Равновесие и оптимальность по Парето в шумных дискретных дуэлях с произвольным количеством действий

Л. Н. ПОСИЦЕЛЬСКАЯ
Московский государственный социально-гуманитарный институт
e-mail: lnp@lnp.mccme.ru

УДК 519.83

Ключевые слова: шумная дуэль, платёжная функция, стратегия, ситуация равновесия, оптимальность по Парето, цена игры.

Аннотация

Изучена игра двух лиц с ненулевой суммой, которая является обобщением антагонистической шумной дуэли дискретного типа. Игра исследована с точки зрения различных критериев оптимальности. Доказано существование ситуаций ε-равновесия и показано, что найденные ε-равновесные стратегии являются ε-максиминными. Приведены условия, при которых равновесные партии оптимальны по Парето.

Abstract

L. N. Positselskaya, Equilibrium and Pareto-optimality in noisy discrete duels with an arbitrary number of actions, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 2, pp. 147—155.

We study a nonzero-sum game of two players that is a generalization of the antagonistic noisy duel of discrete type. The game is considered from the point of view of various criteria of optimality. We prove the existence of ε-equilibrium situations and show that the ε-equilibrium strategies that we found are ε-maxmin. Conditions under which the equilibrium plays are Pareto-optimal are given.

1. Введение

Классическая дуэль есть игра двух лиц с нулевой суммой следующего вида. Игроки располагают определёнными ресурсами и используют их в течение заданного промежутка времени с целью достижения успеха. Применение в момент t ресурса γ приводит к успеху с вероятностью, зависящей только от времени t (обычно предполагается, что вероятность успеха возрастает по времени) и величины ресурса γ. Как только один из игроков достигает цели, он получает выигрыш, равный проигрышу соперника, и игра прекращается. Различные предположения о способе использования игроками своего ресурса и о поступлении информации о поведении противника в ходе игры порождают разнообразные

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 2, с. 147—155.

виды дуэлей [2, 11]. Исследованы модели, в которых ресурсы игроков являются дискретными (дуэли *снайперов*), бесконечно делимыми (дуэли *пулемётчиков*), дуэли с непрерывным расходом ресурса у одного из игроков и дискретным у другого, называемые *смешанными* дуэлями или дуэлями *пулемётчика со снайпером* [1, 3]. Изучались *шумные* дуэли [1, 10, 12], в которых каждый из игроков в данный момент времени располагает информацией о поведении противника до этого момента, и *бесшумные* дуэли, в которых не предполагается поступления такой информации. В настоящее время дуэли считаются классическими моделями конкурентной борьбы [2, 4]. Однако их применение в этом качестве отчасти ограничено предположением о строгой противоположности интересов участников дуэли. Игры типа дуэли с ненулевой суммой относятся к неизученному классу бесконечных игр с непротивоположными интересами.

Впервые игра с ненулевой суммой, которая является обобщением классической антагонистической дуэли, рассмотрена в [5]. Это неантагонистическая шумная дуэль пулеметчика со снайпером.

В данной работе изучена игра двух лиц с ненулевой суммой, которая является обобщением антагонистической шумной дуэли снайперов [9, 10]. Эта работа является продолжением [7].

