О тождествах правоальтернативных метабелевых алгебр Грассмана*

С. В. ПЧЕЛИНЦЕВ
Финансовая академия
при Правительстве Российской Федерации
e-mail: SVPchelintsev@yandex.ru

УДК 512.554.5

Ключевые слова: правоальтернативная алгебра, алгебра Грассмана, тождество, многообразие, шпехтовость.

Аннотация

В работе изучаются правоальтернативные метабелевы (или разрешимые индекса 2) алгебры Грассмана ранга 1 и 2. Указан базис тождеств правоальтернативной метабелевой алгебры Грассмана ранга 1 и доказано, что многообразие, порождённое этой алгеброй, имеет почти конечный топологический ранг. Показано также, что многообразие, порождённое алгеброй Грассмана ранга 2, не является шпехтовым.

Abstract

S. V. Pchelintsev, On identities of right alternative metabelian Grassmann algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 2, pp. 157—183.

The right alternative metabelian (solvable of index 2) Grassmann algebras of rank 1 and 2 are studied. A basis of identities of a right alternative metabelian Grassmann algebra of rank 1 is presented. Then it is proved that the variety generated by the indicated algebra has almost finite topological rank. It is also shown that the variety generated by a Grassmann algebra of rank 2 is not Spechtian.

Введение

В 1976 г. В. П. Белкин [2] доказал существование бесконечно базируемых многообразий правоальтернативных метабелевых (разрешимых индекса 2) алгебр над полем произвольной характеристики. Это исторически первый пример бесконечно базируемого многообразия в теории колец, близких к ассоциативным. (Первые примеры бесконечно базируемых многообразий алгебр Ли над полями конечной характеристики построены Воон-Ли [13] и В. С. Дренски [3].) Для правоальтернативных метабелевых алгебр известно также, что всякая левонильпотентная алгебра обладает конечным базисом тождеств [5]. Кроме указанных результатов, о данном многообразии, по существу, ничего неизвестно.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 04-01-00111).

В цикле работ автора [6—9] был предложен подход к изучению метабелевых и центрально метабелевых многообразий алгебр, основанный на описании некоторых классов кососимметрических функций. Этот подход получает дальнейшее развитие в предлагаемой статье.

Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие алгебр; G — ассоциативная алгебра Грассмана со стандартной системой порождающих e_i $(i = 1, 2, \ldots)$. Если $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ — супералгебра, то через $\mathrm{G}(\mathcal{A})$ обозначается, как обычно, её грассманова оболочка $\mathrm{G}_0 \otimes \mathcal{A}_0 + \mathrm{G}_1 \otimes \mathcal{A}_1$. Напомним [11], что алгебра $\mathcal{A}$ называется *$\mathfrak{M}$-супералгеброй*, если $\mathrm{G}(\mathcal{A}) \in \mathfrak{M}$. Пусть $\mathfrak{M}^s[X]$ — свободная $\mathfrak{M}$-супералгебра с множеством $X = X_0 \cup X_1$ свободных порождающих (X_0 — множество чётных порождающих, X_1 — нечётных), $r_i = |X_i|$ — мощность множества X_i, пару (r_0, r_1) назовём *рангом свободной супералгебры*.

Рассмотрим $\mathfrak{M}$-свободную супералгебру $\mathfrak{M}^s[X]$ от r свободных нечётных порождающих $x_1, \ldots, x_r$. В её грассмановой оболочке возьмём элементы $x_i^{(j)} = x_i \otimes e_{ij}$, где e_{ij} $(i = 1, \ldots, r,\ j = 1, 2, \ldots)$ — стандартные порождающие ассоциативной алгебры Грассмана. Подалгебру $\tilde{\mathrm{G}}_{\mathfrak{M}}[x_1, \ldots, x_r]$, порождённую элементами $x_i^{(j)}$, назовём *$\mathfrak{M}$-алгеброй Грассмана ранга r*, а набор $\bigl(x_i^{(j)},\ i = \overline{1,r},\ j \geqslant 1\bigr)$ — набором её стандартных порождающих. Определяющим свойством алгебры Грассмана ранга r является кососимметричность её одночленов относительно одноимённых порождающих $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots$ $(i = \overline{1,r})$.

