Об определяемости периодической EndE^+-группы своей группой эндоморфизмов

Е. М. КОЛЕНОВА
Нижегородский государственный педагогический университет

УДК 512.541

Ключевые слова: абелева группа, группа эндоморфизмов абелевой группы, E^+-группа, EndE^+-группа, периодическая группа, делимая группа, нередуцированная группа, редуцированная группа, редуцированная алгебраически компактная группа.

Аннотация

Пусть $\mathbf{A}$ — некоторый класс абелевых групп, $A \in \mathbf{A}$, $\mathrm{End}(A)$ — аддитивная группа всех эндоморфизмов группы A. Будем говорить, что абелева группа $A \in \mathbf{A}$ определяется своей группой эндоморфизмов в классе $\mathbf{B} \supseteq \mathbf{A}$, если для всякой группы B из $\mathbf{B}$, такой что $\mathrm{End}(B) \cong \mathrm{End}(A)$, имеет место изоморфизм $B \cong A$. В работе исследуется вопрос об определяемости периодической абелевой группы, группа эндоморфизма которой изоморфна своей группе эндоморфизмов (такая группа названа EndE^+-группой). Рассмотрены классы периодических абелевых групп, делимых абелевых групп, нередуцированных абелевых групп, редуцированных абелевых групп и класс всех абелевых групп.

Abstract

E. M. Kolenova, On definability of a periodic EndE^+*-group by its endomorphism group*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 2, pp. 123—131.

Let $\mathbf{A}$ be a class of Abelian groups, $A \in \mathbf{A}$, and $\mathrm{End}(A)$ be the additive endomorphism group of the group A. The group A is said to be defined by its endomorphism group in the class $\mathbf{B} \supseteq \mathbf{A}$ if for every group $B \in \mathbf{B}$ such that $\mathrm{End}(B) \cong \mathrm{End}(A)$ the isomorphism $B \cong A$ holds. The paper considers the problem of definability of a periodic Abelian group A such that $\mathrm{End}(\mathrm{End}(A)) \cong \mathrm{End}(A)$. The classes of periodical Abelian groups, of divisible Abelian groups, of reduced Abelian groups, of nonreduced Abelian groups, and of all Abelian groups are investigated in this paper.

Важной задачей теории абелевых групп является изучение связей между абелевой группой и её группой эндоморфизмов. Естественным образом возникает вопрос: при каких условиях группа всех эндоморфизмов данной абелевой группы определяет её строение [8, проблема 41]? Проблема определяемости абелевых групп своими группами эндоморфизмов рассматривалась С. Я. Гриншпоном [1,2] и А. М. Себельдиным [4—6].

Пусть $\mathbf{A}$ — некоторый класс абелевых групп, $A \in \mathbf{A}$, $\mathrm{End}(A)$ — аддитивная группа всех эндоморфизмов группы A. Будем говорить, что абелева группа $A \in \in \mathbf{A}$ *определяется своей группой эндоморфизмов* в классе $\mathbf{B} \supseteq \mathbf{A}$, если для

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 2, с. 123—131.

всякой группы B из $\mathbf{B}$, такой что $\mathrm{End}(B) \cong \mathrm{End}(A)$, имеет место изоморфизм $B \cong A$.

Группу, изоморфную своей группе эндоморфизмов, назовём E^+-*группой*.

EndE^+-*группой* будем называть абелеву группу, группа эндоморфизмов которой является E^+-группой.

В настоящей работе задача определяемости абелевой группы своей группой эндоморфизмов решена для периодической EndE^+-группы в классах периодических абелевых групп, делимых абелевых групп, нередуцированных абелевых групп, редуцированных абелевых групп и классе всех абелевых групп.

Все группы, рассматриваемые в работе, абелевы. Для простоты изложения приведём некоторые используемые в работе понятия и обозначения:

$\mathbf{P}$ — множество всех простых чисел;

$\mathbf{N}$ — множество всех натуральных чисел; $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \cup \{0\}$;

$\mathrm{r}(0, A)$ — ранг без кручения группы A;

пусть $\mathrm{D}(A)$ — делимая часть группы A, тогда $A = \mathrm{D}(A) \oplus \mathrm{R}(A)$; назовём дополнительное прямое слагаемое $\mathrm{R}(A)$, определённое с точностью до изоморфизма, редуцированной частью группы A. Делимая часть $\mathrm{D}(A)$, в свою очередь, также разлагается: $\mathrm{D}(A) = \mathrm{Dt}(A) \oplus \mathrm{Df}(A)$, где $\mathrm{Dt}(A)$ — периодическая часть делимой группы $\mathrm{D}(A)$, а дополнительное прямое слагаемое $\mathrm{Df}(A)$, определённое с точностью до изоморфизма, будем называть частью без кручения делимой группы $\mathrm{D}(A)$;