2. Сведения из теории игр

Игрой двух лиц называют четвёрку

$$\Gamma = \{X, Y, K_1(x,y), K_2(x,y)\},$$

где X, Y — множества *стратегий* игроков, а $K_j(x,y)$, $j = 1,2,$ — *платёжные функции игроков*, заданные на декартовом произведении $X \times Y$ и определяющие выигрыш j-го игрока при использовании первым игроком стратегии $x \in X$, а вторым — $y \in Y$. Игра Γ называется *игрой двух лиц с нулевой суммой* или *антагонистической*, если $K_1(x,y) + K_2(x,y) = 0$ при любых $x \in X$, $y \in Y$, в противном случае игра называется *игрой двух лиц с ненулевой суммой* или *неантагонистической*. Элементы множеств X и Y называются *стратегиями*. *Смешанное расширение* игры Γ есть игра $\bar\Gamma = \bigl(\Phi, \Psi, \bar K(\varphi,\psi)\bigr)$, где Φ и Ψ — множества функций распределения X и Y, а $\bar K_j(\varphi,\psi)$ $(j = 1,2)$ — средние значения платёжных функций $K_j(x,y)$ по функциям распределения $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \Psi$. *Чистые стратегии* игры $\bar\Gamma$ — функции распределения, сосредоточенные в одной точке $x \in X$ или $y \in Y$ соответственно. Все остальные функции распределения $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \Psi$ называются *смешанными стратегиями*.

Ситуацией (x,y) называется пара стратегий игроков. Ситуация $(x_{\mathrm e}, y_{\mathrm e})$ есть *ситуация равновесия*, если для любых $x \in X$, $y \in Y$ выполняются неравенства

$$K_1(x, y_{\mathrm e}) \leqslant K_1(x_{\mathrm e}, y_{\mathrm e}), \quad K_2(x_{\mathrm e}, y) \leqslant K_2(x_{\mathrm e}, y_{\mathrm e}).$$

Вектор (v^1, v^2), где $v^1 = K_1(x_{\mathrm e}, y_{\mathrm e})$, $v^2 = K_2(x_{\mathrm e}, y_{\mathrm e})$, называют *равновесной ценой*, соответствующей ситуации равновесия $(x_{\mathrm e}, y_{\mathrm e})$, а стратегию, входящую в какую-либо ситуацию равновесия, — *равновесной* стратегией.

В бесконечной игре с непротивоположными интересами ситуации равновесия может не существовать. Ситуацию $(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$ назовём *ситуацией ε-равновесия*, если для любых $x \in X$, $y \in Y$ выполняются неравенства

$$K_1(x, y^\varepsilon) - \varepsilon \leqslant K_1(x^\varepsilon, y^\varepsilon), \quad K_2(x^\varepsilon, y) - \varepsilon \leqslant K_2(x^\varepsilon, y^\varepsilon).$$

Стратегию игрока, входящую в какую-либо ситуацию ε-равновесия, назовём *ε-равновесной*. Если существуют пределы

$$v_{\mathrm{e}}^j = \lim_{\varepsilon \to 0} K_j(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \quad (j = 1, 2),$$

то вектор $(v_{\mathrm{e}}^1, v_{\mathrm{e}}^2)$ назовём *равновесной ценой*, соответствующей множеству ситуаций $\{(x^\varepsilon, y^\varepsilon)\}$.

Стратегия $x_m \in X$ называется *максиминной* стратегией первого игрока, если функция $m_1(x) = \inf\limits_{y \in Y} K_1(x, y)$ достигает на ней своего наибольшего значения. Аналогично стратегия $y_m \in Y$ называется *максиминной* стратегией второго игрока, если функция $m_2(y) = \inf\limits_{x \in X} K_2(x, y)$ принимает на ней максимальное значение. Вектор

$$w = (w^1, w^2), \quad \text{где} \quad w^1 = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} K_1(x, y), \quad w^2 = \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} K_2(x, y),$$

называют *максиминной ценой* игры с ненулевой суммой. Величина w^j есть наилучший гарантированный выигрыш j-го игрока.

В бесконечной игре максиминные стратегии могут не существовать. В этом случае рассматриваются *ε-максиминные* стратегии. Стратегия $x_m^\varepsilon \in X$ называется *ε-максиминной* стратегией первого игрока, если

$$m_1(x_m^\varepsilon) > w^1 - \varepsilon, \quad \text{где} \quad m_1(x) = \inf_{Y} K_1(x, y),$$

а w^1 — максиминная цена игры первого игрока. Аналогично определяется *ε-максиминная* стратегия второго игрока.