Если ранг $\mathfrak{M}$-алгебры Грассмана не указан, то подразумевается, что он равен единице, а сама алгебра обозначается сокращённо $\tilde{\mathrm{G}}(\mathfrak{M})$ или $\tilde{\mathrm{G}}$, если ясно, о каком многообразии идёт речь.

В предлагаемой работе изучаются многообразия, порождённые правоальтернативными метабелевыми алгебрами Грассмана ранга 1 и 2. Работа состоит из шести разделов. Основная часть работы (разделы 1—5) посвящена изучению тождеств многообразия $\mathrm{var}(\tilde{\mathrm{G}})$, порождённого алгеброй Грассмана $\tilde{\mathrm{G}}$ ранга 1. Сначала в разделе 1 строится аддитивный базис свободной супералгебры, порождённой одним нечётным элементом. Во втором разделе доказана теорема 1: $\mathrm{var}(\tilde{\mathrm{G}})$ — шпехтово многообразие, имеющее бесконечный топологический ранг. В разделе 3 вводятся необходимые функции и доказываются основные тождества алгебры $\tilde{\mathrm{G}}$. В четвёртом разделе указан базис тождеств алгебры Грассмана $\tilde{\mathrm{G}}$ (теорема 2), а именно базис тождеств алгебры $\tilde{\mathrm{G}}$ состоит из следующих пяти тождеств:

$$
\begin{aligned}
&T_1\colon\ (a, b, b) = 0 && \text{(правая альтернативность)},\\
&T_2\colon\ (ab)(cd) = 0 && \text{(метабелевость)},\\
&T_3\colon\ x^3 = 0 && \text{(ниль индекса 3)},\\
&T_4\colon\ (x, x, yz) = 0, &&\\
&T_5\colon\ (x, y, [x, y]) = 0. &&
\end{aligned}
$$

Из тождеств ослабленной альтернативности T_4 и T_5 вытекают следующие тождества:

$$(xy)T_zT_z = 0 \qquad \text{(кососимметричность операторных слов)},$$
$$(xy)T_xT_y = (xy)T_yT_x = 0 \quad \text{(квадратичная нильпотентность)}.$$

В разделе 5 доказан центральный результат работы.

Основная теорема. *Топологический ранг многообразия, порождённого правоальтернативной метабелевой алгеброй Грассмана над полем характеристики, отличной от 2, почти конечен.*

В шестом разделе показано, что многообразие, порождённое алгеброй Грассмана ранга 2, не является шпехтовым.

Результаты работы были анонсированы автором в [10].

Общие обозначения

Всюду ниже, если не оговорено противное, под алгеброй понимается алгебра над полем Φ характеристики, отличной от 2; $a \circ b = ab + ba$ — йорданово произведение, $[a, b] = ab - ba$ — коммутатор, $(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$ — ассоциатор указанных элементов; R_a и L_a — операторы правого и левого умножения алгебры $\mathcal{A}$, T_a — обозначение одного из операторов R_a и L_a, $R_a^+ = R_a + L_a$, $R_a^- = R_a - L_a$; $\mathcal{A}^*$ — подалгебра алгебры умножений, порождённая операторами R_a и L_a, действующими на идеале $\mathcal{A}^2$, и тождественным отображением; $\tilde{\mathrm{G}}$ — правоальтернативная метабелева алгебра Грассмана; $\mathrm{var}(\mathcal{A})$ — многообразие, порождённое алгеброй $\mathcal{A}$; $\mathcal{F}_{\mathfrak{M}}[X]$ — свободная алгебра над множеством X многообразия $\mathfrak{M}$; $\mathrm{T}(\mathfrak{M})$ — идеал тождеств многообразия $\mathfrak{M}$; $(f)^{\mathrm{T}}$ — T-идеал, порождённый многочленом f.