$\mathrm{S}(A)$ — множество всех тех простых p, для которых периодическая p-компонента группы A ненулевая; $\mathrm{Sd}(A) = \mathrm{S}\big(\mathrm{D}(A)\big)$; $\mathrm{Sr}(A) = \mathrm{S}\big(\mathrm{R}(A)\big)$;

$\mathrm{P}(A)$ — множество всех тех простых p, для которых p-адическая компонента редуцированной алгебраически компактной группы A ненулевая.

Остальные обозначения соответствуют [7] или вводятся по ходу изложения.

Лемма 1. *Периодическая группа изоморфна своей группе эндоморфизмов тогда и только тогда, когда она циклическая.*

Доказательство. Пусть вначале A — p-группа и имеет место изоморфизм

$$\mathrm{End}(A) \cong A.$$

Тогда A — конечная группа [7, с. 215], и поэтому она является прямой суммой конечного числа циклических групп [7, с. 95]. Таким образом,

$$A \cong \bigoplus_{k \in K} \mathbf{Z}(p^k),$$

где K — некоторое конечное семейство натуральных чисел (не обязательно различных). Покажем, что $|K| = 1$. Действительно, с одной стороны,

$$\mathrm{End}(A) \cong \mathrm{End}\bigg(\bigoplus_{k \in K} \mathbf{Z}(p^k)\bigg) \cong \bigoplus_{k_1, k_2 \in K} \mathrm{Hom}\big(\mathbf{Z}(p^{k_1}), \mathbf{Z}(p^{k_2})\big) \cong \bigoplus_{k^* \in K^*} \mathbf{Z}(p^{k^*}),$$

где $k^* = \min(k_1, k_2)$ [3, с. 21]. С другой стороны,

$$\mathrm{End}(A) \cong A \cong \bigoplus_{k\in K} \mathbf{Z}(p^k),$$

откуда следует, что $|K| = |K^*|$. А это возможно, если только $|K| = 1$.

Итак, $A \cong \mathbf{Z}(p^k)$, т. е. A является конечной циклической группой.

Пусть теперь A — периодическая группа и $\mathrm{End}(A) \cong A$. Известно, что периодическая группа может быть разложена, притом единственным способом, в прямую сумму примарных групп A_p, относящихся к различным простым числам [7, с. 55]:

$$A \cong \bigoplus_{p\in \mathrm{S}(A)} A_p.$$

Отсюда получаем [7, с. 214], что

$$\mathrm{End}(A) \cong \mathrm{End}\Big(\bigoplus_{p\in \mathrm{S}(A)} A_p\Big) \cong \prod_{p\in \mathrm{S}(A)} \mathrm{End}(A_p)$$

и

$$\mathrm{End}(A) \cong \bigoplus_{p\in \mathrm{S}(A)} A_p.$$

Следовательно, $\mathrm{S}(A)$ — конечное множество и для любого p из $\mathrm{S}(A)$ имеет место изоморфизм

$$\mathrm{End}(A_p) \cong A_p.$$

Но это возможно лишь в том случае, когда каждая p-компонента A_p группы A является циклической группой, т. е. A является циклической группой.

Обратно, если A — циклическая группа, то, очевидно, имеет место изоморфизм $\mathrm{End}(A) \cong A$. □

Лемма 2. *Редуцированная алгебраически компактная группа* $A = \prod_{p\in \mathrm{P}(A)} A_p$ *изоморфна группе эндоморфизмов* $\mathrm{End}(A)$ *тогда и только тогда, когда для любого простого* $p \in \mathrm{P}(A)$ *справедливо* $A_p \cong \mathbf{J}_p$ *или* $A_p \cong \mathbf{Z}(p^k)$, $k = k(p) \in \mathbf{N}$.

Доказательство. Пусть

$$A = \prod_{p\in \mathrm{P}(A)} A_p \text{ —}$$

редуцированная алгебраически компактная группа. Согласно [7, с. 215], её группа эндоморфизмов имеет вид

$$\mathrm{End}(A) \cong \prod_{p\in \mathrm{P}(A)} \mathrm{End}(A_p),$$

где каждая группа $\mathrm{End}(A_p)$ является p-адической алгебраически компактной группой [7, с. 236]. Таким образом, группы A и $\mathrm{End}(A)$ изоморфны тогда и только тогда, когда для любого простого $p \in \mathrm{P}(A)$ изоморфны группы A_p и

$\mathrm{End}(A_p)$. Покажем, что изоморфизм $A_p \cong \mathrm{End}(A_p)$ имеет место в том и только том случае, когда выполнены условия теоремы.

