A)$ и $\sigma_0(A)$ совпадают с единичной подгруппой $\{e\}$ группы $A$;

2) если подгруппы $\bar{\sigma}_\beta(A)$ и $\sigma_\beta(A)$ уже построены для всех $\beta < \alpha$, то подгруппы $\bar{\sigma}_\alpha(A)$ и $\sigma_\alpha(A)$ для предельного $\alpha = \gamma + 1$, $\gamma < \alpha$, совпадают с прообразами в группе $A$ подгрупп $\bar{\sigma}\big(A/\bar{\sigma}_\gamma(A)\big)$ и $\sigma\big(A/\sigma_\gamma(A)\big)$, а для непредельного $\alpha$ являются объединениями $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} \bar{\sigma}_\beta(A)$ и $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} \sigma_\beta(A)$.

Тогда начиная с некоторых трансфинитов $\tau$ и $\eta$ найденные таким образом цепочки подгрупп $\{\bar{\sigma}_\alpha(A)\}$ и $\{\sigma_\alpha(A)\}$ стабилизируются, т. е. $\bar{\sigma}_\tau(A) = \bar{\sigma}_\psi(A)$ и $\sigma_\eta(A) = \sigma_\varphi(A)$ при всех $\psi \geqslant \tau$ и $\varphi \geqslant \eta$. Положим

$$\hat{\bar{\sigma}}(A) = \bar{\sigma}_\tau(A) = \bigcup_{\alpha \geqslant 0} \bar{\sigma}_\alpha(A)$$

и

$$\hat{\sigma}(A) = \sigma_\eta(A) = \bigcup_{\alpha \geqslant 0} \sigma_\alpha(A).$$

Используя трансфинитную индукцию, несложно показать, что в группе $A$ подгруппы $\hat{\bar{\sigma}}(A)$ и $\hat{\sigma}(A)$ являются наименьшими из всех её нормальных подгрупп, фактор-группы по которым не содержат неединичных достижимых и субинвариантных нильпотентных подгрупп соответственно. Не имеющие нетривиальных достижимых (субинвариантных) нильпотентных подгрупп группы являются также RN-полупростыми ($\mathrm{RN}^*$-полупростыми). Поэтому из предложения 1.18 сразу вытекает следствие.

**Следствие 1.19.** *В любой группе $A$ подгруппа $\hat{\bar{\sigma}}(A)$ совпадает с радикалом $\mathrm{RN}(A)$, подгруппа $\hat{\sigma}(A)$ — с радикалом $\mathrm{RN}^*(A)$.*

Таким образом, радикалы групп RN и $\mathrm{RN}^*$ совпадают с нижними радикалами, определяемыми на классе всех групп классами ниль-групп и квазинильпотентных групп, а также с верхними радикалами, определяемыми классом групп, не имеющих неединичных достижимых нильпотентных подгрупп, и классом групп, не содержащих неединичных субинвариантных нильпотентных подгрупп.

**Определение 1.20.** Элемент $b$ группы $A$ называется энгелевым (левоэнгелевым, в ряде источников также ниль-элементом), если для любого элемента $a \in A$ существует целое $n(a) = n \geqslant 1$, для которого

$$[\ldots[a, \underbrace{b]\ldots b]}_{n} = [a, b]_n = e,$$

где, как обычно, через $e$ обозначена единица группы $A$, через $[x, y]$ — коммутатор элементов $x, y \in A$, $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. Если к тому же число $n$ можно выбрать одно и то же для всех элементов $a \in A$, то элемент $b$ называют ограниченным энгелевым (или $n$-энгелевым).

Группы, состоящие из энгелевых ($n$-энгелевых) элементов, называются *энгелевыми* (*энгелевыми конечного класса $n$*).

**Теорема 1.21.** *Во всякой группе $A$ квазинильпотентный радикал $\sigma(A)$ совпадает с множеством всех энгелевых элементов её радикала $\mathrm{RN}^*(A)$.*

**Доказательство.** Энгелевость элементов локально нильпотентного радикала группы (и в том числе субинвариантных элементов (см. предложение 1.18)), как и ограниченная энгелевость её достижимых элементов, непосредственно вытекает из их определения.

Пусть $a$ — энгелев элемент радикала $\mathrm{RN}^*(A)$ группы $A$. Выделим в радикале $\mathrm{RN}^*(A)$ произвольный нормальный ряд $\{A_\beta \mid \beta \geqslant \alpha\}$, все факторы которого абелевы, и для каждого трансфинита $\beta \leqslant \alpha$ положим

$$A_\beta(a) = \bigcap_{k\in\mathbb{Z}} a^k A_\beta a^{-k}.$$

По построению $A_0 = \{e\} = A_0(a)$ и $A_\alpha = \mathrm{RN}^*(A) = A_\alpha(a)$. Поскольку

$$a^k[A_{\beta+1}, A_{\beta+1}]a^{-k} = [a^k A_{\beta+1} a^{-k}, a^k A_{\beta+1} a^{-k}] \subseteq a^k A_\beta a^{-k}$$

при всех $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant \beta < \alpha$, мы сразу получаем включение $[A_{\beta+1}(a), A_{\beta+1}(a)] \subseteq \subseteq A_\beta(a)$.

Для каждого предельного трансфинита $\gamma$ из равенства $A_\gamma = \bigcup\limits_{\beta<\gamma} A_\beta$ следует, что

$$\bigcup_{\beta<\gamma} A_\beta(a) \subseteq A_\gamma(a).$$

Возьмём любой элемент $b \in A_\gamma(a)$ и покажем, что подгруппа $B$, порождённая всеми элементами $a^k b a^{-k}$, $k \in \mathbb{Z}$, является конечно порождённой. Так как элемент $a$ энгелев, найдётся целое $m \geqslant 1$, при котором $[b,a]_m = e$. Индукцией по $i \geqslant 0$ можно легко показать, что каждый элемент $[b,a]_i$ представи́м в виде произведения элементов $b_j^{\pm 1} = a^j b^{\pm 1} a^{-j}$, $j = 0,\ldots,i$, содержащего один элемент вида $b_i^{\pm 1}$ и один элемент $b_0 = b$. Следовательно, пользуясь равенством $[b,a]_m = e$, мы можем выразить элемент $b_m$ через произведение элементов $b_p^{\pm 1}$ для $p = 0,\ldots,m-1$, а элемент $b_0$ — через произведение элементов $b_q^{\pm 1}$ для $q = 1,\ldots,m$. Значит, элементы $b_m$ и $b_{-m} = a^{-m} b_0 a^m$ принадлежат подгруппе $B_m$, которую порождают элементы $b_l$, $1-m \leqslant l \leqslant m-1$. Сопрягая указанные выражения для элементов $b_m$ и $b_{-m}$ с элементами $a$ и $a^{-1}$, мы можем при помощи индукции показать также, что элементы $b_s$ и $b_{-s}$ являются элементами подгруппы $B_m$ для каждого $s \geqslant m$. Поэтому подгруппа $B$ совпадает с подгруппой $B_m$ и является конечно порождённой.

Инвариантная относительно отвечающего элементу $a$ внутреннего автоморфизма группы $A$ конечно порождённая подгруппа $B$ входит в подгруппу $A_\delta$ для некоторого трансфинита $\delta < \gamma$ и потому содержится в подгруппе $A_\delta(a)$. Поскольку сказанное справедливо для произвольного элемента $b \in A_\gamma(a)$, из установленного ранее включения вытекает, что $A_\gamma(a) = \bigcup\limits_{\beta<\gamma} A_\beta(a)$.

Таким образом, цепочка $\{A_\beta(a) \mid \beta \leqslant \alpha\}$ составляет нормальный ряд с абелевыми факторами группы $\mathrm{RN}^*(A)$, все члены которого инвариантны относительно сопряжения с элементом $a$.

Для любых трансфинита $\beta < \alpha$ и целого $i \geqslant 0$ определим множество

$$A_{\beta+1}(a,i) = \{b \in A_{\beta+1}(a) \mid [b,a]_i, [b^{-1},a]_i \in A_\beta(a)\}.$$

При этом $A_{\beta+1}(a,0) = A_\beta(a)$, и из энгелевости элемента $a$ сразу вытекает равенство $A_{\beta+1}(a) = \bigcup\limits_{i\geqslant 0} A_{\beta+1}(a,i)$. Кроме того, из стандартного коммутаторного соотношения

$$[xy,z] = x[y,z]x^{-1}[x,z] = \big[x,[y,z]\big][y,z][x,z], \quad x,y,z \in A,$$

и включения $[A_{\beta+1}(a), A_{\beta+1}(a)] \subseteq A_\beta(a)$ (см. выше) следует, что при всех $j \geqslant 0$

$$[xy,a]_j \in A_\beta(a)[x,a]_j[y,a]_j, \quad x,y \in A_{\beta+1}(a).$$

Поэтому множество $A_{\beta+1}(a,i)$ при каждом $i \geqslant 0$ является инвариантной относительно сопряжения с элементом $a$ подгруппой. По построению $[b,a] \in A_{\beta+1}(a,i)$ для всякого $b \in A_{\beta+1}(a,i+1)$, так как $[a,b] = [b,a]^{-1} = [b^{-1},a]A_\beta(a)$.

Уплотняя нормальный ряд $\{A_\beta(a) \mid \beta \leqslant \alpha\}$ подгруппами $\{A_{\tau+1}(a,i)\}_{i\geqslant 0,\ \tau<\alpha}$, мы получим новый нормальный ряд $\{A'_\varphi \mid \varphi \leqslant \eta\}$ группы $\mathrm{RN}^*(A)$ с абелевыми факторами, все элементы которого инвариантны относительно сопряжения с элементом $a$ и удовлетворяют для каждого порядкового числа $\nu < \eta$ условию $[A'_{\nu+1}, a] \subseteq A'_\nu$. Поэтому подгруппы $\{\langle a\rangle A'_\varphi \mid \varphi \leqslant \eta\}$ образуют в группе $\mathrm{RN}^*(A)$ возрастающий нормальный ряд подгрупп от циклической группы $\langle a\rangle$, порождённой элементом $a$, к $\mathrm{RN}^*(A)$, т. е. $a$ является субинвариантным элементом группы $\mathrm{RN}^*(A)$. □

Если в приведённом рассуждении группа $A$ разрешима и $a$ является её ограниченным энгелевым элементом, то, выбрав в группе $A$ в качестве исходного любой конечный ряд с абелевыми факторами, мы можем заменить его конечным рядом с абелевыми факторами, в котором все члены инвариантны относительно сопряжения с элементом $a$, а затем уплотнить его до конечного нормального ряда от подгруппы $\langle a\rangle$ к группе $A$. Поэтому во всякой разрешимой группе $A$ ниль-радикал $\bar\sigma(A)$ совпадает с множеством всех её ограниченных энгелевых элементов. Более того, это также верно для групп, являющихся нётеровыми расширениями разрешимых групп (см. [21]).

Поскольку в произвольной группе каждый 2-энгелев элемент содержится в центре порождённой им нормальной подгруппы и, значит, является достижимым элементом, ниль-радикал $\bar\sigma(A)$ любой группы $A$ можно описать и как совокупность всех 2-энгелевых элементов её достижимых подгрупп (см. [20]).

Другие возможные подходы к описанию радикалов RN и $\mathrm{RN}^*$ приводятся в [18, 41].

В [42] К. К. Щукин, заменив в определении первичной алгебры произведение идеалов взаимным коммутантом нормальных подгрупп, ввёл следующие понятия первичной группы, первичной нормальной подгруппы и первичного ($\mathrm{RI}^*$-разрешимого) радикала групп.

**Определение 1.22.** Назовём нормальную подгруппу $D$ группы $A$ первичной, если в фактор-группе $A/D$ централизатор каждой неединичной нормальной подгруппы равен единице.

**Определение 1.23.** Пересечение $\mathrm{rad}(A)$ всех первичных нормальных подгрупп группы $A$ называют первичным ($\mathrm{RI}^*$-разрешимым) радикалом группы $A$.

Ряд свойств первичного радикала групп, установленных в [42], можно записать в виде следующих предложений.

**Предложение 1.24.** *Первичный радикал группы $A$ равен единице, если и только если она не содержит неединичных абелевых* (*разрешимых*) *нормальных подгрупп.*

**Предложение 1.25.** *Первичный радикал* $\mathrm{rad}(A)$ *группы $A$ является наименьшей среди всех её нормальных подгрупп, в фактор-группах по которым нет неединичных абелевых* (*разрешимых*) *нормальных подгрупп.*

Для любой группы $A$ обозначим через $\nu(A)$ и $\rho(A)$ произведения всех нильпотентных и всех разрешимых нормальных подгрупп этой группы и построим ряды нормальных подгрупп $\{\nu_\beta(A)\}$ и $\{\rho_\beta(A)\}$, определив их элементы индуктивно по следующему правилу:

1) $\nu_0(A) = \rho_0(A) = \{e\}$ — единичная подгруппа группы $A$;
2) если подгруппы $\{\nu_\eta(A)\}$ и $\{\rho_\eta(A)\}$ уже найдены для всех порядковых чисел $\eta < \beta$, то при непредельном $\beta = \mu + 1$ подгруппы $\nu_\beta(A)$ и $\rho_\beta(A)$ являются прообразами подгрупп $\nu\big(A/\nu_\mu(A)\big)$ и $\rho\big(A/\rho_\mu(A)\big)$ в группе $A$, а при предельном $\beta$ совпадают с объединениями $\bigcup\limits_{\nu<\beta} \nu_\nu(A)$ и $\bigcup\limits_{\nu<\beta} \rho_\nu(A)$.

Тогда начиная с некоторых трансфинитов $\varphi$ и $\psi$ выбранные таким образом цепочки нормальных подгрупп группы $A$ стабилизируются:

$$\hat{\nu}(A) = \nu_\varphi(A) = \bigcup_{\beta\geqslant 0} \nu_\beta(A), \quad \hat{\rho}(A) = \rho_\psi(A) = \bigcup_{\beta\geqslant 0} \rho_\beta(A).$$

Более того, подгруппы $\hat{\nu}(A)$ и $\hat{\rho}(A)$ совпадают между собой и с первичным радикалом $\mathrm{rad}(A)$ группы $A$, поскольку являются наименьшими среди всех её нормальных подгрупп, фактор-группы по которым не содержат нетривиальных нильпотентных, разрешимых и, следовательно, также абелевых нормальных подгрупп (см. [42]).

В [42] было установлено, что первичный радикал группы допускает описание, которое вполне аналогично характеризации первичного радикала ассоциативной алгебры как множества всех её строго нильпотентных элементов.

**Определение 1.26.** Назовём элемент $a$ группы $A$ строго энгелевым, если для любой цепочки элементов $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, в которой $a_0 = a$ и $a_{i+1} = \big[[b_{i+1}, a_i], a_i\big]$ для некоторого $b_{i+1} \in A$ при всех $i \geqslant 0$, найдётся такой номер $j \geqslant 0$, что элемент $a_j$ равен единице $e$ этой группы.

**Определение 1.27.** Назовём элемент $a$ группы $A$ обобщённо энгелевым, если для всякой цепочки элементов $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, в которой $a_0 = a$ и

$$a_{i+1} \in \Big[\ldots\Big[[[\ldots[a_i, \underbrace{A]\ldots A]}_{n_{i+1}}, a_i], \underbrace{A\Big]\ldots A\Big]}_{m_{i+1}}$$

при некоторых $n_{i+1} > 0$ и $m_{i+1} \geqslant 0$ для всех $i \geqslant 0$, найдётся такое $j \geqslant 0$, что $a_j = e$.

**Определение 1.28.** Произвольную цепочку элементов $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ группы $A$, в которой при каждом $i \geqslant 0$ элемент $a_{i+1}$ входит в коммутант $[\langle a_i\rangle_A, \langle a_i\rangle_A]$ нормальной подгруппы $\langle a_i\rangle_A$ группы $A$, порождённой предыдущим элементом $a_i$, мы будем называть S-последовательностью. Назовём элемент группы $A$ строго разрешимым, если всякая содержащая этот элемент S-последовательность элементов группы $A$ содержит её единичный элемент $e$.

**Предложение 1.29 ([10, 13, 42, 53]).** *Первичный радикал* $\mathrm{rad}(A)$ *группы* $A$ *совпадает с множествами всех её строго энгелевых, обобщённо энгелевых и строго разрешимых элементов.*

Более общие идеи описаний первичного радикала групп подобного рода можно найти в [56].

Следует отметить, что, в отличие от ассоциативных алгебр, первичный радикал групп rad не является радикалом в смысле Куроша—Амицура, поскольку известны группы, в которых он отличен от их наибольшей rad-радикальной нормальной подгруппы (см. [13, примеры 4, 5; 40]).

Так как разрешимое расширение разрешимой группы является разрешимой группой, в случае, когда группа $A$ содержит максимальную разрешимую нормальную подгруппу, эта подгруппа является наибольшей разрешимой нормальной подгруппой группы $A$, в фактор-группе по которой нет неединичных разрешимых нормальных подгрупп. Она обозначается $\mathrm{R}(A)$ и называется *разрешимым радикалом* группы $A$.

С учётом сказанного ранее разрешимый радикал $\mathrm{R}(A)$ группы $A$ совпадает с её первичным радикалом $\mathrm{rad}(A)$ и существует тогда и только тогда, когда последний является разрешимой подгруппой.

Разрешимым радикалом обладает, в частности, всякая конечная группа. Назовём конечную группу $A$ *полупростой*, если её разрешимый радикал $\mathrm{R}(A)$ совпадает с единичной подгруппой: $\mathrm{R}(A) = \{e\}$.

Вслед за В. А. Парфёновым, определившим в [27] слабо разрешимый радикал алгебр Ли, мы введём слабо разрешимый радикал групп, который, пусть и условно, можно считать аналогом радикала Левицкого ассоциативных алгебр.

Для всякой группы $A$ определим индуктивно коммутаторы $\{g_k\}$, полагая

$$g_0(a_1) = a_1, \quad g_1(a_1, a_2) = [a_1, a_2] = a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1},$$
$$g_{k+1}(a_1, \ldots, a_{2^{k+1}}) = [g_k(a_1, \ldots, a_{2^k}), g_k(a_{2^k+1}, \ldots, a_{2^{k+1}})]$$

для всех целых $k \geqslant 0$ и любых элементов $a_1, \ldots, a_{2^{k+1}} \in A$.

**Замечание 1.30.** Группа $A$ является разрешимой группой ступени не выше $k$, $k \geqslant 0$, в том и только в том случае, если для любых элементов $a_1, \ldots, a_{2^k} \in A$ коммутатор $g_k(a_1, \ldots, a_{2^k})$ совпадает с единицей $e$ этой группы (см. [37, с. 197]).

**Определение 1.31.** Назовём группу $A$ слабо разрешимой, если для всякого конечного набора её элементов $B$ можно подобрать такое целое $k \geqslant 0$, что коммутатор $g_k(b_1, \ldots, b_{2^k})$ совпадает с единицей $e$ этой группы при любых $b_1, \ldots, b_{2^k} \in B$.

В частности, слабо разрешимыми являются абелевы, нильпотентные, разрешимые, локально нильпотентные и локально разрешимые группы.

Несложно показать также, что слабо разрешимые расширения слабо разрешимых групп являются слабо разрешимыми группами, т. е. класс слабо разрешимых групп замкнут относительно расширений. Поэтому в любой группе $A$ произведение $\mathrm{T}(A)$ всех её слабо разрешимых нормальных подгрупп является наибольшей слабо разрешимой нормальной подгруппой, фактор-группа по которой не содержит неединичных слабо разрешимых нормальных подгрупп. Помимо этого, для произвольного гомоморфизма $\varphi\colon A \to G$ группы $A$ в группу $G$ выполняется включение $\varphi\bigl(\mathrm{T}(A)\bigr) \subseteq \mathrm{T}\bigl(\varphi(A)\bigr)$. Следовательно, соответствие $\mathrm{T}\colon A \mapsto \mathrm{T}(A)$ является радикалом групп в смысле Куроша—Амицура, который мы будем называть их *слабо разрешимым радикалом*. Отметим также, что радикал $\mathrm{T}$, как и все наследственные радикалы групп в смысле Куроша—Амицура, является идеально наследственным.

Из теоремы Бэра—Кемхадзе (см. предложение 1.18) вытекает, что во всякой группе $A$ радикалы $\mathrm{rad}(A)$, $\mathrm{RN}(A)$, $\mathrm{RN}^*(A)$ и $\mathrm{T}(A)$ связаны включениями

$$\mathrm{rad}(A) \subseteq \mathrm{RN}(A) \subseteq \mathrm{RN}^*(A) \subseteq \mathrm{T}(A),$$

каждое из которых в общем случае может быть строгим (ссылки на соответствующие примеры можно найти в [21]).

Схему доказательства специальности локально нильпотентного радикала ассоциативных алгебр можно перенести на случай групп.

**Замечание 1.32.** В любой группе $A$ слабо разрешимый радикал $\mathrm{T}(A)$ совпадает с пересечением всех её первичных нормальных подгрупп, фактор-группы по которым не имеют неединичных слабо разрешимых нормальных подгрупп.

Напомним следующие хорошо известные теоремы X. Цассенхауза (см. [63], а также [37, с. 196—197, теоремы 8 и 9]).

**Предложение 1.33.** *В полной линейной группе $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ над любым полем $\mathbb{F}$ длина ряда коммутантов каждой разрешимой подгруппы $G$ не превышает некоторого числа $l(n)$, зависящего только от параметра $n$.*

**Предложение 1.34.** *В полной линейной группе $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ над любым полем $\mathbb{F}$ каждая локально разрешимая подгруппа $G$ является разрешимой.*

Последний вывод можно значительно усилить следующим образом.

**Теорема 1.35.** *В полной линейной группе $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ над любым полем $\mathbb{F}$ каждая слабо разрешимая подгруппа $G$ является разрешимой.*

**Доказательство.** Рассмотрим любую конечно порождённую подгруппу $A$ группы $G$. Согласно теореме А. И. Мальцева (см. [25, теоремы 7 и 8]) группа $A$ является пределом последовательности групп $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots$, в которой каждая группа $A_i$ является конечной подгруппой группы $\mathrm{GL}_n(\Bbbk_i)$ для соответствующего поля $\Bbbk_i$ положительной характеристики $p_i$, $i \geqslant 1$.

По условию группа $A$ слабо разрешима. Поэтому слабо разрешимым является любой её гомоморфный образ и, в частности, все группы $\{A_i\}$. Более того, в силу замечания 1.30 и предложения 1.33 конечные слабо разрешимые группы $\{A_i\}$ являются разрешимыми группами, ступени разрешимости которых не превосходят числа $l(n)$. Понятно также, что предел последовательности разрешимых групп ступени $m$ является разрешимой группой ступени $m$. Следовательно, группа $A$ является разрешимой.

Поскольку сказанное справедливо для любой конечно порождённой подгруппы $A$ группы $G$, последняя является локально разрешимой. Применяя предложение 1.34, мы получаем в итоге, что группа $G$ является разрешимой. □

**Следствие 1.36.** *Каждая подгруппа $G$ полной линейной группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ над любым полем $\mathbb{F}$ обладает разрешимым радикалом $\mathrm{R}(G) = \mathrm{rad}(G) = \mathrm{T}(G)$.*

**Замечание 1.37.** Пусть $R$ — алгебра с единицей 1 над кольцом $F$ и $D$ — подгруппа в группе $\mathrm{U}(R)$ обратимых элементов этой алгебры. Тогда в группе $D$

$$D \cap 1 + \mathrm{Rad}(R) = \bigcap_{P \in \mathrm{Spec}(R)} (D \cap 1 + P) \subseteq$$

$$\subseteq C\big(D, \mathrm{Rad}(R)\big) = \{g \in D \mid [g, D] \subseteq 1 + \mathrm{Rad}(R)\} \subseteq \mathrm{rad}(D),$$

$$D \cap 1 + \mathrm{RN}^*(R) \subseteq C\big(D, \mathrm{RN}^*(R)\big) = \{g \in D \mid [g, D] \subseteq 1 + \mathrm{RN}^*(R)\} \subseteq \mathrm{RN}^*(D),$$

$$D \cap 1 + \mathrm{L}(R) \subseteq C\big(D, \mathrm{L}(R)\big) = \{g \in D \mid [g, D] \subseteq 1 + \mathrm{L}(R)\} \subseteq \mathrm{T}(D).$$

**Доказательство.** Обоснование первого из этих включений можно найти в [8, 53]. Для всякого идеала $I$ алгебры $R$ пересечение $\mathrm{U}(R) \cap 1 + I$ является нормальной подгруппой группы $\mathrm{U}(R)$ её обратимых элементов. При этом для любых идеалов $I$ и $J$ алгебры $R$ выполняется включение

$$[\mathrm{U}(R) \cap 1 + I, \mathrm{U}(R) \cap 1 + J] \subseteq \mathrm{U}(R) \cap 1 + IJ.$$

С помощью индукции отсюда можно легко вывести, что при каждом $k \geqslant 1$

$$[\ldots[\mathrm{U}(R) \cap 1 + I, \underbrace{\mathrm{U}(R) \cap 1 + I] \ldots \mathrm{U}(R) \cap 1 + I]}_{k} \subseteq \mathrm{U}(R) \cap 1 + I^{k+1}, \tag{1}$$

а также получить включение для $k$-го последовательного коммутанта:

$$(\mathrm{U}(R) \cap 1 + I)^{(k)} \subseteq \mathrm{U}(R) \cap 1 + I^{2^k}. \tag{2}$$

Включения (1), (2) выполняются и в том случае, если мы заменим в них идеал $I$ произвольной ниль-подалгеброй $A$ алгебры $R$ и перейдём к подгруппе $\mathrm{U}(R) \cap 1 + A$.

По определению радикал $\mathrm{RN}^*(R)$ алгебры $R$ обладает возрастающим нормальным рядом подалгебр $\{R_\eta \mid \eta \leqslant \tau\}$, все факторы которого являются алгебрами с нулевым умножением. Согласно предложению 1.7 он также является локально нильпотентным идеалом алгебры $R$. Отсюда следует, что подгруппы $\{1 + R_\eta\}$ локально нильпотентны и составляют нормальный ряд подгрупп группы $1 + \mathrm{RN}^*(R)$ с абелевыми факторами. Поэтому группа $1 + \mathrm{RN}^*(R)$ является $\mathrm{RN}^*$-радикальной нормальной подгруппой группы $\mathrm{U}(R)$ и $1 + \mathrm{RN}^*(R) \subseteq \mathrm{RN}^*\big(\mathrm{U}(R)\big)$. Значит, подгруппа $D \cap 1 + \mathrm{RN}^*(R)$ и её абелево расширение $C\big(D, \mathrm{RN}^*(R)\big)$ содержатся в радикале $\mathrm{RN}^*(D)$ группы $D$.

Для любого конечного набора элементов $\{a_i = 1 + b_i \in D \cap 1 + \mathrm{L}(R)\}_{i=1}^n$ каждый коммутатор $g_k(a_{i_1}, \ldots, a_{i_{2^k}})$ с $k \geqslant 0$ входит в подгруппу $D \cap 1 + B^{2^k}$, где через $B$ обозначена порождённая элементами $b_i$, $i = 1, \ldots, n$, подалгебра локально нильпотентного радикала $\mathrm{L}(R)$ алгебры $R$. Поскольку конечно порождённая подалгебра $B$ нильпотентна, $B^m = \{0\}$ при некотором $m \geqslant 1$. Отсюда сразу вытекает, что

$$g_m(a_{i_1}, \ldots, a_{i_{2^m}}) = 1, \quad 1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant n.$$

Поэтому подгруппы $D \cap 1 + \mathrm{L}(R)$ и $C\big(D, \mathrm{L}(R)\big)$ являются слабо разрешимыми и входят в слабо разрешимый радикал $\mathrm{T}(D)$ группы $D$. $\square$

# 2. Радикалы групп обратимых элементов ассоциативных PI-алгебр

Основные результаты этого раздела дополняют выводы работ [28, 29, 56] и посвящены доказательству совпадения первичного радикала rad, радикалов RN, RN* и слабо разрешимого радикала T для подгрупп групп обратимых элементов ассоциативных PI-алгебр.

Пусть $f$ — некоммутативный полином без свободного члена от переменных $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из кольца $F$. Будем говорить, что в алгебре $R$ над кольцом $F$ *выполняется тождество* $f$ (или тождество $f = 0$), если полином $f$ обращается в нуль при подстановке любых элементов из алгебры $R$ вместо переменных $x_1, \ldots, x_n$. Полином $f$ называют *собственным*, если имеется $F$-линейная комбинация его коэффициентов, равная единице.

**Определение 2.1.** Алгебра $R$ над кольцом $F$ называется PI-алгеброй, если она удовлетворяет некоторому собственному тождеству. Кольцо $R$ называют PI-кольцом, если оно является PI-алгеброй над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$.

Тождество $f$ называется *тождеством канонического вида степени* $n$, если

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdots x_n + \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus \{e\}} f_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)},$$

где $f_\sigma \in F$, через $\mathfrak{S}_n$ обозначена симметрическая группа степени $n$, через $e$ — тождественная перестановка чисел $\{1, \ldots, n\}$.

Известно, что всякая PI-алгебра над кольцом $F$ удовлетворяет некоторому тождеству канонического вида с коэффициентами $\pm 1$ подходящей степени и, следовательно, также является PI-кольцом (см. [24, с. 6—7]).

Тождеством канонического вида является, к примеру, *стандартное тождество*

$$\mathrm{st}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)},$$

где $(-1)^\sigma = 1$ для чётной и $(-1)^\sigma = -1$ для нечётной перестановки $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Отметим, что алгебра матриц $\mathrm{M}_n(F)$ над кольцом $F$ удовлетворяет всем стандартным тождествам степени $k \geqslant 2n$ и не удовлетворяет стандартным тождествам меньших степеней (см. [39, с. 148; 55, с. 175; 14, с. 326]).

Во всяком первичном PI-кольце $R$ выполняются все тождества кольца матриц $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ для подходящих поля $\mathbb{F}$ и параметра $n$ и, значит, все стандартные тождества степеней $k \geqslant 2n$ (см. [4, т. 2, с. 48; 24, с. 7—8]). Последнее позволяет ввести следующее определение.

**Определение 2.2.** Назовём p.i.-степенью PI-кольца $R$ половину наименьшей степени стандартного тождества, которое выполняется на всех его первичных фактор-кольцах (обозначение: $\mathrm{p.\,i.\,deg}\, R$).

В частности, согласно сказанному ранее p.i.-степень алгебры матриц $\mathrm{M}_n(F)$ над кольцом $F$ совпадает с $n$. Из определения p.i.-степени сразу вытекает следующее замечание.

**Замечание 2.3.** В любом PI-кольце $R$ для каждого идеала $I$

$$\mathrm{p.\,i.\,deg}\, R/I \leqslant \mathrm{p.\,i.\,deg}\, R.$$

В случае, если идеал $I$ содержится в первичном радикале $\mathrm{Rad}(R)$ кольца $R$, данное неравенство становится точным равенством: $\mathrm{p.\,i.\,deg}\, R = \mathrm{p.\,i.\,deg}\, R/I$.

**Теорема 2.4.** *Пусть $R$ — PI-алгебра с единицей $1$ над кольцом $F$, $A$ — подгруппа группы $\mathrm{U}(R)$ обратимых элементов алгебры $R$ и $G$ — образ подгруппы $A$ в группе $\mathrm{U}\big(R/\mathrm{Rad}(R)\big)$ обратимых элементов фактор-алгебры $R/\mathrm{Rad}(R)$ алгебры $R$ по её первичному радикалу $\mathrm{Rad}(R)$. Тогда группа $G$ обладает разрешимым радикалом $\mathrm{R}(G)$, ступень разрешимости которого не превышает числа $\mathrm{p.\,i.\,deg}\, R{+}2$, первичный радикал $\mathrm{rad}(A)$ группы $A$ совпадает с прообразом в ней радикала $\mathrm{R}(G)$ группы $G$.*

**Доказательство.** Возьмём произвольный первичный идеал $P$ алгебры $R$ и обозначим через $A_P = A/(A\cap 1{+}P)$ образ подгруппы $A$ группы $\mathrm{U}(R)$ обратимых элементов этой алгебры в первичной фактор-алгебре $R/P$ (точнее, в группе её обратимых элементов $\mathrm{U}(R/P)$). Согласно [4, т. 2, с. 48] первичная алгебра $R/P$ имеет ненулевой центр $Z$, множество $C = Z\backslash\{0\}$ является мультипликативно замкнутой системой центральных неделителей нуля этой алгебры, относительно которой кольцо частных $Q = C^{-1}R/P$ является центральной простой конечномерной алгеброй над полем частных $K$ кольца $Z$. Поэтому алгебраическое замыкание $\Bbbk$ поля $K$ является полем разложения алгебры $Q$ и $Q\otimes_K \Bbbk \cong \mathrm{M}_m(\Bbbk)$, где $m = \dim_K Q$. Первичную алгебру $R/P$ можно отождествить с её образом в алгебре матриц $\mathrm{M}_m(\Bbbk)$ над полем $\Bbbk$. При этом, поскольку PI-кольца $R/P$ и $\mathrm{M}_m(\Bbbk) = \Bbbk R/P$ имеют одинаковые полилинейные тождества с целыми коэффициентами, $m \leqslant \mathrm{p.\,i.\,deg}\, R$ (см. также [24, с. 7—8]). Значит, по следствию 1.36 и предложению 1.33 группа $A_P$ обладает разрешимым радикалом $\mathrm{R}(A_P) = \mathrm{rad}(A_P) = \mathrm{T}(A_P)$, ступень разрешимости которого не превосходит некоторого числа $l(m)$, зависящего только от величины $m$. Следовательно, $\mathrm{R}(A_P)^{(l)} = \{1\}$ для подходящего $1 \leqslant l \leqslant \hat{l} = l(\mathrm{p.\,i.\,deg}\, R)$.

Отсюда вытекает, что в группе $A$ выполняются включения

$$\mathrm{rad}(A)^{(\hat{l})} \subseteq \mathrm{T}(A)^{(\hat{l})} \subseteq \bigcap_{P \in \mathrm{Spec}(R)} (A \cap 1 + P) = A \cap 1 + \mathrm{Rad}(R).$$

По [51] величина $\hat{l}$ не превышает также числа $\mathrm{p.\,i.\,deg}\, R + 2$.

Применяя предложение 1.25 и замечание 1.37, мы получаем, что первичный радикал $\mathrm{rad}(A)$ группы $A$ совпадает с прообразом в ней первичного радикала $\mathrm{rad}(G)$ её фактор-группы $G = A/\big(A \cap 1 + \mathrm{Rad}(R)\big)$. Поэтому с учётом установленных ранее включений первичный радикал $\mathrm{rad}(G)$ группы $G$ является разрешимой нормальной подгруппой ступени разрешимости не выше $\mathrm{p.\,i.\,deg}\, R + 2$. Так как первичный радикал любой группы содержит все её разрешимые нормальные подгруппы, первичный радикал $\mathrm{rad}(G)$ является наибольшей разрешимой нормальной подгруппой группы $G$, т. е. её разрешимым радикалом, $\mathrm{rad}(G) = \mathrm{R}(G)$. □

Помимо рассмотренных ранее радикалов Rad и L, на классе всех ассоциативных алгебр над кольцом $F$ хорошо известен также верхний ниль-радикал, или радикал Кёте K, который для любой алгебры $R$ определяется как наибольший из её ниль-идеалов (т. е. идеалов, состоящих из нильпотентных элементов) и обозначается $\mathrm{K}(R)$. Как и упомянутые радикалы, радикал Кёте K является специальным радикалом в смысле Куроша—Амицура на данном классе (см. [1, гл. 1]).

Для PI-алгебр из предложения 1.7 и [1, с. 86, теорема 3] сразу вытекает следующая теорема.

**Теорема 2.5.** *Во всякой PI-алгебре $R$ над кольцом $F$ первичный радикал $\mathrm{Rad}(R)$, радикал $\mathrm{RN}^*(R)$, локально нильпотентный радикал $\mathrm{L}(R)$ и верхний ниль-радикал $\mathrm{K}(R)$ совпадают.*

Аналоги этой теоремы для алгебр Ли приводятся в [2, 3, 13, 29]. В случае групп подобное утверждение также имеет место и может быть сформулировано следующим образом.

**Теорема 2.6.** *Пусть $R$ — PI-алгебра с единицей 1 над кольцом $F$ и $A$ — подгруппа группы $\mathrm{U}(R)$ обратимых элементов алгебры $R$. Тогда в группе $A$ первичный радикал $\mathrm{rad}(A)$ совпадает с радикалами $\mathrm{RN}(A)$, $\mathrm{RN}^*(A)$, а также слабо разрешимым радикалом $\mathrm{T}(A)$ и является её наибольшей локально разрешимой нормальной подгруппой. Более того, первичный радикал $\mathrm{rad}(A)$ является разрешимым расширением произведения $\nu(A)$ всех нильпотентных нормальных подгрупп группы $A$ и*

$$\mathrm{rad}(A) = \mathrm{RN}(A) = \mathrm{RN}^*(A) = \mathrm{T}(A) = \rho_2(A).$$

**Доказательство.** Совпадение первичного радикала $\mathrm{rad}(A)$, радикалов $\mathrm{RN}(A)$, $\mathrm{RN}^*(A)$ и слабо разрешимого радикала $\mathrm{T}(A)$ группы $A$ непосредственно следует из доказательства предыдущей теоремы и приведённых ранее включений. Так как локально разрешимые группы являются слабо разрешимыми, мы сразу получаем отсюда, что в первичном радикале $\mathrm{rad}(A) = \mathrm{RN}(A) = \mathrm{RN}^*(A) = \mathrm{T}(A)$ группы $A$ содержатся все её локально разрешимые нормальные подгруппы.

Как уже отмечалось, для всякого идеала $I$ алгебры $R$ подмножество $A_I = A \cap 1 + I$ является нормальной подгруппой группы $A$. В то же время каждой подгруппе $N$ группы $A$ мы можем поставить в соответствие идеал $I(N)$ алгебры $R$, порождённый всеми элементами $h - 1$, $h \in N$. При этом по построению подгруппа $N$ содержится в связанной с идеалом $I(N)$ подгруппе $A_{I(N)}$. Понятно также, что $I(N) = aI(N)a^{-1} = I(aNa^{-1})$ при любом $a \in A$.

Для произвольных целого $n \geqslant 1$ и элементов $a_1, \ldots, a_n \in A$

$$a_1 \cdots a_n - 1 = (a_1 \cdots a_{n-1} - 1)(a_n - 1) + (a_1 \cdots a_{n-1} - 1) + (a_n - 1) = \\ = \sum_{i=1}^{n-1} (a_1 \cdots a_i - 1)(a_{i+1} - 1) + \sum_{j=1}^{n} (a_j - 1).$$

Следовательно, если $M$ — семейство порождающих подгруппы $N$, то $I(N)$ совпадает с идеалом, который в алгебре $R$ порождают элементы $a - 1$, $a \in M$. В частности, конечно порождённой подгруппе $N$ отвечает конечно порождённый идеал $I(N)$. Помимо этого, отсюда вытекает, что для порождённой элементами подгруппы $N$ нормальной подгруппы $\langle N \rangle_A$ группы $A$

$$I(\langle N \rangle_A) = \sum_{a \in A} I(aNa^{-1}) = I(N).$$

Для любых элементов $g$ и $h$ из группы $A$ можно записать

$$[g, h] = ghg^{-1}h^{-1} = 1 + (gh - hg)g^{-1}h^{-1}.$$

Поэтому для каждой пары идеалов $I$ и $J$ алгебры $R$ выполняется включение

$$[A_I, A_J] \subseteq A_{(I,J)R},$$

где $(I, J)R = R(I, J)$ — идеал алгебры $R$, порождённый кольцевыми коммутаторами $(r, t) = rt - tr$ для всех $r \in I$ и $t \in J$. Значит, при любом $k \geqslant 1$

$$[\ldots [A_I, \underbrace{A_I] \ldots A_I]}_{k} \subseteq A_{I^{k+1}}.$$

В частности, если в алгебре $R$ идеал $I$ — нильпотентное расширение идеала $K$, то в группе $A$ подгруппа $A_I$ — нильпотентное расширение подгруппы $A_K$.