Основные определения и результаты, относящиеся к многообразиям алгебр, можно найти в [4].

1. Свободная правоальтернативная метабелева супералгебра с одним нечётным порождающим

И. П. Шестаков [12] построил базис свободной супералгебры Мальцева с одним нечётным порождающим. Пусть $F = F_0 + F_1$ — свободная правоальтернативная метабелева супералгебра, порождённая одним нечётным элементом x. В этом разделе будет построен её аддитивный базис.

Во всякой правоальтернативной алгебре справедливы следующие тождества:

$$(a, b^2, c) = (a, b, b \circ c), \tag{1}$$
$$(a, b, bc) = (a, b, c)b \qquad \text{(правое тождество Муфанг)}, \tag{2}$$
$$(ab, c, d) + (a, b, [c, d]) = a(b, c, d) + (a, c, d)b \qquad \text{(тождество Клейнфелда)}. \tag{3}$$

Напомним [11], что супералгебра является правоальтернативной тогда и только тогда, когда она удовлетворяет супертождеству

$$(a, b, c) + (-1)^{|b||c|}(a, c, b) = 0, \tag{4}$$

где b, c — однородные элементы, $|b|$ — чётность b.

Лемма 1. *В супералгебре F справедливы следующие равенства*:

$$w([L, R] - (-1)^{|w|}L^2) = 0, \tag{5}$$

$$w[L^2, R] = w[R^2, L] = 0, \tag{6}$$

где R и L — операторы R_x и L_x, w — однородный элемент из F^2, $|w|$ — чётность w.

Доказательство. Из супертождества (4) следует

$$w[L, R] = (xw)x - x(wx) = (x, w, x) = (-1)^{|w|+1}(x, x, w) = (-1)^{|w|}wL^2,$$

что и доказывает первое соотношение. Используя (5), получаем

$$w[L^2, R] = w(L \circ [L, R]) = \\ = (wL)[L, R] + (w[L, R])L = (-1)^{|w|+1}wL^3 + (-1)^{|w|}wL^3 = 0.$$

Аналогично имеем

$$w[R^2, L] = w(R \circ [R, L]) = \\ = -(wR)[L, R] - (w[L, R])R = (-1)^{|w|}w(RL^2 - L^2R) = 0. \quad \square$$

Лемма 2. *Элементы x и $v_{n,m} := x^2R^nL^m$ $(n, m \geqslant 0)$ составляют аддитивный базис свободной правоальтернативной метабелевой супералгебры F ранга $(0, 1)$.*

Доказательство. Проверим сначала, что алгебра F линейно порождается элементами x и $v_{n,m}$. Рассмотрим произвольный одночлен от x степени $d+1$. Сделав индуктивное предположение, можем считать, что всякий одночлен от x степени d линейно выражается через указанные элементы. Поэтому в силу метабелевости достаточно проверить, что произведение $v_{n,m} \cdot x$ линейно выражается через элементы типа $v_{i,j}$ (при умножении слева $v_{n,m}$ на x получается элемент $v_{n,m+1}$). В силу леммы 1 имеем

а) если m чётно, то $v_{n,m} \cdot x = x^2R^nL^mR = v_{n+1,m}$;

б) если m нечётно, то в силу тождества (5)

$$v_{n,m} \cdot x = x^2R^nL^mR = x^2R^nLRL^{m-1} = v_{n+1,m} + x^2R^n[L, R]L^{m-1} = \\ = v_{n+1,m} + (-1)^n x^2R^nL^{m+1} = v_{n+1,m} + (-1)^n v_{n,m+1}.$$