Если в антагонистической игре существуют ситуации равновесия, то соответствующие им равновесные цены совпадают и равны максиминной цене. Равновесные стратегии антагонистической игры являются максиминными и называются *оптимальными*, а ε-равновесные являются ε-максиминными и называются *ε-оптимальными*. В игре с ненулевой суммой могут существовать ситуации равновесия с различными равновесными ценами.

Введём отношение частичного порядка $\succ$ в $\mathbb{R}^2$: $a \succ b$, если $a_j \geqslant b_j$ $(j = 1, 2)$, причём хотя бы одно из неравенств является строгим. Обозначим через S множество ситуаций $s = (x, y)$. Отношение *предпочтения по Парето* на множестве S определяется следующим образом. Пусть $s^i = (x^i, y^i)$ $(i = 1, 2)$. Тогда

$$s^1 \succ s^2, \quad \text{если} \quad K^1 \succ K^2, \quad K^i = \bigl(K_1(x^i, y^i), K_2(x^i, y^i)\bigr), \quad i = 1, 2.$$

Ситуация $s^p = (x_p, y_p)$ называется *оптимальной по Парето*, если не существует ситуации $s = (x, y)$, такой что $s \succ s^p$.

В антагонистической игре все ситуации являются оптимальными по Парето. Игра называется *квазиантагонистической* или *игрой с противоположными* *интересами*, если все ситуации игры являются оптимальными по Парето, т. е. если для любых двух ситуаций $(x^1, y^1), (x^2, y^2) \in S$ выполняются условия

$$K_1(x^1, y^1) < K_1(x^2, y^2) \iff K_2(x^1, y^1) > K_1(x^2, y^2),$$
$$K_1(x^1, y^1) = K_1(x^2, y^2) \iff K_2(x^1, y^1) = K_1(x^2, y^2).$$

3. Постановка задачи

Рассмотрим игру двух лиц с ненулевой суммой, которая представляет собой обобщение антагонистической шумной дуэли снайперов.

Игроки ведут конкурентную борьбу в условиях полной информации. Они имеют дискретные ресурсы $m, n \in \mathbb{N}$, которые используют в промежутке времени $[0, 1]$. Эффективность использования j-м игроком своего ресурса характеризуется функцией $P_j(t)$ $(j = 1, 2)$, равной вероятности достижения успеха при использовании в момент t единичного ресурса. Функции $P_j(t)$ непрерывны, возрастают, $P_j(0) = 0$, $P_j(1) = 1$, $0 < P_j(t) < 1$ при $t \in (0, 1)$. Если один из игроков добивается успеха, то игра прекращается. Если игрок, который первым использовал весь свой ресурс, не добился успеха, то второй игрок откладывает свои действия до момента $t = 1$, когда вероятность его успеха равна единице. Прибыль j-го игрока в случае его успеха составляет A_j, а убыток при успехе конкурента равен B_j, причём $A_j \geqslant 0$, $B_j \geqslant 0$, $A_j + B_j \neq 0$, $j = 1, 2$. Выигрыши игроков равны 0, если ни один из них не добился успеха или если успех достигнут обоими игроками одновременно. Стратегия игрока есть функция, ставящая в соответствие паре текущих значений ресурсов игроков момент его очередного действия.

Описанную игру назовём *шумной дуэлью дискретного типа с ненулевой суммой*.