Произведение $\nu(A)$ всех нильпотентных нормальных подгрупп группы $A$ входит в произведение $\rho(A) = \rho_1(A)$ всех её разрешимых нормальных подгрупп и содержится в первичном радикале $\mathrm{rad}(A)$.

Для любой нормальной подгруппы $N$ группы $A$, порождённой конечным множеством элементов её подгруппы $A_{\eta(R)} = A \cap 1 + \eta(R)$, где, как и прежде, через $\eta(R)$ обозначена сумма всех нильпотентных идеалов алгебры $R$, идеал $I(N)$ алгебры $R$ конечно порождён и входит в её идеал $\eta(R)$. Поэтому идеал $I(N)$

нильпотентен, и нильпотентными являются группа $A_{I(N)}$ и лежащая в ней подгруппа $N$.

Таким образом, в группе $A$ подгруппа $\nu(A)$ содержит подгруппу $A_{\eta(R)}$.

Если $d$ — степень тождества канонического вида, которому удовлетворяет алгебра $R$, то согласно теореме Амицура—Левицкого (см. [58, теорема 1.6.36]) можно выбрать целое $n$, $1 \leqslant n \leqslant d/2$, такое что $\mathrm{Rad}(R)^n \subseteq \eta(R)$. Значит, с учётом сделанных ранее замечаний подгруппа $A_{\mathrm{Rad}(R)}$ группы $A$ является нильпотентным расширением её подгруппы $A_{\eta(R)}$.

По теореме 2.4 первичный радикал $\mathrm{rad}(A)$ группы $A$ является разрешимым расширением её подгруппы $A_{\mathrm{Rad}(R)}$. Поскольку разрешимое расширение разрешимой группы — разрешимая группа, он является к тому же разрешимым расширением подгрупп $A_{\eta(R)}$, $\nu(A)$ и $\rho(A) = \rho_1(A)$ группы $A$, следовательно, в ней выполнено равенство $\mathrm{rad}(A) = \mathrm{T}(A) = \rho_2(A)$.

Возьмём теперь произвольную конечно порождённую подгруппу $Q$ первичного радикала $\mathrm{rad}(A)$ группы $A$. Обозначим через $B$ подкольцо алгебры $R$, порождённое элементами группы $Q$. Так как всякая PI-алгебра является PI-кольцом, конечно порождённая подалгебра $B$ над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ является PI-кольцом. В силу теоремы Кемера—Размыслова—Брауна (см. [16, 24, 34, 48]) первичный радикал $\mathrm{Rad}(B)$ алгебры $B$ нильпотентен, и потому нильпотентна связанная с ним подгруппа $1+\mathrm{Rad}(B)$ в группе $\mathrm{U}(B)$ обратимых элементов алгебры $B$. Тогда из теоремы 2.4 вытекает, что в группе $\mathrm{U}(B)$ каждая подгруппа $V$ обладает разрешимым радикалом $\mathrm{R}(V) = \mathrm{rad}(V) = \mathrm{T}(V)$, который является разрешимым расширением её подгруппы $V \cap 1 + \mathrm{Rad}(B)$. По построению группа $Q$ содержится в группе $\mathrm{U}(B)$ и совпадает со своим первичным радикалом (см. предложение 1.29). Значит, она является разрешимой, $Q = \mathrm{rad}(Q) = \mathrm{R}(Q)$.

Отсюда следует локальная разрешимость первичного радикала $\mathrm{rad}(A)$ группы $A$. Более того, в радикале $\mathrm{rad}(A)$ содержатся все локально разрешимые нормальные подгруппы группы $A$, и потому он является наибольшей среди её локально разрешимых нормальных подгрупп. □

Используя доказательство теоремы 2.6, можно сразу получить следующие результаты.

**Следствие 2.7.** *Во всякой конечно порождённой PI-алгебре с единицей $R$ над нётеровым кольцом $F$ любая подгруппа $A$ группы $\mathrm{U}(R)$ её обратимых элементов обладает разрешимым радикалом $\mathrm{R}(A) = \mathrm{rad}(A) = \mathrm{T}(A)$.*

**Следствие 2.8.** *Во всякой PI-алгебре с единицей $R$ над кольцом $F$ любая конечно порождённая подгруппа $A$ группы $\mathrm{U}(R)$ её обратимых элементов обладает разрешимым радикалом $\mathrm{R}(A) = \mathrm{rad}(A) = \mathrm{T}(A)$.*

Теорема 2.6 позволяет записать теорему 2.4 из [53] следующим образом.

**Предложение 2.9.** *Пусть $R$ — PI-алгебра с единицей над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, $N$ — подмножество нильпотентных элементов алгебры $R$, $S$ —*

*подалгебра алгебры $R$, которую порождают её единица и все элементы множества $N$, $E$ — подгруппа в группе обратимых элементов $\mathrm{U}(S)$ алгебры $S$, порождённая элементами*

$$\exp(qx) = \sum_{i=0}^{n(x)-1} q^i x^i / i!$$

*для всех $q \in \mathbb{Q}$ и $x \in N$, где $n(x)$ — индекс нильпотентности элемента $x$. Тогда в каждой нормализуемой подгруппой $E$ подгруппе $A$ группы $\mathrm{U}(S)$ выполнены равенства*

$$\begin{aligned}\mathrm{rad}(A) = \mathrm{RN}(A) = \mathrm{RN}^*(A) = \mathrm{T}(A) = \\ = C\big(A, 1 + \mathrm{Rad}(S)\big) = A \cap C\big(\mathrm{U}(S), 1 + \mathrm{Rad}(S)\big).\end{aligned}$$

Естественно, что в этом утверждении поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ можно заменить любым полем нулевой характеристики. Кроме того, с учётом теоремы 2.5 получаем, что в группе $A$ выполнены соотношения

$$A \cap 1 + \mathrm{Rad}(S) = A \cap 1 + \mathrm{L}(S) \subseteq \mathrm{PH}(A) \subseteq \mathrm{rad}(A) = \mathrm{T}(A).$$

Поэтому для её первичного радикала $\mathrm{rad}(A)$ справедливы также равенства

$$\begin{aligned}\mathrm{rad}(A) = C\big(A, \mathrm{PH}(A)\big) = \{a \in A \mid [a, A] \subseteq \mathrm{PH}(A)\} = \\ = A \cap \mathrm{rad}\big(\mathrm{U}(S)\big) = A \cap C\big(\mathrm{U}(S), \mathrm{PH}(S)\big).\end{aligned}$$

Хорошо известен следующий результат В. П. Платонова из [30].

**Предложение 2.10.** *Пусть $R$ — PI-алгебра с единицей над кольцом $F$ и $A$ — подгруппа в группе обратимых элементов $\mathrm{U}(R)$ этой алгебры. Тогда локально нильпотентный радикал $\mathrm{PH}(A)$ группы $A$ совпадает с множеством всех её энгелевых элементов.*

Используя теорему 2.6 и теорему Бэра—Кемхадзе (см. предложение 1.18, а также теорему 1.21), мы сразу получаем следующее утверждение.

**Следствие 2.11.** *Пусть $R$ — PI-алгебра с единицей над кольцом $F$ и $A$ — подгруппа в группе обратимых элементов $\mathrm{U}(R)$ этой алгебры. Тогда локально нильпотентный радикал $\mathrm{PH}(A)$ группы $A$ равен её квазинильпотентному радикалу $\sigma(A)$.*

Иначе говоря, в такой группе каждый энгелев элемент является субинвариантным.

# 3. Радикалы полной линейной группы

Следующий объект для обобщения результатов о радикалах линейных групп над полем — классические группы над ассоциативными алгебрами. В этом разделе рассматривается простейшая из них: полная линейная группа.

**Определение 3.1.** Идемпотент $e = e^2$ алгебры $R$ над кольцом $F$ называется плотным, если порождённый им двусторонний идеал $Fe + Re + eR + ReR$ совпадает с $R$.

**Определение 3.2.** Пусть $R$ — алгебра над кольцом $F$ с единицей 1 и системой идемпотентов $E = \{e_1, \ldots, e_k\}$. Тогда система $E$ называется полной в алгебре $R$, если $1 = e_1 + \ldots + e_k$, и ортогональной, если для любых $i, j = 1, \ldots, k$ выполнено равенство $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$, где $\delta_{ij}$ — символ Кронекера.

**Определение 3.3.** Если $R$ — алгебра над кольцом $F$ с единицей 1 и ортогональный системой идемпотентов $G = \{e_1, \ldots, e_m\}$, $m \geqslant 2$, то подгруппа $\mathrm{E}(G, R)$ в группе обратимых элементов $\mathrm{U}(R)$ алгебры $R$, порождённая всеми элементами вида $1 + e_i r e_j$, где $r \in R$ и $1 \leqslant i \neq j \leqslant m$, называется элементарной подгруппой группы $\mathrm{U}(R)$, соответствующей системе $G$.

Для каждого идеала $I$ алгебры $R$ мы также определим подгруппу $\mathrm{E}(G, I, R)$, порождённую всеми элементами $1 + e_i r e_j$, где $r \in I$ и $1 \leqslant i \neq j \leqslant k$. Если число $m$ идемпотентов в ортогональной системе $G$ больше двух, то при помощи стандартных соотношений

$$(1 + e_i r e_j)(1 + e_i t e_j) = 1 + e_i(r + t)e_j, \quad [1 + e_i r e_j, 1 + e_j t e_m] = 1 + e_i r e_j t e_m,$$

где $r, t \in R$ и $1 \leqslant i \neq j \neq m \leqslant 3$, несложно получить следующие выводы.

**Замечание 3.4.** Пусть $R$ — алгебра над кольцом $F$ с единицей 1 и ортогональной системой плотных идемпотентов $G = \{e_1, \ldots, e_m\}$, $m \geqslant 3$, $I$ — идеал этой алгебры. Тогда для любого целого $k \geqslant 0$ в группе $\mathrm{E}(G, I, R)$ выполняется включение

$$\mathrm{E}(G, I^{2^k}, R) \subseteq \mathrm{E}(G, I, R)^{(k)}.$$

**Замечание 3.5.** Пусть $R$ — алгебра над кольцом $F$ с единицей 1 и ортогональной системой плотных идемпотентов $G = \{e_1, \ldots, e_m\}$, $m \geqslant 3$. Тогда для произвольных $r \in R$ и $1 \leqslant i \neq j \leqslant 3$ нормальная подгруппа группы $\mathrm{E}(G, R)$, порождённая элементом $1 + e_i r e_j$, содержит её подгруппу $\mathrm{E}(G, Re_i r e_j R, R)$, где $Re_i r e_j R$ — идеал алгебры $R$, порождённый элементом $e_i r e_j$.

Одним из первых результатов, посвящённых описанию радикалов линейных групп над кольцами, стала теорема И. З. Голубчика и А. В. Михалёва о первичном радикале, которую мы сформулируем следующим образом.

**Предложение 3.6.** *Пусть $R$ — алгебра с единицей 1 над кольцом $F$, $G = \{e_1, e_2, e_3\}$ — полная ортогональная система плотных идемпотентов в алгебре $R$ и $\mathrm{E}(G, R)$ — элементарная подгруппа группы $\mathrm{U}(R)$, связанная с этой системой. Тогда в каждой подгруппе $A$ группы $\mathrm{U}(R)$, содержащей подгруппу $\mathrm{E}(G, R)$, выполняется равенство*

$$\mathrm{rad}(A) = C\bigl(A, 1 + \mathrm{Rad}(R)\bigr) = A \cap \mathrm{rad}\bigl(\mathrm{U}(R)\bigr).$$

С учётом замечания 3.4 из предложения 3.6 сразу получаем следствие 3.7.

**Следствие 3.7.** *В условиях предложения* 3.6 *подгруппа* $A$ *обладает разрешимым радикалом в том и только в том случае, если первичный радикал* $\mathrm{Rad}(R)$ *алгебры* $R$ *нильпотентен.*

Простейшие примеры полных ортогональных систем плотных идемпотентов и связанных с ними элементарных подгрупп содержит кольцо матриц $\mathrm{M}_n(R)$ над любым кольцом с единицей $R$. Как обычно, для каждой пары индексов $i$ и $j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, обозначим через $E_{ij}$ отвечающую им элементарную матрицу, в которой на позиции $ij$ стоит единица из кольца $R$, а все остальные коэффициенты равны нулю. Кроме того, через $E = E_n = E_{11} + \ldots + E_{nn}$ мы будем обозначать единичную матрицу, выполняющую роль единицы в кольце $\mathrm{M}_n(R)$.

Умножение матриц $\{E_{ij}\}$ осуществляется по хорошо известному правилу

$$E_{ij}E_{pq} = \delta_{jp}E_{iq}, \quad 1 \leqslant i, j, p, q \leqslant n,$$

из которого сразу следует, что матрицы $\{E_{ii} \mid i = 1, \ldots, n\}$ составляют полную ортогональную систему плотных идемпотентов кольца $\mathrm{M}_n(R)$. Этой системе в группе $\mathrm{U}\big(\mathrm{M}_n(R)\big) = \mathrm{GL}_n(R)$ обратимых элементов кольца $\mathrm{M}_n(R)$ (или полной линейной группе над кольцом $R$) соответствует элементарная подгруппа $E_n(R)$, порождённая элементарными трансвекциями $t_{ij}(r) = E + E_{ij}r$ для всех $r \in R$ и $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$.

При $n \geqslant 2$ мы можем для всякого $1 < k \leqslant n$ представить множество индексов $\{1, \ldots, n\}$ в виде дизъюнктного объединения его $k$ непустых подмножеств $I_1, \ldots, I_k$. Тогда, полагая $e_j = \sum\limits_{i \in I_j} E_{ii}$ для каждого $j = 1, \ldots, k$, мы получим новую полную ортогональную систему плотных идемпотентов $H = \{e_1, \ldots, e_k\}$ кольца $\mathrm{M}_n(R)$, которой в группе $\mathrm{GL}_n(R)$ отвечает элементарная подгруппа $\mathrm{E}(H, R)$, порождённая матрицами $E + e_iAe_j$, где $A \in \mathrm{M}_n(R)$ и $1 \leqslant i \neq j \leqslant k$. Отметим, что подгруппа $\mathrm{E}(H, R)$ входит в подгруппу $E_n(R)$, поскольку для любой матрицы $A = (a_{lm}) \in \mathrm{M}_n(R)$

$$E + e_iAe_j = \prod_{p \in I_i,\ q \in I_j} (E + E_{pp}AE_{qq}) = \prod_{p \in I_i,\ q \in I_j} t_{pq}(a_{pq}) \in E_n(R).$$

С учётом вышесказанного из замечания 1.9 и предложения 3.6 немедленно вытекает следствие.

**Следствие 3.8.** *Пусть* $R$ — *алгебра с единицей над кольцом* $F$. *Тогда при любом* $n \geqslant 3$ *во всякой подгруппе* $A$ *группы* $\mathrm{GL}_n(R)$, *содержащей группу* $E_n(R)$, *выполняются равенства*

$$\mathrm{rad}(A) = C\Big(A, E + \mathrm{M}_n\big(\mathrm{Rad}(R)\big)\Big) = A \cap \mathrm{rad}\big(\mathrm{GL}_n(R)\big).$$

Предложение 3.6 можно дополнить при помощи следующего утверждения.

**Предложение 3.9.** *Пусть алгебра* $R$ *над кольцом* $F$ *обладает единицей* 1, 1/2, 1/3 *и элементами* $\{e_{ij} \mid i, j = 1, 2\}$, *такими что* $e_{11} + e_{22} = 1$ *и* $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$ *при любых* $i, j, k, l = 1, 2$, $\mathrm{E}(G, R)$ — *элементарная подгруппа группы обратимых элементов* $\mathrm{U}(R)$ *алгебры* $R$, *связанная с ортогональной системой идемпотентов*

*$G = \{e_{11}, e_{22}\}$. Тогда во всякой содержащей подгруппу $\mathrm{E}(G,R)$ подгруппе $A$ группы $\mathrm{U}(R)$ справедливы равенства*

$$\mathrm{rad}(A) = C\bigl(A, 1 + \mathrm{Rad}(R)\bigr) = A \cap \mathrm{rad}\bigl(\mathrm{U}(R)\bigr).$$

*Если кольцо $F$ — область целостности, состоящая из более чем трёх элементов, $R = \mathrm{M}_2(F)$ и $\mathrm{E}(R) = E_2(F)$, то для каждой содержащей $E_2(F)$ подгруппы $A$ группы $\mathrm{GL}_2(F)$ первичный радикал $\mathrm{rad}(A)$ совпадает с её центром $C(A)$ (см. [10]), т. е.*

$$\mathrm{rad}(A) = C(A) = A \cap C\bigl(\mathrm{GL}_2(F)\bigr).$$

Для доказательства основного результата этого раздела нам понадобится следующее предложение, соответствующее [53, лемма 2.7].

**Предложение 3.10.** *Пусть $m \geqslant 1$, $R$ — первичное кольцо с единицей 1, в котором элемент $(2m)!$ является обратимым, $a$ — нильпотентный элемент кольца $R$, такой что $a^m \neq a^{m+1} = 0$, $B$ — подгруппа группы обратимых элементов $\mathrm{U}(R)$ кольца $R$, которая нормализуется подгруппой, порождённой всеми элементами*

$$\exp(ua) = \sum_{k=0}^{m} (u^k a^k)/k!,$$

*где $u$ пробегает центр $Z(R)$ кольца $R$. Для любых $b \in B$, $i \geqslant 1$ положим*

$$\Delta_i(b) = \{u \in Z(R) \mid [\dots[\exp(ua), \underbrace{b]\dots b]}_{i} = 1\}.$$

*Предположим, что для всякого $b \in B$ существует $i(b) \geqslant 1$, при котором для всех $v \in Z(R)$ множество $\Delta_{i(b)}([b, \exp(va)])$ содержит по меньшей мере $2^{i(b)}m + 1$ элементов. Тогда произвольная цепочка $\{b_j\}_{j \geqslant 0}$, в которой $b_0 = b \in B$ и $b_{j+1} = [b_j, \exp(u_{j+1}a)]$ для $u_{j+1} \in Z(R)$, $j \geqslant 0$, содержит $b_q = 1$ при некотором $q \geqslant 0$.*

Подчеркнём, что при данных условиях для любого элемента $b \in B \setminus Z(R)$ во всякой цепочке $\{b_j\}_{j \geqslant 0}$ указанного вида с $b = b_0$ имеется элемент $b_p \in B \setminus Z(R)$, который перестановочен с элементом $a$, $b_p a = a b_p$ (см. [53]).

В любой группе $A$ коммутатор $[a, b]$ достижимого элемента $a$ с произвольным элементом $b$ входит в достижимую нильпотентную подгруппу, глубина достижимости и индекс нильпотентности которой не превосходят некоторых параметров, зависящих лишь от глубины достижимости в группе $A$, порождённой элементом $a$ циклической подгруппы $\langle a \rangle$ (см. замечание 1.16). В этой нильпотентной подгруппе циклическая подгруппа $\langle [a, b] \rangle$ является достижимой подгруппой и имеет глубину достижимости не выше индекса нильпотентности (см. раздел 1). Значит, группа $\langle [a, b] \rangle$ также является достижимой подгруппой в группе $A$, глубина достижимости которой не превосходит величины, определяемой лишь глубиной достижимости в $A$ группы $\langle a \rangle$. Отсюда сразу вытекает следствие 3.11.

**Следствие 3.11.** *Пусть $m \geqslant 1$, $R$ — первичное кольцо с единицей 1, содержащее бесконечный центр $Z(R)$ и обратимый элемент $(2m)!$, $a$ — нильпотентный* *элемент кольца $R$, такой что $a^m \neq a^{m+1} = 0$, $B$ — подгруппа группы обратимых элементов $\mathrm{U}(R)$ кольца $R$, которая нормализуется её подгруппой, порождённой элементами*

$$\exp(ua) = \sum_{k=0}^{m} (u^k a^k)/k!, \quad u \in Z(R).$$

*Тогда для любого достижимого элемента $b$ группы $B$ произвольная цепочка элементов $\{b_j\}_{j \geqslant 0}$, в которой $b_0 = b$ и $b_{j+1} = [b_j, \exp(u_{j+1}a)]$ для $u_{j+1} \in Z(R)$, $j \geqslant 0$, содержит $b_q = 1$ при некотором $q \geqslant 0$.*

**Определение 3.12.** Элемент $r$ алгебры $R$ над кольцом $F$ называют целым (степени не выше $n$) над $F$, если для некоторых $f_1, \ldots, f_{n-1} \in F$ выполняется соотношение $r^n + f_1 r^{n-1} + \ldots + f_{n-1} r = 0$.

**Определение 3.13.** Алгебра $R$ над кольцом $F$ называется целой над $F$, если каждый её элемент является целым над этим кольцом.

**Лемма 3.14.** *Пусть $R$ — первичная алгебра с единицей 1 и $1/2$ над кольцом $F$, центр $Z(R)$ которой не является целой алгеброй над этим кольцом, $a$ — нильпотентный элемент алгебры $R$ индекса 2 (т. е. $a \neq a^2 = 0$), $B$ — слабо разрешимая подгруппа группы обратимых элементов $\mathrm{U}(R)$ алгебры $R$, которая не содержится в центре $Z(R)$ алгебры $R$ и нормализуется подгруппой $1 + Z(R)a$. Тогда в группу $B$ входит такой элемент $b$, что $b \notin Z(R)$ и $ba = ab$.*

**Доказательство.** Рассмотрим произвольный элемент $b$ из группы $B$. Для каждого $u \in Z(R)$ из включения $[b, 1 + ua] = c(u) \in Z(R)$ сразу следует, что $aba(c(u) - 1) = 0$. Так как ненулевые элементы центра первичной алгебры не могут быть делителями нуля, последнее возможно только в случае, когда или $c(u) = 1$, или $aba = 0$. Если $aba = 0$, то также $ab(c(u) - 1) = 0$ и, значит, $c(u) = 1$. Следовательно, для всякого $u \in Z(R)$ коммутатор $[b, 1 + ua]$ или равен единице, или не принадлежит центру $Z(R)$ алгебры $R$.

Положим $e(u) = 1 + ua$ и $b(u) = e(u)be(-u)$ для всех $u \in Z(R)$. Тогда, используя индукцию, можно для любых $k \geqslant 1$ и $u_1, \ldots, u_{2^k} \in Z(R)$ записать $k$-й последовательный коммутатор $g_k\big(b(u_1), \ldots, b(u_{2^k})\big)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
&g_1\big(b(u_1), b(u_2)\big) = e(u_1)be(u_2 - u_1)be(u_1 - u_2)b^{-1}e(u_2 - u_1)b^{-1}e(-u_2),\\
&g_k\big(b(u_1), \ldots, b(u_{2^k})\big) =\\
&\quad = e(u_1)(be(u_2 - u_1)be(u_1 - u_2)b^{-1}e(u_2 - u_1)b^{-1}e(u_3 - u_2) \times \ldots \times\\
&\quad \times be(u_{2^{k-1}+1} - u_{2^{k-1}+2})be(u_{2^{k-1}+2} - u_{2^{k-1}+1}) \times\\
&\quad \times b^{-1}e(u_{2^{k-1}+1} - u_{2^{k-1}+2})b^{-1}e(-u_{2^{k-1}+1}), \quad k \geqslant 2.
\end{aligned}$$

Возьмём строчку $(1, 1, -1, -1, \ldots, 1, 1, -1, -1)$, которая получается в результате $\hat{m}(k)$-кратного повторения последовательности символов $1, 1, -1, -1$, где $\hat{m}(1) = 1$ и $\hat{m}(k) = 4^{4^{k-2}}$ при всех $k \geqslant 2$. Для каждого $m$, $2 \leqslant m \leqslant 4^{\hat{m}(k)}$, обозначим через $S_m$ совокупность всех строк длины $m$, состоящих из $\pm 1$ и $\pm 2$, которые можно сформировать из указанной строчки при помощи конечного набора следующих операций: вычёркиваний соседней пары $(1, -1)$ или $(-1, 1)$, замен либо соседней пары $(1,1)$ на 2, либо соседней пары $(-1,-1)$ на $-2$. Тогда мы также получаем, что

$$ag_k\big(b(u_1),\ldots,b(u_{2^k})\big)a = abe(u_2-u_1)be(u_1-u_2)b^{-1}e(u_2-u_1)\cdots b^{-1}a =$$
$$= \sum_{m=2}^{4^{\hat{m}(k)}} \sum_{(s_1,\ldots,s_m)\in S_m} f_{km}(s_1,\ldots,s_m)ab^{s_1}ab^{s_2}a\cdots b^{s_{m-1}}ab^{s_m}a,$$

где через $f_{km}(s_1,\ldots,s_m)$ обозначены соответствующие (возможно, нулевые) суммы произведений $m-1$ разностей $u_i-u_j$, $1\leqslant i\neq j\leqslant 2^k$, из числа встречающихся в приведённой ранее записи $g_k\big(b(u_1),\ldots,b(u_{2^k})\big)$. Поскольку разности $\{u_i-u_j\}$ можно заменить конечными суммами элементов $\pm(u_1-u_k)$, $k>1$, каждое ненулевое выражение $f_{km}(s_1,\ldots,s_m)$ является многочленом степени $m-1$ от $\{u_1-u_k\}$.

Для любых элементов $v_1,v_2,v_3\in Z(R)$ и индексов $1\leqslant i\neq j\neq k\leqslant 3$ определим

$$b_1(i,j)=[b(v_i),b(v_j)]=e(v_i)be(v_j-v_i)be(v_i-v_j)b^{-1}e(v_j-v_i)b^{-1}e(-v_j),$$
$$b_2(i,i)=[b_1(i,j),b_1(i,k)],$$
$$b_2(j,j)=[b_1(j,i),b_1(j,k)],\quad b_2(k,k)=[b_1(k,j),b_1(k,i)],$$
$$b_{2m+1}(i,j)=[b_{2m}(i,i),b_{2m}(j,j)],\quad b_{2m+2}(i,i)=[b_{2m+1}(i,j),b_{2m+1}(i,k)],$$
$$b_{2m+2}(j,j)=[b_{2m+1}(j,i),b_{2m+1}(j,k)],\quad b_{2m+2}(k,k)=[b_{2m+1}(k,j),b_{2m+1}(k,i)]$$

при всех $m\geqslant 1$. Несложно показать, что каждый элемент $b_n(s,t)$ представи́м в виде

$$b_n(s,t)=g_n\big(b(v_{j_1}),\ldots,b(v_{j_{2^n}})\big)=e(v_s)be(w_1)be(w_2)b^{-1}e(w_3)b^{-1}e(w_4)\times\ldots\times$$
$$\times be(w_l)be(w_{l+1})b^{-1}e(w_{l+2})b^{-1}e(w_{l+3})\times\ldots\times$$
$$\times be(w_{4^{\hat{m}(n)}-3})be(w_{4^{\hat{m}(n)}-2})b^{-1}e(w_{4^{\hat{m}(n)}-1})b^{-1}e(-v_t)$$

для подходящих $1\leqslant j_p\leqslant 3$ и $w_q\in\{v_i-v_j\mid 1\leqslant i\neq j\leqslant 3\}$.

Если положить $x=v_1-v_2$, $y=v_1-v_3$, $z=y-x=v_2-v_3$, то, пользуясь найденным ранее описанием $ag_k\big(b(u_1),\ldots,b(u_{2^k})\big)a$, мы можем подобрать $m_1,m_2,m_3\geqslant 0$, $m_1+m_2+m_3=4^{\hat{m}(n)}-1$, и записать

$$ab_n(s,t)a = hx^{m_1}y^{m_2}z^{m_3}a(babab^{-1}ab^{-1}a)^{\hat{m}(n)}+$$
$$+\sum_{m=2}^{4^{\hat{m}(n)}-1}\sum_{(s_1,\ldots,s_m)\in S_m}\left(\sum_{\substack{0\leqslant p_i\leqslant m_i,\ i=1,2,3\\ p_1+p_2+p_3=m-1}} g_{(n,m,s_1,\ldots,s_m)}(p_1,p_2,p_3)x^{p_1}y^{p_2}z^{p_3}\right)\times$$
$$\times ab^{s_1}a\cdots ab^{s_m}a,$$

где $h\in\{\pm1\}$ и $g_{(n,m,s_1,\ldots,s_m)}(p_1,p_2,p_3)\in\mathbb{Z}$. Сказанное справедливо для любого элемента $b\in B$ и, в частности, для коммутатора

$$b'=bb^{-1}(1)=b\big(b(1)\big)^{-1}=[b,e(1)].$$

Поэтому, используя равенства

$$\begin{aligned}
&a[b,e(1)]^{\varepsilon}a = abe(\varepsilon 1)b^{-1}a = \varepsilon abab^{-1}a,\\
&a[b,e(1)]^{2\varepsilon}a = abe(\varepsilon 1)b^{-1}e(-\varepsilon 1)be(\varepsilon 1)b^{-1}a =\\
&\quad = abe(\varepsilon 2)b^{-1}a - \varepsilon abe(\varepsilon 1)b^{-1}abe(\varepsilon 1)b^{-1}a = \varepsilon(2abab^{-1}a - abab^{-1}abab^{-1}a),
\end{aligned}$$

где $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, мы можем представить элемент $ab'_n(s,t)a$ в виде

$$\begin{aligned}
&ab'_n(s,t)a = hx^{m_1}y^{m_2}z^{m_3}a(bab^{-1}a)^{4^{\hat m(n)}} +\\
&\quad + \sum_{m=2}^{4^{\hat m(n)}-1} \sum_{(s_1,\ldots,s_m)\in S_m} \left( \sum_{\substack{0\leqslant p_i\leqslant m_i,\ i=1,2,3\\ p_1+p_2+p_3=m-1}} g_{(n,m,s_1,\ldots,s_m)}(p_1,p_2,p_3)x^{p_1}y^{p_2}z^{p_3} \right) \times\\
&\quad \times \left( \sum_{l=m}^{|s_1|+\ldots+|s_m|} h_{(s_1,\ldots,s_m)}(l)a(bab^{-1}a)^l \right)
\end{aligned}$$

для некоторых целых $\{h_{(s_1,\ldots,s_m)}(l)\}$. Если взять $w \in Z(R)$ и подставить в последнее равенство $x = w$, $y = w^2$ и $z = w^2 - w$ (иначе говоря, положить $v_1 = 0$, $v_2 = -w$ и $v_3 = -w^2$), то оно примет вид

$$ab'_n(s,t)a = \sum_{j=2}^{4^{\hat m(n)}} f_{nj}(w)a(bab^{-1}a)^j,$$

где $\{f_{nj}\}$ — многочлены с целыми коэффициентами, среди которых многочлен $f_{n4^{\hat m(n)}}$ имеет степень $m_1+2(m_2+m_3)$ и старший коэффициент, равный 1 или $-1$, а остальные являются многочленами меньших степеней.

Так как группа $B$ слабо разрешима, для любых $v_1, v_2, v_3 \in Z(R)$ и $b \in B$ существует номер $k(v_1,v_2,v_3,b) \geqslant 1$, при котором $b_n(s,t) = 1$ для всех $n \geqslant k(v_1,v_2,v_3,b)$ и $1 \leqslant s,t \leqslant 3$. Поэтому для произвольных $b \in B$, $w \in Z(R)$ и $n \geqslant k(0,-w,-w^2,b')$

$$ab'_n(s,t)a = \sum_{j=2}^{4^{\hat m(n)}} f_{nj}(w)a(bab^{-1}a)^j = 0.$$

Центр $Z(R)$ первичной алгебры с единицей $R$ является областью целостности, ненулевые элементы которой составляют мультипликативно замкнутую систему $S$. Относительно системы $S$ можно определить кольцо частных $RS^{-1} = S^{-1}R$. Кольцо $RS^{-1}$ является первичной алгеброй как над кольцом $F$, так и над полем частных $Q = Z(R)S^{-1} = Z(RS^{-1})$ области $Z(R)$. По условию область $Z(R)$ содержит по крайней мере один элемент $w$, не являющийся целым над $F$. Значит, элемент $f_{n4^{\hat m(n)}}(w)$ отличен от нуля при всех $n \geqslant 1$, и для любых $b \in B$, $n \geqslant k(0,-w,-w^2,b')$ установленное нами соотношение $\sum\limits_j f_{nj}(w)a(bab^{-1}a)^j = 0$ определяет нетривиальную $Q$-линейную зависимость в алгебре $RS^{-1}$ между её элементами $a(bab^{-1}a)^l$, $l \geqslant 1$. Следовательно, найдётся целое $m \geqslant 1$, при котором выполняется равенство

$$\sum_{l\geqslant 1} Qa(bab^{-1}a)^l = \sum_{i=1}^{m} Qa(bab^{-1}a)^i.$$

Более того, отсюда сразу вытекает, что для $j, j' = 0, 1$

$$\sum_{l\geqslant 1} Q(bab^{-1})^j a(bab^{-1}a)^l (bab^{-1})^{j'} = \sum_{i=1}^{m} Q(bab^{-1})^j a(bab^{-1}a)^i (bab^{-1})^{j'}.$$

Обозначим через $D(b)$ подалгебру алгебры $RS^{-1}$, порождённую над полем $Q$ единицей 1 и элементами $a$, $bab^{-1}$. Поскольку $a^2 = (bab^{-1})^2 = 0$, элементы подалгебры $D(b)$ исчерпываются конечными $Q$-линейными комбинациями элементов 1, $a$, $bab^{-1}$ и элементов вида $a(bab^{-1}a)^l$, $(abab^{-1})^l$, $(bab^{-1}a)^l$ и $(bab^{-1}a)^l bab^{-1} = bab^{-1}(abab^{-1})^l$, где $l \geqslant 1$. Поэтому из полученных ранее равенств следует, что алгебра $D(a)$ конечномерна над полем $Q$.

Группа $\mathrm{U}\big(D(b)\big)$ обратимых элементов алгебры $D(b)$ содержит все коммутаторы $[b, 1+qa] = (1+qbab^{-1})(1-qa)$, $q \in Q$. При этом элементы $[b, 1+ua]$, где $u \in Z(R)$, входят также в слабо разрешимую подгруппу $B \cap \mathrm{U}\big(D(b)\big)$ группы $\mathrm{U}\big(D(b)\big)$, нормализуемую её подгруппой $1 + Z(R)a$. В силу теоремы 1.35 и следствия 2.7 подгруппа $B \cap \mathrm{U}\big(D(b)\big)$, как и любая слабо разрешимая подгруппа группы обратимых элементов конечномерной алгебры над полем, является разрешимой.

Таким образом, в группе $B$ для всякого $b \in B$ подгруппа $B_b$, порождённая всеми элементами вида $(1+va)[b, 1+ua](1-va)$, где $u, v \in Z(R)$, является разрешимой.

Если каждая из подгрупп $B_b$, $b \in B$, содержится в центре $Z(R)$ алгебры $R$, то из сделанных в начале доказательства замечаний сразу следует, что все эти подгруппы являются единичными и, значит, все элементы группы $B$ перестановочны с элементом $a$. В частности, последнее справедливо для всякого нецентрального элемента, входящего в группу $B$.

В противном случае существует подгруппа $B_b$, которая не лежит в центре $Z(R)$. Группа $B_b$ разрешима и нормализуется подгруппой $1 + Z(R)a$. Поэтому найдётся $k \geqslant 0$, для которого $B_b^{(k)} \not\subset Z(R)$ и $B_b^{(k+1)} \subset Z(R)$. Тогда коммутант $B_b^{(k)}$ группы $B_b$ подпадает под условия предложения 3.10 и для любого элемента $d \in B_b^{(k)} \setminus Z(R)$ в цепочке $\{d_i\}_{i\geqslant 0}$, где $d_0 = d$ и $d_{i+1} = [d_i, 1+a]$ при всех $i \geqslant 0$, имеется элемент $d_j$, такой что $d_j \notin Z(R)$ и $d_j a = a d_j$. □

**Замечание 3.15.** Алгебра $R$ над кольцом $F$ с единицей 1 и полной ортогональной системой плотных идемпотентов $G = \{e_i\}_{i=1}^m$, $m \geqslant 2$, и её подкольцо, порождённое элементами связанной с $G$ элементарной подгруппы $\mathrm{E}(G, R)$, совпадают.

**Доказательство.** Достаточно заметить, что в данном подкольце лежат множества $e_i R e_j$ и $e_i R e_i = e_i R e_j R e_i$ для всех $1 \leqslant i \neq j \leqslant m$, а потому и их сумма

$$R = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} e_k R e_l = \Big(\sum_{k=1}^{m} e_k\Big) R \Big(\sum_{l=1}^{m} e_l\Big). \qquad \square$$

**Теорема 3.16.** *Пусть $R$ — алгебра над кольцом $F$ с единицей 1, 1/2 и полной ортогональной системой плотных идемпотентов $G = \{e_1, e_2, e_3\}$, такая что центр каждой её первичной фактор-алгебры, не содержащей нетривиальных локально нильпотентных идеалов, не является целой алгеброй над кольцом $F$. Тогда в каждой подгруппе $A$ группы обратимых элементов $\mathrm{U}(R)$ алгебры $R$, нормализуемой её элементарной подгруппой $\mathrm{E}(G, R)$, выполняется равенство*

$$\mathrm{T}(A) = C\big(A, 1 + \mathrm{L}(R)\big) = A \cap C\big(\mathrm{U}(R), 1 + \mathrm{L}(R)\big).$$

**Доказательство.** В нормализуемой элементарной подгруппой $\mathrm{E}(G, R)$ группе $A$ слабо разрешимый радикал $\mathrm{T}(A)$, как и каждая её характеристическая подгруппа, инвариантен относительно сопряжений с элементами $\mathrm{E}(G, R)$. Поэтому с учётом замечания 1.37 искомое равенство достаточно установить лишь в произвольной нормализуемой подгруппой $\mathrm{E}(G, R)$ слабо разрешимой подгруппе $B$ группы $\mathrm{U}(R)$.

Возьмём любой первичный идеал $P$ алгебры $R$, фактор-алгебра $R/P$ по которому не содержит ненулевых локально нильпотентных идеалов, и рассмотрим образ $B_P$ подгруппы $B$ в фактор-алгебре $R/P$ (или, точнее, в группе обратимых элементов $\mathrm{U}(R/P)$ алгебры $R/P$). Группа $B_P$ является слабо разрешимой и, кроме того, нормализуется образом $\mathrm{E}(G_P, R/P) = \mathrm{E}(G, R)_P$ элементарной подгруппы $\mathrm{E}(G, R)$ в группе $\mathrm{U}(R/P)$, где через $G_P$ обозначен образ системы идемпотентов $G$ в алгебре $R/P$ (для удобства образы самих идемпотентов $e_1$, $e_2$ и $e_3$, а также их сумму $1 = e_1 + e_2 + e_3$ в алгебре $R/P$ будем обозначать теми же символами).