Достаточность. Пусть редуцированная алгебраически компактная группа $A = \prod\limits_{p \in \mathrm{P}(A)} A_p$ удовлетворяет условиям теоремы. Покажем, что для любого простого $p \in \mathrm{P}(A)$ имеет место изоморфизм $A_p \cong \mathrm{End}(A_p)$.

Действительно, если $A_p \cong \mathbf{J}_p$, то

$$\mathrm{End}(A_p) \cong \mathrm{End}(\mathbf{J}_p) \cong \mathbf{J}_p \cong A_p.$$

Если же $A_p \cong \mathbf{Z}(p^k)$ $(k = k(p) \in \mathbf{N})$, то

$$\mathrm{End}(A) \cong \mathrm{End}\big(\mathbf{Z}(p^k)\big) \cong \mathbf{Z}(p^k) \cong A_p.$$

Необходимость. Пусть для любого простого $p \in \mathrm{P}(A)$ имеет место изоморфизм $A_p \cong \mathrm{End}(A_p)$. Покажем, что в этом случае редуцированная алгебраически компактная группа $A = \prod\limits_{p \in \mathrm{P}(A)} A_p$ удовлетворяет условиям теоремы.

Пусть

$$B = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}^*} B_n \, -$$

p-базисная подгруппа группы A_p, где

$$B_0 = \bigoplus_{m_0} \mathbf{Z}, \quad B_n = \bigoplus_{m_n} \mathbf{Z}(p^n),$$

m_0 и m_n — некоторые кардиналы, $n \in \mathbf{N}$. Тогда в силу [7, с. 237] имеет место изоморфизм $\mathrm{End}(A_p) \cong \mathrm{Hom}(B, A_p)$. Тогда

$$\begin{aligned} A_p \cong \mathrm{End}(A_p) \cong \mathrm{Hom}\Big(\bigoplus_{m_0} \mathbf{Z}, A_p\Big) \oplus \mathrm{Hom}\Big(\bigoplus_{n \in \mathbf{N}} B_n, A_p\Big) \cong \\ \cong \prod_{m_0} \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}, A_p) \oplus \prod_{n \in \mathbf{N}} \mathrm{Hom}\Big(\bigoplus_{m_n} \mathbf{Z}(p^n), A_p\Big) \cong \\ \cong \prod_{m_0} A_p \oplus \prod_{n \in \mathbf{N}} \prod_{m_n} \mathrm{Hom}\big(\mathbf{Z}(p^n), A_p\big). \end{aligned}$$

Ясно, что m_0 — конечный кардинал (иначе $\Big|\prod\limits_{m_0} A_p\Big| > |A_p|$).

Таким образом, группа A_p имеет вид

$$A_p \cong \bigoplus_{m_0} \mathbf{J}_p \oplus B^* \cong \prod_{m_0} A_p \oplus \prod_{n \in \mathbf{N}} \prod_{m_n} \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}(p^n), A_p),$$

где B^* — редуцированная алгебраически компактная группа, p-базисная подгруппа которой не содержит свободных прямых слагаемых. Тогда

$$\mathrm{End}(A_p) \cong$$
$$\cong \bigoplus_{m_0}\bigoplus_{m_0}\mathbf{J}_p \oplus \mathrm{End}(B^*) \oplus \mathrm{Hom}\Bigl(B^*, \bigoplus_{m_0}\mathbf{J}_p\Bigr) \oplus \mathrm{Hom}\Bigl(\bigoplus_{m_0}\mathbf{J}_p, B^*\Bigr) \cong$$
$$\cong A_p \cong \bigoplus_{m_0}\mathbf{J}_p \oplus B^*.$$

Следовательно, $m_0 \leqslant 1$.