Обозначим через τ_i $(0 \leqslant \tau_i \leqslant \tau_{i-1} \leqslant 1,\ i = 1, 2, \ldots, m)$ моменты времени, когда первый игрок использует свой ресурс. Аналогично обозначим через η_i $(0 \leqslant \eta_i \leqslant \eta_{i-1} \leqslant 1,\ i = 1, 2, \ldots, n)$ моменты времени, когда второй игрок использует свой ресурс. Векторы τ и η назовём *векторами моментов действия* игроков. Функция выигрыша $K_j(\tau; \eta)$ есть математическое ожидание выигрыша, получаемого j-м игроком в случае, если игроки используют ресурсы в моменты времени τ_i, η_j $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$. Она вычисляется следующим образом. Если $m = 0$, $n = 0$, то $K_1 = K_2 = 0$. Если $m = 1$, $n = 0$, то $K_1 = A_1$, $K_2 = -B_2$. Если $m = 0$, $n = 1$, то $K_1 = -B_1$, $K_2 = A_2$. Пусть $m > 1$, $n > 1$. Положим $\tau' = (\tau_{m-1}, \ldots, \tau_1)$, $\eta' = (\eta_{n-1}, \ldots, \eta_1)$. Тогда

$$K_1(\tau, \eta) = \begin{cases} A_1 P_1(\tau_m) + \big(1 - P_1(\tau_m)\big) K_1(\tau', \eta), & \tau_m < \eta_n, \\ A_1 P_1(\tau_m)\big(1 - P_2(\tau_m)\big) - B_1\big(1 - P_1(\tau_m)\big) P_2(\tau_m) + \\ \quad + \big(1 - P_1(\tau_m)\big)\big(1 - P_2(\tau_m)\big) K_1(\tau', \eta'), & \tau_m = \eta_n, \\ -B_1 P_2(\eta_n) + \big(1 - P_2(\eta_n)\big) K_1(\tau; \eta'), & \tau_m > \eta_n. \end{cases} \tag{1}$$

$$K_2(\tau;\eta) = \begin{cases} A_2P_2(\eta_n) + \big(1 - P_2(\eta_n)\big)K_2(\tau,\eta'), & \eta_n < \tau_m, \\ A_2P_2(\tau_m)\big(1 - P_2(\tau_m)\big) - B_2\big(1 - P_1(\tau_m)\big)P_2(\tau_m) + \\ \quad + \big(1 - P_1(\tau_m)\big)\big(1 - P_2(\tau_m)\big)K_2(\tau',\eta'), & \tau_m = \eta_n, \\ -B_2P_1(\tau_m) + \big(1 - P_2(\tau_m)\big)K_2(\tau',\eta), & \eta_n > \tau_m. \end{cases} \qquad (2)$$

Положим $A = (A_1, A_2)$, $B = (B_1, B_2)$ и назовём вектор A вектором выигрышей, а вектор B — вектором проигрышей игроков. Введём вектор-функцию эффективности $P(t) = \big(P_1(t), P_2(t)\big)$. Описанную игру обозначим $\Gamma_{mn}(P, A, B)$, а её смешанное расширение — $\bar{\Gamma}_{mn}(P, A, B)$.

Пусть в дуэли $\Gamma_{mn}(P, A, B)$ векторы выигрыша и проигрыша связаны равенствами $A_1 = B_2$, $A_2 = B_1$, т. е. выигрыш каждого игрока равен проигрышу его соперника. Тогда из соотношений (1), (2) следует, что $K_1(\tau, \eta) = -K_2(\tau, \eta)$, т. е. при этих условиях игра является антагонистической.

4. Ситуации ε-равновесия

Лемма 1 ([10]). *Существует такое множество $\{t_{ij},\ i, j \in \mathbb{N}\}$, что*

$$\prod_{i=1}^{m}\big(1 - P_1(t_{in})\big) + \prod_{j=1}^{n}\big(1 - P_2(t_{mj})\big) = 1,$$

причём при всех $m, n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$0 < t_{mn} < \min(t_{m-1,n}, t_{m,n-1}), \quad \text{где} \ \ t_{0n} = t_{m0} = 1.$$

Положим $\lambda = \min\{1/(A_1 + B_1); 1/(A_2 + B_2)\}/2$. Возьмём $\varepsilon > 0$ и найдём такое δ_1, что

$$t_{mn} < \delta_1 < \min(t_{m-1,n}, t_{m,n-1}), \quad P_2(\delta_1) < P_2(t_{11}) + \lambda\varepsilon.$$