Предположим, что группа $B_P$ не входит в центр $Z(R/P)$ алгебры $R/P$. Тогда в силу леммы 3.14 для любых $r \in R/P$, $b \in B_P \setminus Z(R/P)$ и $1 \leqslant i \neq j \leqslant 3$ подгруппа $D_{ij}(b, r)$ группы $B_P$, порождённая всеми элементами

$$b^{(1+e_i u r e_j)} = (1 + u e_i r e_j) b (1 - u e_i r e_j), \quad u \in Z(R/P),$$

содержит по крайней мере один элемент $d \notin Z(R/P)$, такой что $e_i r e_j d = d e_i r e_j$. По тем же причинам для всякого элемента $r_1 \in R/P$, $r_1 \neq r$, в подгруппе $D_{ij}(d, r_1)$ можно подобрать элемент $d_1 \notin Z(R/P)$, для которого $e_i r_1 e_j d_1 = d_1 e_i r_1 e_j$. При этом элемент $d_1$, как и все элементы подгруппы $D_{ij}(d, r_1)$, перестановочен с элементом $e_i r e_j$. Указанный процесс может быть продолжен и далее: для нового элемента $r_2 \in R/P$, $r_2 \neq r, r_1$, можно определить элемент $d_2 \in D_{ij}(d_1, r_2) \setminus Z(R/P)$, который будет уже перестановочен с $e_i r e_j$, $e_i r_1 e_j$ и $e_i r_2 e_j$, и т. д. Следовательно, для каждого конечного набора элементов $I$ алгебры $R/P$ и любых индексов $1 \leqslant i \neq j \leqslant 3$ в группе $B_P$ содержится элемент $b_{ij}(I) \notin Z(R/P)$, удовлетворяющий условию

$$e_i t e_j b_{ij}(I) = b_{ij}(I) e_i t e_j, \quad t \in I.$$

Покажем теперь, что группа $B_P$ содержит неединичный элемент $1+e_sze_t$ для некоторых $0 \neq z \in R/P$ и $1 \leqslant s \neq t \leqslant 3$. Поскольку по условию идемпотенты $e_1$, $e_2$, $e_3$ плотны в алгебре $R/P$, для каждого $i = 1,2,3$ мы можем подобрать целое $n(i) \geqslant 1$ и записать

$$1 = \sum_{l=1}^{n(i)} r_{il} e_i r'_{il}$$

для подходящих $r_{il}, r'_{il} \in R/P$. Значит, если сформировать набор

$$I_{ij} = \{r'_{il}, r_{jm} \mid l = 1, \ldots, n(i),\ m = 1, \ldots, n(j)\},$$

то по определению элемента $g = b_{ij}(I_{ij}) \in B_P \setminus Z(R/P)$

$$re_i r'_{il} e_j g^{\pm 1}(1-e_j) = (1-e_i) g^{\pm 1} e_i r_{jm} e_j r = 0$$

при всех $l = 1, \ldots, n(i)$, $m = 1, \ldots, n(j)$ и $r \in R/P$, а потому

$$e_j g^{\pm 1}(1-e_j) = (1-e_i) g^{\pm 1} e_i = 0.$$

С учётом этих равенств для любых $r, r' \in R/P$ и $1 \leqslant k \leqslant 3$, $k \neq i, j$, получаем

$$\begin{aligned}
&g(r) = [g, 1+e_i r e_j] = 1 + e_i g e_i r e_j g^{-1} e_j - e_i r e_j,\\
&h(r) = [g, 1+e_i r e_k] = 1 + e_i g e_i r e_k g^{-1}(1-e_i) - e_i r e_k = 1 + e_i x(r)(1-e_i),\\
&h_1(r,r') = [h(r), 1+e_k r' e_j] = 1 + e_i x(r) e_k r' e_j,\\
&h_2(r,r') = [h(r), 1+e_j r' e_k] = 1 + e_i x(r) e_j r' e_k,\\
&f(r) = [g, 1+e_k r e_j] = 1 + (1-e_j) g e_k r e_j g^{-1} e_j - e_k r e_j = 1 + (1-e_j) y(r) e_j,\\
&f_1(r,r') = [f(r), 1+e_i r' e_k] = 1 - e_i r' e_k y(r) e_j,\\
&f_2(r,r') = [f(r), 1+e_k r' e_i] = 1 - e_k r' e_i y(r) e_j.
\end{aligned}$$

Поэтому, используя полноту системы $G_P$ и плотность составляющих её идемпотентов, мы приходим к двум возможностям: либо можно подобрать элементы $r, r' \in R$, для которых по крайней мере один из элементов $g(r)$, $h_p(r,r')$, $f_q(r,r') \in B_P$, $p, q = 1,2$, отличен от единицы, либо $g(r) = h(r) = f(r) = 1$ при каждом $r \in R$. В первом случае мы сразу получаем, что в группе $B_P$ имеется неединичный элемент требуемого вида. Значит, интерес представляет лишь вторая ситуация, когда $g(r) = h(r) = f(r) = 1$ для всех $r \in R$ или, что равносильно,

$$ge_i re_j = e_i re_j g, \quad ge_i re_k = e_i re_k g, \quad ge_k re_j = e_k re_j g.$$

Тогда в дополнение к имеющимся равенствам для элемента $g$ мы получаем соотношение $e_k g^{\pm 1}(1-e_k) = (1-e_k) g^{\pm 1} e_k = 0$, значит,

$$g^{\pm 1} = e_1 g^{\pm 1} e_1 + e_2 g^{\pm 1} e_2 + e_3 g^{\pm 1} e_3 + e_i g^{\pm 1} e_j.$$

Из условия $gg^{-1} = g^{-1}g = 1$ вытекает также, что

$$e_s g e_s g^{-1} e_s = e_s g^{-1} e_s g e_s = e_s, \quad s = 1,2,3,$$
$$e_i g e_i g^{-1} e_j + e_i g e_j g^{-1} e_j = e_i g^{-1} e_i g e_j + e_i g^{-1} e_j g e_j = 0.$$

Поэтому для произвольных $r, r' \in R/P$ мы можем записать

$$v(r) = [g, 1 + e_j r e_k] = 1 + (e_j g e_j + e_i g e_j) e_j r e_k g^{-1} e_k - e_j r e_k,$$
$$w(r, r') = [v(r), 1 + e_j r' e_i] = 1 - e_j r' e_i g e_j r e_k g^{-1} e_k.$$

Если $w(r, r') \neq 1$ для некоторых $r, r' \in R/P$, то этот элемент группы $B_P$ отвечает всем необходимым требованиям. В противном случае равенство $w(r, r') = 1$ выполнено при любых $r, r' \in R/P$, и следовательно, с учётом сказанного ранее $e_i g^{\pm 1} e_j = 0$,

$$g_{lm}(r) = [g, 1 + e_l r e_m] = 1 + e_l g e_l r e_m g^{-1} e_m - e_l r e_m$$

для всех $r \in R/P$, $1 \leqslant l \neq m \leqslant 3$. При этом, так как $g \notin Z(R/P)$, можно подобрать $l$, $m$ и $r$, для которых $g_{lm}(r) \neq 1$ (см. замечание 3.15). Таким образом, искомый неединичный элемент $1 + e_s z e_t$ в группе $B_P$ всегда существует.

По замечанию 3.5 это означает также, что в группу $B_P$ входит подгруппа $\mathrm{E}(G_P, J, R/P)$, отвечающая ненулевому идеалу $J = R/P e_s z e_t R/P$, который в алгебре $R/P$ порождает элемент $e_s z e_t$.

Поскольку группа $B_P$ слабо разрешима, для каждой конечной системы элементов $Z$ идеала $J$ найдётся номер $n = n(Z) \geqslant 1$, при котором

$$1 = g_n(1 + e_{i_1} z_1 e_{j_1}, \ldots, 1 + e_{i_{2^n}} z_{2^n} e_{j_{2^n}})$$

для всех $z_p \in Z$, $1 \leqslant i_p \neq j_p \leqslant 3$, $p = 1, \ldots, 2^n$. В частности, полагая $j_p = i_{p+1}$ для $p = 1, \ldots, 2^n$ и подбирая индексы $\{i_p\}$ так, чтобы каждая тройка индексов $\{i_q, i_{q+1}, i_{q+2}\}$ составляла весь набор $\{1, 2, 3\}$, $q = 1, \ldots, 2^n - 1$ (достаточно выбрать такие $i_1$, $i_2$, $i_3$ и положить $i_{3k+j} = i_j$ для всех $j = 1, 2, 3$ и $k \geqslant 1$), мы с помощью коммутационных соотношений для порождающих подгруппы $\mathrm{E}(G, R)$ сразу получаем, что при любых $z_p \in Z$, $p = 1, \ldots, 2^n$,

$$1 = g_n(1 + e_{i_1} z_1 e_{i_2}, \ldots, 1 + e_{i_{2^n}} z_{2^n} e_{i_{2^n+1}}) = 1 + e_{i_1} z_1 e_{i_2} z_2 e_{i_3} \cdots e_{i_{2^n}} z_{2^n} e_{i_{2^n+1}},$$
$$0 = e_{i_1} z_1 e_{i_2} z_2 e_{i_3} \cdots e_{i_{2^n}} z_{2^n} e_{i_{2^n+1}}.$$

Следовательно, если сформировать новый конечный набор $Z'$ элементов идеала $J$ из элементов $r'_{il} z r_{jm}$ с $z \in Z$, $i, j = 1, 2, 3$, $l = 1, \ldots, n(i)$ и $m = 1, \ldots, n(j)$, где, как и ранее,

$$\sum_{l=1}^{n(i)} r_{il} e_i r'_{il} = 1,$$

то для подходящего $n' = n(Z') \geqslant 1$ при любых $z_1, \ldots, z_{2^{n'}} \in Z$ имеем

$$0 = z_1 z_2 \cdots z_{2^{n'}} = \sum_{\substack{l_1, l_2, \ldots, l_{2^{n'}+1} \\ l_q = 1, \ldots, n(i_q) \\ q = 1, \ldots, 2^{n'}+1}} r_{i_1 l_1} e_{i_1} r'_{i_1 l_1} z_1 r_{i_2 l_2} e_{i_2} r'_{i_2 l_2} z_2 r_{i_3 l_3} e_{i_3} \times \ldots \times$$
$$\times\, e_{i_{2^{n'}}} r'_{i_{2^{n'}} l_{2^{n'}}} z_{2^{n'}} r_{i_{2^{n'}+1} l_{2^{n'}+1}} e_{i_{2^{n'}+1}} r'_{i_{2^{n'}+1} l_{2^{n'}+1}}.$$

Так как сказанное справедливо для каждого конечного набора элементов $Z$ идеала $J$, последний является локально нильпотентным. Поэтому согласно выбору алгебры $R/P$ идеал $J$ равен нулю. Противоречие.

Значит, для любого первичного идеала $P$ алгебры $R$, фактор-алгебра по которому не содержит ненулевых локально нильпотентных идеалов, образ $B_P$ подгруппы $B$ в алгебре $R/P$ входит в её центр $Z(R/P)$, т. е.

$$B_P = C(B_P) = B_P \cap C\bigl(\mathrm{U}(R/P)\bigr),$$

$$B = C(B, \mathrm{U}(R) \cap 1{+}P) = \{g \in B \mid [g, B] \subseteq 1{+}P\} = B \cap C(\mathrm{U}(R), \mathrm{U}(R) \cap 1{+}P).$$

Поскольку локально нильпотентный радикал $\mathrm{L}(R)$ алгебры $R$ совпадает с пересечением всех её первичных идеалов с таким свойством, мы получаем также равенства

$$\begin{aligned} B = \bigcap_{\substack{P \in \mathrm{Spec}(R)\\ \mathrm{L}(R/P)=\{0\}}} C(B, \mathrm{U}(R) \cap 1 + P) = C\Biggl(B, \bigcap_{\substack{P \in \mathrm{Spec}(R)\\ \mathrm{L}(R/P)=\{0\}}} (\mathrm{U}(R) \cap 1 + P)\Biggr) = \\ = C\bigl(B, 1 + \mathrm{L}(R)\bigr) = \bigcap_{\substack{P \in \mathrm{Spec}(R)\\ \mathrm{L}(R/P)=\{0\}}} \bigl(B \cap C(\mathrm{U}(R), \mathrm{U}(R) \cap 1 + P)\bigr) = \\ = B \cap C\bigl(\mathrm{U}(R), 1 + \mathrm{L}(R)\bigr). \end{aligned}$$

□

Воспользовавшись очевидными включениями

$$A \cap 1 + \mathrm{L}(R) \subseteq A \cap \mathrm{PH}\bigl(\mathrm{U}(R)\bigr) \subseteq \mathrm{PH}(A) \subseteq \mathrm{T}(A),$$

мы сразу получаем отсюда следствие 3.17.

**Следствие 3.17.** *В условиях теоремы* 3.16 *слабо разрешимый радикал* $\mathrm{T}(A)$ *группы* $A$ *равен центру* $C\bigl(A, \mathrm{PH}(A)\bigr) = \{g \in A \mid [g, A] \subseteq \mathrm{PH}(A)\}$ *по локально нильпотентному радикалу* $\mathrm{PH}(A)$ *этой группы.*

Применяя замечание 1.37 и предложение 1.8, мы получаем также следствие 3.18.

**Следствие 3.18.** *Если в условиях теоремы* 3.16 *локально нильпотентный радикал* $\mathrm{L}(R)$ *алгебры* $R$ *совпадает с её радикалом* $\mathrm{RN}^*(R)$ (*в частности, последнее верно для счётно порождённой алгебры* $R$), *то слабо разрешимый радикал* $\mathrm{T}(A)$ *группы* $A$ *совпадает к тому же с радикалом* $\mathrm{RN}^*(A)$, *т. е.* $\mathrm{RN}^*(A) = \mathrm{T}(A) = C\bigl(A, 1 + \mathrm{L}(R)\bigr)$.

**Следствие 3.19.** *Пусть поле* $\mathbb{F}$ — *неалгебраическое расширение поля характеристики, отличной от двух, и* $R$ — *алгебра над полем* $\mathbb{F}$ *с единицей* 1 *и полной ортогональной системой* $G = \{e_1, e_2, e_3\}$ *плотных идемпотентов. Тогда в любой подгруппе* $A$ *группы обратимых элементов* $\mathrm{U}(R)$ *алгебры* $R$, *нормализуемой её элементарной подгруппой* $\mathrm{E}(G, R)$, *выполнено равенство* $\mathrm{T}(A) = C\bigl(A, 1{+}\mathrm{L}(R)\bigr)$.

**Замечание 3.20.** Пусть $R$ — первичное кольцо с единицей, центр $Z(R)$ которого содержит не менее $n$ элементов для некоторого $n \geqslant 1$. Тогда для любого $0 \neq b \in R$ найдётся такой элемент $r \in R$, что $b(rb)^n \neq 0$ (см. [53, замечание 2.9]).

**Теорема 3.21.** *Пусть $R$ — алгебра над кольцом $F$ с единицей 1, 1/2 и полной ортогональной системой плотных идемпотентов $G = \{e_1, e_2, e_3\}$, такая что центр каждой её первичной фактор-алгебры является бесконечным. Тогда во всякой подгруппе $A$ группы обратимых элементов $\mathrm{U}(R)$ алгебры $R$, нормализуемой связанной с системой $G$ элементарной подгруппой $\mathrm{E}(G,R)$, выполняется равенство*

$$\mathrm{RN}(A) = \mathrm{rad}(A) = C\big(A, 1+\mathrm{Rad}(R)\big) = \\ = A \cap \mathrm{RN}\big(\mathrm{U}(R)\big) = A \cap C\big(\mathrm{U}(R), 1+\mathrm{Rad}(R)\big).$$

**Доказательство.** Радикал $\mathrm{RN}(A)$ группы $A$, как и слабо разрешимый радикал $\mathrm{T}(A)$, является её характеристической подгруппой и потому нормализуется элементарной подгруппой $\mathrm{E}(G,R)$. Следовательно, требуемое равенство достаточно доказать только для каждой RN-радикальной подгруппы $B$ группы $\mathrm{U}(R)$, нормализуемой $\mathrm{E}(G,R)$ (см. также замечание 1.37 и предложение 3.6). Как и в доказательстве теоремы 3.16, рассмотрим образ $B_P$ такой подгруппы $B$ в фактор-алгебре $R/P$ алгебры $R$ по произвольному её первичному идеалу $P$. В первичной алгебре $R/P$ группа $B_P$ является RN-радикальной подгруппой группы её обратимых элементов $\mathrm{U}(R/P)$, нормализуемой элементарной подгруппой $\mathrm{E}(G_P, R/P) = \mathrm{E}(G,R)_P$, связанной с образом $G_P$ системы идемпотентов $G$ в алгебре $R/P$. При этом, как и прежде, элементы системы идемпотентов $G_P$ и единицу алгебры $R/P$ мы для удобства будем обозначать теми же символами $e_1$, $e_2$, $e_3$ и $1 = e_1 + e_2 + e_3$.

В группе $B_P$ ниль-радикал $\bar\sigma(B_P)$, который, напомним, совпадает с множеством её достижимых элементов, является характеристической подгруппой и, значит, также нормализуется группой $\mathrm{E}(G_P, R/P)$. Предположим, что он не содержится в центре $Z(R/P)$ алгебры $R/P$. Тогда при помощи следствия 3.11 и рассуждений из доказательства теоремы 3.16 можно показать, что в группе $\bar\sigma(B_P)$ имеется неединичный элемент $1 + e_i x e_j$ для некоторых $1 \leqslant i \neq j \leqslant 3$ и $x \in R/P$. Поскольку этот элемент достижим в группе $B_P$, можно подобрать целое $n \geqslant 1$, при котором для всякого $g \in \mathrm{E}(G_P, R/P)$ выполняется соотношение

$$[g, 1+e_ixe_j]_n = [\ldots[g, \underbrace{1+e_ixe_j]\ldots 1+e_ixe_j]}_{n} = 1.$$

Положим

$$g_m(y)^\varepsilon = ([1+e_jye_i, 1+e_ixe_j]_m)^\varepsilon$$

для всех $m \geqslant 1$, $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, $y \in R/P$. Тогда, воспользовавшись индукцией по $m \geqslant 1$, несложно показать, что

$$e_jg_1(y)^\varepsilon e_i = -\varepsilon e_jye_ixe_jye_i, \\ e_jg_{m+1}(y)^\varepsilon e_i = \varepsilon e_jg_m(y)e_ixe_jg_m(y)^{-1}e_i = \\ = -\varepsilon(e_jye_ixe_jye_ixe_j)^{2^m-1}e_jye_ixe_jye_i, \quad m \geqslant 1.$$

Поскольку $e_jg_n(y)^\varepsilon e_i = 0$, мы получаем отсюда, что

$$e_ixe_j(ye_ixe_j)^{2^n} = 0, \quad y \in R/P.$$

Согласно замечанию 3.20 это возможно только в случае, когда $e_i x e_j = 0$. Противоречие.

Значит, ниль-радикал $\bar{\sigma}(B_P)$ группы $B_P$ входит в центр $Z(R/P)$ алгебры $R/P$ и $\bar{\sigma}(B_P) = C(B_P) = B_P \cap Z(R/P)$. Во всякой группе прообразы достижимых нильпотентных подгрупп её фактор-группы по центру являются достижимыми нильпотентными подгруппами, каждая из которых содержится в ниль-радикале этой группы. Поэтому в фактор-группе $B_P/C(B_P)$ группы $B_P$ по её центру $C(B_P) = \bar{\sigma}(B_P)$ нет нетривиальных достижимых нильпотентных подгрупп, и следовательно, с учётом следствия 1.19 получаем, что

$$B_P = \hat{\bar{\sigma}}(B_P) = \bar{\sigma}(B_P) = C(B_P) = B_P \cap C\big(\mathrm{U}(R/P)\big),$$
$$B = C(B, B \cap 1 + P) = B \cap C(\mathrm{U}(R), \mathrm{U}(R) \cap 1 + P).$$

Поскольку последнее равенство выполнено для каждого первичного идеала $P$ алгебры $R$, мы получаем в итоге, что

$$B = \bigcap_{P \in \mathrm{Spec}(R)} C(B, B \cap 1 + P) = C\Bigg(B, \bigcap_{P \in \mathrm{Spec}(R)} (B \cap 1 + P)\Bigg) =$$
$$= C\big(B, B \cap 1 + \mathrm{Rad}(R)\big) = B \cap C\big(\mathrm{U}(R), 1 + \mathrm{Rad}(R)\big). \quad \square$$

**Теорема 3.22.** *Пусть $R$ — такая алгебра над кольцом $F$ с единицей $1$, $1/2$ и системой элементов $\{e_{ij} \mid i, j = 1, 2\}$, где $e_{ij} e_{kl} = \delta_{jk} e_{il}$ при всех $i, j, k, l = 1, 2$ и $e_{11} + e_{22} = 1$, что центр каждой её первичной фактор-алгебры является бесконечным, $\mathrm{E}(G, R)$ — связанная с ортогональной системой идемпотентов $G = \{e_{11}, e_{22}\}$ элементарная подгруппа в группе обратимых элементов $\mathrm{U}(R)$ алгебры $R$. Тогда во всякой подгруппе $A$ группы $\mathrm{U}(R)$, нормализуемой подгруппой $\mathrm{E}(G, R)$, выполняется равенство*

$$\mathrm{RN}(A) = \mathrm{rad}(A) = C\big(A, 1 + \mathrm{Rad}(R)\big) =$$
$$= A \cap \mathrm{RN}\big(\mathrm{U}(R)\big) = A \cap C\big(\mathrm{U}(R), 1 + \mathrm{Rad}(R)\big).$$

**Доказательство.** Как и в доказательстве предыдущей теоремы, необходимо только показать, что для всякого первичного идеала $P$ алгебры $R$ образ $B_P$ каждой RN-радикальной нормализуемой подгруппой $\mathrm{E}(G, R)$ подгруппы $B$ группы $\mathrm{U}(R)$ в фактор-алгебре $R/P$ содержится в её центре $Z(R/P)$.

Действительно, пусть выполняется противное и группа $B_P$ не входит в центр $Z(R/P)$ первичной алгебры $R/P$. Тогда ниль-радикал $\bar{\sigma}(B_P)$ группы $B_P$ также не лежит в $Z(R/P)$. При этом, как и группа $B_P$, он нормализуется элементами образа $\mathrm{E}(G_P, R/P) = \mathrm{E}(G, R)_P$ подгруппы $\mathrm{E}(G, R)$ в группе обратимых элементов $\mathrm{U}(R/P)$ алгебры $R/P$, где через $G_P$ обозначен образ в $R/P$ полной ортогональной системы плотных идемпотентов $G$ (элементы $G_P$ вместе с образами в $R/P$ единицы $1$ алгебры $R$ и элементов $\{e_{ij}\}$ мы будем обозначать прежними символами $1$ и $\{e_{ij}\}$). Согласно следствию 3.11 в группе $\bar{\sigma}(B_P)$ имеется элемент $g \notin Z(R/P)$, для которого $[g, 1 + e_{12}] = 1$ или, что равносильно, $g e_{12} = e_{12} g$. Поэтому либо можно выбрать элемент $r \in R/P$, такой что $1 \neq [g, 1+e_{11}re_{22}] = 1+e_{11}xe_{22}$, либо $ge_{11}re_{22} = e_{11}re_{22}g$ при всех $r \in R/P$. В первом случае, повторив рассуждения из доказательства теоремы 3.21, мы можем получить равенство $e_{11}xe_{22} = 0$, которое противоречит выбору элемента $x$. Следовательно, возможен лишь второй случай: $ge_{11}re_{22} = e_{11}re_{22}g$, $r \in R/P$. Если теперь положить $g_{pq} = e_{pp}ge_{qq}$, $p, q = 1, 2$, то $g_{21} = 0$ и

$$g = g_{11} + g_{22} + g_{12} = h + g_{12}, \quad g^{-1} = h^{-1} - h^{-1}g_{12}h^{-1},$$

где $e_{12}g_{22}e_{21} = g_{11}$, $e_{21}g_{11}e_{12} = g_{22}$ и, кроме того, $g_{11}re_{22} = e_{11}rg_{22}$ при любом $r \in R$. Отсюда также следует, что

$$g_{22}re_{11} = e_{21}g_{11}e_{12}re_{12}e_{21} = e_{21}e_{12}re_{12}g_{22}e_{21} = e_{22}rg_{11}, \quad r \in R.$$

Значит, элемент $h = g_{11} + g_{22} \in \mathrm{U}(R/P)$ перестановочен со всеми элементами $e_{11}re_{22}$, $e_{22}re_{11}$, $r \in R/P$, и в силу замечания 3.15 входит в центр $Z(R/P)$ алгебры $R/P$. Так как $g = hg'$ является достижимым элементом группы $B_P$, существует $n \geqslant 1$, при котором для каждого $b \in \mathrm{E}(G_P, R/P)$

$$[b, g]_n = [b, g']_n = 1.$$

Как и в теореме 3.21, из данного соотношения вытекает, что $g' = 1 + h^{-1}g_{12} = 1$ и $g = h \in C\big(\mathrm{U}(R/P)\big) = \mathrm{U}(R/P) \cap Z(R/P)$. Противоречие.

Полученное противоречие означает, что ниль-радикал $\bar{\sigma}(B_P)$ группы $B_P$ содержится в центре $Z(R/P)$ алгебры $R/P$ и, следовательно,

$$B_P = \hat{\bar{\sigma}}(B_P) = \bar{\sigma}(B_P) = C(B_P) = B_P \cap Z(R/P). \qquad \square$$

Утверждения теорем 3.21 и 3.22 можно также рассматривать в качестве вариантов предложения 4.10 из следующего раздела, посвящённого группам Шевалле.

# 4. Радикалы групп Шевалле

Пусть $\mathfrak{G}$ — конечномерная полупростая алгебра Ли над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ с системой корней $\Sigma$ ранга $l \geqslant 1$ и базисом Шевалле

$$\{X_\alpha, H_i \mid \alpha \in \Sigma, \ i = 1, \ldots, l\},$$

$\pi$ — точное представление данной алгебры на конечномерном комплексном векторном пространстве $V$. Тогда по теореме Шевалле—Ри (см., например, [36, с. 20, следствие 1 из теоремы 2; 47, предложение 2.4]) в абелевой группе $V$ имеется конечно порождённая свободная абелева подгруппа $M = V_{\mathbb{Z}}$, такая что

1) подгруппа $M$ инвариантна относительно действия всех операторов вида

$$\pi(X_\alpha^n/n!) = \pi(X_\alpha)^n/n!, \quad \alpha \in \Sigma, \quad n \geqslant 0,$$

представляющих соответствующие элементы универсальной обёртывающей алгебры $\mathfrak{U}(\mathfrak{G})$ алгебры $\mathfrak{G}$;

2) база группы $M$ является $\mathbb{C}$-базисом пространства $V$ (другими словами, группа $M$ является целочисленной решёткой в пространстве $V$, которую обычно называют *присоединённой решёткой* к этому пространству).

В частности, для присоединённого представления $\pi = \mathrm{ad}$ подобной решёткой является $\mathbb{Z}$-решётка, которую в $V = \mathfrak{G}$ порождает базис Шевалле алгебры $\mathfrak{G}$.

Возьмём теперь произвольное ассоциативное кольцо с единицей $R$ и определим для любых $r \in R$ и $\alpha \in \Sigma$ автоморфизм абелевой группы $M(R) = R \otimes_{\mathbb{Z}} M$

$$x_\alpha(r) = \exp\bigl(r\pi(X_\alpha)\bigr) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \pi(X_\alpha^n/n!),$$

действующий на каждый $t \otimes v \in M(R)$, $t \in R$, $v \in M$, по правилу

$$x_\alpha(r)(t \otimes v) = \sum_{n=0}^{\infty} tr^n \otimes v\pi(X_\alpha^n/n!),$$

где для удобства действие оператора $\pi(X_\alpha^n/n!)$, $\alpha \in \Sigma$, $n \geqslant 0$, записывается справа: $\pi(X_\alpha^n/n!)(u) = u\pi(X_\alpha^n/n!)$, $u \in V$. В действительности операторы $\{\pi(X_\alpha)\}$ являются нильпотентными, и потому все рассматриваемые здесь суммы конечны.

**Определение 4.1.** Подгруппу $E_\pi(\Sigma, R)$ группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}\bigl(M(R)\bigr)$ абелевой группы $M(R)$, порождённую всеми автоморфизмами $x_\alpha(r)$, $r \in R$, $\alpha \in \Sigma$, мы будем называть элементарной группой Шевалле (см. [36, 49]).

Напомним ряд хорошо известных сведений из теории представлений конечномерных алгебр Ли, подробные доказательства которых можно найти, к примеру, в [15, 36].

Обозначим через $\Sigma^+$ подсистему положительных корней системы корней $\Sigma$, через $\mu^+$ и $\mu^-$ — старшие веса представления $\pi$, отвечающие подсистемам $\Sigma^+$ и $-\Sigma^+$. Тогда каждый вес $\nu$ представления $\pi$ может быть записан в виде

$$\lambda = \mu^+ - \sum_i \beta_i = \mu^- + \sum_j \gamma_j$$

для подходящих $\beta_i, \gamma_j \in \Sigma^+$. Пространство представления $V$ и входящая в него присоединённая решётка векторов $M$ разлагаются в прямые суммы весовых подпространств $\{V_\nu\}$ и весовых компонент $\{\mathrm{M}_\nu\}$, $\mathrm{M}_\nu = V_\nu \cap M$, соответственно. Размерность подпространства $V_\nu$ называется кратностью веса $\nu$ в представлении $\pi$ и обозначается $\mathrm{mult}(\nu)$. При этом кратности старших весов $\mu^+$ и $\mu^-$ равны 1. Поскольку любая база решётки $M$ является $\mathbb{C}$-базисом пространства $V$, кратность $\mathrm{mult}(\nu)$ веса $\nu$ совпадает к тому же с рангом конечно порождённой свободной абелевой группы $\mathrm{M}_\nu$.

Если $\{v_\nu^k\}_{k=1}^{\mathrm{mult}(\nu)}$ — произвольная база группы $\mathrm{M}_\nu$, то базу $\{v_\nu^k \mid \nu, k\}$ решётки $M$ называют *присоединённой базой* пространства $V$.

Абелева группа $M(R)$ является также свободным левым $R$-модулем с умножением

$$r\left(\sum_i t_i \otimes v_i\right) = \sum_i (rt_i) \otimes v_i, \quad \sum_i t_i \otimes v_i \in M(R), \quad r \in R,$$

в качестве базы которого можно использовать элементы $\{1 \otimes v\}$, где $v$ пробегает произвольную базу решётки $M$.

Автоморфизмы группы $M(R)$, которые составляют элементарную группу Шевалле $E_\pi(\Sigma, R)$, являются к тому же автоморфизмами $R$-модуля $M(R)$. Поэтому, зафиксировав базу решётки $M$, мы можем отождествить группу $E_\pi(\Sigma, R)$ с подгруппой группы $\mathrm{GL}_n(R)$, $n = \dim_{\mathbb{C}} V$. Без ограничения общности будем считать, что выбранная база $M$ является присоединённой базой пространства $V$. Тогда каждую матрицу $g \in \mathrm{M}_n(R)$, в том числе элементы групп $E_\pi(\Sigma, R)$ и $\mathrm{GL}_n(R)$, можно записать в виде

$$g = (g^{kk'}_{\lambda\lambda'}) = \sum_{\lambda,\lambda',k,k'} g^{kk'}_{\lambda\lambda'} E^{kk'}_{\lambda\lambda'},$$

где $g^{kk'}_{\lambda\lambda'} \in R$ и $E^{kk'}_{\lambda\lambda'}$ — элементарная матрица из $\mathrm{M}_n(R)$, отвечающая эндоморфизму группы $R \otimes_{\mathbb{Z}} M$, действие которого определяет правило

$$E^{kk'}_{\lambda\lambda'} \colon \sum_{\tau,i} r^i_\tau \otimes v^i_\tau \mapsto r^k_\lambda \otimes v^{k'}_{\lambda'}, \quad \{r^i_\tau\} \subset R.$$

Естественно, что выбор базы решётки $M$ для матричной реализации группы $E_\pi(\Sigma, R)$ не является существенным, так как переход от одной базы к другой сводится к сопряжению с обратимой целочисленной матрицей.

Для каждого корня $\alpha \in \Sigma$ и любого вектора $v \in V_\nu$ вектор $v\pi(X_\alpha)$ либо равен нулю, либо является ненулевым вектором веса $\lambda + \alpha$ (см. [36, с. 18, лемма 11]).

Множество весов представления $\pi$ вида $\nu + i\alpha$, $i \in \mathbb{Z}$, образует конечную последовательность $\{\nu + j\alpha \mid -r \leqslant j \leqslant q\}$, где $r, q \geqslant 0$ и $r - q = \langle \nu, \alpha \rangle$ — соответствующее число Картана (см. [15, с. 126, теорема 1]). Поэтому для любых $u \in \mathrm{M}_\nu$, $t, r \in R$ автоморфизм $x_\alpha(r)$ или оставляет элемент $t \otimes u$ неизменным, или переводит его в конечную сумму

$$x_\alpha(r)(t \otimes u) = \sum_{i=0}^{k} (tr^i \otimes u_i),$$

в которой $1 \leqslant k \leqslant q$, $0 \neq u_i \in \mathrm{M}_{\nu+i\alpha}$ и $u_0 = u$.

Для всех $\alpha \in \Sigma$ и $y \in \mathrm{U}(R)$ положим

$$w_\alpha(y) = x_\alpha(y) x_{-\alpha}(-y^{-1}) x_\alpha(y), \quad w_\alpha = w_\alpha(1), \quad h_\alpha(y) = w_\alpha(y) w_\alpha^{-1}.$$

Согласно [36, лемма 19] автоморфизмы $w_\alpha(y)$ и $h_\alpha(y)$ группы $M(R)$ обладают следующими свойствами:

1) для всякого $v \in \mathrm{M}_\nu$ существует такой $v' \in \mathrm{M}_{\nu'}$, $\nu' = \omega_\alpha(\nu) = \nu - \langle \nu, \alpha \rangle \alpha$, что $(1 \otimes v) w_\alpha(y) = y^{\langle \nu, \alpha \rangle} \otimes v'$ при любом $y \in \mathrm{U}(R)$;
2) $(1 \otimes v) h_\alpha(y) = y^{\langle \nu, \alpha \rangle} \otimes v$ для каждого $v \in \mathrm{M}_\nu$.

В [36, леммы 15, 19 и 20] были установлены следующие соотношения для порождающих $\{x_\alpha(r)\}$ группы $E_\pi(\Sigma,R)$ для произвольных $r,r'\in R$, $rr'=r'r$, и $\alpha,\beta\in\Sigma$:

1) $x_\alpha(r)x_\alpha(r')=x_\alpha(r+r')$;
2) если $0\neq\alpha+\beta\notin\Sigma$, то
$$[x_\alpha(r),x_\beta(r')]=\mathrm{Id}_{M(R)}=E,$$
где $\mathrm{Id}_{M(R)}$ — тождественный автоморфизм модуля $M(R)$, который, зафиксировав базу группы $M$, можно отождествить с единичной матрицей $E==E_n\in\mathrm{M}_n(R)$, $n=\dim_{\mathbb{C}}V$;
3) если $\alpha+\beta\in\Sigma$, то
$$[x_\alpha(r),x_\beta(r')]=\prod_{i,j}x_{i\alpha+j\beta}(c_{ij}r^ir'^j),$$
где умножение в правой части берётся по всем корням $i\alpha+j\beta\in\Sigma$ с $i,j>0$, расположенным в некотором фиксированном порядке, $\{c_{ij}\}$ — целые числа, зависящие только от $\alpha$, $\beta$ и выбранного порядка корней, при этом
$$[X_\alpha,X_\beta]=c_{11}X_{\alpha+\beta}$$
(данное соотношение принято называть *коммутаторной формулой Шевалле*).

Для любых $y\in\mathrm{U}\big(Z(R)\big)$, $r\in R$ и $\alpha,\beta\in\Sigma$
$$w_\alpha(y)x_\beta(r)w_\alpha^{-1}(y)=x_{\omega_\alpha(\beta)}\big(c(\alpha,\beta)y^{-\langle\beta,\alpha\rangle}r\big),\quad h_\alpha(y)^{-1}x_\beta(r)h_\alpha(y)=x_\beta\big(y^{\langle\beta,\alpha\rangle}r\big),$$
где $\omega_\alpha(\beta)=\beta-\langle\beta,\alpha\rangle\alpha$, а коэффициент $c(\alpha,\beta)=c(\alpha,-\beta)\in\{\pm1\}$ не зависит от $y$, $R$ и выбора конкретного представления $\pi$.

Наилучшим образом структура группы (элементарной группы) Шевалле изучена для коммутативного кольца коэффициентов и особенно для случая поля. Здесь мы ограничимся лишь сведениями, необходимыми для целей нашего изложения, отсылая заинтересованного в подробностях читателя к цитируемым в тексте источникам и приведённой в конце статьи библиографии.

Элементарная группа Шевалле $G_\pi(\Sigma)=E_\pi(\Sigma,\mathbb{C})$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, реализованная при помощи присоединённой базы пространства представления $V$ как подгруппа в группе $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, является линейной алгебраической группой, определённой над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ (см. [36, 47, 49]).

Фактор-алгебру $\mathbb{Q}[G_\pi(\Sigma)]=\mathbb{Q}[x_{11},\ldots,x_{nn}]/I$ алгебры коммутативных многочленов $\mathbb{Q}[x_{11},\ldots,x_{nn}]$ над полем $\mathbb{Q}$ от $n^2$ переменных $x_{ij}$, $i,j=1,\ldots,n$, по идеалу $I$, состоящему из всех её многочленов, которые обращаются в нуль на каждом элементе группы $G_\pi(\Sigma)$ (такую фактор-алгебру называют также групповой алгеброй алгебраической группы $G_\pi(\Sigma)$), можно, помимо имеющейся на ней обычной ассоциативной структуры, наделить ещё и структурой алгебры Хопфа с единицей (см., например, [38, с. 101, 102]). При этом образ $\mathbb{Z}[G_\pi(\Sigma)]$ кольца целочисленных многочленов $\mathbb{Z}[x_{11},\ldots,x_{nn}]$ в алгебре $\mathbb{Q}[G_\pi(\Sigma)]$ замкнут относительно определяющей алгебру Хопфа с единицей $\mathbb{Q}[G_\pi(\Sigma)]$ тройки коморфизмов.

Для любого коммутативного кольца с единицей $R$ множество гомоморфизмов колец $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G_\pi(\Sigma)], R)$ можно снабдить структурой группы, которую естественно отождествить с подгруппой полной линейной группы $\mathrm{GL}_n(R)$ (точнее, специальной линейной группы $\mathrm{SL}_n(R)$), образованной матрицами, являющимися общими нулями элементов идеала $I \cap \mathbb{Z}[x_{11}, \ldots, x_{nn}]$ (см. [5,47,49,50]). В частности, при $R = \mathbb{C}$ эта группа изоморфна исходной группе $G_\pi(\Sigma)$.

**Определение 4.2.** Подгруппа $G_\pi(\Sigma, R) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G_\pi(\Sigma)], R)$ полной линейной группы $\mathrm{GL}_n(R)$ над коммутативным кольцом с единицей $R$, отвечающая представлению $\pi$ и системе корней $\Sigma$, называется группой Шевалле типа $\Sigma$ над кольцом $R$.

Согласно этому определению элементарная группа Шевалле $E_\pi(\Sigma, R)$ является подгруппой группы $G_\pi(\Sigma, R)$. Более того, если система корней $\Sigma$ неприводима и имеет ранг больше единицы, то группа $E_\pi(\Sigma, R)$ нормальна в группе $G_\pi(\Sigma, R)$ (см. [60]).

С каждым идеалом $J$ коммутативного кольца $R$ связан редукционный гомоморфизм
$$\Phi_J\colon G_\pi(\Sigma, R) \to G_\pi(\Sigma, R/J),$$
который ставит в соответствие матрицам из группы $G_\pi(\Sigma, R)$ матрицы вычетов их коэффициентов по модулю идеала $J$.

Гомоморфизму $\Phi_J$ соответствуют следующие подгруппы группы $G_\pi(\Sigma, R)$:

$G_\pi(\Sigma, R, J) = \mathrm{Ker}\,\Phi_J$ — ядро гомоморфизма $\Phi_J$, или *главная конгруэнц-подгруппа уровня идеала* $J$;

$E_\pi(\Sigma, R, J) = E_\pi(\Sigma, R) \cap G_\pi(\Sigma, R, J)$ — *элементарная конгруэнц-подгруппа уровня идеала* $J$;

$C_\pi(\Sigma, R, J)$ — прообраз центра группы $G_\pi(\Sigma, R/J)$ в группе $G_\pi(\Sigma, R)$, или *полная конгруэнц-подгруппа уровня идеала* $J$.