Осталось проверить линейную независимость указанных в лемме элементов. Для этого построим вспомогательную супер態алгебру. Рассмотрим алгебру $\mathcal{B}$ с аддитивным базисом из элементов x, $w_{s,t}$ $(s, t \geqslant 0)$ и следующей таблицей умножения:

$$w_{s,t} \cdot w_{p,q} = 0, \quad x \cdot x = w_{0,0}, \quad x \cdot w_{s,t} = w_{s,t+1},$$

$$w_{s,t} \cdot x = (-1)^{s+t+1}\delta_t w_{s,t+1} + w_{s+1,t}, \quad \text{где} \quad \delta_t = \begin{cases} 1, & \text{если } t \text{ нечётно,} \\ 0, & \text{если } t \text{ чётно.} \end{cases}$$

Базисные элементы $w_{s,t}$ назовём чётными, если сумма индексов $s+t$ чётна. Элемент x и элементы $w_{s,t}$, у которых сумма индексов $s+t$ нечётна, назовём нечётными. Ясно, что $\mathcal{B}$ является супералгеброй. Из таблицы умножения вытекает, что она метабелева. Значит, достаточно проверить справедливость супертождества правой альтернативности на тройке элементов $x, x, w_{s,t}$. Имеем

$$\begin{aligned}
&(x, x, w_{s,t}) = -x \cdot (x \cdot w_{s,t}) = -x \cdot w_{s,t+1} = -w_{s,t+2},\\
&(x, w_{s,t}, x) = (x \cdot w_{s,t}) \cdot x - x \cdot (w_{s,t} \cdot x) =\\
&\quad = (w_{s,t+1}) \cdot x - x \cdot \big((-1)^{s+t+1}\delta_t w_{s,t+1} + w_{s+1,t}\big) =\\
&\quad = (-1)^{s+t}\delta_{t+1} w_{s,t+2} + w_{s+1,t+1} + (-1)^{s+t}\delta_t (x \cdot w_{s,t+1}) - x \cdot w_{s+1,t} =\\
&\quad = (-1)^{s+t}\delta_{t+1} w_{s,t+2} + w_{s+1,t+1} + (-1)^{s+t}\delta_t w_{s,t+2} - w_{s+1,t+1} =\\
&\quad = (-1)^{s+t}(\delta_{t+1} + \delta_t) w_{s,t+2} = (-1)^{s+t} w_{s,t+2} = (-1)^{|w_{s,t}|} w_{s,t+2}.
\end{aligned}$$

Из полученных равенств и вытекает супертождество правой альтернативности (4).

Заметим, что в супералгебре $\mathcal{B}$ элементы $w_{s,t}$ совпадают с образами элементов $x^2 R^s L^t$ супералгебры F при каноническом гомоморфизме. $\square$

2. Шпехтовость многообразия $\mathrm{var}(\tilde{\mathrm{G}})$

2.1. Простейшие свойства операторов R^+ и R^-

Заметим, что алгебра Грассмана $\tilde{\mathrm{G}}$ удовлетворяет тождествам вида $(ab)T_c T_c = 0$. Всюду в этом разделе $\mathcal{A}$ — правоальтернативная метабелева алгебра, удовлетворяющая указанным тождествам. В алгебре $\mathcal{A}^*$, на основании тождеств правой альтернативности и метабелевости, верно равенство

$$[L_a, R_b] = -L_a L_b. \tag{7}$$

Кроме того, в силу леммы 1 имеем

$$[L_a L_b, R_c] = 0, \tag{8}$$

$$[L_a, R_b R_c] = 0. \tag{9}$$

Если в операторных выражениях $\sum U_a V_b W_c$ элементы a, b, c идут в одном порядке во всех операторных одночленах, то будем писать для краткости $\sum UVW$, опуская обозначения элементов. Используя равенство (7), легко проверить справедливость следующей леммы.