Определим $\varphi^{\varepsilon}_{\mu\nu}$ как равномерное распределение, сосредоточенное на отрезке $[t_{\mu\nu}, \delta_1]$. Аналогично определим $\psi^{\varepsilon}_{\mu\nu}$ как равномерное распределение на отрезке $[t_{\mu\nu}, \delta_2]$, где δ_2 удовлетворяет условиям

$$t_{\mu\nu} < \delta_1 < \min(t_{\mu-1,\nu}, t_{\mu,\nu-1}), \quad P_1(\delta_2) < P_1(t_{\mu\nu}) + \lambda\varepsilon.$$

Определим смешанные стратегии игроков x^{ε}, y^{ε} следующим образом. Пусть μ, ν — текущие значения ресурсов игроков. Стратегия x^{ε} предписывает выбирать очередной момент действия τ_μ случайным образом в соответствии с функцией распределения $\varphi^{\varepsilon}_{\mu\nu}$. Аналогично стратегия y^{ε} предписывает выбирать η_ν случайным образом в соответствии с функцией распределения $\psi^{\varepsilon}_{\mu\nu}$.

Теорема 1. *В игре $\bar{\Gamma}_{mn}(P, A, B)$ ситуации $(x^{\varepsilon}, y^{\varepsilon})$ являются ε-равновесными. Соответствующая равновесная цена $v_{\mathrm{e}} = (v^1_{\mathrm{e}}, v^2_{\mathrm{e}})$ имеет вид*

$$v^1_{\mathrm{e}} = A_1 - (A_1 + B_1)\prod_{i=1}^{m}\big(1 - P_1(t_{in})\big) = (A_1 + B_1)\prod_{j=1}^{n}\big(1 - P_2(t_{mj})\big) - B_1,$$

$$v_{\mathrm{e}}^2 = (A_2 + B_2)\prod_{i=1}^{m}\bigl(1 - P_1(t_{in})\bigr) - B_2 = A_2 - (A_2 + B_2)\prod_{j=1}^{n}\bigl(1 - P_2(t_{mj})\bigr).$$

ε-равновесные стратегии x^ε, y^ε являются ε-максиминными. Максиминная цена игры совпадает с равновесной ценой v_{e}.

Доказательство. Для доказательства того, что $(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$ — ситуации ε-равновесия, необходимо и достаточно проверить следующие соотношения:

$$\begin{gathered}\bar K_1(\tau, y^\varepsilon) \leqslant \bar K_1(x^\varepsilon, y^\varepsilon) + \varepsilon \quad \text{при любом} \quad \tau,\\ \bar K_2(x^\varepsilon, \eta) \leqslant \bar K_2(x^\varepsilon, y^\varepsilon) + \varepsilon \quad \text{при любом} \quad \eta,\\ \lim_{n\to\infty}\bar K_1(x^\varepsilon, y^\varepsilon) = v_{\mathrm{e}}^1, \quad \lim_{n\to\infty}\bar K_2(x^\varepsilon, y^\varepsilon) = v_{\mathrm{e}}^2.\end{gathered}$$

При $m = n = 1$ утверждение теоремы доказано в [7]. Для произвольных m, n доказательство проводится индукцией по числу моментов действия игроков.

Докажем теперь, что ε-равновесные стратегии x^ε, y^ε являются ε-максиминными. Воспользуемся свойствами дуэли с нулевой суммой $\bar\Gamma_{mn}(P, C, \bar C)$, где $C_1 = A_1$, $C_2 = B_1$, $\bar C = (C_2, C_1)$. В антагонистической игре равновесная цена совпадает с максиминной, а ε-равновесные стратегии являются ε-максиминными. Поэтому максиминная цена игры $\bar\Gamma_{mn}(P, C, \bar C)$ равна v_{e}^1, а ε-равновесная стратегия первого игрока x^ε является его ε-максиминной стратегией. Следовательно, максиминная цена игры $\bar\Gamma_{mn}(P, A, B)$ для первого игрока равна v_{e}^1, а x^ε есть его ε-максиминная стратегия.