Используя данные обозначения и теорему 2.6, основной результат о радикалах групп Шевалле над коммутативными кольцами из [7, 52] (другое его доказательство приводится в [10]) можно записать в следующем виде.

**Предложение 4.3.** *Пусть $\Sigma$ — неприводимая система корней ранга $l \geqslant 1$ и $R$ — коммутативное кольцо с единицей, причём $1/2, 1/3 \in R$ при $l = 1$. Тогда*
$$\begin{aligned}\mathrm{rad}\big(G_\pi(\Sigma, R)\big) &= \mathrm{RN}\big(G_\pi(\Sigma, R)\big) = \mathrm{RN}^*\big(G_\pi(\Sigma, R)\big) = \\ &= \mathrm{T}\big(G_\pi(\Sigma, R)\big) = C_\pi\big(\Sigma, R, \mathrm{Rad}(R)\big), \\ \mathrm{rad}\big(E_\pi(\Sigma, R)\big) &= \mathrm{RN}\big(E_\pi(\Sigma, R)\big) = \mathrm{RN}^*\big(E_\pi(\Sigma, R)\big) = \\ &= \mathrm{T}\big(E_\pi(\Sigma, R)\big) = E_\pi(\Sigma, R) \cap C_\pi\big(\Sigma, R, \mathrm{Rad}(R)\big),\end{aligned}$$
*где $\pi$ — любое неприводимое конечномерное представление простой конечномерной комплексной алгебры Ли с системой корней $\Sigma$.*

В [7,10,52] получено также следствие 4.4.

**Следствие 4.4.** *Пусть в условиях предложения* 4.3 *система корней* $\Sigma$ *имеет ранг выше единицы и кольцо* $R$ *содержит* $1/2$ *в случае, когда тип системы* $\Sigma$ *совпадает с* $B_2$. *Тогда группы Шевалле* $G_\pi(\Sigma,R)$ *и* $E_\pi(\Sigma,R)$ *обладают разрешимыми радикалами, если и только если кольцо* $R$ *имеет нильпотентный первичный радикал* $\mathrm{Rad}(R)$.

Полезно также привести ряд классических результатов из теории групп Шевалле.

**Предложение 4.5 ([59, предложение 2.2]).** *Пусть* $\Sigma$ — *система корней,* $R$ — *коммутативное кольцо с единицей и* $J$ — *идеал кольца* $R$. *Тогда подгруппа* $E_\pi(\Sigma,R,J)$ *является наименьшей из нормальных подгрупп группы* $E_\pi(\Sigma,R)$, *содержащих все элементы* $x_\alpha(y)$ *для* $y\in J$ *и* $\alpha\in\Sigma$.

Подчеркнём, что в рамках предложения 4.5 неприводимость системы корней $\Sigma$ не требуется. В действительности достаточно вести рассмотрение только неприводимых систем, поскольку разложению $\Sigma$ на неприводимые составляющие соответствует разложение связанной с ней группы Шевалле (элементарной группы Шевалле) в прямое произведение групп Шевалле (элементарных групп Шевалле), отвечающих неприводимым компонентам этой системы (см. [36]).

**Предложение 4.6 ([62, теорема 3]).** *Пусть* $\Sigma$ — *неприводимая система корней ранга* $l>1$, $R$ — *коммутативное кольцо с единицей, содержащее* $1/2$ *в случае, если тип* $\Sigma$ *совпадает с* $B_2$ *или* $G_2$. *Тогда для любого идеала* $J$ *кольца* $R$ *справедливо равенство*

$$E_\pi(\Sigma,R,J)=[E_\pi(\Sigma,R),C_\pi(\Sigma,R,J)].$$

*В частности, всякая подгруппа группы* $C_\pi(\Sigma,R,J)$, *содержащая подгруппу* $E_\pi(\Sigma,R,J)$, *нормализуется группой* $E_\pi(\Sigma,R)$.

Частью основного результата работы [45] является следующее предложение.

**Предложение 4.7.** *Пусть* $\Sigma$ — *неприводимая система корней ранга* $l>1$, $R$ — *коммутативное кольцо с единицей. Тогда в группе Шевалле* $G_\pi(\Sigma,R)$ *центр* $C\bigl(G_\pi(\Sigma,R)\bigr)$ *равен централизатору в ней элементарной группы Шевалле* $E_\pi(\Sigma,R)$, *т. е.*

$$C\bigl(G_\pi(\Sigma,R)\bigr)=\bigl\{g\in G_\pi(\Sigma,R)\bigm|[g,E_\pi(\Sigma,R)]=\{E\}\bigr\}.$$

*Кроме того, если в пространстве, сопряжённом с подалгеброй Картана соответствующей простой алгебры Ли, решётки, которые порождают веса представления* $\pi$ *и корни системы* $\Sigma$, *совпадают (иначе говоря, если группа* $G_\pi(\Sigma,R)$ *является группой присоединённого типа), то* $C\bigl(G_\pi(\Sigma,R)\bigr)=\{E\}$.

В [45] аналогичный вывод был получен и для системы $\Sigma$ ранга 1 (т. е. системы типа $A_1$) при одном дополнительном условии: в случае группы присоединённого типа идеал $N$ кольца $R$, состоящий из всех таких элементов $u\in R$, что $u^2=2u=0$ и $(r^2-r)u=0$ при любом $r\in R$, равен нулю.

Использование выражения «тип» для групп Шевалле над коммутативными кольцами оправданно, так как каждая группа $G_\pi(\Sigma,R)$ определяется однозначно с точностью до изоморфизма системой корней $\Sigma$, кольцом коэффициентов $R$ и решёткой $\Lambda_\pi$, порождённой весами представления $\pi$ (см. [36, § 5, 12]).

Из предложений 4.3, 4.6 и 4.7 немедленно вытекает следствие.

**Следствие 4.8.** *Пусть в условиях предложения* 4.3 *система корней* $\Sigma$ *имеет ранг выше единицы и кольцо* $R$ *содержит* $1/2$, *если тип* $\Sigma$ *равен* $B_2$ *или* $G_2$. *Тогда*

$$\operatorname{rad}\bigl(G_\pi(\Sigma,R)\bigr)=\bigl\{g\in G_\pi(\Sigma,R)\bigm|[g,E_\pi(\Sigma,R)]\subseteq E_\pi\bigl(\Sigma,R,\operatorname{Rad}(R)\bigr)\bigr\}.$$

С учётом следствия 2.11 в условиях предложения 4.3 выполняются также включения

$$\mathrm{PH}\bigl(G_\pi(\Sigma,R)\bigr)=\sigma\bigl(G_\pi(\Sigma,R)\bigr)\subseteq\operatorname{rad}\bigl(G_\pi(\Sigma,R)\bigr),$$
$$\mathrm{PH}\bigl(E_\pi(\Sigma,R)\bigr)=\sigma\bigl(E_\pi(\Sigma,R)\bigr)\subseteq\operatorname{rad}\bigl(E_\pi(\Sigma,R)\bigr).$$

Более того, для присоединённого представления ad при таких ограничениях на кольцо $R$ группы $E_{\mathrm{ad}}(\Sigma,R)$ и $G_{\mathrm{ad}}(\Sigma,R)$ имеют единичные центры и, следовательно, $C_{\mathrm{ad}}(\Sigma,R,J)=G_{\mathrm{ad}}(\Sigma,R,J)$ для всякого идеала $J$ кольца $R$. Поэтому в этом случае

$$\operatorname{rad}\bigl(E_{\mathrm{ad}}(\Sigma,R)\bigr)=E_{\mathrm{ad}}\bigl(\Sigma,R,\operatorname{Rad}(R)\bigr)=\mathrm{PH}\bigl(E_{\mathrm{ad}}(\Sigma,R)\bigr)\subseteq$$
$$\subseteq\operatorname{rad}\bigl(G_{\mathrm{ad}}(\Sigma,R)\bigr)=G_{\mathrm{ad}}\bigl(\Sigma,R,\operatorname{Rad}(R)\bigr)=\mathrm{PH}\bigl(G_{\mathrm{ad}}(\Sigma,R)\bigr).$$

Для произвольного неприводимого конечномерного представления $\pi$ выполнение аналогичных соотношений потребует наложения дополнительных условий.

**Следствие 4.9.** *Пусть выполняются все условия предложения* 4.3 *и при этом кольцо* $R$ *содержит* $1/2$, *если тип системы корней* $\Sigma$ *совпадает с* $B_2$ *или* $G_2$. *Тогда*

$$\operatorname{rad}\bigl(G_\pi(\Sigma,R)\bigr)=\mathrm{PH}\bigl(G_\pi(\Sigma,R)\bigr)=\sigma\bigl(G_\pi(\Sigma,R)\bigr),$$
$$\operatorname{rad}\bigl(E_\pi(\Sigma,R)\bigr)=\mathrm{PH}\bigl(E_\pi(\Sigma,R)\bigr)=\sigma\bigl(E_\pi(\Sigma,R)\bigr).$$

**Доказательство.** В силу сделанных выше замечаний нам достаточно доказать только локальную нильпотентность первичного радикала группы $G_\pi(\Sigma,R)$. Хорошо известно, что группы Шевалле $G_\pi(\Sigma,R)$ и $G_{\mathrm{ad}}(\Sigma,R)$, определённые по одной системе корней $\Sigma$ над одним кольцом $R$ для представления $\pi$ и присоединённого представления ad, связывает гомоморфизм $\Psi\colon G_\pi(\Sigma,R)\to G_{\mathrm{ad}}(\Sigma,R)$, который обладает следующими свойствами:

1) централизатор группы $E_\pi(\Sigma,R)$ в группе $G_\pi(\Sigma,R)$ и ядро $\operatorname{Ker}\Psi$ гомоморфизма $\Psi$ совпадают;
2) ограничение гомоморфизма $\Psi$ на группу $E_\pi(\Sigma,R)$ является её эпиморфизмом на группу $E_{\mathrm{ad}}(\Sigma,R)$.

Более того, в условиях предложения 4.3 ядро $\operatorname{Ker}\Psi$ равно также центру $C\bigl(G_\pi(\Sigma,R)\bigr)$ группы $G_\pi(\Sigma,R)$ (см. предложение 4.7).

Положим $G=\Psi\bigl(G_\pi(\Sigma,R)\bigr)$. С учётом результатов работ [9, 10] при $l=1$ (т. е. в случае, когда тип системы $\Sigma$ равен $A_1$) в группе $G$, как и в любой подгруппе группы $\mathrm{GL}_3(R)$, содержащей элементарную группу Шевалле $E_{\mathrm{ad}}(\Sigma,R)$, выполняются равенства

$$\operatorname{rad}(G) = G \cap C\Big(\mathrm{GL}_3(R), E + \mathrm{M}_3\big(\mathrm{Rad}(R)\big)\Big) = \\ = G \cap \mathrm{U}(R)\Big(E + \mathrm{M}_3\big(\mathrm{Rad}(R)\big)\Big) = \mathrm{PH}(G),$$

где $E = E_3$ — единичная матрица из $\mathrm{M}_3(R)$. При $l > 1$, используя следствие 4.8, предложения 4.5, 1.29 и сделанные ранее наблюдения, мы сразу получаем, что

$$\operatorname{rad}(G) = \Psi\Big(\operatorname{rad}\big(G_\pi(\Sigma, R)\big)\Big) = \big\{g \in G \mid [g, E_{\mathrm{ad}}(\Sigma, R)] \subseteq E_{\mathrm{ad}}\big(\Sigma, R, \mathrm{Rad}(R)\big)\big\} = \\ = G \cap \operatorname{rad}(G_{\mathrm{ad}}\big(\Sigma, R)\big) = G \cap C_{\mathrm{ad}}\big(\Sigma, R, \mathrm{Rad}(R)\big) = \\ = G \cap G_{\mathrm{ad}}\big(\Sigma, R, \mathrm{Rad}(R)\big) = G \cap \mathrm{PH}\big(G_{\mathrm{ad}}(\Sigma, R)\big) = \mathrm{PH}(G).$$

В любом случае первичный радикал $\operatorname{rad}\big(G_\pi(\Sigma, R)\big)$ группы $G_\pi(\Sigma, R)$ совпадает с прообразом первичного радикала $\operatorname{rad}(G)$ её фактор-группы $G$, $G \cong G_\pi(\Sigma, R)/C\big(G_\pi(\Sigma, R)\big)$ (см. предложение 1.25), который по доказанному равен также локально нильпотентному радикалу $\mathrm{PH}(G)$ последней. Отсюда вытекает, что радикал $\operatorname{rad}\big(G_\pi(\Sigma, R)\big)$ локально нильпотентен. □

Более сильным результатом о радикале $\mathrm{RN}$ подгрупп полной линейной группы над ассоциативным кольцом, нормализуемых элементарными группами Шевалле, является следующий вариант теоремы 2.2 из [53], который несложно вывести из доказательства последней и следствия 3.11.

**Предложение 4.10.** *Пусть $R$ — ассоциативная алгебра с единицей над полем характеристики нуль, $\mathfrak{G}$ — конечномерная простая комплексная алгебра Ли с системой корней $\Sigma$, $\pi$ — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{G}$ на конечномерном комплексном векторном пространстве $V$ размерности $n$. Тогда в любой нормализуемой элементарной группой Шевалле $E_\pi(\Sigma, R)$ подгруппе $A$ группы $\mathrm{GL}_n(R)$*

$$\operatorname{rad}(A) = \mathrm{RN}(A) = C\Big(A, E + \mathrm{M}_n\big(\mathrm{Rad}(R)\big)\Big) = \\ = A \cap \mathrm{RN}\big(\mathrm{GL}_n(R)\big) = A \cap C\Big(\mathrm{GL}_n(R), E + \mathrm{M}_n\big(\mathrm{Rad}(R)\big)\Big).$$

**Следствие 4.11 ([53, следствие 2.10]).** *Если в условиях предложения* 4.10 *группа $E_\pi(\Sigma, R)$ входит в группу $A$, то группа $A$ обладает разрешимым радикалом в том и только в том случае, когда первичный радикал $\mathrm{Rad}(R)$ алгебры $R$ нильпотентен.*

С учётом теоремы 2.6 и её следствия 2.11 мы можем записать следствие 2.11 из [53] в следующем виде.

**Следствие 4.12.** *Если в условиях предложения* 4.10 *алгебра $R$ коммутативна, то в группе $A$ выполняются равенства*

$$\operatorname{rad}(A) = \mathrm{RN}(A) = \mathrm{RN}^*(A) = \mathrm{T}(A) = \mathrm{PH}(A) = \sigma(A).$$

**Лемма 4.13.** *Пусть $R$ — алгебра с единицей 1 над полем характеристики нуль, $a$ — нильпотентный элемент алгебры $R$ индекса $m+1>1$ (т. е. $a^m \neq a^{m+1}=0$), $Z(a,R)$ — подалгебра алгебры $R$, которая состоит из всех коммутирующих с $a$ элементов $r \in R$, $ra = ar$, $\{f_{k_i}(x_1,\ldots,x_n)\}_{i=1}^{l}$ — набор некоммутативных однородных многочленов от переменных $x_1,\ldots,x_n$, $n \geqslant 1$, с коэффициентами из основного поля, где $1 \leqslant l \leqslant m$ и*

$$1 \leqslant k_1 = \deg f_{k_1} < \ldots < k_i = \deg f_{k_i} < \ldots < k_l = \deg f_{k_l} \leqslant m,$$

*$A$ — подгруппа в группе обратимых элементов $\mathrm{U}(R)$ алгебры $R$, порождённая всеми элементами вида*

$$1+\sum_{i=1}^{l} f_{k_i}(u_1,\ldots,u_n)a^{k_i}, \quad u_1,\ldots,u_n \in Z(a,R).$$

*Тогда для некоторого ненулевого рационального $z$ в группу $A$ входят элементы*

$$\exp(zf_{k_1}(u_1,\ldots,u_n)a^{k_1}) = \\ = \sum_{0\leqslant i\leqslant m/k_1} (zf_{k_1}(u_1,\ldots,u_n)a^{k_1})^i/i!, \quad u_1,\ldots,u_n \in Z(a,R).$$

**Доказательство.** Покажем сначала, что при некотором $j \geqslant 1$, $k_1 j \leqslant m$, имеются рациональные числа $\{q_s\}_{s=1}^{j}$, $q_1 \neq 0$, для которых любой элемент

$$1+\sum_{s=1}^{j} q_s(f_{k_1}(u_1,\ldots,u_n)a^{k_1})^s, \quad u_1,\ldots,u_n \in Z(a,R),$$

содержится в группе $A$.

Действительно, допустим, что в группе $A$ нет подобных элементов. Тогда можно выбрать максимальное число $p$ из всех таких $k$, $k_1 \leqslant k \leqslant m$, что при некоторых $i,j \geqslant 1$, $k_1 j < k$, $i \leqslant m-k+1$, существуют рациональные числа $\{q_s\}_{s=1}^{j}$, $q_1 \neq 0$, и некоммутативные однородные многочлены $\{h_{n_t}(x_1,\ldots,x_n)\}_{t=1}^{i}$ от переменных $x_1,\ldots,x_n$ над основным полем, где $h_{n_1} \notin \mathbb{Q}f_{k_1}^{j+1}$ и

$$k = n_1 = \deg h_{n_1} < \ldots < n_t = \deg h_{n_t} < \ldots < n_i = \deg h_{n_i} \leqslant m,$$

для которых в группу $A$ входят все элементы вида

$$1+\sum_{s=1}^{j} q_s(f_{k_1}(u_1,\ldots,u_n)a^{k_1})^s + \sum_{t=1}^{i} h_{n_t}(u_1,\ldots,u_n)a^{n_t}, \quad u_1,\ldots,u_n \in Z(a,R).$$

Отметим, что по определению $A$ множество таких чисел $k$ является непустым.

Для каждого $k$ с указанными свойствами группа $A$ содержит элементы

$$1+\sum_{s=1}^{j} q_s(y^{k_1}f_{k_1}(u_1,\ldots,u_n)a^{k_1})^s + \sum_{t=1}^{i} y^{n_t}h_{n_t}(u_1,\ldots,u_n)a^{n_t}, \\ u_1,\ldots,u_n \in Z(a,R),$$

где $y$ пробегает центр $Z(R)$ алгебры $R$. Поэтому $A$ принадлежат также элементы

$$\begin{aligned}&\left(1+\sum_{s=1}^{j}q_s(2^{k_1}f_{k_1}(u_1,\ldots,u_n)a^{k_1})^s+\sum_{t=1}^{i}2^{n_t}h_{n_t}(u_1,\ldots,u_n)a^{n_t}\right)\times\\&\quad\times\left(1+\sum_{s=1}^{j}(f_{k_1}(u_1,\ldots,u_n)a^{k_1})^s+\sum_{t=1}^{i}h_{n_t}(u_1,\ldots,u_n)a^{n_t}\right)^{-2^k}=\\&\quad=\left(1+\sum_{s=1}^{j}q_s(2^{k_1}f_{k_1}(u_1,\ldots,u_n)a^{k_1})^s+\sum_{t=1}^{i}2^{n_t}h_{n_t}(u_1,\ldots,u_n)a^{n_t}\right)\times\\&\quad\times\left(1+\sum_{q=1}^{m}(-1)^q\left(\sum_{s=1}^{j}q_s(f_{k_1}(u_1,\ldots,u_n)a^{k_1})^s+\sum_{t=1}^{i}h_{n_t}(u_1,\ldots,u_n)a^{n_t}\right)^q\right)^{2^k}=\\&\quad=1+\sum_{s=1}^{j}q'_s(f_{k_1}(u_1,\ldots,u_n)a^{k_1})^s+\sum_{v=k_1j+1}^{m}g_v(u_1,\ldots,u_n)a^v,\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u_1,\ldots,u_n\in Z(a,R),\end{aligned}$$

для подходящих рациональных $\{q'_s\}_{s=1}^{i}$, $q'_1=q_1(2^{k_1}-2^k)\neq 0$, и некоммутативных однородных многочленов $\{g_v(x_1,\ldots,x_n)\}_{v=k_1j+1}^{m}$ над основным полем, причём каждый $g_v$ или равен нулю, или имеет степень $v$. Помимо этого, для любого индекса $k_1j+1\leqslant v\leqslant k$, который не кратен $k_1$, многочлен $g_v$ является нулевым, а при $v=k_1w$, $j<w\leqslant k/k_1$, совпадает с многочленом $c_wf_{k_1}^{w}$ для некоторого (может быть, и нулевого) рационального числа $c_w$. Следовательно, если применить сказанное к случаю $k=p$, мы сразу получим противоречие с условиями выбора числа $p$.

Значит, найдётся целое $j\geqslant 1$ и рациональные $\{z_s\}_{s=1}^{j}$, $z_1\neq 0$, такие что для любых $u_1,\ldots,u_n\in Z(a,R)$ группа $A$ содержит элемент

$$1+\sum_{s=1}^{j}z_s(f_{k_1}(u_1,\ldots,u_n)a^{k_1})^s.$$

Предположим теперь, что не существует $0\neq z\in\mathbb{Q}$, для которого

$$\exp(zf_{k_1}(u_1,\ldots,u_n)a^{k_1})\in A,\quad u_1,\ldots,u_n\in Z(a,R).$$

Тогда можно выбрать максимальное число $q$ из всех $i$, $1\leqslant i\leqslant m/k_1$, для которых имеются рациональные $z\neq 0$ и $\{w_t\}_{1<t\leqslant m/k_1}$, такие что $w_{i+1}\neq z^{i+1}/(i+1)!$ и

$$\sum_{s=0}^{i}(zf_{k_1}(u_1,\ldots,u_n)a^{k_1})^s/s!+\sum_{i<t\leqslant m/k_1}w_t(f_{k_1}(u_1,\ldots,u_n)a^{k_1})^t\in A$$

при всех $u_1,\ldots,u_n\in Z(a,R)$.

Заметим, что для каждого такого $i$ группа $A$ содержит элементы

$$\left(\sum_{s=0}^{i}(z2^{k_1}f_{k_1}(u_1,\ldots,u_n)a^{k_1})^s/s! + \sum_{i<t\leqslant m/k_1} w_t(2^{k_1}f_{k_1}(u_1,\ldots,u_n)a^{k_1})^t\right)\times$$
$$\times\left(\sum_{s=0}^{i}(zf_{k_1}(u_1,\ldots,u_n)a^{k_1})^s/s! + \sum_{i<t\leqslant m/k_1} w_t(f_{k_1}(u_1,\ldots,u_n)a^{k_1})^t\right)^{-2^{k_1(i+1)}} =$$
$$= \left(\sum_{s=0}^{i}(z2^{k_1}f_{k_1}(u_1,\ldots,u_n)a^{k_1})^s/s! + \sum_{i<t\leqslant m/k_1} w_t(2^{k_1}f_{k_1}(u_1,\ldots,u_n)a^{k_1})^t\right)\times$$
$$\times\left(\sum_{s=0}^{i}(-1)^s(zf_{k_1}(u_1,\ldots,u_n)a^{k_1})^s/s! +\right.$$
$$+\Big(\big((-1)^{i+1}+1\big)z^{i+1}/(i+1)! - w_{i+1}\Big)(f_{k_1}(u_1,\ldots,u_n)a^{k_1})^{i+1} +$$
$$\left.+\sum_{i+1<t\leqslant m/k_1} w'_t(f_{k_1}(u_1,\ldots,u_n)a^{k_1})^t\right)^{2^{k_1(i+1)}} =$$
$$= \left(\sum_{s=0}^{i}(z2^{k_1}f_{k_1}(u_1,\ldots,u_n)a^{k_1})^s/s! + \sum_{i<t\leqslant m/k_1} w_t(2^{k_1}f_{k_1}(u_1,\ldots,u_n)a^{k_1})^t\right)\times$$
$$\times\left(\sum_{s=0}^{i}(-1)^s(z2^{k_1(i+1)}f_{k_1}(u_1,\ldots,u_n)a^{k_1})^s/s! +\right.$$
$$+\Big(\big((-1)^{i+1}2^{k_1(i+1)^2}+2^{k_1(i+1)}\big)z^{i+1}/(i+1)! - w_{i+1}2^{k_1(i+1)}\Big)\times$$
$$\times(f_{k_1}(u_1,\ldots,u_n)a^{k_1})^{i+1} +$$
$$\left.+\sum_{i+1<t\leqslant m/k_1} w''{}_t(f_{k_1}(u_1,\ldots,u_n)a^{k_1})^t\right) =$$
$$= \sum_{s=0}^{i+1}\big(z\big(2^{k_1}-2^{k_1(i+1)}\big)f_{k_1}(u_1,\ldots,u_n)a^{k_1}\big)^s/s! +$$
$$+\sum_{i+1<t\leqslant m/k_1} w'''{}_t(f_{k_1}(u_1,\ldots,u_n)a^{k_1})^t$$

для любых $u_1,\ldots,u_n \in Z(a,R)$, где $w'_t$, $w''{}_t$ и $w'''{}_t$ — некоторые рациональные числа, не зависящие от выбранных $u_1,\ldots,u_n$, $i+1 < t \leqslant m/k_1$. Применив данное рассуждение к случаю $i = q$, мы немедленно придём к противоречию с выбором этого числа. Значит, можно найти $0 \neq z \in \mathbb{Q}$, для которого

$$\exp(zf_{k_1}(u_1,\ldots,u_n)a^{k_1}) \in A, \quad u_1,\ldots,u_n \in Z(a,R). \qquad \square$$

Хорошо известно, что любую ассоциативную алгебру $R$ можно наделить структурой алгебры Ли со скобкой: $(r,r') = rr' - r'r$, $r,r' \in R$. Определённую таким образом алгебру Ли $R^{(-)}$ принято называть *присоединённой алгеброй Ли* к ассоциативной алгебре $R$.

Как обычно, для каждой алгебры Ли $L$ над кольцом $F$ через $L^i$ мы будем обозначать $i$-й член её нижнего центрального ряда, который определяется индуктивно: $L^1 = L$, $L^{i+1} = [L^i, L]$ при всех $i \geqslant 1$.

**Лемма 4.14.** *Пусть $R$ — первичная алгебра с единицей 1 над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, центр $Z(R)$ которой не является целой алгеброй над этим полем, $a$ — нильпотентный элемент алгебры $R$ индекса $m+1>1$ и $E(a,R)$ — подгруппа группы обратимых элементов $\mathrm{U}(R)$ алгебры $R$, порождённая всеми элементами вида*

$$e(u) = \exp(ua) = \sum_{k=0}^{m} u^k a^k / k!,$$

*где $u$ пробегает подалгебру $Z(a,R) = \{r \in R \mid ra = ar\}$ перестановочных с $a$ элементов $R$. Предположим, что в $m$-м члене $\bigl(Z(a,R)^{(-)}\bigr)^m$ нижнего центрального ряда присоединённой к алгебре $Z(a,R)$ алгебры Ли $Z(a,R)^{(-)}$ содержатся элементы, не являющиеся двусторонними делителями нуля в алгебре $R$. Тогда во всякой слабо разрешимой подгруппе $B$ группы $\mathrm{U}(R)$, которая не входит в центр $Z(R)$ алгебры $R$ и нормализуется подгруппой $E(a,R)$, имеется элемент $b \in B \setminus Z(R)$, такой что $bua = uab$ при всех $u \in Z(a,R)$.*

**Доказательство.** Для любых $b \in \mathrm{U}(R)$ и $u_1, \ldots, u_m \in Z(a,R)$ включение

$$\Bigl[b, 1 + \sum_{i=1}^{m} u_i a^i\Bigr] = c \in Z(R)$$

может выполняться, если и только если $c = 1$. Действительно, иначе ненулевой элемент $c-1$, как и всякий отличный от нуля элемент центра $Z(R)$ первичной алгебры $R$, не является делителем нуля, а потому

$$a^m b\Bigl(1 + \sum_{i=1}^{m} u_i a^i\Bigr)a^m = a^m b a^m = a^m c\Bigl(1 + \sum_{i=1}^{m} u_i a^i\Bigr) b a^m = c a^m b a^m = 0,$$

$$a^m b\Bigl(1 + \sum_{i=1}^{m} u_i a^i\Bigr)a^{m-1} = a^m b a^{m-1} = a^m c\Bigl(1 + \sum_{i=1}^{m} u_i a^i\Bigr) b a^{m-1} = c a^m b a^{m-1} = 0$$

и т. д. для всех $k = m, m-1, \ldots, 1, 0$,

$$a^m b\Bigl(1 + \sum_{i=1}^{m} u_i a^i\Bigr)a^k = a^m b a^k = a^m c\Bigl(1 + \sum_{i=1}^{m} u_i a^i\Bigr) b a^k = c a^m b a^k = 0.$$

В частности, при $k = 0$ мы получаем, что

$$a^m b\Bigl(1 + \sum_{i=1}^{m} u_i a^i\Bigr) = a^m b = a^m c\Bigl(1 + \sum_{i=1}^{m} u_i a^i\Bigr) b = c a^m b = 0.$$

Последнее невозможно, поскольку по условию $a^m \neq 0$. Следовательно, коммутатор $\Big[b, 1 + \sum\limits_{i=1}^{m} u_i a^i\Big]$ либо равен единице 1, либо не принадлежит центру $Z(R)$ алгебры $R$.

Используя индукцию, несложно показать, что для произвольных $z_1, \ldots, z_k \in \in Z(a, R)$, $k = 1, \ldots, m$, коммутатор

$$e(z_1, \ldots, z_k) = \big[[\ldots[e(z_1), e(z_2)]\ldots], e(z_k)\big]$$

представи́м в виде

$$e(z_1, \ldots, z_k) = 1 + (\ldots(z_1, z_2)\cdots z_k)a^k + \sum_{i=k+1}^{m} f_{ik}(z_1, \ldots, z_k)a^i,$$

где через $f_{ik} = f_{ik}(x_1, \ldots, x_k)$, $i = k+1, \ldots, m$, обозначен подходящий однородный некоммутативный многочлен степени $i$ от переменных $x_1, \ldots, x_k$ с коэффициентами из основного поля (в действительности с рациональными коэффициентами), не зависящий от элементов $z_1, \ldots, z_k$, а через $(\ldots(z_1, z_2)\cdots z_k)$ — правонормированный коммутатор из $\big(Z(a,R)^{(-)}\big)^k$, определяемый индуктивно: $(z_1, z_2) = z_1 z_2 - z_2 z_1$ и

$$\begin{aligned}(\ldots(z_1, z_2)\cdots z_j) = \big((\ldots(z_1, z_2)\cdots z_{j-1}), z_j\big) &= \\ = (\ldots(z_1, z_2)\cdots z_{j-1})z_j - z_j(\ldots(z_1, z_2)\cdots z_{j-1})&\end{aligned}$$

для каждого $j = 2, \ldots, k$. Поэтому при всех $k = 1, \ldots, m$, $n \geqslant 1$, $y_1, \ldots, y_{kn} \in Z(R)$ и $z_1, \ldots, z_{kn} \in Z(a, R)$ мы можем записать

$$\begin{aligned}&e(y_1 z_1, \ldots, y_k z_k)\ldots e\big(y_{k(n-1)+1} z_{k(n-1)+1}, \ldots, y_{kn} z_{kn}\big) = \\ &\quad = 1 + \Big(\sum_{i=1}^{n}\prod_{l=1}^{k} y_{k(i-1)+l}\big(\ldots\big(z_{k(i-1)+1}, z_{k(i-1)+2}\big)\cdots z_{ki}\big)\Big)a^k + \\ &\quad + \sum_{i=k+1}^{m} g_{ikn}(y_1 z_1, \ldots, y_{kn} z_{kn})a^i,\end{aligned}$$

подобрав соответствующие рациональные однородные некоммутативные многочлены $\{g_{ikn} = g_{ikn}(x_1, \ldots, x_{nk})\}$, $\deg g_{ikn} = i$, не зависящие от выбранных элементов $\{z_j, y_j\}$. По условию в подалгебре $Z(a, R)$ имеется элемент $d$, который не является двусторонним делителем нуля в алгебре $R$ и при каждом $k = 1, \ldots, m$ может быть записан в форме

$$d = \sum_{i=1}^{n(k)}\big(\ldots\big(u(k)_{k(i-1)+1}, u(k)_{k(i-1)+2}\big)\cdots u(k)_{ki}\big)$$

для некоторых $n(k) \geqslant 1$ и $u(k)_1, \ldots, u(k)_{kn(k)} \in Z(a, R)$. Значит, если воспользоваться найденным ранее выражением и леммой 4.13, мы сразу получаем, что для любых $k = 1, \ldots, m$, $y \in Z(R)$ группа $E(a, R)$ содержит элемент $e_k(y) = = \exp(yda^k)$.

Предположим, что для некоторого $j$, $1 \leqslant j \leqslant m-1$, в группу $B$ входит элемент $b \notin Z(R)$, для которого $bda^k = da^k b$, $k = j+1, \dots, m$. В частности, для $j = m-1$ существование такого элемента вытекает из леммы 3.14. Покажем, что в этом случае можно подобрать элемент $b' \in B \setminus Z(R)$, коммутирующий со всеми элементами $da^i$, $i = j, \dots, m$. Обозначим через $B'$ подгруппу группы $B$, порождённую всеми элементами вида $b^{e_j(y)} = e_j(y) b e_j(-y)$, где $y \in Z(R)$. Группа $B'$ слабо разрешима и является наименьшей из всех содержащих элемент $b$ подгрупп группы $B$, нормализуемых подгруппой $\{e_j(y) \mid y \in Z(R)\}$ группы $\mathrm{E}(a, R)$. Помимо этого, порождающие и, значит, все элементы группы $B'$ перестановочны с $da^k$, $k = j+1, \dots, m$. Поэтому при любых $h \in B'$, $l \geqslant 2$ и $p \geqslant 1$

$$
\begin{aligned}
h(da^j)^l h^{-1} &= hd^{l-1}h^{-1}da^{lj} = da^{lj}hd^{l-1}h^{-1},\\
(da^j)^l hd^p h^{-1} &= d^{l-1}hd^p h^{-1} da^{lj},\\
hd^p h^{-1}(da^j)^l &= da^{lj} hd^p h^{-1} d^{l-1},\\
(da^j)^l h(da^j)^p h^{-1} &= d^{l-1}hd^p h^{-1} da^{(l+p)j},\\
h(da^j)^p h^{-1}(da^j)^l &= da^{(l+p)j} hd^p h^{-1} d^{l-1}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Положим $h(y) = e_j(y) h e_j(-y)$ для всех $h \in B'$ и $y \in Z(R)$. Тогда, как и в лемме 3.14, можно для любых $k \geqslant 1$ и $y_1, \dots, y_{2^k} \in Z(R)$ записать $k$-й последовательный коммутатор $g_k\big(h(y_1), \dots, h(y_{2^k})\big)$ в виде

$$
\begin{aligned}
&g_1\big(h(y_1), h(y_2)\big) = e_j(y_1) h e_j(y_2 - y_1) h e_j(y_1 - y_2) h^{-1} e_j(y_2 - y_1) h^{-1} e_j(-y_2),\\
&g_k\big(h(y_1), \dots, h(y_{2^k})\big) =\\
&\quad = e_j(y_1)(h e_j(y_2 - y_1) h e_j(y_1 - y_2) h^{-1} e_j(y_2 - y_1) h^{-1} e_j(y_3 - y_2) \times \dots \times\\
&\quad \times h e_j(y_{2^{k-1}+1} - y_{2^{k-1}+2}) h e_j(y_{2^{k-1}+2} - y_{2^{k-1}+1}) \times\\
&\quad \times h^{-1} e_j(y_{2^{k-1}+1} - y_{2^{k-1}+2}) h^{-1} e_j(-y_{2^{k-1}+1})
\end{aligned}
$$

при $k \geqslant 2$. Положим $\hat{m}(1) = 1$ и $\hat{m}(k) = 4^{4^{k-2}}$, $k \geqslant 2$. Для каждого $l$, $2 \leqslant l \leqslant 4^{\hat{m}(k)}$, $k \geqslant 1$, обозначим через $S_l$ множество всех строк длины $l$, которые состоят из $\pm 1$ и $\pm 2$ и получаются из строки $(1, 1, -1, -1, \dots, 1, 1, -1, -1)$, сформированной из $\hat{m}(k)$ экземпляров набора символов $(1, 1, -1, -1)$, в результате применения к ней конечного числа следующих операций: замен соседней пары $(1, 1)$ на 2 или соседней пары $(-1, -1)$ на $-2$, вычёркиваний либо соседней пары $(1, -1)$, либо соседней пары $(-1, 1)$. Тогда, используя соотношения (3) для группы $B'$, мы получаем, что

$$
\begin{aligned}
&da^j g_k\big(h(y_1), \dots, h(y_{2^k})\big) da^j =\\
&\quad = da^j e_j(y_1) h e_j(y_2 - y_1) h e_j(y_1 - y_2) h^{-1} e_j(y_2 - y_1) \cdots h^{-1} e_j(-y_{2^{k-1}+1}) da^j =\\
&\quad = d^2 a^{2j} + \sum_{l=2}^{4^{\hat{m}(k)}} \sum_{(s_1, \dots, s_l) \in S_l} f_{kl}(s_1, \dots, s_l) da^j h^{s_1} da^j h^{s_2} da^j \cdots h^{s_{l-1}} da^j h^{s_l} da^j +
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{2\leqslant l'\leqslant \min\{4^{\hat m(k)},m/j-2\}}\ \sum_{(s_1,\ldots,s_{l'})\in S_{l'}}\ \sum_{1\leqslant t_1,\ldots,t_{l'+1}\leqslant m} f'_{kl'}(s_1,\ldots,s_{l'},t_1,\ldots,t_{l'+1})\times$$
$$\times\, d^{t_1}h^{s_1}d^{t_2}h^{s_2}d^{t_3}\cdots h^{s_{l'-1}}d^{t_{l'}}h^{s_{l'}}d^{t_{l'+1}+1}a^{(t_1+\ldots+t_{l'+1}+1)j},$$

где $f_{kl}(s_1,\ldots,s_l)$ — соответствующие (возможно, тривиальные) суммы с рациональными коэффициентами произведений $l-1$ разности $y_p-y_q$, а $f'_{kl'}(s_1,\ldots,s_{l'},t_1,\ldots,t_{l'+1})$ — суммы с рациональными коэффициентами произведений степеней $y_1$, $y_{2^{k-1}+1}$ и степеней разностей $y_p-y_q$ с $1\leqslant p\neq q\leqslant 2^k$ из числа встречающихся в записи коммутатора $g_k\big(h(y_1),\ldots,h(y_{2^k})\big)$.