Если $m_0 = 0$, то

$$A_p = B^* \cong \mathrm{End}(B^*) = \mathrm{End}(A_p).$$

Рассмотрим p-базисную подгруппу группы B^*

$$B = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}'}\bigoplus_{m_n}\mathbf{Z}(p^n),$$

где $\mathbf{N}'$ — подмножество множества $\mathbf{N}$ натуральных чисел, m_n — некоторые ненулевые кардиналы, $n \in \mathbf{N}$. Тогда

$$A_p = B^* \cong \mathrm{End}(B^*) = \mathrm{Hom}(B^*, B^*) \cong \mathrm{Hom}(B, B^*) \cong \mathrm{End}(A_p).$$

Имеем [7, с. 163], что

$$\mathrm{Hom}(B, B^*) \cong \prod_{n\in\mathbf{N}'}\prod_{m_n}\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}(p^n), B^*) = \prod_{n\in\mathbf{N}'}\prod_{m_n}\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}(p^n), B_1\oplus\ldots\oplus B_n\oplus B^*).$$

Следовательно [9], группа $\mathrm{End}(B^*)$ содержит прямое слагаемое вида

$$\prod_{n\in\mathbf{N}'}\prod_{m_n}\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}(p^n), B_1\oplus\ldots\oplus B_n) \cong \prod_{n\in\mathbf{N}'}\prod_{m_n}(B_1\oplus\ldots\oplus B_n)$$

для каждого $n \in \mathbf{N}'$. Отсюда получаем, что $m_n = 1$ и $|N'| = 1$, т. е.

$$A_p = B^* \cong \mathbf{Z}(p^n).$$

Если $m_0 = 1$, то

$$A_p \cong \mathbf{J}_p \oplus B^* \cong \mathrm{End}(A_p) \cong \mathrm{Hom}(\mathbf{J}_p, B^*) \oplus \mathrm{End}(\mathbf{J}_p) \oplus \mathrm{End}(B^*) \oplus \mathrm{Hom}(B^*, \mathbf{J}_p).$$

Следовательно, группа $\mathrm{End}(B^*)$ изоморфна прямому слагаемому группы B^* [7, с. 200], поэтому, рассуждая как в предыдущем случае, получаем $B^* \cong \mathbf{Z}(p^n)$. Однако по [7, с. 237], учитывая, что

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{J}_p, B^*) \cong \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}, B^*) \cong B^*,$$

получим противоречие с изоморфизмом $A_p \cong \mathrm{End}(A_p)$. Таким образом, компонента B^* нулевая и, так как $m_0 = 1$, $A_p \cong \mathbf{J}_p$. □

Лемма 3. *Группа эндоморфизмов периодической группы* $A = \bigoplus_{p\in\mathrm{S}(A)} A_p$ *является* E^+*-группой в том и только том случае, когда для любого простого числа* p *из* $\mathrm{S}(A)$ *для её* p*-компоненты справедливо* $A_p \cong \mathbf{Z}(p^\infty)$ *или* $A_p \cong \mathbf{Z}(p^k)$, $k = k(p) \in \mathbf{N}$.

Доказательство. Пусть $A = \bigoplus_{p\in \mathrm{S}(A)} A_p$ — периодическая группа, тогда по [7, с. 214] её группа эндоморфизмов

$$\mathrm{End}(A) \cong \prod_{p\in \mathrm{S}(A)} \mathrm{End}(A_p)$$

является редуцированной алгебраически компактной группой [7, с. 226]. Согласно лемме 2 группа $\mathrm{End}(A)$ является E^+-группой в том и только том случае, когда для любого p из $\mathrm{S}(A)$ её p-компонента $\mathrm{End}(A_p)$ изоморфна одной из групп

$$\mathrm{End}(A_p) \cong \mathbf{J}_p$$

или

$$\mathrm{End}(A_p) \cong \mathbf{Z}(p^k), \quad k = k(p) \in \mathbf{N}.$$

Так как A_p — периодическая p-группа, получаем

$$A_p \cong \mathbf{Z}(p^\infty)$$

или

$$A_p \cong \mathbf{Z}(p^k)$$

для любого простого числа $p \in \mathrm{S}(A)$. □

Теорема 1. *Периодическая* EndE^+*-группа определяется своей группой эндоморфизмов в классе периодических абелевых групп.*

Доказательство. Пусть A — периодическая EndE^+-группа. Покажем, что для любой периодической группы B из изоморфизма групп $\mathrm{End}(A)$ и $\mathrm{End}(B)$ следует изоморфизм самих групп A и B.