Лемма 3. *В алгебре $\mathcal{A}^*$ справедливы следующие соотношения*:

$$R^{+^2} = R^2, \quad R^{-^2} = R^2 + 2L^2, \quad [R^{+^2}, T] = [R^{-^2}, T] = 0,$$

$$R^+R^- = R^2 - 2RL - 2L^2, \quad R^-R^+ = R^2 + 2RL,$$
$$R^-R^+ = -R^+R^- + 3{R^+}^2 - {R^-}^2. \tag{10}$$

Операторы вида

$${R^+}^n{R^-}^m := R^+(a_1)\dots R^+(a_n)\cdot R^-(b_1)\dots R^-(b_m),$$

где $a_i, b_j \in X$, $a_1 < \ldots < a_n < b_1 < \ldots < b_m$, назовём *правильными*.

Лемма 4. *Алгебра умножений $\mathcal{A}^*$ линейно порождается правильными операторами. Кроме того, правильные операторы линейно независимы в алгебре Грассмана.*

Доказательство. Первое утверждение получается индукцией по длине операторного слова с применением равенств

$$R = \frac{1}{2}(R^+ + R^-), \quad L = \frac{1}{2}(R^+ - R^-),$$

соотношения (10) и условия кососимметричности операторных слов по переменным, стоящим под знаками операторов.

Для проверки второго утверждения достаточно заметить, что по лемме 2 пространство полилинейных операторов вида $R_a \dots R_b \cdot L_p \dots L_q$ от переменных $x_1, \dots, x_d$ имеет размерность $d+1$. С другой стороны, оно линейно порождается операторами ${R^+}^n{R^-}^m$, число которых также равно $d+1$. Следовательно, эти операторные слова линейно независимы на алгебре Грассмана. □

2.2. Топологический ранг многообразия $\mathrm{var}(\tilde{\mathrm{G}})$

Теорема 1. *Пусть $\mathrm{var}(\tilde{\mathrm{G}})$ — многообразие, порождённое правоальтернативной метабелевой алгеброй Грассмана. Тогда $\mathrm{var}(\tilde{\mathrm{G}})$ — шпехтово многообразие, имеющее бесконечный топологический ранг.*

Доказательство. Докажем сначала шпехтовость более широкого многообразия правоальтернативных метабелевых алгебр, удовлетворяющих тождествам $(ab)T_cT_c = 0$. Пусть $\mathcal{A}$ — свободная алгебра этого многообразия. Напомним, что операторы $T_x \dots T_y$, действующие на квадрате алгебры $\mathcal{A}$, кососимметричны по $x, \dots, y$.

Поставим в соответствие каждому одночлену v алгебры $\mathcal{A}$

$$v = (x_ix_j)R(x_{p_1})\dots R(x_{p_n})L(x_{q_1})\dots L(x_{q_m}), \text{ где } p_1 < \ldots < p_n < q_1 < \ldots < q_m,$$

четвёрку $s = (i, j, n, m)$ натуральных чисел, которую назовём *весом* одночлена v (обозначение $s = \mathrm{wt}(v)$). На множестве четвёрок введём отношение порядка $\prec$, считая, что $s = (i, j, n, m) \prec s' = (i', j', n', m')$, если $n \leqslant n'$, $m \leqslant m'$ и существует сохраняющее порядок инъективное отображение ψ натурального ряда в себя, такое что $\psi(i) = i'$, $\psi(j) = j'$.

Кроме того, положим $s \leqslant s'$, если $s \prec s'$ и $|n'| \equiv |n| \pmod 2$.

Следуя Г. Хигману [1, гл. 5], легко понять, что множество четвёрок является вполне частично упорядоченным относительно введённого отношения $\leqslant$.

Поскольку каждый многочлен h представи́м в виде линейной комбинации одночленов v указанного выше вида, *весом* $\mathrm{wt}(h)$ многочлена h назовём, как обычно, вес его старшего члена в смысле лексикографического порядка. Пусть $s = \mathrm{wt}(h)$, $s \leqslant s'$. Докажем, что T-идеал $(h)^{\mathrm{T}}$, порождённый h, содержит такой многочлен h', что $\mathrm{wt}(h') = s'$.