Аналогично лемме 3.14 для любых $h\in B'$, $v_1,v_2,v_3\in Z(R)$ и $1\leqslant p\neq q\neq$ $\neq k\leqslant 3$ определим элементы

$$h_1(p,q)=[h(v_p),h(v_q)]=e_j(v_p)he_j(v_q-v_p)he_j(v_p-v_q)h^{-1}e_j(v_q-v_p)h^{-1}e_j(-v_q),$$
$$h_2(p,p)=[h_1(p,q),h_1(p,k)],$$
$$h_2(q,q)=[h_1(q,p),h_1(q,k)],\quad h_2(k,k)=[h_1(k,q),h_1(k,p)],$$
$$h_{2l+1}(p,q)=[h_{2l}(p,p),h_{2l}(q,q)],\quad h_{2l+2}(p,p)=[h_{2l+1}(p,q),h_{2l+1}(p,k)],$$
$$h_{2l+2}(q,q)=[h_{2l+1}(q,p),h_{2l+1}(q,k)],\quad h_{2l+2}(k,k)=[h_{2l+1}(k,q),h_{2l+1}(k,p)]$$

при всех $l\geqslant 1$. Нетрудно показать, что каждый элемент $h_n(s,t)$ предста́вим в виде

$$h_n(s,t)=g_n\big(h(v_{p_1}),\ldots,h(v_{p_{2^n}})\big)=$$
$$=e_j(v_s)he_j(w_1)he_j(w_2)h^{-1}e_j(w_3)h^{-1}e_j(w_4)\times\ldots\times$$
$$\times\, he_j(w_l)he_j(w_{l+1})h^{-1}e_j(w_{l+2})h^{-1}e_j(w_{l+3})\times\ldots\times$$
$$\times\, he_j(w_{4^{\hat m(n)}-3})he_j(w_{4^{\hat m(n)}-2})h^{-1}e_j(w_{4^{\hat m(n)}-1})h^{-1}e_j(-v_t)$$

для некоторых $1\leqslant p_i\leqslant 3$ и $w_l\in\{v_p-v_q\mid 1\leqslant p\neq q\leqslant 3\}$. Поэтому найдутся $m_1,m_2,m_3\geqslant 0$, такие что $m_1+m_2+m_3=4^{\hat m(n)}-1$ и

$$da^jh_n(s,t)da^j=$$
$$=d^2a^{2j}+c(v_1-v_2)^{m_1}(v_1-v_3)^{m_2}(v_2-v_3)^{m_3}\times$$
$$\times\, da^j(hda^jhda^jh^{-1}da^jh^{-1}da^j)^{\hat m(n)}+$$
$$+\sum_{l=2}^{4^{\hat m(n)}-1}\ \sum_{(s_1,\ldots,s_l)\in S_l}\Bigg(\sum_{\substack{0\leqslant q_i\leqslant m_i,\ i=1,2,3\\ q_1+q_2+q_3=l-1}} x_{(n,l,s_1,\ldots,s_l)}(q_1,q_2,q_3)\times$$
$$\times\,(v_1-v_2)^{q_1}(v_1-v_3)^{q_2}(v_2-v_3)^{q_3}\Bigg)da^jh^{s_1}da^j\cdots da^jh^{s_l}da^j+$$
$$+\sum_{2\leqslant l'\leqslant \min\{4^{\hat m(n)},m/j-2\}}\ \sum_{(s_1,\ldots,s_{l'})\in S_{l'}}\ \sum_{1\leqslant t_1,\ldots,t_{l'+1}\leqslant m}$$

$$\left(\sum_{\substack{0\leqslant p_1\leqslant t_1-1\\ 0\leqslant p_2\leqslant t_{l'+1}}}\ \sum_{\substack{0\leqslant q_i'\leqslant mm_i,\ i=1,2,3\\ p_1+p_2+q_1'+q_2'+q_3'=t_1+\ldots+t_{l'+1}-1}} x'_{(n,l',s_1,\ldots,s_{l'},t_1,\ldots,t_{l'+1})}(p_1,p_2,q_1',q_2',q_3')\times\right.$$
$$\left.\times\, v_s^{p_1}v_t^{p_2}(v_1-v_2)^{q_1'}(v_1-v_3)^{q_2'}(v_2-v_3)^{q_3'}\right)\times$$
$$\times\, d^{t_1}h^{s_1}d^{t_2}h^{s_2}d^{t_3}\ldots h^{s_{l'-1}}d^{t_{l'}}h^{s_{l'}}d^{t_{l'+1}+1}a^{(t_1+\ldots+t_{l'+1}+1)j}$$

для подходящих $c\in\{\pm1\}$ и полиномов

$$x_{(n,l,s_1,\ldots,s_l)}(q_1,q_2,q_3),x'_{(n,l',s_1,\ldots,s_{l'},t_1,\ldots,t_{l'+1})}(p_1,p_2,q_1',q_2',q_3')\in\mathbb{Q}.$$

Если в последнем выражении элемент $h$ заменить элементом $h'=[h,e_j(1)]$, то, воспользовавшись соотношениями (3) для группы $B'$ и равенствами

$$da^j[h,e_j(1)]^{\varepsilon}da^j=d^2a^{2j}e_j(-\varepsilon1)+\varepsilon da^jhda^jh^{-1}da^j+$$
$$+\sum_{1\leqslant l_1,l_2,l_3\leqslant m}c_\varepsilon(l_1,l_2,l_3)d^{l_1}hd^{l_2}h^{-1}d^{l_3+1}a^{(l_1+l_2+l_3+1)j},$$
$$da^j[h,e_j(1)]^{2\varepsilon}da^j=$$
$$=d^2a^{2j}e_j(-\varepsilon2)+\varepsilon(2da^jhda^jh^{-1}da^j-da^jhda^jh^{-1}da^jhda^jh^{-1}da^j)+$$
$$+\sum_{1\leqslant l_1,l_2,l_3\leqslant m}c_{2\varepsilon}(l_1,l_2,l_3)d^{l_1}hd^{l_2}h^{-1}d^{l_3+1}a^{(l_1+l_2+l_3+1)j}+$$
$$+\sum_{1\leqslant l_1,l_2,l_3,l_4,l_5\leqslant m}c_{2\varepsilon}(l_1,l_2,l_3,l_4,l_5)d^{l_1}hd^{l_2}h^{-1}d^{l_3}hd^{l_4}h^{-1}d^{l_5+1}a^{(l_1+l_2+l_3+l_4+l_5+1)j}$$

с $\varepsilon\in\{\pm1\}$, которые выполняются для некоторых рациональных $c_\varepsilon(l_1,l_2,l_3)$, $c_{2\varepsilon}(l_1,l_2,l_3)$ и $c_{2\varepsilon}(l_1,l_2,l_3,l_4,l_5)$, можно записать

$$da^jh_n'(s,t)da^j=$$
$$=d^2a^{2j}+c(v_1-v_2)^{m_1}(v_1-v_3)^{m_2}(v_2-v_3)^{m_3}da^j(hda^jh^{-1}da^j)^{4^{\hat m(n)}}+$$
$$+\sum_{l=2}^{4^{\hat m(n)}-1}\ \sum_{(s_1,\ldots,s_l)\in S_l}$$
$$\left(\sum_{\substack{0\leqslant q_i\leqslant m_i,\ i=1,2,3\\ q_1+q_2+q_3=l-1}}x_{(n,l,s_1,\ldots,s_l)}(q_1,q_2,q_3)(v_1-v_2)^{q_1}(v_1-v_3)^{q_2}(v_2-v_3)^{q_3}\right)\times$$
$$\times\left(\sum_{p=l}^{|s_1|+\ldots+|s_l|}h_{(s_1,\ldots,s_l)}(p)da^j(hda^jh^{-1}da^j)^p\right)+\sum_{3\leqslant q\leqslant m/j}f_q(v_1,v_2,v_3)d^qa^{qj}+$$
$$+\sum_{0\leqslant k\leqslant(m/j-4)/2}\ \sum_{1\leqslant t_0,\ldots,t_{2(k+1)}\leqslant m}f_{(n,k,s,t,t_0,\ldots,t_{2(k+1)})}(v_1,v_2,v_3)\times$$
$$\times\, d^{t_0}hd^{t_1}h^{-1}\cdots d^{t_{2i}}hd^{t_{2i+1}}h^{-1}\cdots d^{t_{2k}}hd^{t_{2k+1}}h^{-1}d^{t_{2(k+1)}+1}a^{(t_0+\ldots+t_{2(k+1)}+1)j}$$

для соответствующих чисел $h_{(s_1,\ldots,s_l)}(p) \in \mathbb{Q}$ и полиномов

$$f_q(x_1,x_2,x_3), f_{(n,k,s,t,t_0,\ldots,t_{2(k+1)})}(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{Q}[x_1,x_2,x_3].$$

Возьмём любой элемент $w \in Z(R)$ и положим в последнем равенстве $v_1 = 0$, $v_2 = -w$ и $v_3 = -w^2$. Тогда оно примет вид

$$\begin{aligned} da^j h_n'(s,t) da^j &= d^2a^{2j} + \sum_{l=2}^{4^{\hat m(n)}} f_{nl}(w) da^j (hda^jh^{-1}da^j)^l + \\ &+ \sum_{3\leqslant q\leqslant m/j} f_q'(w) d^q a^{qj} + \sum_{0\leqslant k\leqslant (m/j-4)/2} \ \sum_{1\leqslant t_0,\ldots,t_{2(k+1)}\leqslant m} f'_{(n,k,s,t,t_0,\ldots,t_{2(k+1)})}(w) \times \\ &\times d^{t_0}hd^{t_1}h^{-1}\cdots d^{t_{2k}}hd^{t_{2k+1}}h^{-1}d^{t_{2(k+1)}+1}a^{(t_0+\ldots+t_{2(k+1)}+1)j}, \end{aligned}$$

где $\{f_{nl}, f_q', f'_{(n,k,s,t,t_0,\ldots,t_{2(k+1)})}\}$ — полиномы с рациональными коэффициентами, причём $f_{n4^{\hat m(n)}}$ имеет степень $m_1 + 2(m_2+m_3)$ и его старший коэффициент равен 1 или $-1$.

Так как группа $B'$ является слабо разрешимой, для любых $v_1,v_2,v_3 \in Z(R)$ и $h \in B'$ можно подобрать такой элемент $k(v_1,v_2,v_3,h) \geqslant 1$, что $h_n(s,t) = 1$ при всех $n \geqslant k(v_1,v_2,v_3,h)$ и $1 \leqslant s,t \leqslant 3$. Поэтому для произвольных $h \in B'$, $w \in Z(R)$ и $n \geqslant k(0,-w,-w^2,h')$

$$\begin{aligned} 0 = da^jh_n'(s,t)da^j - d^2a^{2j} &= \sum_{l=2}^{4^{\hat m(n)}} f_{nl}(w) da^j (hda^jh^{-1}da^j)^l + \\ &+ \sum_{3\leqslant q\leqslant m/j} f_q'(w) d^q a^{qj} + \sum_{0\leqslant k\leqslant (m/j-4)/2} \ \sum_{1\leqslant t_0,\ldots,t_{2(k+1)}\leqslant m} f'_{(n,k,s,t,t_0,\ldots,t_{2(k+1)})}(w) \times \\ &\times d^{t_0}hd^{t_1}h^{-1}\cdots d^{t_{2k}}hd^{t_{2k+1}}h^{-1}d^{t_{2(k+1)}+1}a^{(t_0+\ldots+t_{2(k+1)}+1)j}. \end{aligned} \tag{4}$$

Более того, вновь используя соотношения (3), мы получаем, что при $\delta,\delta' = 0,1$

$$\begin{aligned} 0 &= (hda^jh^{-1})^\delta (da^jh_n'(s,t)da^j - d^2a^{2j})(hda^jh^{-1})^{\delta'} = \\ &= \sum_{l=2}^{4^{\hat m(n)}} f_{nl}(w)(hda^jh^{-1})^\delta da^j(hda^jh^{-1}da^j)^l(hda^jh^{-1})^{\delta'} + \\ &+ \sum_{3\leqslant q\leqslant m/(j+\delta+\delta')} f_q'(w) hd^\delta h^{-1} d^{q-1} hd^{\delta'}h^{-1}da^{(q+\delta+\delta')j} + \\ &+ \sum_{0\leqslant k\leqslant (m/j-4-\delta-\delta')/2} \ \sum_{1\leqslant t_0,\ldots,t_{2(k+1)}\leqslant m} f'_{(n,k,s,t,t_0,\ldots,t_{2(k+1)})}(w) \times \\ &\times hd^\delta h^{-1}d^{t_0}hd^{t_1}h^{-1}\cdots d^{t_{2k}}hd^{t_{2k+1}}h^{-1}d^{t_{2(k+1)}}hd^{\delta'}h^{-1}da^{(t_0+\ldots+t_{2(k+1)}+\delta+\delta'+1)j}. \end{aligned} \tag{5}$$

Алгебру $R$ можно вложить в кольцо частных $RS^{-1}$ относительно системы ненулевых элементов её центра $S = Z(R)\setminus\{0\}$. Алгебра $RS^{-1}$ является первичной как над основным полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, так и над своим центром $Z(RS^{-1})$, совпадающим с полем частных области $Z(R)$, $Q = Z(RS^{-1}) = Z(R)S^{-1}$. При этом поле частных $Q$ не является алгебраическим расширением поля $\mathbb{Q}$, поскольку по условию алгебра $Z(R)$ содержит элементы, которые не являются целыми над $\mathbb{Q}$. Для каждого такого элемента $w \in Z(R)$ элемент $f_{n4^{\hat{m}(n)}}(w)$ отличен от нуля при всех $n \geqslant 1$. Поэтому из соотношений (4) и (5) вытекает, что для любых $n \geqslant k(0, -w, -w^2, h')$ и $\delta, \delta' = 0, 1$

$$
\begin{aligned}
&Q(hda^j h^{-1})^\delta da^j (hda^j h^{-1} da^j)^{4^{\hat{m}(n)}} (hda^j h^{-1})^{\delta'} \subseteq \\
&\subseteq \sum_{l=2}^{4^{\hat{m}(n)}-1} Q(hda^j h^{-1})^\delta da^j (hda^j h^{-1} da^j)^l (hda^j h^{-1})^{\delta'} + \\
&+ \sum_{3 \leqslant q \leqslant m/(j+\delta+\delta')} Qhd^\delta h^{-1} d^{q-1} hd^{\delta'} h^{-1} da^{(q+\delta+\delta')j} + \\
&+ \sum_{0 \leqslant k \leqslant (m/j-4-\delta-\delta')/2} \; \sum_{1 \leqslant t_0,\ldots,t_{2(k+1)} \leqslant m} Qhd^\delta h^{-1} d^{t_0} hd^{t_1} h^{-1} \times \ldots \times \\
&\times d^{t_{2k}} hd^{t_{2k+1}} h^{-1} d^{t_{2(k+1)}} hd^{\delta'} h^{-1} da^{(t_0+\ldots+t_{2(k+1)}+\delta+\delta'+1)j}.
\end{aligned}
$$

Значит, подпространство $R(h, j)$ алгебры $RS^{-1}$, порождённое над полем $Q$ единицей 1 этой алгебры и всеми элементами вида

1) $da^j (hda^j h^{-1} da^j)^l$, $(hda^j h^{-1} da^j)^l$, $(da^j hda^j h^{-1})^l$ и $hda^j h^{-1} (da^j hda^j h^{-1})^l$ для $l \geqslant 1$,
2) $(da^j)^q = d^q a^{qj}$ для $1 \leqslant q \leqslant m/j$,
3) $d^{p_0-1} hd^{p_1} h^{-1} \cdots d^{p_{2k}} hd^{p_{2k+1}} h^{-1} d^{p_{2(k+1)}} a^{(p_0+\ldots+p_{2(k+1)})j}$ для $0 \leqslant k \leqslant (m/j - 3)/2$ и $1 \leqslant p_0, \ldots, p_{2(k+1)} \leqslant m$,

конечномерно над $Q$. Из соотношений (3) также следует, что пространство $R(h, j)$ совпадает с подалгеброй алгебры $RS^{-1}$, которую над полем $Q$ порождают элементы 1, $da^j$ и $hda^j h^{-1}$.

По построению элементы $[h, e_j(y)] = \exp(yhda^j h^{-1}) \exp(-yda^j)$, $y \in Q$, входят в группу $\mathrm{U}\big(R(h, j)\big)$ обратимых элементов алгебры $R(h, j)$. При этом элементы $[h, e_j(u)]$, $u \in Z(R)$, содержатся в слабо разрешимой подгруппе $B' \cap \mathrm{U}\big(R(h, j)\big)$ этой группы, нормализуемой её подгруппой $\{e_j(u) \mid u \in Z(R)\}$. В силу теоремы 1.35 и следствия 2.7 подгруппа $B' \cap \mathrm{U}\big(R(h, j)\big)$, как и все слабо разрешимые подгруппы группы обратимых элементов конечномерной алгебры над полем, является разрешимой.

Следовательно, в группе $B'$ для любого элемента $h \in B'$ подгруппа $B'_h$, порождённая всеми элементами $e_j(v)[h, e_j(u)]e_j(-v)$, $u, v \in Z(R)$, является разрешимой.

Если каждая подгруппа $B'_h$, $h \in B'$, принадлежит центру $Z(R)$ алгебры $R$, то из замечаний, сделанных в начале доказательства, сразу следует, что все эти подгруппы являются единичными и, значит, элемент $da^j$ перестановочен с любым элементом $h \in B'$. Поэтому в данной ситуации в качестве элемента $b'$

можно использовать произвольный элемент из $B' \setminus Z(R)$, в частности исходный элемент $b$.

В противном случае существует элемент $h \in B'$, при котором подгруппа $B'_h$ не входит в центр $Z(R)$ алгебры $R$. Поскольку группа $B'_h$ разрешима, это означает также, что ${B'_h}^{(k)} \not\subset Z(R)$ и ${B'_h}^{(k+1)} \subset Z(R)$ для некоторого $k \geqslant 0$. Группа $B'_h$ вместе со всеми своими коммутантами ${B'_h}^{(i)}$ нормализуется подгруппой $\{e_j(y) \mid y \in Z(R)\}$. Поэтому $k$-й коммутант ${B'_h}^{(k)}$ удовлетворяет требованиям предложения 3.10, и следовательно, для любого элемента $g \in {B'_h}^{(k)} \setminus Z(R)$ цепочка $\{g_l\}_{l \geqslant 0}$, где $g_0 = g$ и $g_{l+1} = [g_l, e_j(1)]$ при всех $l \geqslant 0$, содержит такой элемент $g_p \notin Z(R)$, $p \geqslant 0$, что $g_p da^j = da^j g_p$. При этом, как и всякий элемент группы $B'$, элемент $g_p$ коммутирует ещё и с каждым элементом $da^s$, $s = j+1, \ldots, m$. Значит, можно положить $b' = g_p$.

Итак, элемент $b'$ с необходимыми свойствами всегда существует. Повторяя данное рассуждение последовательно для $j = m-1, \ldots, 1$, можно получить также элемент $\hat{b} \in B \setminus Z(R)$, коммутирующий с любым элементом $da^k$, $k = 1, \ldots, m$.

Тогда для всех $l \geqslant 1$ и $i_1, \ldots, i_{2l+1} \geqslant 1$

$$\begin{aligned} &da^{i_1}\hat{b}a^{i_2}\hat{b}^{-1}a^{i_3}\cdots\hat{b}a^{i_{2s}}\hat{b}^{-1}a^{i_{2s+1}}\cdots\hat{b}a^{i_{2l}}\hat{b}^{-1}a^{i_{2l+1}} = \\ &\quad = da^{i_1+\ldots+i_{2l+1}} = a^{i_1+\ldots+i_{2l+1}}d = \\ &\quad = a^{i_1}\hat{b}a^{i_2}\hat{b}^{-1}a^{i_3}\cdots\hat{b}a^{i_{2s}}\hat{b}^{-1}a^{i_{2s+1}}\cdots\hat{b}a^{i_{2l}}\hat{b}^{-1}a^{i_{2l+1}}d. \end{aligned}$$

Поскольку $d$ не является двусторонним делителем нуля и $a^{m+1} = 0$, отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &a^{j_1}\hat{b}a^{j_2}\hat{b}^{-1}a^{j_3}\cdots\hat{b}a^{j_{2l}}\hat{b}^{-1}a^{j_{2l+1}} = 0, \\ &\qquad\qquad l \geqslant 1, \quad j_1, \ldots, j_{2l+1} \geqslant 1, \quad j_1 + \ldots + j_{2l+1} > m. \end{aligned} \tag{6}$$

Рассмотрим теперь цепочку элементов $\{b_i\}_{i \geqslant 0}$, в которой $b_0 = \hat{b}$ и $b_{i+1} = [b_i, e(1)]$ для всех $i \geqslant 0$. При помощи индукции несложно показать, что при каждом $j \geqslant 2$ элементы $b_j$ и $b_j^{-1}$ представимы в виде

$$\begin{aligned} b_j^{\pm 1} = 1 + \sum_{1 \leqslant k \leqslant 2^{j-1}} \sum_{\substack{1 \leqslant l_1, \ldots, l_{2k-1} \leqslant m,\ 0 \leqslant s, s' \leqslant m \\ j \leqslant s+s'+l_1+\ldots+l_{2k-1} \leqslant (2^j+1)m}} & q_{\pm}(j, s, s', l_1, \ldots, l_{2k-1}) \times \\ & \times a^s\hat{b}a^{l_1}\hat{b}^{-1}a^{l_2}\cdots\hat{b}a^{l_{2t-1}}\hat{b}^{-1}a^{l_{2t}}\cdots\hat{b}a^{l_{2k-1}}\hat{b}^{-1}a^{s'} \end{aligned}$$

для подходящих $\{q_{\pm}(j, s, s', l_1, \ldots, l_{2k-1})\} \subset \mathbb{Q}$. Тогда из соотношения (6) вытекает, что $b_j = 1$ при любом $j > m$. Поэтому можно выбрать номер $p \geqslant 0$, для которого $b_p \neq b_{p+1} = 1$. Применяя выводы из начала доказательства, мы получаем также, что $b_p \in \big(B \cap Z(a, R)\big) \setminus Z(R)$.

Положим $\tilde{b} = b_p$. По выбору элемента $\tilde{b}$ для всех $u \in Z(a, R)$ имеем

$$[\tilde{b}, e(u)] = e(\tilde{b}u\tilde{b}^{-1})e(-u) \in \mathrm{E}(a, R).$$

Поскольку подалгебра $aZ(a,R)$ алгебры $R$ нильпотентна и

$$\big(aZ(a,R)\big)^{m+1} = a^{m+1}Z(a,R)^{m+1} = \{0\},$$

нильпотентными являются все подгруппы группы $1 + aZ(a,R)$ и среди них $\mathrm{E}(a,R)$,

$$[\dots[\mathrm{E}(a,R), \underbrace{\mathrm{E}(a,R)]\dots\mathrm{E}(a,R)]}_{m} =$$

$$= [\dots[1 + aZ(a,R), \underbrace{1 + aZ(a,R)]\dots 1 + aZ(a,R)]}_{m} = \{1\}.$$

Ненулевые элементы центра $Z(R)$ первичной алгебры $R$ не могут быть делителями нуля. Поэтому пересечение $aZ(a,R)\cap Z(R)$ равно нулю и, следовательно, все неединичные элементы группы $1 + aZ(a,R)$ не принадлежат центру алгебры $R$.

Отметим также, что для любых $r \in R$ и $u \in Z(a,R)$ равенство $re(u) = e(u)r$ выполняется, если и только если $rua = uar$. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть эквивалентную указанным условиям систему соотношений $r(e(u)-1)^k = (e(u)-1)^k r$, $k = 1,\dots,m$.

Суммируя сказанное, мы получаем, что существуют следующие две возможности: либо $\tilde{b}ua = ua\tilde{b}$ при всех $u \in Z(a,R)$, либо мы можем определить целое $1 \leqslant k \leqslant m+1$ и элементы $u_1,\dots,u_k \in Z(a,R)$, такие что

$$\tilde{b}' = [\dots[\tilde{b}, e(u_1)]\dots e(u_k)] \neq 1, \quad \tilde{b}'ua = ua\tilde{b}', \quad u \in Z(a,R).$$

Таким образом, в любом случае группа $B$ имеет элемент с требуемыми свойствами. $\square$

Естественно, что в этом утверждении алгебру $Z(a,R)$ можно заменить любой её подалгеброй, содержащей центр $Z(R)$ алгебры $R$ и такой, что в $m$-м члене нижнего центрального ряда присоединённой к ней алгебры Ли имеется по крайней мере один элемент, который не является двусторонним делителем нуля в $R$. В частности, при $m = 1$ в качестве подобной подалгебры можно использовать центр $Z(R)$ алгебры $R$.

Как известно, в первичном кольце тогда и только тогда имеются ненулевые нильпотентные элементы, когда оно содержит нетривиальные делители нуля. Полезным обобщением этого свойства в контексте леммы 4.14 является следующее замечание.

**Замечание 4.15.** Пусть $R$ — первичное кольцо с единицей, в котором $2 \neq 0$, $n \geqslant 1$ и $\big(R^{(-)}\big)^n$ — $n$-й член нижнего центрального ряда присоединённого к кольцу $R$ кольца Ли $R^{(-)}$. Тогда подмножество $\big(R^{(-)}\big)^n$ кольца $R$ не содержит ненулевых делителей нуля (односторонних или двусторонних) в том и только в том случае, если в $R$ нет нетривиальных нильпотентных элементов.

**Доказательство.** Допустим, что в кольцо $R$ входит ненулевой нильпотентный элемент $a$, $a^{m-1} \neq a^m = 0$ для некоторого $m \geqslant 1$. Рассмотрим произвольную цепочку элементов $\{b_i\}_{i\geqslant 0}$, в которой $b_0 = a^{m-1}$ и

$$b_{i+1} = \big((b_i, r_{i+1}), b_i\big) = (b_i r_{i+1} - r_{i+1} b_i, b_i) = 2b_i r_{i+1} b_i - r_{i+1} b_i^2 - b_i^2 r_{i+1}$$

для $r_{i+1} \in R$ при всех $i \geqslant 0$. Используя индукцию, несложно показать, что $b_i^2 = 0$ и $b_{i+1} = 2b_i r_{i+1} b_i \in \big(R^{(-)}\big)^{2^{i+2}-1}$ для каждого $i \geqslant 0$. Кольцо $R$ не содержит ненулевых строго нильпотентных элементов. Поэтому существует по крайней мере одна цепочка $\{b_i\}_{i\geqslant 0}$ такого вида, которая состоит из ненулевых элементов. Таким образом, если в кольце $R$ имеются нетривиальные нильпотентные элементы, то они содержатся в его подмножестве $\big(R^{(-)}\big)^n$ при любом $n \geqslant 1$.

С другой стороны, если при некотором целом $n \geqslant 1$ множество $\big(R^{(-)}\big)^n$ содержит ненулевой правый делитель нуля $c$, $c^2 \neq 0$, $dc = 0$ для подходящего $0 \neq d \in R$, то

$$(c, rd) = crd - rdc = crd \in \big(R^{(-)}\big)^{n+1}, \quad (crd)^2 = 0$$

при всех $r \in R$. Так как кольцо $R$ первично, мы можем подобрать такой элемент $h \in R$, что $chr \neq 0$. Аналогичное построение можно провести также для левых делителей нуля из $\big(R^{(-)}\big)^n$. Значит, множество $\big(R^{(-)}\big)^n$, имеющее нетривиальные делители нуля, содержит и ненулевые нильпотентные элементы. $\square$

**Замечание 4.16 ([53, лемма 2.6]).** Пусть $R$ — ассоциативная алгебра с единицей над полем нулевой характеристики, $\mathfrak{G}$ — конечномерная простая комплексная алгебра Ли с системой корней $\Sigma$ и $\pi$ — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{G}$ на конечномерном комплексном векторном пространстве $V$ размерности $n$. Тогда алгебра матриц $\mathrm{M}_n(R)$ и подкольцо, порождённое элементами элементарной группы Шевалле $E_\pi(\Sigma, R)$, совпадают, а потому в группе $\mathrm{GL}_n(R)$ центр $C\big(\mathrm{GL}_n(R)\big)$ равен централизатору её подгруппы $E_\pi(\Sigma, R)$.

Другими словами, кольцо эндоморфизмов $\mathrm{End}_R\big(M(R)\big)$ модуля $M(R)$ (см. выше) совпадает с подкольцом, порождённым автоморфизмами из $E_\pi(\Sigma, R)$.

Напомним также, что центр полной линейной группы $\mathrm{GL}_n(R)$ над любым кольцом с единицей $R$ определяется равенством

$$C\big(\mathrm{GL}_n(R)\big) = \big\{cE \mid c \in \mathrm{U}\big(Z(R)\big)\big\} = \mathrm{GL}_n(R) \cap Z\big(\mathrm{M}_n(R)\big),$$

где, как и прежде, через $Z(R)$ и $Z\big(\mathrm{M}_n(R)\big) = \{zE \mid z \in Z(R)\}$ обозначены центры кольца $R$ и кольца матриц над ним $\mathrm{M}_n(R)$, через $\mathrm{U}\big(Z(R)\big)$ — группа обратимых элементов кольца $Z(R)$.

**Замечание 4.17 ([53, замечание 2.5]).** Пусть $\Sigma^+$ — подсистема положительных корней системы корней $\Sigma$. Тогда элементы системы $\Sigma^+ = \{\beta_k\}_{k\geqslant 1}$ можно перенумеровать таким образом, что для любых $i, j \geqslant 1$ выполняется включение

$$\{m\beta_i + n\beta_j \in \Sigma \mid m, n > 0\} \subseteq \{\beta_p \mid 1 \leqslant p \leqslant \max\{i, j\} - 1\}.$$

Используя введённые ранее обозначения, мы можем переформулировать выводы пунктов 2—4 доказательства теоремы 2.2 из работы [53] следующим образом.

**Предложение 4.18.** *Пусть $R$ — ассоциативная алгебра с единицей над полем нулевой характеристики, $\mathfrak{G}$ — конечномерная простая комплексная алгебра Ли с системой корней $\Sigma$ и подсистемой положительных корней $\Sigma^+$, $\pi$ — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{G}$ на конечномерном комплексном векторном пространстве $V$ размерности $n$, $\mu^+$ и $\mu^-$ — старшие веса представления $\pi$, отвечающие подсистемам $\Sigma^+$ и $-\Sigma^+$, $A$ — такая нормализуемая элементарной группой Шевалле $E_\pi(\Sigma, R)$ подгруппа в группе $\mathrm{GL}_n(R)$, что $A \cap \mathrm{M}_n\big(Z(R)\big) = A \cap C\big(\mathrm{GL}_n(R)\big) \neq A$, где $Z(R)$ и $C\big(\mathrm{GL}_n(R)\big)$ — центры алгебры $R$ и группы $\mathrm{GL}_n(R)$. Если в группе $A$ имеется элемент $g \notin C\big(\mathrm{GL}_n(R)\big)$, удовлетворяющий для любых $u \in Z(R)$ и $\tau \in \Sigma^+$ условию $[g, x_\tau(u)] = E$, то она содержит также элемент $E + yE^{11}_{\mu^-\mu^+}$ для некоторого $y \in R \setminus Z(R)$.*

**Замечание 4.19.** Пусть $R$ — алгебра с единицей 1 над полем $\mathbb{F}$, $y$ — нильпотентный элемент алгебры $R$ и $g$ — многочлен из $\mathbb{F}[x]$ с ненулевым постоянным коэффициентом. Тогда в алгебре $R$ подкольцо $Y$, которое порождают элементы $1 + fyg(fy)$, $f \in \mathbb{F}$, совпадает с подкольцом

$$Y' = \mathbb{Z} \cdot 1 + \sum_{i \geqslant 1} \mathbb{F} y^i.$$

**Доказательство.** Для нулевого $y$ это утверждение выполняется очевидным образом. Поэтому можно считать, что $y^k \neq y^{k+1} = 0$ для некоторого $k \geqslant 1$. Ясно, что подкольцо $Y$ содержит единицу 1 алгебры $R$ и входит в подкольцо $Y'$ указанного вида. По условию $g(x) = g_0 + g_1 x + \ldots + g_p x^p$ для некоторых $g_j \in \mathbb{F}$, $p \geqslant 0$, где $g_0$, $g_p \neq 0$. Следовательно, при всех $m \geqslant 1$ и $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{F}$

$$\prod_{i=1}^{m} f_i y g(f_i y) = \prod_{i=1}^{m} \Bigg( \sum_{j=0}^{\min\{p,k-1\}} g_j f_i^{j+1} y^{j+1} \Bigg) = \\ = g_0^m \Bigg( \prod_{i=1}^{m} f_i \Bigg) y^m + \sum_{q=m+1}^{k} h_{qm}(f_1, \ldots, f_m) y^q,$$

где через $h_{qm} = h_{qm}(x_1, \ldots, x_m)$ обозначен подходящий однородный коммутативный многочлен с коэффициентами из поля $\mathbb{F}$ от переменных $x_1, \ldots, x_m$, не зависящий от выбранных элементов $f_1, \ldots, f_m$. Применяя последнее выражение последовательно для всех $m = k, \ldots, 1$, мы сразу получаем, что кольцо $Y$ содержит все элементы вида $fy^m$, $m = k, \ldots, 1$, $f \in \mathbb{F}$. Значит, подкольца $Y$ и $Y'$ алгебры $R$ совпадают.

В частности, если поле $\mathbb{F}$ имеет нулевую характеристику, то подкольцо $Y = Y'$ совпадает с подкольцом алгебры $R$, которое порождают элементы $(1 + fy)^l$, $f \in \mathbb{F}$, где $l$ — произвольное фиксированное ненулевое целое число, а также с подкольцом, порождённым элементами $\exp(fy)$, $f \in \mathbb{F}$. $\square$

Используя стандартные соображения, связанные с определителем Вандермонда, несложно вывести следующее утверждение.

**Замечание 4.20.** Пусть $R$ — алгебра с единицей 1 над бесконечным полем $\mathbb{F}$. Тогда для любых $n \geqslant 0$ и $r_0, \ldots, r_n \in R$ подпространство алгебры $R$, которое порождают элементы $\sum\limits_{i=0}^{n} f^i r_i$, $f \in \mathbb{F}$, совпадает с её подпространством $\sum\limits_{i=0}^{n} \mathbb{F} r_i$.

**Определение 4.21.** Пусть $m \geqslant 1$ и $R$ — ассоциативное кольцо. Будем говорить, что кольцо $R$ удовлетворяет $m$-условию, если $m$-й член $\bigl(R^{(-)}\bigr)^m$ нижнего центрального ряда присоединённого к нему кольца Ли $R^{(-)}$ или равен нулю, или содержит по крайней мере один элемент, не являющийся двусторонним делителем нуля в $R$.

**Теорема 4.22.** *Пусть $\mathfrak{G}$ — конечномерная простая комплексная алгебра Ли с системой корней $\Sigma$ ранга $l \geqslant 1$, $\pi$ — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{G}$ на конечномерном комплексном векторном пространстве $V$ размерности $n > 3$, $m$ — максимальный среди индексов нильпотентности образов элементов корневых подпространств алгебры $\mathfrak{G}$ в представлении $\pi$, $R$ — ассоциативная алгебра с единицей 1 над полем $\mathbb{F}$ характеристики нуль, для которой каждая первичная фактор-алгебра, не содержащая ненулевых локально нильпотентных идеалов, имеет центр, не являющийся целой алгеброй над полем рациональных чисел, и в случае $m \geqslant 3$ удовлетворяет $(m-1)$-условию. Тогда во всякой нормализуемой элементарной группой Шевалле $E_\pi(\Sigma, R)$ подгруппе $A$ группы $\mathrm{GL}_n(R)$ выполняется равенство*

$$\mathrm{T}(A) = C\Bigl(A, E + \mathrm{M}_n\bigl(\mathrm{L}(R)\bigr)\Bigr) = A \cap C\Bigl(\mathrm{GL}_n(R), E + \mathrm{M}_n\bigl(\mathrm{L}(R)\bigr)\Bigr).$$

**Доказательство.** Как и в доказательстве теоремы 3.16, данное равенство достаточно установить только для произвольной слабо разрешимой подгруппы $B$ группы $\mathrm{GL}_n(R)$, нормализуемой её подгруппой $E_\pi(\Sigma, R)$.

Пусть $P$ — первичный идеал алгебры $R$, фактор-алгебра $R/P$ по которому не имеет нетривиальных локально нильпотентных идеалов, $B_P$ — образ подгруппы $B$ в группе $\mathrm{GL}_n(R/P)$ при естественном эпиморфизме матричных алгебр

$$\Phi_P \colon \mathrm{M}_n(R) \to \mathrm{M}_n(R/P),$$

продолжающем каноническую редукцию $R \to R/P$ алгебры $R$ по модулю идеала $P$. Тогда группа $B_P$ является слабо разрешимой и нормализуется образом $\Phi_P\bigl(E_\pi(\Sigma, R)\bigr) = E_\pi(\Sigma, R/P)$ подгруппы $E_\pi(\Sigma, R)$ в группе $\mathrm{GL}_n(R/P) = \Phi_P\bigl(\mathrm{GL}_n(R)\bigr)$. Предположим, что группа $B_P$ не входит в центр $Z\bigl(\mathrm{M}_n(R/P)\bigr)$ алгебры $\mathrm{M}_n(R/P)$ (и, значит, также в центр группы $\mathrm{GL}_n(R/P)$).

В первую очередь отметим, что при данном условии первичная алгебра $R/P$ не удовлетворяет никакому собственному полиномиальному тождеству. Действительно, в противном случае, если $R/P$ является PI-алгеброй, то, как уже отмечалось в разделе 2, алгебра $R/P$, и потому кольцо матриц $\mathrm{M}_n(R/P)$ над ней, вложимы в алгебры матриц над некоторым полем. По предложению 2.9 и замечаниям 4.16, 1.9 в первичной PI-алгебре $\mathrm{M}_n(R/P)$ каждая слабо разрешимая подгруппа группы её обратимых элементов $\mathrm{GL}_n(R/P)$, нормализуемая группой $E_\pi(\Sigma, R/P)$, и в том числе группа $B_P$, содержатся в центре $Z\big(\mathrm{M}_n(R/P)\big)$ этой алгебры, что противоречит нашему предположению.

В частности, если $m \geqslant 3$, то из $(m-1)$-условия для алгебры $R/P$ сразу же вытекает, что её подмножество $\big(R/P^{(-)}\big)^{m-1}$ содержит элементы, не являющиеся двусторонними делителями нуля в $R$.

Так как центр $Z(R/P)$ алгебры $R/P$ является первичной коммутативной алгеброй, все слабо разрешимые подгруппы группы $\mathrm{GL}_n\big(Z(R/P)\big)$, нормализуемые подгруппой $E_\pi\big(\Sigma, Z(R/P)\big)$, и среди них подгруппа $B_P \cap \mathrm{GL}_n\big(Z(R/P)\big)$, содержатся в её центре $C\Big(\mathrm{GL}_n\big(Z(R/P)\big)\Big) = C\big(\mathrm{GL}_n(R/P)\big)$ (см. предложение 2.9 и замечания 4.16, 1.9). Поэтому мы получаем также, что

$$B_P \neq B_P \cap \mathrm{GL}_n\big(Z(R/P)\big) = B_P \cap \mathrm{M}_n\big(Z(R/P)\big) = B_P \cap C\big(\mathrm{GL}_n(R/P)\big).$$

Пункт 1. В системе $\Sigma$ выделим подсистему положительных корней $\Sigma^+ = \{\beta_k\}_{k\geqslant 1}$ и упорядочим последнюю таким образом, что

$$\{p\beta_i + q\beta_j \in \Sigma \mid p, q > 0\} \subseteq \{\beta_k \mid 1 \leqslant k \leqslant \max\{i,j\} - 1\}$$

при всех $1 \leqslant i, j \leqslant \mathrm{Card}(\Sigma^+)$ (см. замечание 4.17). Обозначим также через $\mu^+$ и $\mu^-$ старшие веса представления $\pi$, которые отвечают подсистемам $\Sigma^+$ и $-\Sigma^+$, и через $\{\epsilon_i\}_{i=1}^{l}$ — подсистему простых корней в системе $\Sigma^+$.

Из приведённого ранее описания действия операторов $\{\pi(X_\alpha)\}$ на пространстве $V$ сразу следует, что для всякого конечного подмножества $\Xi$ в системе $\Sigma^+$ подалгебра $M(\Xi)$ алгебры $\mathrm{M}_n(R/P)$, порождённая всеми элементами $g\pi(X_\beta)$, где $\beta$ пробегает $\Xi$, $g$ — подалгебру $Z(\Xi)$, состоящую из матриц $d \in \mathrm{M}_n(R/P)$, которые перестановочны с каждым $\pi(X_\xi)$ для $\xi \in \Xi$, нильпотентна. Поэтому в группе $\mathrm{GL}_n(R/P)$ ей соответствует нильпотентная подгруппа $E + M(\Xi)$. Отметим, что в нильпотентную группу $E+M(\Xi)$ входят все элементы $x_\beta(r)$, $r \in R$, $\beta \in \Xi$.