Утверждение теоремы для второго игрока следует из симметрии задачи. □

5. Оптимальные по Парето партии

Пара $p = (\tau, \eta)$ векторов моментов действия игроков, реализованных в ходе игры, называется *партией*. Множество партий шумной дуэли $\bar\Gamma_{mn}(P, A, B)$ обозначим $\mathcal{P}$. Заметим, что $\mathcal{P}$ есть подмножество множества ситуаций соответствующей бесшумной дуэли (с теми же функциями эффективности, ресурсами и векторами выигрыша и проигрыша). Партия $p^1 \in \mathcal{P}$ называется *оптимальной по Парето*, если не существует партии $p^2 \in \mathcal{P}$, такой что $p^2 \succ p^1$. Партии p^1 и p^2 называются *несравнимыми*, если $p^1 \not\succ p^2$ и $p^2 \not\succ p^1$. Партии $p^1 = (\tau^1, \eta^1)$ и $p^2 = (\tau^2, \eta^2)$ называются *эквивалентными*, если $K_j(\tau^1, \eta^1) = K_j(\tau^2, \eta^2)$ $(j = 1, 2)$.

Партия $p = (\tau, \eta) \in \mathcal{P}$ называется *T-партией*, если при любых k, l $(1 \leqslant k \leqslant m,\ 1 \leqslant l \leqslant n)$ выполняется по крайней мере одно из двух равенств

$$\tau_k = t_{kl}, \quad \eta_l = t_{kl},$$

где k, l — текущие значение ресурсов игроков.

Лемма 2. *Пусть $p^T = (\tau^T, \eta^T)$ — произвольная T-партия с несовпадающими моментами действия игроков, т. е. $\tau_k \neq \eta_l$ при всех k, l $(1 \leqslant k \leqslant m,\ 1 \leqslant l \leqslant n)$.*

Тогда

$$K_1(\tau^T, \eta^T) = v_{\mathrm{e}}^1, \quad K_2(\tau^T, \eta^T) = v_{\mathrm{e}}^2.$$

Доказательство. Проведём доказательство индукцией по числу моментов действия игроков. При $k = l = 1$ утверждение доказано в [6, 7]. Предположим, что утверждение верно при $k \leqslant m$, $l \leqslant n$, $k + l < m + n$. Пусть в момент времени t_{mn} действует первый игрок. Тогда, пользуясь рекуррентной формулой (1) при $\tau_m < \eta_n$ и индукционным предположением, получаем

$$K_1(\tau, \eta) = A_1 P_1(t_{mn}) - \big(1 - P_1(t_{mn})\big)\bigg(A_1 - (A_1 + B_1)\prod_{i=1}^{m-1}\big(1 - P_1(t_{in})\big)\bigg) =$$

$$= A_1 - (A_1 + B_1)\prod_{i=1}^{m}\big(1 - P_1(t_{in})\big) = v_{\mathrm{e}}^1.$$

Пусть в момент времени t_{mn} действует второй игрок. Тогда, пользуясь формулой (1) при $\tau_m > \eta_n$ и индукционным предположением, получаем

$$K_1(\tau, \eta) = -B_1 P_2(t_{mn}) - \big(1 - P_2(t_{mn})\big)\bigg((A_1 + B_1)\prod_{j=1}^{n-1}\big(1 - P_2(t_{mj})\big) - B_1\bigg) =$$

$$= -B_1 + (A_1 + B_1)\prod_{j=1}^{n}\big(1 - P_2(t_{mj})\big) = v_{\mathrm{e}}^1.$$