Проведём индукцию по числу k, считая, что $2k = n' - n$. Ясно, что достаточно рассмотреть только случай $k = 1$. Пусть v — старший член многочлена h. Положим $h'' := hR(z_1)R(z_2)L(z_3)\ldots L(z_{t+2-q})$, считая, что переменная z_1 больше всех переменных, входящих в запись многочлена h, а число q обозначает количество операторов левого умножения, участвующих в записи старшего члена v. Проводя специализацию переменных $z_1, z_2, \ldots$, легко получить многочлен h', содержащийся в идеале $(h)^{\mathrm{T}}$, старший член которого имеет вес, совпадающий с набором s'. Рассмотрим произвольный T-идеал H и для каждого многочлена найдём его вес. Множество указанных весов обладает конечным набором минимальных элементов $q_1, \ldots, q_l$. Для каждого из минимальных элементов q_i выберем по многочлену $h_i \in H$ так, что $q_i = \mathrm{wt}(h_i)$. В силу предыдущего всякий многочлен из H является следствием многочленов $h_1, \ldots, h_l$.

Докажем теперь бесконечность топологического ранга многообразия $\mathrm{var}(\tilde{\mathrm{G}})$. Заметим, что в силу тождества (9) в алгебре $\tilde{\mathrm{G}}$ вполне характеристический идеал $\mathcal{I}_k$, порождённый одночленом $(xy)R(z_1)\ldots R(z_{2k})$, состоит из всевозможных линейных комбинаций элементов вида $v_{m,n} \otimes e_\sigma$, где $m \geqslant 2k$, e_σ — одночлен ассоциативной алгебры Грассмана G. Следовательно, в алгебре $\tilde{\mathrm{G}}$ для любого натурального d справедливо соотношение $\mathcal{I}_k \cdot L(\tilde{\mathrm{G}})^d \nsubseteq \mathcal{I}_{k+1}$. Отсюда и вытекает бесконечность топологического ранга многообразия $\mathrm{var}(\tilde{\mathrm{G}})$. □

3. Тождества алгебры Грассмана $\tilde{\mathrm{G}}$

3.1. Тождества T_3—T_5

Лемма 5. *Алгебра Грассмана* $\tilde{\mathrm{G}}$ *удовлетворяет следующим тождествам*:

а) $f(a) = 0$, *если* $\deg_a f \geqslant 3$;

б) $f(a, b) = 0$, *если* $\deg_a f + \deg_b f \geqslant 4$.

Доказательство. Достаточно доказать, что алгебра $\tilde{\mathrm{G}}$ удовлетворяет тождеству $f(w, a) = 0$, если $w \in \tilde{\mathrm{G}}$, $\deg_a f = 2$. Пусть $f(w, a, b)$ — линеаризация многочлена f по переменной a. Если подставить вместо одной из переменных a или b элемент из $\tilde{\mathrm{G}}^2$, то получим нуль. Поскольку любой многочлен алгебры $\tilde{\mathrm{G}}$ кососимметричен относительно стандартных порождающих, то $f(w, a, b) = -f(w, b, a)$. Тогда $2f(w, a) = f(w, a, a) = 0$ и ввиду ограничения на характеристику $f(w, a) = 0$. □

Из леммы вытекает, что алгебра $\tilde{\mathrm{G}}$ удовлетворяет тождествам T_3—T_5.

3.2. Некоторые следствия тождеств T_1—T_5

Всюду в этом разделе $\mathcal{A}$ — алгебра, удовлетворяющая тождествам T_1—T_5.

Лемма 6. *В алгебре $\mathcal{A}$ справедливы следующие тождества*:

а) $(xy)T_zT_z = 0$ (*кососимметричность операторных слов*);

б) $(xy)T_xT_y = (xy)T_yT_x = 0$ (*квадратичная нильпотентность*).

В частности, для операторного слова ρ верно тождество $x^2\rho T_x = 0$.

Доказательство проведём в два этапа.