Для любых корня $\alpha \in \Sigma$ и элемента $b \in B_P$ обозначим через $B_P(b,\alpha)$ подгруппу группы $B_P$, которую порождают все элементы $b^{x_\alpha(r)} = x_\alpha(r) b x_\alpha(-r)$, $r \in R/P$. Тогда, используя лемму 4.14 с $a = \pi(X_\alpha)$ и сделанные ранее замечания (в случае $m \geqslant 3$), мы можем для всякого $b \in B_P \setminus Z\big(\mathrm{M}_n(R/P)\big)$ определить элемент $b(\alpha) \in B_P(b,\alpha)$, такой что $b(\alpha) \notin Z\big(\mathrm{M}_n(R/P)\big)$ и $[b(\alpha), x_\alpha(r)] = E$ при каждом $r \in R/P$. В частности, можно выбрать элемент $b_1 = b(\beta_1) \in B_P \setminus Z\big(\mathrm{M}_n(R/P)\big)$, для которого $[b_1, x_{\beta_1}(r)] = E$ при всех $r \in R/P$.

Пользуясь индукцией, покажем, что для каждого $1 \leqslant k \leqslant \mathrm{Card}(\Sigma^+)$ в группе $B_P$ имеется элемент $b_k$, который удовлетворяет условиям $b_k \notin Z\big(\mathrm{M}_n(R/P)\big)$ и $[b_k, x_{\beta_i}(r)] = E$ для всех $i = 1, \ldots, k$ и $r \in R/P$, где корни $\{\beta_j\}$ составляют выбранную нами ранее упорядоченную систему положительных корней $\Sigma^+$.

Основание индукции для $k = 1$ выполнено. Допустим, что для некоторого $1 \leqslant k < \mathrm{Card}(\Sigma^+)$ элемент $b_k \in B_P$ с требуемыми свойствами уже найден. Построим с его помощью элемент $b_{k+1}$.

По изложенному выше в подгруппе $B_P(b_k, \beta_{k+1})$ группы $B_P$ имеется элемент $b' = b_k(\beta_{k+1})$, такой что $b' \notin Z\big(\mathrm{M}_n(R/P)\big)$ и $[b', x_{\beta_{k+1}}(r)] = E$ при всех $r \in R/P$. При этом, как и любой элемент группы $B_P(b_k, \beta_{k+1})$, $b'$ является произведением подходящего конечного набора элементов вида $x_{\beta_{k+1}}(h) b_k^p x_{\beta_{k+1}}(-h)$, где $h \in R/P$ и $0 \neq p \in \mathbb{Z}$. Пользуясь упорядочением $\Sigma^+$ и коммутаторной формулой Шевалле, мы можем для любых $h \in R/P$, $u \in Z(R/P)$ и $i = 1, \ldots, k$ записать

$$x_{\beta_i}(u) x_{\beta_{k+1}}(h) x_{\beta_i}(-u) = x_{\beta_{k+1}}(h) \prod_{j=1}^{k} x_{\beta_j}\big(r_{i,k+1,j}(h,u)\big),$$

подобрав соответствующие $r_{i,k+1,j}(h,u) \in R/P$. Поэтому в силу условий, наложенных на выбор $b_k$, мы получаем, что

$$[x_{\beta_{k+1}}(h) b_k^p x_{\beta_{k+1}}(-h), x_{\beta_i}(u)] = E$$

при всех $h \in R/P$, $u \in Z(R/P)$, $i = 1, \ldots, k$ и $p \in \mathbb{Z}$. Значит,

$$[b', x_{\beta_j}(u)] = E, \quad u \in Z(R/P), \quad j = 1, \ldots, k+1,$$

или, что равносильно, $b'\pi(X_{\beta_j}) = \pi(X_{\beta_j}) b'$ при любом $j = 1, \ldots, k+1$.

Следовательно, если положить $\Xi_{k+1} = \{\beta_1, \ldots, \beta_{k+1}\}$ и определить для этого набора нильпотентную подалгебру $M(\Xi_{k+1})$ алгебры $\mathrm{M}_n(R/P)$, то

$$[b', x_{\beta_j}(r)] = \exp(b' r \pi(X_{\beta_j}) {b'}^{-1}) \exp\big(-r\pi(X_{\beta_j})\big) \in E + M(\Xi_{k+1}) \cap B_P$$

для произвольных $r \in R/P$ и $j = 1, \ldots, k+1$. Из доказательства леммы 4.14 вытекает также, что коммутатор $[t, x_\alpha(r)]$, $t \in \mathrm{GL}_n(R/P)$, $r \in R/P$, входит в центр $Z\big(\mathrm{M}_n(R/P)\big)$ алгебры $\mathrm{M}_n(R/P)$, если и только если он совпадает с единичной матрицей $E$.

Положим теперь $d_0 = b'$ и определим элементы $\{d_q\}_{q \geqslant 0}$ индуктивно:

$d_{q+1} = d_q$, если $[d_q, x_\xi(r)] = E$ для любых $r \in R/P$ и $\xi \in \Xi_{k+1}$,

$d_{q+1} = [d_q, x_{\xi_{q+1}}(r_{q+1})] \neq E$, если подобные $r_{q+1} \in R/P$ и $\xi_{q+1} \in \Xi_{k+1}$ существуют.

По построению $d_q \in B_P \setminus Z\big(\mathrm{M}_n(R/P)\big)$ при всех $q \geqslant 0$. Кроме того, поскольку группа $E + M(\Xi_{k+1})$ нильпотентна, найдётся номер $p \geqslant 0$, такой что $d_p = d_{p+1} = d_i$, $i \geqslant p$. Поэтому мы можем взять $b_{k+1} = d_p$.

Таким образом, группа $B_P$ содержит элемент $b_k$ с указанными свойствами при любом $k = 1, \ldots, \mathrm{Card}(\Sigma^+)$.

Пункт 2. По доказанному в группу $B_P$ входит элемент $b_{\mathrm{Card}(\Sigma^+)}$, который не принадлежит центру $Z\big(\mathrm{M}_n(R/P)\big)$ алгебры $\mathrm{M}_n(R/P)$ и коммутирует с каждым элементом $x_\beta(r)$, $r \in R/P$, $\beta \in \Sigma^+$. К тому же в силу сказанного ранее

$$B_P \cap \mathrm{M}_n\big(Z(R/P)\big) = B_P \cap C\big(\mathrm{GL}_n(R/P)\big) \neq B_P.$$

Поэтому согласно предложению 4.18 для некоторого $y \in R/P \setminus Z(R/P)$ в группе $B_P$ содержится элемент $d = E + yE^{11}_{\mu^- \mu^+}$.

Элемент $d$ можно рассматривать также как элемент пересечения $B_P \cap \mathrm{M}_n(Y)$, где через $Y$ обозначена подалгебра алгебры $R/P$, порождённая элементом $y$

и центром $Z(R/P)$ этой алгебры. Алгебра матриц $\mathrm{M}_n(Y)$ над коммутативной алгеброй $Y$ является PI-алгеброй. Поэтому в силу предложения 2.9 и замечаний 4.16, 1.9 группа $B_P \cap \mathrm{M}_n(Y)$ вместе со всеми нормализуемыми группой $E_\pi(\Sigma, Y)$ слабо разрешимыми подгруппами группы $\mathrm{GL}_n(Y)$ входит в её центр $C\Big(\mathrm{GL}_n(Y), E + \mathrm{M}_n\big(\mathrm{Rad}(Y)\big)\Big)$,

$$\begin{aligned} C\Big(\mathrm{GL}_n(Y), E + \mathrm{M}_n\big(\mathrm{Rad}(Y)\big)\Big) &= \\ &= \big\{g \in \mathrm{GL}_n(Y) \bigm| [g, g'] \in E + \mathrm{M}_n\big(\mathrm{Rad}(Y)\big),\ g' \in \mathrm{GL}_n(Y)\big\} = \\ &= \big\{g \in \mathrm{GL}_n(Y) \bigm| (g, t) = gt - tg \in \mathrm{M}_n\big(\mathrm{Rad}(Y)\big),\ t \in \mathrm{M}_n(Y)\big\}, \end{aligned}$$

по локально нильпотентной подгруппе $E + \mathrm{M}_n\big(\mathrm{Rad}(Y)\big)$, соответствующей первичному радикалу $\mathrm{Rad}\big(\mathrm{M}_n(Y)\big) = \mathrm{M}_n\big(\mathrm{Rad}(Y)\big)$ алгебры $\mathrm{M}_n(Y)$. Отсюда следует, что элемент $y$ содержится в первичном радикале $\mathrm{Rad}(Y)$ алгебры $Y$.

Так как в коммутативной алгебре первичный радикал совпадает с множеством всех её нильпотентных элементов, ненулевой элемент $y$ является нильпотентным, $y^k = 0$ для подходящего $k \geqslant 2$.

Пользуясь описанием действия автоморфизма $h_\alpha(v)$, $v \in \mathrm{U}(R/P)$, $\alpha \in \Sigma$, на группе $M(R/P)$, несложно получить равенство

$$h_\alpha(v) d h_\alpha(v)^{-1} = h_\alpha(v) d h_\alpha(v^{-1}) = E + \big(v^{\langle \mu^-, \alpha\rangle} y v^{-\langle \mu^+, \alpha\rangle}\big) E^{11}_{\mu^-\mu^+},$$

где, как и прежде, в угловых скобках указано соответствующее число Картана. Если элементы $v$ и $y$ перестановочны между собой, то оно примет вид

$$h_\alpha(v) d h_\alpha(v)^{-1} = E + \big(y v^{\langle \mu^- - \mu^+, \alpha\rangle}\big) E^{11}_{\mu^-\mu^+}.$$

Напомним, что в системе положительных корней $\Sigma^+$ каждый элемент можно, причём единственным образом, записать как линейную комбинацию с положительными целыми коэффициентами её простых корней $\{\epsilon_i\}_{i=1}^l$ (см., например, [15]). Поэтому с учётом сказанного ранее о структуре весов представления $\pi$ мы можем подобрать такие целые $m_1, \ldots, m_l \geqslant 0$, не все из которых являются нулевыми, что $\mu^+ = \mu^- + \sum\limits_{i=1}^{l} m_i \epsilon_i$.

Поскольку матрица Картана $K = (k_{ij})_{i,j=1}^l$, составленная из рациональных чисел $k_{ij} = \langle \epsilon_j, \epsilon_i\rangle$, невырожденна, найдётся $i$, $1 \leqslant i \leqslant l$, для которого $p = \sum\limits_{j=1}^{l} m_j k_{ij} \neq 0$. Следовательно, при любом $w \in \mathrm{U}(R/P)$, $wy = yw$, в группу $B_P$ входит элемент

$$h_{\epsilon_i}(w) d h_{\epsilon_i}(w)^{-1} = E + y w^{-p} E^{11}_{\mu^-\mu^+}.$$

Более того, для всех $w_1, \ldots, w_q \in \mathrm{U}(R/P)$, $w_j y = y w_j$, ей принадлежит элемент

$$\prod_{j=1}^{q} h_{\epsilon_i}(w_j) d h_{\epsilon_i}(w_j)^{-1} = E + y\bigg(\sum_{j=1}^{q} w_j^{-p}\bigg) E^{11}_{\mu^-\mu^+}.$$

Значит, для произвольного множества элементов $W$, $W \subseteq \mathrm{U}(R/P)$, такого что $wy = yw$ и $ww' = w'w$ при любых $w, w' \in W$, группа $B_P$ содержит все элементы вида $E + yvE^{11}_{\mu^-\mu^+}$, где $v$ пробегает подкольцо, порождённое элементами $w^{-p}$, $w \in W$. В частности, это справедливо для $W = \{1 + fy \mid f \in \mathbb{F}\}$. Поэтому согласно замечанию 4.19 в группу $B_P$ входит также элемент $E + y^s E^{11}_{\mu^-\mu^+}$ при всех $s \geqslant 1$.

Заметим, что степень $y^s$, $s > 1$, ненулевого нильпотентного элемента $y$ может лежать в центре $Z(R/P)$ первичной алгебры $R/P$, если и только если $y^s = 0$.

Итак, мы можем считать, что $E + zE^{11}_{\mu^-\mu^+} \in B_P$ для некоторого $z \in R/P \setminus Z(R/P)$, $z \neq z^2 = 0$.

Из теоремы Пуанкаре—Биркгофа—Витта (см. [15, с. 178, теорема 3]) и неприводимости представления $\pi$ следует, что для каждого его веса $\nu$

$$E^{j1}_{\nu\mu^+} \subset \sum_{\substack{t(\sigma)\geqslant 0,\ \sigma\in\Sigma^+\\ \sum\limits_{\sigma\in\Sigma^+} t(\sigma)\sigma=\mu^+-\nu}} \mathbb{Q} \prod_{\sigma\in\Sigma^+} \pi(X_\sigma)^{t(\sigma)} E^{11}_{\mu^+\mu^+},$$

$$E^{1j}_{\mu^+\nu} \subset \sum_{\substack{t(\sigma)\geqslant 0,\ \sigma\in\Sigma^+\\ \sum\limits_{\sigma\in\Sigma^+} t(\sigma)\sigma=\mu^+-\nu}} \mathbb{Q} E^{11}_{\mu^+\mu^+} \prod_{\sigma\in\Sigma^+} \pi(X_{-\sigma})^{t(\sigma)},$$

$$E^{j1}_{\nu\mu^-} \subset \sum_{\substack{t'(\sigma)\geqslant 0,\ \sigma\in\Sigma^+\\ \sum\limits_{\sigma\in\Sigma^+} t'(\sigma)\sigma=\nu-\mu^-}} \mathbb{Q} \prod_{\sigma\in\Sigma^+} \pi(X_{-\sigma})^{t'(\sigma)} E^{11}_{\mu^-\mu^-},$$

$$E^{1j}_{\mu^-\nu} \subset \sum_{\substack{t'(\sigma)\geqslant 0,\ \sigma\in\Sigma^+\\ \sum\limits_{\sigma\in\Sigma^+} t'(\sigma)\sigma=\nu-\mu^-}} \mathbb{Q} E^{11}_{\mu^-\mu^-} \prod_{\sigma\in\Sigma^+} \pi(X_\sigma)^{t'(\sigma)}$$

при всех $j = 1, \ldots, \mathrm{mult}(\nu)$ (см. [53, доказательство леммы 2.6]), где умножение в правой части записывается в любом фиксированном порядке, выбранном для системы $\Sigma^+$.

В частности, можно подобрать набор корней $\mathfrak{b} = \{\gamma_i\}_{i=1}^s$ из системы $\Sigma^+$, такой что

$$\sum_{i=1}^{s} \gamma_i = \mu^+ - \mu^-, \quad \pi(X_{-\gamma_1}) \cdots \pi(X_{-\gamma_s}) = q_{\mathfrak{b}} E^{11}_{\mu^+\mu^-}$$

для некоторого ненулевого целого $q_{\mathfrak{b}}$. Обозначим через $\mathbb{S}$ совокупность всех наборов корней, удовлетворяющих этим условиям. Каждому набору $\mathfrak{a} \in \mathbb{S}$ поставим в соответствие конечную строчку чисел

$$\mathrm{sh}(\mathfrak{a}) = (s_1(\mathfrak{a}), \ldots, s_j(\mathfrak{a}), \ldots),$$

в которой при всех $j \geqslant 1$ координата $s_j(\mathfrak{a})$ равна числу корней высоты $j$ в этом наборе (напомним, что высотой корня называется сумма модулей коэффициентов совпадающей с ним целочисленной линейной комбинации простых корней).

Множество строк $S = \{\mathrm{sh}(\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{a} \in \mathbb{S}\}$ можно снабдить следующим отношением порядка: $\mathrm{sh}(\mathfrak{a}) < \mathrm{sh}(\mathfrak{a}')$, если существует $i \geqslant 1$, при котором $s_i(\mathfrak{a}) < s_i(\mathfrak{a}')$, $s_j(\mathfrak{a}) = s_j(\mathfrak{a}')$ для всех $j > i$.

Выберем теперь набор корней $\mathfrak{c} = \{\zeta_i\}_{i=1}^k \in \mathbb{S}$, для которого соответствующая строка $\mathrm{sh}(\mathfrak{c})$ является максимальным элементом множества $S$ в смысле указанного лексикографического упорядочения. Тогда для каждой перестановки $\tau$ из симметрической группы $\mathfrak{S}_k$ степени $k$ должно выполняться равенство

$$0 \neq q_{\mathfrak{c}} E^{11}_{\mu^+\mu^-} = \pi(X_{-\zeta_1}) \cdots \pi(X_{-\zeta_k}) = \pi(X_{-\zeta_{\tau(1)}}) \cdots \pi(X_{-\zeta_{\tau(k)}}).$$

Действительно, в противном случае по определению базиса Шевалле существует номер $i$, $1 \leqslant i < k$, такой что $\zeta_i + \zeta_{i+1} \in \Sigma^+$ и

$$\begin{aligned}
&q_{\mathfrak{c}} E^{11}_{\mu^+\mu^-} - \pi(X_{-\zeta_1}) \cdots \pi(X_{-\zeta_{i-1}}) \pi(X_{-\zeta_{i+1}}) \pi(X_{-\zeta_i}) \pi(X_{-\zeta_{i+2}}) \cdots \pi(X_{-\zeta_k}) = \\
&\quad = \pi(X_{-\zeta_1}) \cdots \pi(X_{-\zeta_{i-1}}) \big(\pi(X_{-\zeta_i}) \pi(X_{-\zeta_{i+1}}) - \pi(X_{-\zeta_{i+1}}) \pi(X_{-\zeta_i})\big) \times \\
&\quad \times \pi(X_{-\zeta_{i+2}}) \cdots \pi(X_{-\zeta_k}) = \\
&\quad = q' \pi(X_{-\zeta_1}) \cdots \pi(X_{-\zeta_{i-1}}) \pi(X_{-\zeta_i - \zeta_{i+1}}) \pi(X_{-\zeta_{i+2}}) \cdots \pi(X_{-\zeta_k}) = q'' E^{11}_{\mu^+\mu^-} \neq 0
\end{aligned}$$

для некоторых ненулевых целых $q'$ и $q''$, а потому набор $\mathfrak{c}' = \{\zeta'_j\}_{j=1}^{k-1}$, в котором $\zeta'_j = \zeta_j$, $j = 1, \dots, i-1$, $\zeta'_i = \zeta_i + \zeta_{i+1}$ и $\zeta'_{j'} = \zeta_{j'+1}$, $j' = i+1, \dots, k-1$, входит в множество $\mathbb{S}$ и $\mathrm{sh}(\mathfrak{c}) < \mathrm{sh}(\mathfrak{c}')$. Противоречие.

Используя индукцию, можно показать, что при всех $i = 2, \dots, k$ и $r_1, \dots, r_k \in \in R/P$ выполняется равенство

$$\begin{aligned}
&[\dots[x_{-\zeta_1}(r_1), x_{-\zeta_2}(r_2)] \cdots x_{-\zeta_i}(r_i)] = \\
&\quad = E + \big(\dots\big(r_1\pi(X_{-\zeta_1}), r_2\pi(X_{-\zeta_2})\big) \cdots r_i\pi(X_{-\zeta_i})\big) + \\
&\quad + \sum_{\substack{p_1, \dots, p_i \geqslant 1 \\ p_1 + \dots + p_i \geqslant i+1}} f_{(p_1, \dots, p_i)}\big(r_1\pi(X_{-\zeta_1}), \dots, r_i\pi(X_{-\zeta_i})\big),
\end{aligned}$$

где $f_{(p_1,\dots,p_i)}(x_1, \dots, x_i)$ — подходящие некоммутативные полиоднородные многочлены полистепени $(p_1, \dots, p_i)$ с рациональными коэффициентами, не зависящие от элементов $\{r_j\pi(X_{-\zeta_j})\}_{j=1}^k$. Здесь, как и прежде, $(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1$ и для каждого $j \geqslant 1$

$$(\dots(x_1, x_2) \cdots x_{j+1}) = \big((\dots(x_1, x_2) \cdots x_j), x_{j+1}\big).$$

Поэтому из определения старшего веса и установленного выше соотношения для выбранного набора корней $\mathfrak{c} = \{\zeta_j\}_{j=1}^k$ сразу следует, что при $i = k$

$$[\dots[x_{-\zeta_1}(r_1), x_{-\zeta_2}(r_2)] \dots x_{-\zeta_k}(r_k)] = E + q_{\mathfrak{c}}(\dots(r_1, r_2) \dots r_k) E^{11}_{\mu^+\mu^-}.$$

Отсюда вытекает, что группа $E + \big((R/P)^{(-)}\big)^k E^{11}_{\mu^+\mu^-}$ — подгруппа группы $E_\pi(\Sigma, R/P)$.

Значит, вместе с элементом $E + zE^{11}_{\mu^-\mu^+}$, $z \neq z^2 = 0$, группа $B_P$ содержит для любых $t, t' \in \big((R/P)^{(-)}\big)^k$ элементы вида

$$[E + zE^{11}_{\mu^-\mu^+}, E + (t,z)E^{11}_{\mu^+\mu^-}] =$$
$$= (E + ztz(E^{11}_{\mu^-\mu^-} + E^{11}_{\mu^+\mu^+}) + (t,z)E^{11}_{\mu^+\mu^-})(E - (t,z)E^{11}_{\mu^+\mu^-}) =$$
$$= E + ztz(E^{11}_{\mu^-\mu^-} + E^{11}_{\mu^+\mu^+}) - ztztzE^{11}_{\mu^+\mu^-},$$
$$\big[[E + zE^{11}_{\mu^-\mu^+}, E + (t,z)E^{11}_{\mu^+\mu^-}], E + t'E^{11}_{\mu^+\mu^-}\big] = E + \big((ztz,t') - ztzt'ztz\big)E^{11}_{\mu^+\mu^-}.$$

Тогда, повторяя приведённые в начале этого пункта рассуждения из доказательства нильпотентности элемента $y$, мы получаем, что каждый элемент $(ztz,t') - ztzt'ztz$, $t,t' \in \big((R/P)^{(-)}\big)^k$, тоже является нильпотентным для некоторого индекса $q(t,t') \geqslant 1$, $\big((ztz,t') - ztzt'ztz\big)^{q(t,t')} = 0$.

При помощи индукции несложно показать, что для всякого $j \geqslant 1$

$$\big((ztz,t') - ztzt'ztz\big)^j z = (ztz,t')^j z = (ztzt')^j z.$$

При $j = q(t,t')$ это сразу даёт нам равенство $(ztzt')^{q(t,t')}z = 0$. В частности, если взять произвольный $r \in R/P$ и положить $t(r) = r$ для $k = 1$ и

$$t(r) = (\dots(r, \underbrace{zr)\dots zr)}_{k-1}$$

для $k > 1$, тогда $zt(r)z = (zr)^k z$, $\big(zt(r)zt(r)\big)^q z = (zr)^{2qk}z = 0$ при соответствующем $q = q(r) = q\big(t(r),t(r)\big) \geqslant 1$. Полагая в последнем равенстве $r = r'r''$ для $r', r'' \in R/P$, мы получаем также, что

$$(zr'r'')^{2qk}z = r''(zr'r'')^{2qk}zr' = (r''zr')^{2qk+1} = 0.$$

Таким образом, для любых $r', r'' \in R/P$ элемент $r'zr''$ нильпотентен.

Пункт 3. Обозначим через $G$ подалгебру алгебры $R/P$, которую над основным полем порождают элемент $z$ и элементы подалгебры $zR/Pz$. Подалгебра $G$ является алгеброй с нулевым умножением и совпадает с суммой подпространства $zR/Pz$ и одномерного подпространства, порождённого $z$. Поэтому алгеброй с нулевым умножением является входящая в алгебру $\mathrm{M}_n(R/P)$ подалгебра $\mathrm{M}_n(G)$ матриц с коэффициентами из алгебры $G$, а множество $E + \mathrm{M}_n(G)$ образует абелеву подгруппу группы $\mathrm{GL}_n(R/P)$, в которой $(E+g)(E+g') = E+g+g'$ для любых $g, g' \in \mathrm{M}_n(G)$.

В группу $B_P$ вместе с каждой матрицей $E + g$, $g \in \mathrm{M}_n(G)$ (в частности, вместе с матрицей $E + zE^{11}_{\mu^-\mu^+}$), при всех $r \in R/P$ и $\alpha \in \Sigma$ входят элементы

$$x_\alpha(rz)(E+g)x_\alpha(-rz) = E + gx_\alpha(-rz), \quad x_\alpha(zr)(E+g)x_\alpha(-zr) = E + x_\alpha(zr)g.$$

С учётом свойств умножения в группе $B_P \cap E + \mathrm{M}_n(G)$ отсюда можно вывести, что последняя вместе со всяким элементом $E + g$ содержит также элементы $E+gv$ и $E+v'g$, где $v$ и $v'$ пробегают подкольца алгебры $\mathrm{M}_n(R/P)$, порождённые всеми $x_\alpha(rz)$, $\alpha \in \Sigma$, $r \in R/P$, и всеми $x_\alpha(zr)$, $\alpha \in \Sigma$, $r \in R/P$, соответственно. В силу замечания 4.19 это означает, что

$$E + g\big(rz\pi(X_\alpha)\big),\ E + \big(zr\pi(X_\alpha)\big)g \in B_P \cap E + \mathrm{M}_n(G)$$

для произвольных $r \in R/P$, $\alpha \in \Sigma$ и $E+g \in B_P \cap E + \mathrm{M}_n(G)$. Применяя сказанное, например, к $E+g = E+zE^{11}_{\mu^-\mu^+}$, мы сразу получаем, что при любых $\alpha \in \Sigma$ и $r, r' \in R/P$

$$\begin{aligned}
&E + zrzr'z\pi(X_\alpha)\pi(X_{-\alpha})E^{11}_{\mu^-\mu^+} = \\
&\quad = E + zrzr'z\big(\pi(X_\alpha)\pi(X_{-\alpha}) - \pi(X_{-\alpha})\pi(X_\alpha)\big)E^{11}_{\mu^-\mu^+} = \\
&\quad = E + zrzr'z\pi(H_\alpha)E^{11}_{\mu^-\mu^+} = E + \langle \mu^-, \alpha\rangle zrzr'zE^{11}_{\mu^-\mu^+} \in B_P \cap E + \mathrm{M}_n(G),
\end{aligned}$$

где, как обычно, $H_\alpha = [X_\alpha, X_{-\alpha}]$ — элемент картановской подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{G}$, принадлежащий простой трёхмерной алгебре Ли с базисом $\{X_{-\alpha}, H_\alpha, X_\alpha\}$. Так как по условию представление $\pi$ является неприводимым, найдётся по крайней мере один корень $\alpha \in \Sigma$, для которого число Картана $\langle \mu^-, \alpha\rangle = \mu^-(H_\alpha)$ отлично от нуля. Поэтому в группе $B_P \cap E + \mathrm{M}_n(G)$ содержатся все элементы $E + zrzr'zE^{11}_{\mu^-\mu^+}$ для $r, r' \in R/P$, а также их произведения, т. е.

$$E + (zR/P)^2 zE^{11}_{\mu^-\mu^+} \subset B_P \cap E + \mathrm{M}_n(G).$$

С учётом сказанного ранее в пункте 2 для любых весов $\mu$ и $\nu$ представления $\pi$, $i = 1, \ldots, \mathrm{mult}(\mu)$ и $j = 1, \ldots, \mathrm{mult}(\nu)$ можно записать

$$E^{1j}_{\mu^+\nu} = \sum_{\substack{s=(s_1,\ldots,s_{\mathrm{Card}(\Sigma^+)}),\ s_q \geqslant 0 \\ \sum_{q=1}^{\mathrm{Card}(\Sigma^+)} s_q\sigma_q = \mu^+ - \nu}} f_s E^{11}_{\mu^+\mu^+} \prod_{q=1}^{\mathrm{Card}(\Sigma^+)} \pi(X_{-\sigma_q})^{s_q},$$

$$E^{i1}_{\mu\mu^-} = \sum_{\substack{s'=(s'_1,\ldots,s'_{\mathrm{Card}(\Sigma^+)}),\ s'_q \geqslant 0 \\ \sum_{q=1}^{\mathrm{Card}(\Sigma^+)} s'_q\sigma_q = \mu - \mu^-}} f'_{s'} \prod_{q=1}^{\mathrm{Card}(\Sigma^+)} \pi(X_{-\sigma_q})^{s'_q} E^{11}_{\mu^-\mu^-},$$

подобрав соответствующие рациональные числа $\{f_s\}$, $\{f'_{s'}\}$, где $\{\sigma_q\}$ — упорядоченные произвольным фиксированным образом корни подсистемы $\Sigma^+$.

Положим $p = (m-1)\,\mathrm{Card}(\Sigma) = 2(m-1)\,\mathrm{Card}(\Sigma^+)$. Тогда по сказанному выше для любых весов $\mu$ и $\nu$, среди которых либо $\mu \neq \mu^-$, либо $\nu \neq \mu^+$, и элементов $r_1, \ldots, r_p \in R/P$ в группу $B_P \cap E + \mathrm{M}_n(G)$ входит элемент

$$\begin{aligned}
&\prod_{\substack{s'=(s'_1,\ldots,s'_{\mathrm{Card}(\Sigma^+)}),\ s'_q \geqslant 0 \\ \sum_{q=1}^{\mathrm{Card}(\Sigma^+)} s'_q\sigma_q = \mu - \mu^-}} \ \prod_{\substack{s=(s_1,\ldots,s_{\mathrm{Card}(\Sigma^+)}),\ s_q \geqslant 0 \\ \sum_{q=1}^{\mathrm{Card}(\Sigma^+)} s_q\sigma_q = \mu^+ - \nu}} \Bigg(E + zr_1z\cdots zr_pzf'_{s'}f_s \times \\
&\times \bigg(\prod_{q=1}^{\mathrm{Card}(\Sigma^+)} \pi(X_{-\sigma_q})^{s'_q}\bigg) E^{11}_{\mu^-\mu^+} \bigg(\prod_{q=1}^{\mathrm{Card}(\Sigma^+)} \pi(X_{-\sigma_q})^{s_q}\bigg)\Bigg) =
\end{aligned}$$

$$= E + zr_1z\cdots zr_pz\Bigg(\sum_{\substack{s'=(s'_1,\ldots,s'_{\mathrm{Card}(\Sigma^+)}),\ s'_q\geqslant 0\\ \sum_{q=1}^{\mathrm{Card}(\Sigma^+)} s'_q\sigma_q=\mu-\mu^-}}\ \sum_{\substack{s=(s_1,\ldots,s_{\mathrm{Card}(\Sigma^+)}),\ s_q\geqslant 0\\ \sum_{q=1}^{\mathrm{Card}(\Sigma^+)} s_q\sigma_q=\mu^+-\nu}} f'_{s'}f_s\times$$
$$\times\Bigg(\prod_{q=1}^{\mathrm{Card}(\Sigma^+)}\pi(X_{-\sigma_q})^{s'_q}\Bigg)E^{11}_{\mu^-\mu^+}\Bigg(\prod_{q=1}^{\mathrm{Card}(\Sigma^+)}\pi(X_{-\sigma_q})^{s_q}\Bigg)\Bigg) = E + zr_1z\cdots zr_pzE^{ij}_{\mu\nu}.$$

Кроме того, группа $B_P\cap E+\mathrm{M}_n(G)$ содержит все возможные произведения таких элементов, т. е. каждый элемент вида $t^{ij}_{\mu\nu}(h) = E + hE^{ij}_{\mu\nu}$ для $h\in(zR/P)^pz = z(R/Pz)^p$.

Из описания действия элементов группы $E_\pi(\Sigma, R/P)$ следует, что для любых весов $\mu$ и $\nu$ представления $\pi$, $i = 1,\ldots,\mathrm{mult}(\mu)$, $j = 1,\ldots,\mathrm{mult}(\nu)$, $\alpha\in\Sigma$, $r\in R/P$ и $u\in\mathrm{U}(R/P)$ справедливо равенство

$$h_\alpha(u)rE^{ij}_{\mu\nu}h_\alpha(u)^{-1} = u^{\langle\mu,\alpha\rangle}rE^{ij}_{\mu\nu}u^{-\langle\nu,\alpha\rangle}.$$

Поэтому, используя установленную в пункте 2 нильпотентность элемента $rzr'$ для всех $r, r'\in R/P$ и найденные ранее включения, мы получаем, что

$$h_\alpha(1+rzr')t^{ij}_{\mu\nu}(h)h_\alpha(1+rzr')^{-1} = t^{ij}_{\mu\nu}\big((1+rzr')^{\langle\mu,\alpha\rangle}h(1+rzr')^{-\langle\nu,\alpha\rangle}\big) =$$
$$= E + (1+rzr')^{\langle\mu,\alpha\rangle}h(1+rzr')^{-\langle\nu,\alpha\rangle}E^{ij}_{\mu\nu}\in B_P,\quad h\in(zR/P)^pz,\quad r,r'\in R/P.$$

Предположим теперь, что веса $\mu$ и $\nu$ или (и) индексы $i$ и $j$ различны. Тогда для любых $x, x'\in R/P$ выполняется равенство

$$t^{ij}_{\mu\nu}(x)t^{ij}_{\mu\nu}(x') = t^{ij}_{\mu\nu}(x+x')$$

и, значит, множество

$$W^{ij}_{\mu\nu} = \{w\in R/P \mid t^{ij}_{\mu\nu}(w)\in B_P\}$$

является подгруппой аддитивной группы алгебры $R/P$. По доказанному оно содержит также подпространство $W_{\mu\nu}$ алгебры $R/P$, порождённое всеми элементами

$$(1+rzr')^{\langle\mu,\alpha\rangle}h(1+rzr')^{-\langle\nu,\alpha\rangle},\quad h\in(zR/P)^pz,\quad r,r'\in R/P,\quad \alpha\in\Sigma.$$

Для произвольного элемента $f$ из основного поля $\mathbb{F}$ мы можем записать

$$(1+frzr')^{\langle\mu,\alpha\rangle}h(1+frzr')^{-\langle\nu,\alpha\rangle} =$$
$$= h + f(\langle\mu,\alpha\rangle rzr'h - \langle\nu,\alpha\rangle hrzr') + \sum_{q=2}^{2k} f^q\Bigg(\sum_{q'=0}^{q} c_\alpha(q,q')(rzr')^{q'}h(rzr')^{q-q'}\Bigg),$$

где $k+1$ — индекс нильпотентности элемента $rzr'$, $k\geqslant 0$, и $\{c_\alpha(q,q')\}$ — некоторые (возможно, нулевые) целые числа, не зависящие от выбранных элементов $f$,

$r$, $r'$ и $h$. Поэтому в силу замечания 4.20 пространство $W_{\mu\nu}$ совпадает с суммой подпространства $(zR/P)^p z$ и подпространства, которое порождают элементы $\langle\mu,\alpha\rangle rzr'h - \langle\nu,\alpha\rangle hrzr'$ и $\sum\limits_{q'=0}^{q} c_\alpha(q,q')(rzr')^{q'}h(rzr')^{q-q'}$ для $q = 2,\ldots,2k$, $h \in (zR/P)^p z$, $r, r' \in R/P$ и $\alpha \in \Sigma$.

Если веса $\mu$ и $\nu$ являются к тому же ненулевыми, то мы можем выбрать корни $\eta,\zeta \in \Sigma$ и элементы $f, f' \in \mathbb{F}$, для которых $\langle\mu,\eta\rangle \neq 0$, $\langle\nu,\zeta\rangle \neq 0$ и

$$f\langle\mu,\eta\rangle + f'\langle\mu,\zeta\rangle = f_{\mu\nu} \neq 0, \quad f\langle\nu,\eta\rangle + f'\langle\nu,\zeta\rangle = f'_{\mu\nu} \neq 0.$$

Следовательно, в этом случае при любых $h \in (zR/P)^p z$ и $r, r' \in R/P$

$$\begin{aligned} &f(\langle\mu,\eta\rangle rzr'h - \langle\nu,\eta\rangle hrzr') + f'(\langle\mu,\zeta\rangle rzr'h - \langle\nu,\zeta\rangle hrzr') = \\ &\quad = f_{\mu\nu}rzr'h - f'_{\mu\nu}hrzr' \in W_{\mu\nu}, \\ &t^{ij}_{\mu\nu}(f_{\mu\nu}rzr'h - f'_{\mu\nu}hrzr') \in B_P. \end{aligned}$$

Пункт 4. По условию пространство $V$ представления $\pi$ имеет размерность $n > 3$. Поэтому $\pi$ обладает по меньшей мере тремя различными ненулевыми весами $\mu_1$, $\mu_2$ и $\mu_3$. Для $l = 1$ это сразу следует из описания представлений расщепляемой трёхмерной простой алгебры Ли (см. [15, с. 97—98]), а для $l > 1$ — из точности $\pi$ и того факта, что аддитивная группа, порождённая весами $\pi$, является целочисленной решёткой ранга $l$ в пространстве, сопряжённом к подалгебре Картана рассматриваемой алгебры Ли $\mathfrak{G}$, и содержит в качестве подгруппы решётку этого пространства, которую порождает система корней $\Sigma$ (см. [36, лемма 27]).

Согласно пункту 3 для любых $1 \leqslant q \neq q' \leqslant 3$ в поле $\mathbb{F}$ можно подобрать такие ненулевые элементы $f_{qq'} = f_{\mu_q\mu_{q'}}$ и $f'_{qq'} = f'_{\mu_q\mu_{q'}}$, что элементы

$$t^{ii'}_{\mu_q\mu_{q'}}(f_{qq'}rzr'h - f'_{qq'}hrzr'), \quad i = 1,\ldots,\mathrm{mult}(\mu_q), \quad i' = 1,\ldots,\mathrm{mult}(\mu_{q'}),$$

входят в группу $B_P$ при всех $h \in (zR/P)^p z$ и $r, r' \in R/P$. Заметим также, что для произвольных $x, x' \in R/P$ и $1 \leqslant q \neq q' \neq q'' \leqslant 3$

$$[t^{ii'}_{\mu_q\mu_{q'}}(x), t^{i'i''}_{\mu_{q'}\mu_{q''}}(x')] = t^{ii''}_{\mu_q\mu_{q''}}(xx')$$

при любых $i = 1,\ldots,\mathrm{mult}(m_q)$, $i' = 1,\ldots,\mathrm{mult}(\mu_{q'})$ и $i'' = 1,\ldots,\mathrm{mult}(\mu_{q''})$.