Если B — периодическая группа, то её можно разложить в прямую сумму примарных групп B_p, относящихся к различным простым числам, и тогда по [3, с. 214]

$$\prod_{p\in \mathrm{S}(B)} \mathrm{End}(B_p) \cong \mathrm{End}(B) \cong \mathrm{End}(A) \cong \prod_{p\in \mathrm{S}(A)} \mathrm{End}(A_p),$$

откуда получим, что $\mathrm{S}(A) = \mathrm{S}(B)$ ($\mathrm{Sd}(A) = \mathrm{Sd}(B)$, $\mathrm{Sr}(A) = \mathrm{Sr}(B)$) и для любого $p \in \mathrm{S}(A) = \mathrm{S}(B)$

$$\mathrm{End}(B_p) \cong \mathrm{End}(A_p).$$

Далее, так как A — периодическая EndE^+-группа, по лемме 3 для любого простого числа p из $\mathrm{Sd}(A)$ имеем $A_p \cong \mathbf{Z}(p^\infty)$ и для любого простого числа p из $\mathrm{Sr}(A)$ имеем $A_p \cong \mathbf{Z}(p^k)$, $k = k(p) \in \mathbf{N}$. Получаем, что для любого простого $p \in \mathrm{Sd}(A) = \mathrm{Sd}(B)$

$$\mathrm{End}(B_p) \cong \mathrm{End}(A_p) \cong \mathbf{J}_p$$

и для любого простого $p \in \mathrm{Sr}(A) = \mathrm{Sr}(B)$

$$\mathrm{End}(B_p) \cong \mathrm{End}(A_p) \cong \mathbf{Z}(p^k), \quad k = k(p) \in \mathbf{N}.$$

Так как B_p — периодическая p-группа, то для любого простого $p \in \mathrm{Sd}(A) = \mathrm{Sd}(B)$

$$B_p \cong \mathbf{Z}(p^\infty) \cong A_p$$

и для любого простого $p \in \mathrm{Sr}(A) = \mathrm{Sr}(B)$

$$B_p \cong \mathbf{Z}(p^k) \cong A_p.$$

Следовательно, для любого простого $p \in \mathrm{S}(A) = \mathrm{S}(B)$ имеем $B_p \cong A_p$, т. е. группы A и B изоморфны. □

Теорема 2. *Периодическая* EndE^+*-группа определяется своей группой эндоморфизмов в классе всех абелевых групп тогда и только тогда, когда она циклическая.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $A \cong \mathbf{Z}(n)$. Покажем, что для любой абелевой группы B из изоморфизма $\mathrm{End}(B) \cong \mathrm{End}(A)$ следует, что группы A и B изоморфны.

Так как $A \cong \mathbf{Z}(n)$, то $\mathrm{End}(B) \cong \mathrm{End}(A) \cong \mathbf{Z}(n)$. Следовательно, группа B периодическая (иначе ранг без кручения $\mathrm{r}\big(0, \mathrm{End}(B)\big)$ отличен от нуля). В силу теоремы 1 группа $A \cong \mathbf{Z}(n)$ определяется своей группой эндоморфизмов в классе всех периодических групп, поэтому группы A и B изоморфны.

Необходимость. Пусть A — периодическая EndE^+-группа, и пусть для любой группы B из изоморфизма $\mathrm{End}(B) \cong \mathrm{End}(A)$ следует, что группы A и B изоморфны. Покажем, что $A \cong \mathbf{Z}(n)$.

Так как A — периодическая EndE^+-группа, то по лемме 3 для любого простого числа p из $\mathrm{Sd}(A)$ имеем $A_p \cong \mathbf{Z}(p^\infty)$ и для любого простого числа p из $\mathrm{Sr}(A)$ имеем $A_p \cong \mathbf{Z}(p^k)$, $k = k(p) \in \mathbf{N}$.

Если $\mathrm{Sd}(A) \neq 0$, то периодическая группа A содержит как прямое слагаемое группу $\mathbf{Z}(p^\infty)$. Но тогда найдётся абелева группа $B = \mathrm{End}(A)$, такая что $\mathrm{End}(B) \cong \mathrm{End}(A)$ (так как A — EndE^+-группа). Однако $A \ncong B$ (так как по лемме 1 A не изоморфна своей группе эндоморфизмов). А это противоречит условию теоремы. Следовательно, $\mathrm{Sd}(A) = 0$, $\mathrm{S}(A) = \mathrm{Sr}(A)$, и

$$A \cong \bigoplus_{p \in \mathrm{S}(A)} \mathbf{Z}(p^k) \quad k = k(p) \in \mathbf{N}.$$