Функция выигрыша второго игрока рассматривается аналогично. □

Лемма 3. *Пусть партии* $p^1 = (\tau^1, \eta^1)$, $p^2 = (\tau^2, \eta^2) \in \mathcal{P}$ *удовлетворяют условиям*

$$\eta_i^1 = \eta_i^2, \quad \tau_i^1 = \tau_i^2 \quad \text{при} \quad i \geqslant 2, \tag{3}$$

$$\tau_1^1 = t_{11}, \quad \eta_2^1 < t_{11}, \quad \eta_1^1 = 1, \quad \tau_1^2 = t_{11}, \quad \eta_1^2 = t_{11}. \tag{4}$$

Тогда

1) *если* $A \succ B$, *то* $p^1 \succ p^2$;
2) *если* $B \succ A$, *то* $p^2 \succ p^1$.

Доказательство. Запишем функцию выигрыша в партиях p^1 и p^2 следующим образом:

$$K_1(\tau^1, \eta^1) = K_1(\tau_m, \ldots, \tau_2; \eta_n, \ldots, \eta_2) +$$
$$+ \prod_{i=2}^{m}\big(1 - P_1(\tau_i)\big)\prod_{j=2}^{n}\big(1 - P_2(\eta_j)\big)\Big(A_1 P_1(t_{11}) - B_1\big(1 - P_1(t_{11})\big)\Big),$$

$$K_1(\tau^2, \eta^2) = K_1(\tau_m, \ldots, \tau_2; \eta_n, \ldots, \eta_2) + \prod_{i=2}^{m}\big(1 - P_1(\tau_i)\big) \times$$
$$\times \prod_{j=2}^{n}\big(1 - P_2(\eta_j)\big)\big(A_1 P_1(t_{11})\big(1 - P_2(t_{11})\big) - B_1\big(1 - P_1(t_{11})\big)P_2(t_{11})\big).$$

Рассмотрим разность $K_1(\tau^1,\eta^1)-K_1(\tau^2,\eta^2)$. Учитывая, что согласно лемме 1

$$P_1(t_{11})+P_2(t_{11})=1,$$

имеем

$$K_1(\tau^1,\eta^1)-K_1(\tau^2,\eta^2)= \\ =(A_1-B_1)P_1(t_{11})P_2(t_{11})\prod_{i=2}^{m}\bigl(1-P_1(\tau_i)\bigr)\prod_{j=2}^{n}\bigl(1-P_2(\eta_j)\bigr). \quad (5)$$

Аналогично

$$K_2(\tau^1,\eta^1)-K_2(\tau^2,\eta^2)= \\ =(A_2-B_2)P_1(t_{11})P_2(t_{11})\prod_{i=2}^{m}\bigl(1-P_1(\tau_i)\bigr)\prod_{j=2}^{n}\bigl(1-P_2(\eta_j)\bigr). \quad (6)$$

Утверждение леммы следует из (5), (6). □

Теорема 2. *Если коэффициенты выигрыша и проигрыша игроков связаны неравенством $A_1A_2\geqslant B_1B_2$, то T-партии с несовпадающими моментами действия игроков оптимальны по Парето.*

Доказательство. В любой T-партии с несовпадающими моментами действия игроков последнее действие игроков происходит при $t=1$, т. е. $\max\{\tau_1,\eta_1\}=1$. Поэтому один из игроков (игрок, действующий в момент $t=1$) достигает успеха с вероятностью единица, следовательно, как доказано в [8], при условии выполнения неравенства $A_1A_2\geqslant B_1B_2$ партия оптимальна по Парето. □

Теорема 3. *Если $B\succ A$, то T-партии с несовпадающими моментами действия игроков не являются оптимальными по Парето.*

Доказательство. Поскольку по лемме 2 все T-партии с несовпадающими моментами действия игроков эквивалентны, то доказательство будем проводить для одной T-партии, а именно для партии $p^1=(\tau,\eta)$, в которой

$$\tau_i=t_{i1}\ \text{ при }\ i=1,\dots,m,\quad \eta_j=t_{mj}\ \text{ при }\ j=2,\dots,n,\quad \eta_1=1.$$