Возьмём любые две конечные системы элементов $Z$ и $Z'$, $Z \subset R/P$, $Z' \subset (zR/P)^p z$, и положим

$$Z_{qq'} = \{f_{qq'}rzr'h - f'_{qq'}hrzr' \mid r, r' \in Z,\ h \in Z'\}$$

для $1 \leqslant q \neq q' \leqslant 3$. Поскольку группа $B_P$ слабо разрешима, найдётся номер $k = k(Z, Z') \geqslant 1$, при котором

$$E = g_k\bigl(t^{i_1i'_1}_{\mu_{q_1}\mu_{q'_1}}(z_1),\ldots,t^{i_{2^k}i'_{2^k}}_{\mu_{q_{2^k}}\mu_{q'_{2^k}}}(z_{2^k})\bigr)$$

для всех возможных $z_j \in Z_{q_jq'_j}$, $1 \leqslant q_j \neq q'_j \leqslant 3$, $i_j = 1,\ldots,\mathrm{mult}(\mu_{q_j})$, $i'_j = 1,\ldots,\mathrm{mult}(\mu_{q'_j})$, $j = 1,\ldots,2^j$. Следовательно, положив $q'_j = q_{j+1}$, $i_j = i'_j = 1$

для $j = 1, \ldots 2^k$ и определив индексы $\{q_j\}$ так, чтобы каждая их тройка $\{q_j, q_{j+1}, q_{j+2}\}$ составляла полный набор $\{1,2,3\}$ при $j = 1, \ldots, 2^k - 1$ (достаточно выбрать такие $q_1$, $q_2$, $q_3$ и положить $q_{3p+i} = q_i$ для $i = 1,2,3$, $p \geqslant 1$), мы сразу получаем, что

$$E = g_k\bigl(t^{11}_{\mu_{q_1}\mu_{q_2}}(z_1), \ldots, t^{11}_{\mu_{q_{2^k}}\mu_{q_{2^k+1}}}(z_{2^k})\bigr) = t^{11}_{\mu_{q_1}\mu_{q_{2^k+1}}}(z_1 \cdots z_{2^k})$$

для любых $z_j = f_{q_j q_{j+1}} r_j z r'_j h_j - f'_{q_j q_{j+1}} h_j r_j z r'_j$, где $r_j, r'_j \in Z$ и $h_j \in Z'$, т. е.

$$0 = z_1 \cdots z_{2^k} = \\ = (f_{q_1q_2} r_1 z r'_1 h_1 - f'_{q_1q_2} h_1 r_1 z r'_1) \cdots (f_{q_{2^k}q_{2^k+1}} r_{2^k} z r'_{2^k} h_{2^k} - f'_{q_{2^k}q_{2^k+1}} h_{2^k} r_{2^k} z r'_{2^k}).$$

Так как $z^2 = zh = hz = hh' = 0$ при всех $h, h' \in (zR/P)^p z$, отсюда вытекает, что

$$0 = \Bigl(\prod_{j=1}^{2^k} f_{q_j q_{j+1}}\Bigr) z (r_1 z r'_1 h_1)(r_2 z r'_2 h_2) \cdots (r_{2^k} z r'_{2^k} h_{2^k}) = \\ = z(r_1 z r'_1 h_1)(r_2 z r'_2 h_2) \cdots (r_{2^k} z r'_{2^k} h_{2^k}), \quad r_j, r'_j \in Z, \quad h_j \in Z', \quad j = 1, \ldots, 2^k.$$

Выполнение последнего соотношения для произвольных конечных наборов элементов $Z$ и $Z'$, $Z \subset R/P$, $Z' \subset (zR/P)^p z$, при соответствующем $k \geqslant 1$ означает, что в идеале $R/PzR/P$ алгебры $R/P$, который порождает элемент $z$, левый идеал

$$J = (zR/P)^p z + R/PzR/P(zR/P)^p z,$$

порождённый элементами подалгебры $(zR/P)^p z$, является локально нильпотентным. Тогда локально нильпотентным является также двусторонний идеал $I = J + JR/PzR/P$ алгебры $R/PzR/P$, порождённый элементами её левого идеала $J$ (см. [1, гл. 1]). Более того, алгебра $R/PzR/P$ является нильпотентным расширением своего локально нильпотентного идеала $I$ и потому тоже локально нильпотентна. В силу условий, наложенных на выбор первичного идеала $P$, в алгебре $R/P$ нет ненулевых локально нильпотентных идеалов. Следовательно, $R/PzR/P = \{0\}$ и $z = 0$. Противоречие.

Таким образом, для всякого первичного идеала $P$ алгебры $R$, фактор-алгебра по которому не содержит нетривиальных локально нильпотентных идеалов, образ $B_P$ подгруппы $B$ в алгебре $\mathrm{M}_n(R/P)$ принадлежит её центру $Z\bigl(\mathrm{M}_n(R/P)\bigr)$, т. е.

$$B = C\bigl(B, \mathrm{GL}_n(R) \cap E + \mathrm{M}_n(P)\bigr) = \\ = \{b \in B \mid [b, B] \subseteq E + \mathrm{M}_n(P)\} = B \cap C\bigl(\mathrm{GL}_n(R), \mathrm{GL}_n(R) \cap E + \mathrm{M}_n(P)\bigr).$$

Поэтому, как и в финале доказательства теоремы 3.16, мы приходим к равенствам

$$B = \bigcap_{\substack{P \in \mathrm{Spec}(R) \\ \mathrm{L}(R/P)=\{0\}}} C\big(B, \mathrm{GL}_n(R) \cap E + \mathrm{M}_n(P)\big) =$$

$$= C\left(B, \bigcap_{\substack{P \in \mathrm{Spec}(R) \\ \mathrm{L}(R/P)=\{0\}}} \big(\mathrm{GL}_n(R) \cap E + \mathrm{M}_n(P)\big)\right) = C\Big(B, E + \mathrm{M}_n\big(\mathrm{L}(R)\big)\Big) =$$

$$= C\Big(B, E + \mathrm{L}\big(\mathrm{M}_n(R)\big)\Big) = B \cap C\Big(\mathrm{GL}_n(R), E + \mathrm{M}_n\big(\mathrm{L}(R)\big)\Big) =$$

$$= B \cap C\Big(\mathrm{GL}_n(R), E + \mathrm{L}\big(\mathrm{M}_n(R)\big)\Big)$$

(см. также замечание 1.9). □

Из приведённого доказательства следует, что данное описание слабо разрешимого радикала остаётся верным и в случаях $n = 2, 3$, которые соответствуют системе корней единичного ранга, если, помимо всех перечисленных в теореме 4.22 условий, каждая первичная фактор-алгебра алгебры $R$, не имеющая нетривиальных локально нильпотентных идеалов, не содержит также ненулевых левых и правых ниль-идеалов (в частности, в этом случае локально нильпотентный радикал $\mathrm{L}(R)$ алгебры $R$ совпадает с её радикалом Кёте $K(R)$) (см. пункт 2 доказательства теоремы 4.22).

Аналогично следствиям 3.17 и 3.18 из теоремы 4.22 можно вывести следующие утверждения.

**Следствие 4.23.** *В условиях теоремы* 4.22 *слабо разрешимый радикал* $\mathrm{T}(A)$ *группы* $A$ *совпадает с центром* $C\big(A, \mathrm{PH}(A)\big)$ *по её локально нильпотентному радикалу* $\mathrm{PH}(A)$.

**Следствие 4.24.** *Если в условиях теоремы* 4.22 *локально нильпотентный радикал* $\mathrm{L}(R)$ *алгебры* $R$ *равен её радикалу* $\mathrm{RN}^*(R)$ (*к примеру, если алгебра* $R$ *является счётно порождённой*), *то в группе* $A$ *слабо разрешимый радикал* $\mathrm{T}(A)$ *равен радикалу* $\mathrm{RN}^*(A)$.

# 5. Радикалы унитарных групп над кольцами с инволюцией

Следуя [11, 12], введём следующие определения.

**Определение 5.1.** В алгебре $R$ над кольцом $F$ с единицей 1 и инволюцией $*$ подмножество $\mathrm{U}(R, *) = \{a \in R \mid a^{-1} = a^*\}$ образует подгруппу в группе $\mathrm{U}(R)$ её обратимых элементов, которую принято называть унитарной группой алгебры $R$ относительно инволюции $*$.

**Определение 5.2.** Набор элементов $E = \{e_{ii}, e_{i+1i+1}, e_{ii+1}, e_{i+1i} \mid i = 1, 3\}$ алгебры $R$ над кольцом $F$ с инволюцией $*$ называют $e$-системой, если

1) элементы $\{e_{jj} \mid j = 1, \ldots, 4\}$ составляют в алгебре $R$ ортогональную систему плотных идемпотентов;

2) $e_{ii}^* = e_{i+1i+1}$, $e_{ii+1}^* = -e_{ii+1}$, $e_{i+1i}^* = -e_{i+1i}$ при каждом $i = 1, 3$;
3) $e_{ij}e_{pq} = \delta_{jp}e_{iq}$ для всех возможных $i$, $j$, $p$ и $q$.

Алгебру $R$ с набором элементов $E$ мы будем называть *алгеброй с $e$-системой*.

Достаточный запас примеров $e$-систем приводится в [8].

**Определение 5.3.** В алгебре $R$ над кольцом $F$ с единицей 1, 1/2, инволюцией $*$ и $e$-системой $E = \{e_{ij}\}$ подгруппу $\mathrm{E}(E, R, *)$, которую порождают элементы

$$e_i(r) = 1 + e_{ii}r(1 - e_{ii}) - (1 - e_{ii}^*)r^*e_{ii}^* - 1/2\, e_{ii}r(1 - e_{ii} - e_{ii}^*)r^*e_{ii}^*$$

для всех $i = 1, \ldots, 4$ и $r \in R$, называют элементарной подгруппой унитарной группы $\mathrm{U}(R, *)$ относительно системы $E$.

Сразу же отметим, что при всех $j = 1, \ldots, 4$ и $r \in R$

$$e_j(r)^{-1} = e_j(r)^* = e_j(-r), \quad t_j(r) = t_j(-r^*) = e_j(re_{jj}^*) = 1 + e_{jj}(r - r^*)e_{jj}^*.$$

В частности, для $i = 1, 3$ и любого элемента $u$ из центра $Z(R)$ алгебры $R$

$$t_i(ue_{ii+1}) = t_i'(u) = 1 + (u + u^*)e_{ii+1}, \quad t_{i+1}(ue_{i+1i}) = t_{i+1}'(u) = 1 + (u + u^*)e_{i+1i}.$$

Кроме того, для произвольных $r, r' \in R$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}
&t_j(r)t_j(r') = t_j(r + r'),\\
&[e_j(r), t_j(r')] = 1,\\
&e_j(r)e_j(r') = e_j(r + r' + 1/2\, e_{jj}r'(1 - e_{jj} - e_{jj}^*)r^*e_{jj}^*) =\\
&\quad = e_j(r + r')t_j(1/2\, r'(1 - e_{jj} - e_{jj}^*)r^*),\\
&[e_j(r), e_j(r')] = t_j(r'(1 - e_{jj} - e_{jj}^*)r^*).
\end{aligned}$$

Несложно показать, что элемент $e_j(r)$ входит в центр $Z(R)$ алгебры $R$ в том и только в том случае, если он равен единице. Помимо этого, при каждом $i = 1, 3$ алгебра $R$ совпадает с подкольцом, которое порождают все её элементы $e_i(r)$ и $e_{i+1}(r)$ для $r \in R$ (см. [8,10]).

Для удобства положим $i^* = i + 1$, $(i + 1)^* = i$, $i = 1, 3$. Возьмём любые индексы $p$ и $q$, $1 \leqslant p \neq q, q^* \leqslant 4$, элемент $r \in R$ и определим элементы

$$t_{pq}(r) = e_p(re_{qq}^*) = e_q(-r^*e_{pp}^*) = t_{qp}(-r^*) = 1 + e_{pp}re_{qq}^* - e_{qq}r^*e_{pp}^*.$$

Понятно, что $t_{pq}(r)t_{pq}(r') = t_{pq}(r + r')$, $r, r' \in R$.

При всех $r, r' \in R$ выполняются также следующие коммутаторные соотношения

$$\begin{aligned}
&[t_{pq}(r), t_p(r')] = [t_{pq}(r), t_q(r')] = 1,\\
&[t_{pq}(r), t_{q^*}(r')] = t_{pq^*}\big(re_{qq}^*(r' - r'^*)\big)t_p(1/2\, re_{qq}^*(r' - r'^*)e_{qq}r^*),\\
&[t_{pq}(r), t_{p^*}(r')] = t_{p^*q}\big((r'^* - r')e_{pp}r\big)t_q(1/2\, r^*e_{pp}^*(r' - r'^*)e_{pp}r),\\
&[t_{pq}(r), t_{pq^*}(r')] = t_p(r'e_{qq}r^*),\\
&[t_{pq}(r), t_{p^*q}(r')] = t_q(r'^*e_{pp}r),
\end{aligned}$$

из которых немедленно вытекают равенства

$$
\begin{aligned}
&[t_{pq}(r/2), t_{q^*}(r')][t_{pq}(-r/2), t_{q^*}(r')]^{-1} = t_{pq^*}\big(re^*_{qq}(r' - r'^*)\big),\\
&[t_{pq}(r), t_{q^*}(r'/2)][t_{pq}(-r), t_{q^*}(-r'/2)]^{-1} = t_p(1/2\, re^*_{qq}(r' - r'^*)e_{qq}r^*),\\
&[t_{pq}(r/2), t_{p^*}(r')][t_{pq}(-r/2), t_{p^*}(r')]^{-1} = t_{p^*q}\big((r'^* - r')e_{pp}r\big),\\
&[t_{pq}(r), t_{p^*}(r'/2)][t_{pq}(-r), t_{p^*}(-r'/2)]^{-1} = t_q(1/2\, r^*e^*_{pp}(r' - r'^*)e_{pp}r).
\end{aligned}
$$

**Лемма 5.4.** *Пусть $R$ — алгебра над кольцом $F$ с 1, 1/2, инволюцией $*$ и $e$-системой $E = \{e_{ij}\}$, $A$ — подгруппа унитарной группы $\mathrm{U}(R,*)$, нормализуемая связанной с системой $E$ элементарной подгруппой $\mathrm{E}(E,R,*)$. Если в группу $A$ входит элемент $t_{pq}(r)$ для некоторых $r \in R$ и $p$, $q$, $1 \leqslant p \neq q, q^* \leqslant 4$, то $A$ содержит также элементы $t_j(z)$ и $t_{mn}(z)$ для всех $j = 1,\dots,4$, $1 \leqslant m \neq n \neq n^* \leqslant 4$, $z \in (IJ)^4$, где $I = RaR$ — идеал алгебры $R$, порождённый элементом $a = t_{pq}(r) - 1$, $J$ — идеал центра $Z(R)$ алгебры $R$, порождённый всеми элементами $v - v^3$, $v = v^* \in Z(R)$.*

**Доказательство.** Элемент $a = t_{pq}(r) - 1 = e_{pp}re^*_{qq} - e_{qq}r^*e^*_{pp}$ кососимметричен (т. е. $a^* = -a$) и потому порождённый им идеал $I = RaR$ алгебры $R$ является её $*$-идеалом. Так как идеал $I$ содержит элементы $e_{pp}re^*_{qq}$ и $e_{qq}r^*e_{pp}$, $*$-идеалы алгебры $R$, которые порождают эти элементы, совпадают между собой и совпадают с идеалом $I$. Поскольку центр $Z(R)$ алгебры $R$ является её $*$-подалгеброй и идеал $J$ алгебры $Z(R)$ является её $*$-идеалом, произведение $IJ$ является $*$-идеалом алгебры $R$. Отметим также, что в случае, когда алгебра $R$ (и, значит, её подалгебра $Z(R)$) содержит 1/3, идеалы $I$ и $IJ$ совпадают.

Для любых $x, y, z \in R$ положим

$$
h(x,y) = [t_{p^*q^*}(x), t_{pq}(y)], \quad g(x,y,z) = \big[[h(x,y), t_{pq}(z)], 1 + e_{q^*q}\big].
$$

Тогда из равенств

$$
\begin{aligned}
e^*_{qq}h(x,y)^* &= e^*_{qq}t_{p^*q^*}(x)t_{pq}(-y)t_{p^*q^*}(-x) =\\
&= e^*_{qq} + e^*_{qq}x^*e_{pp}ye^*_{qq} + e^*_{qq}x^*e_{pp}ye^*_{qq}x^*e_{pp},\\
e^*_{pp}h(x,y)^* &= e^*_{pp}t_{p^*q^*}(x)t_{pq}(-y)t_{p^*q^*}(-x) =\\
&= e^*_{pp} + e^*_{pp}xe_{qq}y^*e^*_{pp} - e^*_{pp}xe_{qq}y^*e^*_{pp}xe_{qq}
\end{aligned}
$$

сразу вытекает, что

$$
\begin{aligned}
&h(x,y)t_{pq}(z)h(x,y)^* =\\
&\quad = t_{pq}(z) + e_{pp}ze^*_{qq}x^*e_{pp}ye^*_{qq}(1 + e^*_{qq}x^*e_{pp}) - e_{qq}z^*e^*_{pp}xe_{qq}y^*e^*_{pp}(1 - e^*_{pp}xe_{qq}) +\\
&\quad + (1 - e^*_{qq}x^*e_{pp})e_{pp}ye^*_{qq}x^*e_{pp}ze^*_{qq} - (1 + e^*_{pp}xe_{qq})e_{qq}y^*e^*_{pp}xe_{qq}z^*e^*_{pp} +\\
&\quad + (1 - e^*_{qq}x^*e_{pp})e_{pp}ye^*_{qq}x^*e_{pp}ze^*_{qq}x^*e_{pp}ye^*_{qq}(1 + e^*_{qq}x^*e_{pp}) -\\
&\quad - (1 + e^*_{pp}xe_{qq})e_{qq}y^*e^*_{pp}xe_{qq}z^*e^*_{pp}xe_{qq}y^*e^*_{pp}(1 - e^*_{pp}xe_{qq}).
\end{aligned}
$$

Поэтому мы можем записать

$$\begin{aligned}
&[h(x,y),t_{pq}(z)]e^*_{qq} = h(x,y)t_{pq}(z)h(x,y)^*(e^*_{qq} - e_{pp}ze^*_{qq}) = \\
&\quad = e^*_{qq} + \big(e_{pp}ze^*_{qq}x^*e_{pp}ye^*_{qq}(1+e^*_{qq}x^*e_{pp}) + (1-e^*_{qq}x^*e_{pp})e_{pp}ye^*_{qq}x^*e_{pp}ze^*_{qq} + \\
&\quad + (1-e^*_{qq}x^*e_{pp})e_{pp}ye^*_{qq}x^*e_{pp}ze^*_{qq}x^*e_{pp}ye^*_{qq}(1+e^*_{qq}x^*e_{pp})\big)(e^*_{qq} - e_{pp}ze^*_{qq}) = \\
&\quad = e^*_{qq} + e_{pp}\big(h(1,1,1) + h(2,1,2) + h(2,2,1) + h(3,2,2)\big)e^*_{qq} + \\
&\quad + e^*_{qq}\big(h'(2,1,1) + h'(3,2,1) + h'(4,3,2)\big)e^*_{qq},
\end{aligned}$$

где элементы $h(i,j,k)$ и $h'(i',j',k')$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
h(1,1,1) &= ze^*_{qq}x^*e_{pp}y + ye^*_{qq}x^*e_{pp}z, \\
h(2,1,2) &= -ze^*_{qq}x^*e_{pp}ye^*_{qq}x^*e_{pp}z, \\
h(2,2,1) &= ye^*_{qq}x^*e_{pp}ze^*_{qq}x^*e_{pp}y, \\
h(3,2,2) &= -ye^*_{qq}x^*e_{pp}ze^*_{qq}x^*e_{pp}ye^*_{qq}x^*e_{pp}z, \\
h'(2,1,1) &= -x^*e_{pp}ye^*_{qq}x^*e_{pp}z, \\
h'(3,2,1) &= -x^*e_{pp}ye^*_{qq}x^*e_{pp}ze^*_{qq}x^*e_{pp}y, \\
h'(4,2,2) &= x^*e_{pp}ye^*_{qq}x^*e_{pp}ze^*_{qq}x^*e_{pp}ye^*_{qq}x^*e_{pp}z.
\end{aligned}$$

В такой записи $h(i,j,k)$ и $h'(i',j',k')$ индексы $i$ и $i'$ соответствуют числу вхождений элемента $x^*$, индексы $j$ и $j'$ — числу вхождений элемента $y$, а индексы $k$ и $k'$ — числу вхождений элемента $z$ соответственно.

Следовательно, элемент $g(x,y,z)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}
g(x,y,z) = (1 + ([h(x,y),t_{pq}(z)]e^*_{qq})e_{q^*q}([h(x,y),t_{pq}(z)]e^*_{qq})^*)(1 - e_{q^*q}) = \\
= t_{pq^*}\big(f_1(x,y,z)\big)t_p\big(f_2(x,y,z)\big)t_{q^*}\big(f_3(x,y,z)\big),
\end{aligned}$$

взяв в качестве $f_1(x,y,z)$, $f_2(x,y,z)$ и $f_3(x,y,z)$ элементы

$$\begin{aligned}
f_1(x,y,z) &= \sum_{(i,j,k)\in P} e_{pp}h(i,j,k)e_{q^*q} + \\
&+ \sum_{(i,j,k)\in P,\ (i',j',k')\in P'} e_{pp}h(i,j,k)e_{q^*q}h'(i',j',k')^*e_{qq}, \\
f_2(x,y,z) &= 1/2\Bigg(\sum_{(i,j,k),\,(p,q,s)\in P} e_{pp}h(i,j,k)e_{q^*q}h(p,q,s)^*e^*_{pp}\Bigg), \\
f_3(x,y,z) &= 1/2\Bigg(\sum_{(i',j',k')\in P'} (e^*_{qq}h'(i',j',k')e_{q^*q} + e_{q^*q}h'(i',j',k')^*e_{qq}) + \\
&+ \sum_{(i',j',k'),\,(p',q',s')\in P'} e^*_{qq}h'(i',j',k')e_{q^*q}h'(p',q',s')^*e_{qq}\Bigg)
\end{aligned}$$

для $P = \{(1,1,1),\ (2,1,2),\ (2,2,1),\ (3,2,2)\}$ и $P' = \{(2,1,1),\ (3,2,1),\ (4,2,2)\}$.

С учётом найденных ранее коммутационных соотношений имеем

$$g(x,y,z)g(x',y',z') = t_{pq^*}\big(f_1(x,y,z)+f_1(x',y',z')\big)\times \\ \times t_p\big(f_2(x,y,z)+f_2(x',y',z')\big)t_{q^*}\big(f_3(x,y,z)+f_3(x',y',z')\big)$$

при любых $x,x',y,y',z,z'\in R$. Поэтому

$$\begin{aligned}
&g_1(x,y,z) = g(x,y,z)g(x,y,-z)^* = \\
&\quad = t_{pq^*}\big(f_{11}(x,y,z)\big)t_p\big(f_{12}(x,y,z)\big)t_{q^*}\big(f_{13}(x,y,z)\big),\\
&f_{1j}(x,y,z) = f_j(x,y,z)-f_j(x,y,-z), \quad j=1,2,3,\\
&g_2(x,y,z) = g_1(x,y,z)g(x,-y,z)^* = \\
&\quad = t_{pq^*}\big(f_{21}(x,y,z)\big)t_p\big(f_{22}(x,y,z)\big)t_{q^*}\big(f_{23}(x,y,z)\big),\\
&f_{2j}(x,y,z) = f_{1j}(x,y,z)-f_{1j}(x,-y,z), \quad j=1,2,3,\\
&g_3(x,y,z) = g_2(x,y,z)g(-x,y,z)^* = \\
&\quad = t_{pq^*}\big(f_{31}(x,y,z)\big)t_p\big(f_{32}(x,y,z)\big)t_{q^*}\big(f_{33}(x,y,z)\big),\\
&f_{3j}(x,y,z) = f_{2j}(x,y,z)-f_{2j}(-x,y,z), \quad j=1,2,3.
\end{aligned}$$

Ясно, что при каждом $j=1,2,3$ элемент $f_{1j}(x,y,z)$ является умноженной на 2 суммой слагаемых из представления $f_j(x,y,z)$, в которых элемент $z$ (с учётом $z^*$) встречается нечётное число раз, $f_{2j}(x,y,z)$ — умноженной на 4 суммой слагаемых из записи $f_j(x,y,z)$, содержащих уже нечётные количества и $z$ (вместе с $z^*$), и $y$ (вместе с $y^*$), и, наконец, $f_{3j}(x,y,z)$ — умноженной на 8 суммой тех слагаемых из $f_j(x,y,z)$, запись которых содержит нечётные количества $z$ (вместе с $z^*$), $y$ (вместе с $y^*$) и $x$ (вместе с $x^*$). Нетрудно заметить, что в последнем случае

$$\begin{aligned}
&f_{31}(x,y,z) = 8(e_{pp}h(1,1,1)e_{q^*q}+e_{pp}h(3,2,2)e_{q^*q}h'(2,1,1)^*e_{qq}+\\
&\quad +e_{pp}h(2,1,2)e_{q^*q}h'(3,2,1)^*e_{qq}+e_{pp}h(1,1,1)e_{q^*q}h'(4,2,2)^*e_{qq}),\\
&f_{32}(x,y,z) = f_{33}(x,y,z) = 0,
\end{aligned}$$

а потому $g_3(x,y,z) = t_{pq^*}\big(f_{31}(x,y,z)\big)$.

Значит, для произвольного $v=v^*\in Z(R)$

$$\begin{aligned}
&g_4(x,y,z,v) = t_{pq^*}\big(f_{31}(x,y,vz/8)\big)t_{pq^*}\big(-v^3f_{31}(x,y,z/8)\big) = \\
&\quad = t_{pq^*}\big((v-v^3)e_{pp}h(1,1,1)e_{q^*q}\big) = \\
&\quad = t_{pq^*}\big((v-v^3)e_{pp}(ze^*_{qq}x^*e_{pp}y+ye^*_{qq}x^*e_{pp}z)e_{q^*q}\big).
\end{aligned}$$

Кроме того, в силу равенств, приведённых перед началом доказательства, имеем

$$\begin{aligned}
&g_5(x,y,z,v) = [g_4(x^*/2,y,z,v),1+e_{qq^*}][g_4(-x^*/2,y,z,v),1+e_{qq^*}]^* = \\
&\quad = t_{pq}\big((v-v^3)(ze^*_{qq}xe_{pp}y+ye^*_{qq}xe_{pp}z)\big),\\
&g_6(x,y,z,v) = g_5(x,y,ye^*_{qq}z,v)g_5(1/2\,ze^*_{qq}x,y,y,v)^* = t_{pq}\big((v-v^3)ye^*_{qq}xe_{pp}ye^*_{qq}z\big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&g_7(x,x',y,z,z',v,v') = \\
&\quad = g_5(x',(v-v^3)ye_{qq}^*xe_{pp}ye_{qq}^*z,z',v')g_5\big((v-v^3)xe_{pp}ye_{qq}^*ze_{qq}^*x',y,z',v'\big)^* \times \\
&\quad \times g_5\big((v-v^3)ze_{qq}^*x',y,z'e_{qq}^*xe_{pp}y,v'\big)g_5(1/2\,(v-v^3)ze_{qq}^*x'e_{pp}z'e_{qq}^*x,y,y,v')^* = \\
&\quad = t_{pq}\big((v-v^3)(v'-v'^3)(ye_{qq}^*xe_{pp}ye_{qq}^*ze_{qq}^*x'e_{pp}z' + z'e_{qq}^*x'e_{pp}ye_{qq}^*xe_{pp}ye_{qq}^*z)\big) \times \\
&\quad \times t_{pq}\big((v^3-v)(v'-v'^3)(ye_{qq}^*xe_{pp}ye_{qq}^*ze_{qq}^*x'e_{pp}z' + z'e_{qq}^*xe_{pp}ye_{qq}^*ze_{qq}^*x'e_{pp}y)\big) \times \\
&\quad \times t_{pq}\big((v-v^3)(v'-v'^3)(z'e_{qq}^*xe_{pp}ye_{qq}^*ze_{qq}^*x'e_{pp}y + ye_{qq}^*ze_{qq}^*x'e_{pp}z'e_{qq}^*xe_{pp}y)\big) \times \\
&\quad \times t_{pq}\big((v^3-v)(v'-v'^3)ye_{qq}^*ze_{qq}^*x'e_{pp}z'e_{qq}^*xe_{pp}y\big) = \\
&\quad = t_{pq}\big((v-v^3)(v'-v'^3)z'e_{qq}^*x'e_{pp}ye_{qq}^*xe_{pp}ye_{qq}^*z\big)
\end{aligned}$$

для любых $x,x',y,y',z,z' \in R$ и $v,v' \in Z(R)$, $v = v^*$, $v' = v'^*$. Пользуясь плотностью идемпотентов $\{e_{jj}\}$ в алгебре $R$, можно также выразить каждый элемент

$$g_8(u,u',u'',y,w) = t_{pq}(wue_{pp}ye_{qq}^*u'e_{pp}ye_{qq}^*u''),$$

где $u,u',u'' \in R$ и $w \in J^2$, через произведения элементов $\{g_7(x,x',y,z,z',v,v')\}$.

Отметим, что при всех $1 \leqslant m \neq n, n^* \leqslant 4$, $x,y \in R$ и $v = v^* \in Z(R)$

$$\begin{aligned}
&[1+ve_{m^*m}, t_{mn}(y)][1+ve_{m^*m}, t_{mn}(-y)]^* = t_{m^*n}(2ve_{m^*m}y), \\
&[t_{mn}(y), 1+ve_{n^*n}][t_{mn}(-y), 1+ve_{n^*n}]^* = t_{mn^*}(2vye_{n^*n}), \qquad (7) \\
&[1+ve_{m^*m}, t_{mn^*}(y)][1+ve_{m^*m}, t_{mn^*}(-y)]^* = t_{m^*n^*}(2ve_{m^*m}y), \\
&[t_{mn}(y), t_{mn^*}(-x^*)] = t_m(ye_{nn}^*x), \quad [t_{m^*n}(-x^*), t_{mn}(y)] = t_n(xe_{mm}y). \qquad (8)
\end{aligned}$$

Из первой группы этих равенств вытекает, в частности, что

$$\begin{aligned}
&[1+1/2\,e_{mm^*}, [1+v/2e_{m^*m}, t_{mn}(z)]\,[1+v/2e_{m^*m}, t_{mn}(-z)]^*] \times \\
&\quad \times [1+1/2\,e_{mm^*}, [1+v/2e_{m^*m}, t_{mn}(-z)]\,[1+v/2e_{m^*m}, t_{mn}(z)]^*]^* = \\
&\quad = [1+1/2\,e_{mm^*}, t_{m^*n}(ve_{m^*m}z)]\,[1+1/2\,e_{mm^*}, t_{m^*n}(-ve_{m^*m}z)]^* = \\
&\quad = t_{mn}(vz) \qquad (9)
\end{aligned}$$

для любых $z \in R$, $v = v^* \in Z(R)$ и $1 \leqslant m \neq n, n^* \leqslant 4$.

Следовательно, если элемент $t_{pq}(y)$ содержится в группе $A$, то по построению все определённые с его помощью элементы $h(x,y)$, $g(x,y,z)$, $g_i(x,y,z)$, $i = 1,2,3$, $g_j(x,y,z,v)$, $j = 4,5,6$ и $g_7(x,x',y,z,z',v,v')$ тоже входят в группу $A$ для любых $x,x',z,z' \in R$ и $v,v' \in Z(R)$, $v = v^*$, $v' = v'^*$. Поскольку группа $A$ вместе с произвольными элементами $t_{pq}(y)$ и $t_{pq}(y')$ содержит их произведение $t_{pq}(y+y')$, мы получаем также, что

$$g_8(u,u',u'',y,w) = t_{pq}(wue_{pp}ye_{qq}^*u'e_{pp}ye_{qq}^*u'') \in A, \qquad t_{pq}(y) \in A, \quad u,u',u'' \in R, \quad w \in J^2,$$

и, значит, $t_{pq}(b) \in A$ для всех $b \in (I_{pq}(y)J)^2$, где $I_{pq}(y) = Re_{pp}ye_{qq}^*R$ — идеал алгебры $R$, который порождает элемент $e_{pp}ye_{qq}^*$, $t_{pq}(y) \in A$.

Более того, используя плотность идемпотентов $\{e_{jj}\}$ и соотношения (7) и (8), мы получаем, что в группу $A$ вместе с каждым элементом $t_{pq}(y)$ входят все элементы $t_{pq}(b)$, $t_{p^*q}(b)$, $t_{pq^*}(b)$, $t_{p^*q^*}(b)$, $t_p(b)$, $t_q(b)$, $t_{p^*}(b)$ и $t_{q^*}(b)$ для $b \in (I_{pq}(y)J)^2$.

Равенство (9) гарантирует, что $t_{mn}(vb) \in A$ для всякого $v = v^* \in Z(R)$, если $t_{mn}(b) \in A$ и $1 \leqslant m \neq n, n^* \leqslant 4$. Поэтому, применяя описанное выше построение для любого элемента $t_{p^*q^*}(x)$, входящего в группу $A$, мы получим, что $A$ содержит вместе с ним элементы вида

$$g_9(x,y,z,v) = g_5(x^*,y,z,v) = t_{pq}\big((v-v^3)(ze^*_{qq}x^*e_{pp}y + ye^*_{qq}x^*e_{pp}z)\big)$$

при всех $y, z \in R$ и $v = v^* \in Z(R)$, а также элементы $t_{pq}(b)$, $t_{p^*q}(b)$, $t_{pq^*}(b)$, $t_{p^*q^*}(b)$, $t_p(b)$, $t_q(b)$, $t_{p^*}(b)$ и $t_{q^*}(b)$ для каждого $b \in (I_{p^*q^*}(x)J)^2$, где, напомним, $I_{p^*q^*}(x) = Re^*_{pp}xe_{qq}R$ (последнее можно сразу получить, заменив в предшествующем выводе $p$ на $p^*$, $q$ на $q^*$ и $y$ на $x$).

Для любых $x, u, u', u'', y, y', z, z' \in R$, $w \in J^2$ и $v = v^* \in Z(R)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}
&g_{10}(x,u,u',u'',w,v) = g_9(wxe_{qq}u^*e^*_{pp}x, u', u'', v)g_9(x, wu'e^*_{qq}x^*e_{pp}u, u'', v)^* = \\
&\quad = t_{pq}\big(w(v-v^3)(u'e^*_{qq}x^*e_{pp}ue^*_{qq}x^*e_{pp}u'' + u''e^*_{qq}x^*e_{pp}ue^*_{qq}x^*e_{pp}u')\big) \times \\
&\quad \times t_{pq}\big(w(v^3-v)(u'e^*_{qq}x^*e_{pp}ue^*_{qq}x^*e_{pp}u'' + u''e^*_{qq}x^*e_{pp}u'e^*_{qq}x^*e_{pp}u)\big) = \\
&\quad = t_{pq}\big(w(v-v^3)u''e^*_{qq}x^*e_{pp}(ue^*_{qq}x^*e_{pp}u' - u'e^*_{qq}x^*e_{pp}u)\big), \\
&g_{11}(x,u,u',u'',w,v) = g_9(wxe_{qq}u^*e^*_{pp}x, u', u'', v)g_9(x, wue^*_{qq}x^*e_{pp}u'', u', v)^* = \\
&\quad = t_{pq}(w(v-v^3)(u''e^*_{qq}x^*e_{pp}u - ue^*_{qq}x^*e_{pp}u'')e^*_{qq}x^*e_{pp}u'), \\
&g_{12}(x,y,y',z,z',w,v) = \\
&\quad = g_9(wxe_{qq}z^*e^*_{pp}xe_{qq}y^*e^*_{pp}x, y', z', v)g_{10}(x, z', ye^*_{qq}x^*e_{pp}z, y', w, v) \times \\
&\quad \times g_{11}(x, y', ye^*_{qq}x^*e_{pp}z, z', w, v)g_{10}(x, ye^*_{qq}x^*e_{pp}z, y', z', w, v) = \\
&\quad = t_{pq}\big(w(v-v^3) \times \\
&\quad \times (y'e^*_{qq}x^*e_{pp}ye^*_{qq}x^*e_{pp}ze^*_{qq}x^*e_{pp}z' + z'e^*_{qq}x^*e_{pp}ye^*_{qq}x^*e_{pp}ze^*_{qq}x^*e_{pp}y')\big) \times \\
&\quad \times t_{pq}\big(w(v-v^3)y'e^*_{qq}x^*e_{pp}(z'e^*_{qq}x^*e_{pp}ye^*_{qq}x^*e_{pp}z - ye^*_{qq}x^*e_{pp}ze^*_{qq}x^*e_{pp}z')\big) \times \\
&\quad \times t_{pq}(w(v-v^3)(z'e^*_{qq}x^*e_{pp}y' - y'e^*_{qq}x^*e_{pp}z')e^*_{qq}x^*e_{pp}ye^*_{qq}x^*e_{pp}z) \times \\
&\quad \times t_{pq}\big(w(v-v^3)z'e^*_{qq}x^*e_{pp}(ye^*_{qq}x^*e_{pp}ze^*_{qq}x^*e_{pp}y' - y'e^*_{qq}x^*e_{pp}ye^*_{qq}x^*e_{pp}z)\big) = \\
&\quad = t_{pq}(2w(v-v^3)z'e^*_{qq}x^*e_{pp}ye^*_{qq}x^*e_{pp}ze^*_{qq}x^*e_{pp}y').
\end{aligned}$$

Значит, в группе $A$ вместе с каждым элементом $t_{p^*q^*}(x)$ содержатся элементы

$$t_{pq}(w(v-v^3)ue^*_{qq}x^*e_{pp}u'e^*_{qq}x^*e_{pp}ze^*_{qq}x^*e_{pp}z'), \qquad u, u', z, z' \in R, \quad w \in J^2, \quad v = v^* \in Z(R),$$

а также любые их произведения, т. е. все элементы $t_{pq}(b)$, $b \in (I_{q^*p^*}(x^*)J)^3$.

Следовательно, если элемент $t_{pq}(y)$ входит в группу $A$, тогда с учётом равенств (7) и (8) она содержит элемент $t_{p^*q^*}(e_{p^*p}ye_{q^*q})$ и все элементы $t_{pq}(d)$,

$t_{p^*q}(b)$, $t_{pq^*}(b)$, $t_{p^*q^*}(b)$, $t_p(b)$, $t_q(b)$, $t_{p^*}(b)$ и $t_{q^*}(b)$ для $b \in (I_{q^*p^*}(e_{q^*q}y^*e_{p^*p})J)^3 = (I_{qp}(y^*)J)^3$. Кроме того, по доказанному выше в этом случае группе $A$ принадлежат элементы $t_{pq}(b')$, $t_{p^*q}(b')$, $t_{pq^*}(b')$, $t_{p^*q^*}(b')$, $t_p(b')$, $t_q(b')$, $t_{p^*}(b')$ и $t_{q^*}(b')$ для любого $b' \in (I_{pq}(y)J)^2$. Поэтому вместе со всяким элементом $t_{pq}(y)$ в группу $A$ входят элементы $t_{mn}(d) = t_{nm}(-d^*)$, $t_j(d) = t_j(-d^*)$ для произвольных $d \in (R(t_{pq}(y) - 1)RJ)^4 \subseteq (I_{pq}(y)J)^2 + (I_{qp}(y^*)J)^3$, $1 \leqslant m \neq n, n^* \leqslant 4$ и $j = 1, \ldots, 4$. В частности, это справедливо для элемента $t_{pq}(y) = t_{pq}(r)$. □

Описание первичного радикала унитарной группы и критерий существования в ней разрешимого радикала были установлены в [8] в следующей форме.

**Предложение 5.5.** *Пусть $R$ — алгебра над кольцом $F$ с единицей 1, 1/2, инволюцией $*$ и $e$-системой $E = \{e_{ij}\}$. Тогда во всякой подгруппе $A$ унитарной группы $\mathrm{U}(R, *)$ алгебры $R$ относительно инволюции $*$, содержащей связанную с системой $E$ элементарную подгруппу $\mathrm{E}(E, R, *)$, выполняется равенство*

$$\mathrm{rad}(A) = C\big(A, 1 + \mathrm{Rad}(R)\big) = A \cap C\big(\mathrm{U}(R, *), 1 + \mathrm{Rad}(R)\big).$$

Для любых идемпотентов $e_{ii}$ и $e_{jj}$ из $e$-системы $E$ с $i \neq j, j^*$ в алгебре $R$ можно подобрать такие элементы $\{r_{ij}^k, r_{ji}^k\}$, что

$$e_{ii} = \sum_k r_{ij}^k e_{jj} r_{ji}^k.$$

Обозначим через $n_{ij}$ минимальную мощность такого набора для данных $i$ и $j$, через $N(E)$ — минимальное из чисел $n_{ij}$ по всем $i$ и $j$, $1 \leqslant i \neq j, j^* \leqslant 4$.

**Следствие 5.6.** *Пусть в условиях предложения* 5.5 *элемент* $\big(1+N(E)\big)!$ *обратим в алгебре $R$. Тогда группа $A$ обладает разрешимым радикалом в том и только в том случае, если первичный радикал $\mathrm{Rad}(R)$ алгебры $R$ нильпотентен.*

**Определение 5.7.** Будем говорить, что в алгебре (кольце) $R$ с инволюцией $*$ плотный идемпотент $v$ имеет гиперболический ранг строго больше единицы, если $R$ содержит набор элементов $E(v) = \{e_{ij} \mid i, j = 1, \ldots, 4\}$ со следующими свойствами:

1) $e_{11} = v$, $e_{11}^* = e_{22}$, $e_{33}^* = e_{44}$, $e_{12}^* = -e_{12}$ и $e_{13}^* = e_{42}$;
2) $e_{ij}e_{mn} = \delta_{jm}e_{in}$ для любых $i, j, m, n = 1, \ldots, 4$.