Если $\mathrm{S}(A)$ — бесконечное множество, то опять найдётся абелева группа $B = \mathrm{End}(A)$, такая что $\mathrm{End}(B) \cong \mathrm{End}(A)$ (так как A — EndE^+-группа). Но $A \ncong B$ (так как по лемме 1 A не изоморфна своей группе эндоморфизмов). Опять получили противоречие с условием теоремы. Следовательно, возможен только один случай:

$$A \cong \bigoplus_{p \in \mathrm{S}(A)} \mathbf{Z}(p^k), \quad k = k(p) \in \mathbf{N},$$

и $\mathrm{S}(A)$ — конечное множество. Это означает, что периодическая группа A циклическая. □

Следствие 1. *Периодическая* EndE^+*-группа определяется своей группой эндоморфизмов в классе редуцированных абелевых групп тогда и только тогда, когда она циклическая.*

Теорема 3. *Периодическая* EndE^+*-группа определяется своей группой эндоморфизмов в классе делимых абелевых групп.*

Доказательство. Пусть A — периодическая EndE^+-группа. Докажем, что для любой делимой группы B из изоморфизма групп $\mathrm{End}(A)$ и $\mathrm{End}(B)$ следует изоморфизм самих групп A и B.

Покажем сначала, что если группы $\mathrm{End}(A)$ и $\mathrm{End}(B)$ изоморфны, то B — периодическая делимая группа. Действительно, если ранг без кручения группы B не равен нулю, то $B \cong \mathbf{Q} \oplus B_1$, откуда следует, что $\mathrm{End}(B) \cong \mathbf{Q} \oplus E_1$ — нередуцированная группа. Так как A — периодическая группа, то её группа эндоморфизмов $\mathrm{End}(A)$ — редуцированная группа, и поэтому она не может быть изоморфна нередуцированной группе $\mathrm{End}(B)$.

Таким образом, если группы $\mathrm{End}(A)$ и $\mathrm{End}(B)$ изоморфны, то делимая группа B — периодическая группа. А так как (теорема 1) периодическая EndE^+-группа A определяется своей группой эндоморфизмов в классе всех периодических групп, то группы A и B изоморфны. □

Следствие 2. *Периодическая* EndE^+*-группа не определяется своей группой эндоморфизмов в классе нередуцированных абелевых групп, если она делимая.*

Доказательство. Так как группа A — периодическая делимая группа (то есть $\mathrm{Sr}(A) = 0$, $\mathrm{S}(A) = \mathrm{Sd}(A)$), которая по условию является EndE^+-группой, то в силу леммы 3

$$A \cong \bigoplus_{p \in \mathrm{S}(A)} \mathbf{Z}(p^\infty).$$

Покажем, что для любой такой группы найдётся нередуцированная группа B, такая что группы $\mathrm{End}(A)$ и $\mathrm{End}(B)$ изоморфны, а сами группы A и B не изоморфны. Действительно, если

$$B \cong \bigoplus_{p \in \mathrm{S}(A)/\{p_0\}} \mathbf{Z}(p^\infty) \oplus \mathbf{J}_{p_0},$$

то

$$\mathrm{End}(B) \cong \prod_{p \in \mathrm{S}(A)} \mathbf{J}_p \cong \mathrm{End}(A),$$

а группы A и B, очевидно, не изоморфны. □

Литература

[1] Гриншпон С. Я. Примарные абелевы группы с изоморфными группами эндоморфизмов // Мат. заметки. — 1973. — Т. 14, № 5. — С. 733—741.

[2] Гриншпон С. Я., Себельдин А. М. Определяемость периодических абелевых групп своими группами эндоморфизмов // Мат. заметки. — 1995. — Т. 57, № 5. — С. 663—669.

[3] Крылов П. А., Михалёв А. В., Туганбаев А. А. Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов. — Томск, 2002.

[4] Себельдин А. М. Вполне разложимые абелевы группы без кручения с изоморфными группами эндоморфизмов // Сборник аспирантских работ. — Томск, 1976. — С. 78—85.

[5] Себельдин А. М. Об определяемости абелевых групп без кручения своими кольцами и группами эндоморфизмов // Группы и модули. — Томск, 1976. — С. 78—85.

[6] Себельдин А. М. Определяемость нередуцированной абелевой группой без кручения своей группой эндоморфизмов // Абелевы группы и модули. — Томск, 1980. — С. 102—108.

[7] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1974; 1977.

[8] Fuchs L. Abelian Groups. — Budapest, 1958.

[9] Sebeldin A. M. Isomorphisme naturel des groupes des homomorphismes des groupes abéliens // Ann. de L'IPGANC. Sér. A. — 1982. — Vol. 8. — P. 155—158.