Положим $p^2=(\tau,\eta\parallel\eta_1=t_{11})$. Партии p^1, p^2 удовлетворяют условиям леммы 3, поэтому

$$B\succ A\implies p^2\succ p^1.$$

Следовательно, партия p^1, а также все остальные T-партии с несовпадающими моментами действия игроков не являются оптимальными по Парето. □

Теорема 4. *Если дуэль $\Gamma_{mn}(P,A,B)$ является квазиантагонистической, то выполняется одно из следующих двух условий*:

$$(A_1-B_1)(A_2-B_2)<0,\quad A_j=B_j,\quad j=1,2. \quad (7)$$

Доказательство. Пусть партии p^1, p^2 удовлетворяют условиям (3), (4). Предположим, что ни одно из условий (7) не выполняется. Тогда возможны два случая.

1. $A \succ B$. Тогда по пункту 1) леммы 3 $p^1 \succ p^2$. Следовательно, партия p^2 не оптимальна по Парето, и поэтому игра не является квазиантагонистической.

2. $B \succ A$. Тогда по пункту 2) леммы 3 $p^2 \succ p^1$. Следовательно, партия p^1 не оптимальна по Парето, и поэтому игра не является квазиантагонистической. □

Теорема 5. *Если в игре $\Gamma_{mn}(P, A, B)$ коэффициенты выигрыша и проигрыша игроков удовлетворяют соотношению*

$$A_1 A_2 = B_1 B_2,$$

то игра является квазиантагонистической.

Эта теорема является частным случаем достаточного условия квазиантагонистичности, доказанного в [8] для трёх видов дуэлей.

Литература

[1] Давыдов Э. Г., Посицельская Л. Н. Шумные дуэли. — М.: ВЦ АН СССР, 1982.

[2] Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. — М.: Мир, 1964.

[3] Посицельская Л. Н. Об одной задаче распределения ресурсов // Динамика неоднородных систем. — М.: ВНИИСИ, 1983. — С. 260—266.

[4] Посицельская Л. Н. Дуэль как модель конкуренции и катастрофы // Математика. Моделирование. Экология. Тр. IV Междунар. конф. женщин-математиков. Т. 4, вып. 1. — Нижний Новгород, 1997. — С. 111—119.

[5] Посицельская Л. Н. Шумная дуэль смешанного типа с ненулевой суммой // Тр. VI Междунар. конф. женщин-математиков. Т. 6, вып. 1. — Нижний Новгород, 1999. — С. 77—85.

[6] Посицельская Л. Н. Шумная дуэль дискретного типа с ненулевой суммой // Тр. Росс. ассоциации «Женщины-математики». Т. 8, вып. 1. — Нижний Новгород, 2001. — С. 47—52.

[7] Посицельская Л. Н. Равновесие и Парето-оптимальность в шумной дуэли дискретного типа с ненулевой суммой // Фундамент. и прикл. мат. — 2002. — Т. 8, вып. 4. — С. 1111—1128.

[8] Посицельская Л. Н. Парето-оптимальные партии дуэлей с ненулевой суммой // Тр. Росс. ассоциации «Женщины-математики». Т. 12. — Чебоксары, 2005. — С. 182—188.

[9] Fox M. Duels with possibly assymetric goals // Applicationes Mathematicae. — 1980. — Vol. 17, no. 1. — P. 15—25.

[10] Fox M., Kimeldorf G. S. Noisy duels // SIAM J. Appl. Math. — 1969. — Vol. 17. — P. 353—361.

[11] Kimeldorf G. Duels: An overview // Mathematics of Conflict. — North-Holland, 1983. — P. 55—71.

[12] Radzik T. General noisy duels // Math. Japon. — 1991. — Vol. 36, no. 5. — P. 827—857.