Нетрудно заметить, что при этих условиях, помимо идемпотента $e_{11} = v$, плотными в $*$-алгебре $R$ являются также идемпотенты $e_{22}$, $e_{33}$ и $e_{44}$. Кроме того, комбинируя свойства 1) и 2), мы сразу получаем равенства

$$\begin{aligned}
e_{21}^* &= (e_{21}e_{11})^* = e_{11}^*e_{21}^* = e_{22}e_{21}^* = e_{21}e_{12}e_{21}^* = \\
&= -e_{21}e_{12}^*e_{21}^* = -e_{21}(e_{21}e_{12})^* = -e_{21}e_{22}^* = -e_{21}e_{11} = -e_{21}, \\
e_{31}^* &= (e_{31}e_{11})^* = e_{11}^*e_{31}^* = e_{22}e_{31}^* = e_{24}e_{42}e_{31}^* = \\
&= e_{24}e_{13}^*e_{31}^* = e_{24}(e_{31}e_{13})^* = e_{24}e_{33}^* = e_{24}e_{44} = e_{24}, \\
e_{34}^* &= (e_{31}e_{12}e_{24})^* = e_{24}^*e_{12}^*e_{31}^* = -e_{31}e_{12}e_{24} = -e_{34}, \\
e_{43}^* &= (e_{42}e_{21}e_{13})^* = e_{13}^*e_{21}^*e_{42}^* = -e_{42}e_{21}e_{13} = -e_{43},
\end{aligned}$$

$$e_{23}^* = (e_{21}e_{13})^* = e_{13}^*e_{21}^* = -e_{42}e_{21} = -e_{41},$$
$$e_{32}^* = (e_{31}e_{12})^* = e_{12}^*e_{31}^* = -e_{12}e_{24} = -e_{14}.$$

Поэтому вместе с идемпотентом $e_{11} = v$ гиперболический ранг строго больше единицы имеют к тому же идемпотенты $e_{22}$, $e_{33}$ и $e_{44}$.

Из приведённых равенств также вытекает, что элементы $e_{ii}$, $e_{i+1i+1}$, $e_{ii+1}$ и $e_{i+1i}$ с $i = 1,3$ набора $E(v)$ составляют $e$-систему в $*$-алгебре $R$, которую мы будем обозначать через $E(v)'$. Заметим, что для такой $e$-системы $E(v)'$ параметр $N(E(v)')$ равен единице.

Напомним, что элемент $r$ алгебры $R$ с инволюцией $*$, для которого выполняется соотношение $r^* = r$ ($r^* = -r$) называется *симметрическим* (*кососимметрическим*).

Простейшими примерами симметрических элементов являются 0, $i \cdot 1$ для $i \in \mathbb{Z}$ (если алгебра $R$ содержит единицу 1), $r + r^*$, $rr^*$, кососимметрических — $r - r^*$ для всех $r \in R$.

Если основное кольцо $F$, над которым определена $*$-алгебра $R$, содержит $1/2$, то каждый элемент $r \in R$ можно представить в виде суммы симметрического и кососимметрического элементов: $r = 1/2\,(r + r^*) + 1/2\,(r - r^*)$.

В $*$-алгебре $R$ множества симметрических $S$ и кососимметрических $C$ элементов образуют йорданову и лиевскую подалгебры относительно операций $a \circ b = ab + ba$ и $(a, b) = ab - ba$, $a, b \in R$.

Кроме того, множество $Z(R)_s = Z(R) \cap S$ симметрических элементов центра $Z(R)$ $*$-алгебры $R$ является подалгеброй, причём в случае $*$-первичной алгебры $R$ подалгебра $Z(R)_s$ тоже является первичной (см. замечание 1.13).

С учётом замечания 1.13 из доказательства предложения 3.10 (см. [53, лемма 2.7]) можно вывести также следующий его унитарный аналог.

**Предложение 5.8.** *Пусть $m \geqslant 1$, $R$ — $*$-первичное кольцо с единицей $1$, в котором элемент $(2m)!$ обратим, $a$ — кососимметрический нильпотентный элемент кольца $R$ индекса $m+1$ (т. е. $a^m \neq a^{m+1} = 0$), $B$ — подгруппа в унитарной группе $\mathrm{U}(R,*)$ кольца $R$, которая нормализуется подгруппой, порождённой элементами*

$$\exp(ua) = \sum_{k=0}^{m} (u^k a^k)/k!,$$

*где $u$ пробегает подкольцо $Z(R)_s$ центральных симметрических элементов кольца $R$. Для любых $b \in B$ и $i \geqslant 1$ определим*

$$\Delta_i(b) = \{u \in Z(R)_s \mid [\ldots[\exp(ua), \underbrace{b]\ldots b]}_{i} = 1\}.$$

*Предположим, что для всякого $b \in B$ существует $i(b) \geqslant 1$, при котором для всех $v \in Z(R)_s$ множество $\Delta_{i(b)}([b, \exp(va)])$ содержит по меньшей мере $2^{i(b)}m + 1$ элемент. Тогда произвольная цепочка $\{b_j\}_{j \geqslant 0}$, в которой $b_0 = b \in B$ и $b_{j+1} = [b_j, \exp(u_{j+1}a)]$ для $u_{j+1} \in Z(R)_s$, $j \geqslant 0$, содержит $b_q = 1$ при некотором $q \geqslant 0$.*

Пользуясь замечанием 1.13, несложно показать, что при данных условиях для каждого элемента $b \in B \setminus Z(R)$ в любую цепочку $\{b_j\}_{j \geqslant 0}$ указанного вида с $b_0 = b$ входит элемент $b_p \in B \setminus Z(R)$, перестановочный с элементом $a$, $b_p a = a b_p$ (см. [53]).

По аналогии со следствием 3.11 мы получаем следующее утверждение.

**Следствие 5.9.** *Пусть $m \geqslant 1$, $R$ — $*$-первичное кольцо с единицей 1, содержащее бесконечное подкольцо центральных симметрических элементов $Z(R)_s$ и обратимый элемент $(2m)!$, $a$ — кососимметрический нильпотентный элемент кольца $R$ индекса $m+1$ и $B$ — подгруппа в унитарной группе $\mathrm{U}(R,*)$ кольца $R$, которая нормализуется её подгруппой, порождённой всеми элементами*

$$\exp(ua) = \sum_{k=0}^{m} (u^k a^k)/k!, \quad u \in Z(R)_s.$$

*Тогда для любого достижимого элемента $b$ группы $B$ произвольная цепочка элементов $\{b_j\}_{j \geqslant 0}$, в которой $b_0 = b$ и $b_{j+1} = [b_j, \exp(u_{j+1} a)]$ для $u_{j+1} \in Z(R)$, $j \geqslant 0$, содержит $b_q = 1$ при некотором $q \geqslant 0$.*

Используя предложение 5.8, замечание 1.13 и доказательство леммы 3.14, можно без труда записать унитарную версию последней в следующем виде.

**Лемма 5.10.** *Пусть $R$ — $*$-первичная алгебра с единицей 1 и $1/2$ над кольцом $F$, подалгебра центральных симметрических элементов $Z(R)_s$ которой не является целой алгеброй над $F$, $a$ — кососимметрический нильпотентный элемент алгебры $R$ индекса 2, $B$ — слабо разрешимая подгруппа в унитарной группе $\mathrm{U}(R,*)$ алгебры $R$, которая не входит в центр $Z(R)$ алгебры $R$ и нормализуется подгруппой $1 + Z(R)_s a$. Тогда подгруппа $B$ содержит такой элемент $b$, что $b \notin Z(R)$ и $ba = ab$.*

**Теорема 5.11.** *Пусть $R$ — алгебра над кольцом $F$ с единицей 1, $1/2$, инволюцией $*$ и идемпотентом $v$ гиперболического ранга строго больше единицы, такая что подалгебры центральных симметрических элементов всех её $*$-первичных фактор-алгебр, не содержащих нетривиальных локально нильпотентных идеалов, не являются целыми $F$-алгебрами. Тогда в каждой подгруппе $A$ унитарной группы $\mathrm{U}(R,*)$, нормализуемой соответствующей $e$-системе $E(v)'$ элементарной подгруппой $\mathrm{E}(E(v)', R, *)$, справедливы равенства*

$$\mathrm{T}(A) = C\big(A, 1 + \mathrm{L}(R)\big) = A \cap C\big(\mathrm{U}(R,*), 1 + \mathrm{L}(R)\big).$$

**Доказательство.** Как и в доказательствах теорем 3.16 и 4.22, данное равенство нам достаточно установить лишь для произвольной слабо разрешимой подгруппы $B$ группы $\mathrm{U}(R,*)$, нормализуемой её элементарной подгруппой $\mathrm{E}(E, R, *)$. В силу замечаний 1.12 и 1.37 для этого требуется только показать, что для любого $*$-первичного идеала $P$ алгебры $R$, фактор-алгебра $R/P$ по которому не содержит ненулевых локально нильпотентных идеалов, образ $B_P$ группы $B$ в алгебре $R/P$ входит в её центр $Z(R/P)$. Точно так же, как и ранее, мы будем вести доказательство от противного.

Для удобства в дальнейшем инволюцию, индуцированную на фактор-алгебре $R/P$ исходной инволюцией алгебры $R$, образы 1, $1/2$ и элементы образа $E(v)_P$ системы $E(v)$ в алгебре $R/P$ мы будем обозначать по-прежнему $*$, 1, $1/2$ и $\{e_{ij}\}$.

Ясно, что образ $E_P$ набора $E = E(v)'$ в $*$-алгебре $R/P$ является $e$-системой и отвечающая системе $E_P$ элементарная подгруппа $\mathrm{E}(E_P, R/P, *)$ унитарной группы $\mathrm{U}(R/P, *)$ совпадает с образом в алгебре $R/P$ (точнее, в унитарной группе $\mathrm{U}(R/P, *)$) подгруппы $\mathrm{E}(E, R, *)$.

Образ $B_P$ группы $B$ в $*$-первичной алгебре $R/P$, как и образ содержащей её группы $\mathrm{U}(R, *)$, лежит в группе $\mathrm{U}(R/P, *)$ и нормализуется подгруппой $\mathrm{E}(E_P, R/P, *)$. Предположим, что слабо разрешимая группа $B_P$ не входит в центр $Z(R/P)$ алгебры $R/P$ и, значит, также в центр $C\big(\mathrm{U}(R/P, *)\big)$ группы $\mathrm{U}(R/P, *)$. Тогда по лемме 5.10 для всякого $b \in B_P \setminus Z(R/P)$ и $j = 1, \ldots, 4$ подгруппа $D_j(b)$, порождённая всеми элементами вида $t'_j(u)bt'_j(-u)$ с $u \in Z(R/P)$, где, напомним,

$$t'_i(u) = 1 + (u + u^*)e_{ii+1}, \quad t'_{i+1}(u) = 1 + (u + u^*)e_{i+1i} \in \mathrm{E}(E_P, R/P, *), \quad i = 1, 3,$$

содержит по крайней мере один элемент $d \in B_P \setminus Z(R/P)$, такой что $e_{ii+1}d = de_{ii+1}$ при $j = i$ и $e_{i+1i}d = de_{i+1i}$ при $j = i + 1$, $i = 1, 3$. Поэтому, воспользовавшись доказательством основной леммы из [8] (см. также [10]), мы сразу получаем, что в группе $B_P$ имеется элемент

$$t_{pq}(z) = 1 + e_{pp}ze^*_{qq} - e_{qq}ze^*_{pp} \neq 1$$

для некоторых $z \in R/P$ и $1 \leqslant p \neq q, q^* \leqslant 4$. Следовательно, по лемме 5.4 группа $B_P$ содержит также все элементы $t_{pq}(b)$, $t_{p^*q}(b)$, $t_{pq^*}(b)$, $t_{p^*q^*}(b)$, $t_p(b)$, $t_q(b)$, $t_{p^*}(b)$ и $t_{q^*}(b)$ для $b \in (IJ)^4$, где $I = R/P(t_{pq}(z) - 1)R/P$ — $*$-идеал алгебры $R/P$, порождённый элементом $t_{pq}(z) - 1$, $J$ — идеал центра $Z(R/P)$ этой алгебры, порождённый элементами $v - v^3$, $v \in Z(R/P)_s$. Отметим, что в силу условий, наложенных на $*$-первичную алгебру $R/P$, и замечания 1.13 идеалы $J$ и $IJ$ отличны от нуля.

Для всякого конечного набора элементов $S$ алгебры $R/P$ определим

$$\begin{aligned} H_0(S) = \{&t_{mn}(s)t_m(s'),\, t_{mn}(s)t_n(s'),\, t_j(s) \mid \\ &1 \leqslant m \neq n, n^* \leqslant 4,\ j = 1, \ldots, 4,\ s, s' \in S\}, \\ H_k(S) = \{&g_k(h_1, \ldots, h_{2^k}) \mid h_1, \ldots, h_{2^k} \in H_0(S)\} = \\ = \{&g_1(h, h') \mid h, h' \in H_{k-1}(S)\}, \quad k \geqslant 1. \end{aligned}$$

Тогда при всех $1 \leqslant m \neq n, n^* \leqslant 4$, $s, s', v, v' \in S$ элементы

$$\begin{aligned} &[t_{mn^*}(s)t_m(s'), t_n(v)] = t_{mn}\big(se_{nn}(v - v^*)\big)t_m(1/2\, se_{nn}(v - v^*)e^*_{nn}s^*), \\ &[t_{m^*n}(s)t_n(s'), t_m(v)] = t_{mn}\big((v^* - v)e^*_{mm}s\big)t_n(1/2\, s^*e_{mm}(v - v^*)e^*_{mm}s), \\ &[t_{mn}(s)t_m(s'), t_{mn^*}(v)t_m(v')] = t_m(ve_{nn}s^*) = t_m(-se^*_{nn}v^*) \end{aligned}$$

входят в множество $H_1(S)$. Аналогичным образом для каждого $k \geqslant 1$ из включения

$$t_{mn^*}(s)t_m(s'),\ t_n(s''),\ t_{m^*n}(w)t_n(w'),\ t_m(w''),$$
$$t_{mn}(g)t_m(g'),\ t_{mn^*}(h)t_m(h') \in H_k(S),$$

где $1 \leqslant m \neq n, n^* \leqslant 4$, следует, что множество $H_{k+1}(S)$ содержит элементы

$$t_{mn}\big(se_{nn}(s'' - s''^*)\big)t_m(1/2\, se_{nn}(s'' - s''^*)e_{nn}^* s^*),$$
$$t_{mn}\big((w''^* - w'')e_{mm}^* w\big)t_n(1/2\, w^* e_{mm}(w'' - w''^*)e_{mm}^* w),$$
$$t_m(he_{nn}g^*) = t_m(-ge_{nn}^* h^*).$$

Поэтому, полагая для любых $k \geqslant 0$ и $1 \leqslant m \neq n, n^* \leqslant 4$

$$S_{mn,m}(k) = \{v \in R/P \mid \exists v' \in R/P,\ t_{mn}(v)t_m(v') \in H_k(S)\},$$
$$S_{mn,n}(k) = \{w \in R/P \mid \exists w' \in R/P,\ t_{mn}(w)t_n(w') \in H_k(S)\},$$
$$S_m(k) = \{s \in R/P \mid t_m(s) \in H_k(S)\},$$

мы получаем, что $S_{mn,n}(0) = S_{mn,n}(0) = S$, $S_m(0) = \{s, -s^* \mid s \in S\}$,

$$\{\pm se_{nn}(s'' - s''^*) \mid s \in S_{mn^*,m}(k),\ s'' \in S_n(k)\} \subseteq S_{mn,m}(k+1),$$
$$\{\pm(w'' - w''^*)e_{mm}^* w \mid w \in S_{m^*n,n}(k),\ w'' \in S_m(k)\} \subseteq S_{mn,n}(k+1),$$
$$\{\pm he_{nn}g^*, \pm ge_{nn}^* h^* \mid h \in S_{mn^*,m}(k),\ g \in S_{mn,m}(k)\} \subseteq S_m(k+1).$$

Если набор $S$ составляют элементы из $*$-идеала $(IJ)^4$, то конечное множество $H_0(S)$ содержится в группе $B_P$ и, поскольку последняя слабо разрешима, найдётся номер $k = k(S) \geqslant 1$, при котором $H_k(S) = \{1\}$ и

$$e_{mm}ve_{nn} = e_{mm}(w - w^*)e_{mm} = 0$$

при всех $v \in S_{mn,m}(k) \cup S_{mn,n}(k)$, $w \in S_m(k)$ и $1 \leqslant m \neq n, n^* \leqslant 4$. В частности, можно взять любые элемент $x \in (IJ)^4$ и индекс $i$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, и определить соответствующий номер $k(X) = k_i(x) \geqslant 1$ для набора

$$X = X_i(x) = \{\pm e_{pi}(x - x^*)e_{i^*q} \mid p, q = 1, \ldots, 4\}.$$

При этом, используя индукцию, нетрудно показать, что

$$\{\pm 2e_{mi}(x - x^*)e_{i^*i}(x - x^*)e_{i^*n^*}\} \subseteq X_{mn,m}(1) \cap X_{mn,n}(1),$$
$$\{\pm e_{mi}(x - x^*)e_{i^*i}(x - x^*)e_{i^*m^*}\} \subseteq X_m(1),$$
$$\{\pm 2^{l_k} e_{mi}(e_{ii}(x - x^*)e_{i^*i})^{2^k} e_{in^*}\} \subseteq X_{mn,m}(k) \cap X_{mn,n}(k),$$
$$\{\pm 2^{l'_k} e_{mi}(e_{ii}(x - x^*)e_{i^*i})^{2^k} e_{im^*}\} \subseteq X_m(k),$$

где $l_1 = 1$, $l'_1 = 0$, $l_{k+1} = l_k + l'_k + 1$, $l'_{k+1} = 2l_k$ при всех $k \geqslant 1$ и $1 \leqslant m \neq n, n^* \leqslant 4$. Поэтому $(e_{ii}(x - x^*)e_{i^*i})^{2^{k(X)}} = 0$.

Допустим теперь, что $e_{ii}(x - x^*)e_{ii}^* \neq 0$ для некоторых $x \in (IJ)^4$ и $1 \leqslant i \leqslant 4$. Тогда по доказанному ранее можно выбрать такое целое $l \geqslant 1$, что

$$(e_{ii}(x - x^*)e_{i^*i})^l \neq (e_{ii}(x - x^*)e_{i^*i})^{l+1} = 0.$$

Положим $y = e_{ii}ye_{ii}^* = (e_{ii}(x - x^*)e_{i^*i})^l e_{ii^*}$, выберем произвольное конечное множество элементов $Z$ алгебры $R/P$ и определим набор

$$Y = \{\pm e_{pi}yre_{iq},\ \pm e_{pi^*}rye_{i^*q} \mid r \in Z,\ p,q = 1,\dots,4\}.$$

Поскольку $ye_{i^*i}y = 0$ и $y^* \in \{\pm y\}$, мы можем с помощью индукции по $k$ показать, что для любых $1 \leqslant m \neq n, n^* \leqslant 4$ и $k \geqslant 1$

$$\{\pm e_{mi^*}ryr'ye_{i^*n^*},\ \pm e_{mi}yryr'e_{in^*} \mid r,r' \in Z\} \subseteq Y_{mn,m}(1) \cap Y_{mn,n}(1),$$
$$\{\pm e_{mi^*}ryr'ye_{i^*m^*},\ \pm e_{mi}yryr'e_{im^*} \mid r,r' \in Z\} \subseteq Y_m(1),$$
$$\{\pm e_{mi^*}r_1yr_2y\cdots r_{2^k}ye_{i^*n^*},\ \pm e_{mi}yr_1yr_2\cdots yr_{2^k}e_{in^*} \mid r_1,\dots,r_{2^k} \in Z\} \subseteq$$
$$\subseteq Y_{mn,m}(k) \cap Y_{mn,n}(k),$$
$$\{\pm e_{mi^*}r_1yr_2y\cdots r_{2^k}ye_{i^*m^*},\ \pm e_{mi}yr_1yr_2\cdots yr_{2^k}ye_{im^*} \mid r_1,\dots,r_{2^k} \in Z\} \subseteq Y_m(k).$$

С учётом сказанного ранее находится также целое $k(Y) \geqslant 1$, для которого

$$Y_{mn,m}\bigl(k(Y)\bigr) = Y_{mn,n}\bigl(k(Y)\bigr) = Y_m\bigl(k(Y)\bigr) = \{0\}, \quad 1 \leqslant m \neq n, n^* \leqslant 4,$$
$$yr_1yr_2\cdots yr_{2^{k(Y)}}y = 0, \quad r_1,\dots,r_{2^{k(Y)}} \in Z.$$

Последнее означает, что $*$-идеал $R/PyR/P$ алгебры $R/P$, порождённый элементом $y$, локально нильпотентен. Следовательно, по выбору $*$-первичного идеала $P$ он равен нулю. Противоречие ($y \neq 0$). Поэтому $e_{ii}(x - x^*)e_{ii}^* = 0$, $e_{ii}xe_{ii}^* = e_{ii}x^*e_{ii}^*$ при всех $x \in (IJ)^4$ и $i = 1,\dots,4$. Тогда для каждого $x \in (IJ)^4$

$$\begin{aligned} e_{i^*i}(xax^*e_{ii}^*b)e_{i^*i}xax^*e_{ii}^* &= e_{i^*i}(xax^*e_{ii}^*b)^*e_{i^*i}xax^*e_{ii}^* = \\ &= e_{i^*i}b^*e_{ii}(xa^*x^*e_{i^*i}xax^*)e_{ii}^* = e_{i^*i}b^*e_{ii}(xa^*x^*e_{i^*i}xax^*)^*e_{ii}^* = \\ &= -e_{i^*i}b^*e_{ii}xa^*x^*e_{i^*i}xax^*e_{ii}^* = 0, \quad a,b \in R/P, \quad i = 1,\dots,4, \end{aligned}$$

т. е. идеал $R/P(e_{i^*i}xax^*e_{ii}^*)R/P$ алгебры $R/P$, который порождает элемент $e_{i^*i}xax^*e_{ii}^*$, является нильпотентным (индекса два) при любых $x \in (IJ)^4$, $a \in R/P$ и $i = 1,\dots,4$.

Каждый нильпотентный идеал $*$-алгебры порождает в ней нильпотентный $*$-идеал. Поэтому $*$-полупервичные алгебры являются полупервичными. Отсюда вытекает, что в $*$-первичной алгебре $R/P$

$$e_{ii}xax^*e_{ii}^* = 0, \quad x \in (IJ)^4, \quad a \in R/P, \quad i = 1,\dots,4.$$

В частности, при всех $x \in (IJ)^4$, $a,b \in R/P$ и $i = 1,\dots,4$

$$e_{ii}xae_{ii}(xb)e_{ii}^* = e_{ii}xae_{ii}(xb)^*e_{ii}^* = e_{ii}x(ae_{ii}b^*)x^*e_{ii}^* = 0.$$

Тогда, используя плотность идемпотентов $\{e_{ii}\}$ в алгебре $R/P$, мы сразу получаем, что идеал $R/Pe_{ii}xR/P$ этой полупервичной алгебры нильпотентен, а потому равен нулю. Итак, $e_{ii}(IJ)^4 = \{0\}$ и, следовательно, $I = IJ = (IJ)^4 = \{0\}$, $t_{pq}(z) = 1$. Противоречие.

Таким образом, группа $B_P$ содержится в центре $Z(R/P)$ алгебры $R/P$. $\square$

Как и прежде, если в условиях теоремы 5.11 локально нильпотентный радикал $\mathrm{L}(R)$ алгебры $R$ равен её радикалу $\mathrm{RN}^*(R)$ (последнее имеет место, например, для счётно порождённой алгебры $R$), тогда слабо разрешимый радикал $\mathrm{T}(A)$ группы $A$ совпадает также с радикалом $\mathrm{RN}^*(A)$ (см. замечание 1.37 и предложение 1.8). Воспользовавшись полупервичностью $*$-первичных алгебр, замечанием 1.13 и доказательством замечания 2.9 из [53], несложно вывести следующее утверждение.

**Замечание 5.12.** Пусть $R$ — $*$-первичная алгебра с единицей над кольцом $F$, такая что подалгебра её центральных симметрических элементов $Z(R)_s$ содержит не менее $n$ элементов для некоторого $n \geqslant 1$. Тогда для всякого $0 \neq b \in R$ можно выбрать $r \in R$, при котором $b(rb)^n \neq 0$.

**Теорема 5.13.** *Пусть $R$ — алгебра над кольцом $F$ с $1$, $1/2$, инволюцией $*$ и $e$-системой $E = \{e_{ij}\}$, такая что подалгебра центральных симметрических элементов каждой её $*$-первичной фактор-алгебры является бесконечной. Тогда во всякой подгруппе $A$ унитарной группы $\mathrm{U}(R,*)$, нормализуемой связанной с системой $E$ элементарной подгруппой $\mathrm{E}(E,R,*)$, выполняется равенство*

$$\begin{aligned}\mathrm{RN}(A) = \mathrm{rad}(A) = C\big(A, 1+\mathrm{Rad}(R)\big) = \\ = A \cap \mathrm{RN}\big(\mathrm{U}(R,*)\big) = A \cap C\big(\mathrm{U}(R,*), 1+\mathrm{Rad}(R)\big).\end{aligned}$$

**Доказательство.** С учётом замечания 1.37 и предложений 1.11, 5.5 нам точно так же, как и в доказательстве теоремы 3.21, необходимо лишь показать, что образ $B_P$ каждой RN-радикальной подгруппы $B$ группы $\mathrm{U}(R,*)$, нормализуемой элементарной группой $\mathrm{E}(E,R,*)$, в фактор-алгебре $R/P$ алгебры $R$ по любому её $*$-первичному идеалу $P$ входит в центр $Z(R/P)$ алгебры $R/P$. Последнее имеет место в том и только в том случае, когда центр $Z(R/P)$ содержит ниль-радикал $\bar{\sigma}(B_P)$ группы $B_P$ (см. доказательство теоремы 3.21).

Предположим противное. Тогда ниль-радикал $\bar{\sigma}(B_P)$ является нецентральной подгруппой группы $\mathrm{U}(R/P,*)$, нормализуемой её элементарной подгруппой $\mathrm{E}(E_P,R/P,*)$, отвечающей образу $E_P$ исходной $e$-системы $E$ в $*$-первичной алгебре $R/P$. Для образов $1$ и $1/2$ в алгебре $R/P$, а также элементов её $e$-системы $E_P$ мы будем использовать те же обозначения $1$, $1/2$ и $\{e_{ij}\}$, что и в исходной алгебре $R$.

Согласно следствию 5.9 при этих условиях для всякого $j = 1,\ldots,4$ в группе $\bar{\sigma}(B_P)$ можно выделить элемент $d \notin Z(R/P)$, для которого $e_{jj^*}d = de_{jj^*}$. Поэтому, как и в доказательстве предыдущей теоремы, мы получаем, что группа $\bar{\sigma}(B_P)$ содержит элемент

$$t_{pq}(z) = 1 + e_{pp}ze_{qq}^* - e_{qq}z^*e_{pp}^*$$

для некоторых $0 \neq z \in R/P$ и $1 \leqslant p \neq q, q^* \leqslant 4$.

Поскольку $t_{pq}(z)$, как и любой элемент $\bar{\sigma}(B_P)$, достижим в группе $B_P$ (см. предложение 1.17), можно выбрать $n \geqslant 1$, для которого

$$[g, t_{pq}(z)]_n = [\ldots[g, \underbrace{t_{pq}(z)]\ldots t_{pq}(z)]}_{n} = 1, \quad g \in \mathrm{E}(E_P, R/P, *).$$

Положим $g_k(x)^\varepsilon = ([t_{q^*p^*}(x), t_{pq}(z)]_k)^\varepsilon$ для всех $k \geqslant 1$, $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ и $x \in R/P$. Тогда при помощи индукции по $k$ несложно вывести соотношения

$$\begin{aligned}
&e^*_{qq} g_1(x)^\varepsilon e_{pp} = e^*_{qq} t_{q^*p^*}(x) t_{pq}(\varepsilon z) t_{q^*p^*}(-x) e_{pp} = \\
&\quad = \varepsilon (e^*_{qq} + e^*_{qq} x e_{pp})(e_{pp} z e^*_{qq} - e_{qq} z^* e^*_{pp})(e_{pp} - e^*_{qq} x e_{pp}) = -\varepsilon e^*_{qq} x e_{pp} z e^*_{qq} x e_{pp}, \\
&e^*_{pp} g_1(x)^\varepsilon e_{pp} = e^*_{pp} t_{q^*p^*}(x) t_{pq}(\varepsilon z) t_{q^*p^*}(-x) e_{pp} = \\
&\quad = \varepsilon (e^*_{pp} - e^*_{pp} x^* e_{qq})(e_{pp} z e^*_{qq} - e_{qq} z^* e^*_{pp})(e_{pp} - e^*_{qq} x e_{pp}) = 0, \\
&e^*_{qq} g_{k+1}(x)^\varepsilon e_{pp} = \varepsilon e^*_{qq} g_k(x)(e_{pp} z e^*_{qq} - e_{qq} z^* e^*_{pp}) g_k(x)^* e_{pp} = \\
&\quad = \varepsilon e^*_{qq} g_k(x) e_{pp} z e^*_{qq} g_k(x)^* e_{pp} = \\
&\quad = -\varepsilon (e^*_{qq} x e_{pp} z e^*_{qq} x e_{pp} z e^*_{qq})^{2^k - 1} e^*_{qq} x e_{pp} z e^*_{qq} x e_{pp}, \\
&e^*_{pp} g_{k+1}(x)^\varepsilon e_{pp} = \varepsilon e^*_{pp} g_k(x)(e_{pp} z e^*_{qq} - e_{qq} z^* e^*_{pp}) g_k(x)^* e_{pp} = 0,
\end{aligned}$$

которые выполняются для всех $k \geqslant 1$. Так как $e^*_{qq} g_n(x)^\varepsilon e_{pp} = 0$, отсюда следует, что

$$e_{pp} z e^*_{qq} (x e_{pp} z e^*_{qq})^{2^n} = 0, \quad x \in R/P.$$

Согласно замечанию 5.12 последнее возможно только для $e_{pp} z e^*_{qq} = 0$. Противоречие. Поэтому ниль-радикал $\bar{\sigma}(B_P)$ группы $B_P$ входит в центр $Z(R/P)$ алгебры $R/P$. □

# Литература


[1] Андрунакиевич В. А., Рябухин В. М. Радикалы алгебр и структурная теория. — М.: Наука, 1979.

[2] Бейдар К. И., Пихтильков С. А. О первичном радикале специальных алгебр Ли // Успехи мат. наук. — 1994. — Т. 49, № 1. — С. 233.

[3] Бейдар К. И., Пихтильков С. А. Первичный радикал специальных алгебр Ли // Фундамент. и прикл. мат. — 2000. — Т. 6, вып. 3. — С. 643—648.

[4] Бокуть Л. А. Ассоциативные кольца. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1977; 1981. — Т. 1, 2.

[5] Борель А. Линейные алгебраические группы. — М.: Мир, 1972.

[6] Васерштейн Л. Н. Стабилизация унитарных и ортогональных групп над кольцом с инволюцией // Мат. сб. — 1970. — Т. 81, № 3. — С. 328—351.

[7] Голубков А. Ю. Первичный радикал группы Шевалле над коммутативным кольцом // Успехи мат. наук. — 2000. — Т. 55, № 3. — С. 173—174.

[8] Голубков А. Ю. Первичный (RI*-разрешимый) радикал унитарной группы над кольцом с инволюцией // Фундамент. и прикл. мат. — 2000. — Т. 6, вып. 1. — С. 93—119.

[9] Голубков А. Ю. Первичный радикал присоединённой группы Шевалле над ассоциативным кольцом // Успехи мат. наук. — 2001. — Т. 56, № 4. — С. 143—144.

[10] Голубков А. Ю. Первичный радикал классических групп над ассоциативными кольцами: Дис.... канд. физ.-мат. наук. — М., 2001.

[11] Голубчик И. З., Михалёв А. В. Изоморфизмы унитарных групп над ассоциативными кольцами // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. — 1983. — Т. 132. — С. 97—109.

[12] Голубчик И. З., Михалёв А. В. Элементарная подгруппа унитарной группы над PI-кольцом // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1985. — № 1. — С. 30—36.

[13] Голубков А. Ю., Михалёв А. В., Пихтильков С. А. Классические ниль-радикалы алгебр Ли. — Готовится к печати.

[14] Джекобсон Н. Строение колец. — М.: Изд. иностр. лит., 1961.

[15] Джекобсон Н. Алгебры Ли. — М.: Мир, 1964.

[16] Кемер А. Р. Тождества Капелли и нильпотентность радикала конечно порождённой PI-алгебры // ДАН СССР. — 1980. — Т. 255, № 4. — С. 793—797.

[17] Кемхадзе Ш. С. Квазинильпотентные группы // ДАН СССР. — 1964. — Т. 155, № 5. — С. 1003—1005.

[18] Кемхадзе Ш. С. О стабильных группах автоморфизмов // ДАН СССР. — 1964. — Т. 158, № 3. — С. 510—512.

[19] Клейн И. С., Михалёв А. В. Ортогональная группа Стейнберга над кольцом с инволюцией // Алгебра и логика. — 1970. — Т. 9, № 2. — С. 145—166.

[20] Кострикин А. И. Вокруг Бернсайда. — М.: Наука, 1986.

[21] Курош А. Г. Теория групп. — СПб.: Лань, 2005.

[22] Курош А. Г. Радикалы в теории групп // Сиб. мат. журн. — 1962. — Т. 3, № 6. — С. 912—931.

[23] Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Мир, 1971.

[24] Львов И. В. Теорема Брауна о радикале конечно порождённой PI-алгебры: Препринт № 63. — Новосибирск: Ин-т мат. СО АН СССР, 1984.

[25] Мальцев А. И. Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами // Мат. сб. — 1940. — Т. 8, № 3. — С. 405—422.

[26] Мальцев А. И. О представлении бесконечномерных алгебр // Мат. сб. — 1943. — Т. 13, № 2—3. — С. 263—285.

[27] Парфёнов В. А. О слабо разрешимом радикале алгебр Ли // Сиб. мат. журн. — 1971. — Т. 12, № 1. — С. 171—176.

[28] Пихтильков С. А. О первичном радикале PI-представимых групп // Мат. заметки. — 2002. — Т. 72, вып. 5. — С. 739—744.

[29] Пихтильков С. А. Структурная теория специальных алгебр Ли. — Тула: Изд. Тульск. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005.

[30] Платонов В. П. Энгелевы элементы и радикал в PI-алгебрах и топологических группах // ДАН СССР. — 1965. — Т. 161, № 2. — С. 288—291.

[31] Плоткин Б. И. О некоторых признаках локально нильпотентных групп // Успехи мат. наук. — 1954. — Т. 9, № 3 (61). — С. 181—187.

[32] Плоткин Б. И. Обобщённые разрешимые и обобщённые нильпотентные группы // Успехи мат. наук. — 1958. — Т. 13, № 4. — С. 90—172.

[33] Плоткин Б. И. Об алгебраических множествах элементов в группах и алгебрах Ли // Успехи мат. наук. — 1958. — Т. 13, № 6 (84). — С. 133—138.

[34] Размыслов Ю. П. О радикале Джекобсона в PI-алгебрах // Алгебра и логика. — 1974. — Т. 13, № 3. — С. 337—360.

[35] Скорняков Л. А. Элементы общей алгебры. — М.: Наука, 1983.

[36] Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. — М.: Мир, 1975.

[37] Супруненко Д. А. Группы матриц. — М.: Наука, 1972.

[38] Хамфри Дж. Линейные алгебраические группы. — М.: Наука, 1980.

[39] Херстейн И. Некоммутативные кольца. — М.: Мир, 1972.

[40] Чан В. Х. О минимальном радикальном классе над классом абелевых групп // ДАН СССР. — 1963. — Т. 149, № 6. — С. 1270—1273.

[41] Чан В. Х. Ниль-группы конечного ранга // Сиб. мат. журн. — 1964. — Т. 5, № 2. — С. 459—464.

[42] Щукин К. К. RI*-разрешимый радикал групп // Мат. сб. — 1960. — Т. 52, № 4. — С. 1024—1031.

[43] Щукин К. К. К теории радикалов в группах // ДАН СССР. — 1962. — Т. 142, № 5. — С. 1047—1049.

[44] Щукин К. К. К теории радикалов в группах // Сиб. мат. журн. — 1962. — Т. 3, № 6. — С. 932—942.

[45] Abe E., Hurley J. Centers of Chevalley groups over commutative rings // Comm. Algebra. — 1988. — Vol. 16, no. 1. — P. 57—74.

[46] Baer R. Nilgruppen // Math. Z. — 1955. — Bd. 62, H. 4. — S. 402—437.

[47] Borel A. Properties and linear representations of Chevalley groups // Semin. Algebr. Groups related Finite Groups. Princeton 1968/69. — Berlin: Springer, 1970. — (Lect. Notes Math.; Vol. 131). — P. 1—55.

[48] Braun A. The nilpotency of the radical in a finitely generated PI-ring // J. Algebra. — 1984. — Vol. 89, no. 2. — P. 375—396.

[49] Chevalley C. Certains schemas de groupes semi-simples. — Paris: Secretariat Mathematique, 1961. — (Sémin. Bourbaki (1960/61); No. 219).

[50] Demazure M. Schemas en groupes reductifs // Bull. Soc. Math. France. — 1965. — Vol. 93. — P. 369—413.

[51] Dixon J. D. The solvable length of solvable linear group // Math. Z. — 1968. — Bd. 107, H. 2. — S. 151—158.

[52] Golubkov A. Yu. The prime radical of Chevalley group over commutative ring // J. Math. Sci. — 2000. — Vol. 102, no. 6. — P. 4781—4790.

[53] Golubkov A. Yu. The prime radical of the special Lie algebras and the elementary Chevalley groups // Comm. Algebra. — 2004. — Vol. 32, no. 5. — P. 1649—1683.

[54] Hirsch K. A. Über lokal-nilpotente Gruppen // Math. Z. — 1955. — Bd. 63, H. 3. — S. 290—294.

[55] Passman D. S. The Algebraic Structure of Group Rings. — New York: Wiley—Interscience, 1977.

[56] Plotkin B. I. Notes on Engel groups and Engel elements on groups. Some generalizations // Изв. УрГУ. — 2005. — № 36. — С. 153—166.

[57] Rowen L. H. Some results on the center of a ring with polynomial identity // Bull. Amer. Math. Soc. — 1973. — Vol. 79, no. 1. — P. 219—223.

[58] Rowen L. H. Polynomial Identities in Ring Theory. — New York: Academic Press, 1980. — (Pure Appl. Math.; Vol. 84).

[59] Stein M. R. Relativizing functors on rings and algebraic $K$-theory // J. Algebra. — 1971. — Vol. 19, no. 1. — P. 140—152.

[60] Taddei G. Normalité des groupes élémentaires dans les groupes de Chevalley sur un anneau // Applications of Algebraic K-Theory to Algebraic Geometry and Number Theory. Proc. AMS–IMS–SIAM Joint Summer Res. Conf., Boulder, 1983. Part II. — Providence: Amer. Math. Soc., 1986. — (Contemp. Math.; Vol. 55). — P. 693—710.

[61] Vavilov N. A. Structure of Chevalley groups over commutative rings // Proc. Conf. Nonassociative algebras and related topics (Hiroshima-1990). — London: World Scientific, 1991. — P. 219—335.

[62] Vaserstein L. On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings // Tôhoku Math. J. — 1986. — Vol. 38, no. 2. — P. 219—230.

[63] Zassenhaus H. Beweis eines Satzes über diskrete Gruppen // Abh. Math. Semin. Hansische Univ. — 1938. — Bd. 12, H. 3/4. — S. 289—312.