1. Кососимметричность операторных слов. Как обычно, w обозначает произвольный элемент идеала $\mathcal{A}^2$. В силу тождеств T_1, T_2 и T_4 имеем $wR_zR_z = wL_zL_z = 0$. В правоальтернативной алгебре верно тождество $2(yx)y = (x \circ y) \circ y - x \circ y^2$. Кроме того, линеаризация тождества $x^3 = 0$ имеет вид $x \circ y^2 + (x \circ y) \circ y = 0$. Значит,

$$(xy)x = -y \circ x^2. \tag{11}$$

Отсюда в силу тождества T_2 получаем

$$(zw)z = -w \circ z^2 = 0. \tag{12}$$

Наконец, в силу (12) и T_4 имеем

$$z(wz) = (zw)z - (z, w, z) = (zw)z + (z, z, w) = 0.$$

2. Квадратичная нильпотентность. В силу метабелевости достаточно доказать, что всякий многочлен степени 4 от двух переменных, содержащийся в ассоциаторном идеале, равен 0 в алгебре $\mathcal{A}$. Учитывая тождества T_1 и T_4, достаточно проверить справедливость следующих тождеств:

$$(x, y, xy) = (xy, x, y) = 0, \tag{13}$$

$$(x, x, y)y = y(x, x, y) = 0. \tag{14}$$

Во-первых, в силу T_4, T_5 и (1) имеем

$$2(x, y, xy) = (x, y, x \circ y) = -(x, x, y^2) = 0.$$

Учитывая тождества T_1, T_2 и (12), получаем

$$(xy, x, y) = \big((xy)x\big)y = -(y \circ x^2)y = -(yx^2)y - (x^2y)y = 0.$$

Тем самым тождества (13) доказаны.

Применяя тождества T_4, T_5, (13) и правое тождество Муфанг (2), имеем

$$(x, x, y)y = (x, yx, y) = -(x, y, yx) = -(x, y, xy) = 0.$$

Поскольку в любой алгебре верно тождество

$$(xy, z, t) - (x, yz, t) + (x, y, zt) = x(y, z, t) + (x, y, z)t,$$

то

$$y(x, x, y) = (yx, x, y) - (y, x^2, y) + (y, x, xy) - (y, x, x)y = 0.$$

Тем самым тождества (14), а с ними и лемма доказаны. □

3.3. Вспомогательные функции

Введём следующие функции:

$$\varphi(x,y,z) := 2([x\circ y,z]-[x\circ z,y]) - 6\big((x\circ y)\circ z-(x\circ z)\circ y\big) - \\ - 2x\circ[y,z] - \mathrm{J}(x,y,z),$$

$$\psi(x,y,z) := 2\big(\big[[x,y],z\big]-\big[[x,z],y\big]\big) - \mathrm{J}(x,y,z),$$

$$\xi(x,y,z) := [x\circ y,z]-[x,y]\circ z-\big[[x,y],z\big]-3(x\circ y)\circ z,$$

$$\eta(x,y,z,t) := [(x\circ y)\circ z,t]+([x,y]\circ z)\circ t,$$

где

$$\mathrm{J}(x,y,z) = \big[[x,y],z\big]+\big[[y,z],x\big]+\big[[z,x],y\big] \text{ —}$$

якобиан от x, y, z.

Лемма 7 (А. М. Кузьмин). *Во всякой правоальтернативной алгебре верно тождество*

$$\varphi(x,y,z)+\psi(x,y,z) = \xi(x,y,z)-\xi(x,z,y).$$

Доказательство. Напомним [4], что во всякой правоальтернативной алгебре справедливы тождества

$$[a\circ b,c] = a\circ[b,c]+[a,c]\circ b+2(a,b,c)+2(b,a,c), \tag{15}$$

$$(a\circ b)\circ c-(a\circ c)\circ b = 2(a,b,c)+\big[a,[b,c]\big], \tag{16}$$

$$\mathrm{J}(a,b,c) = 2\mathrm{S}(a,b,c), \tag{17}$$

где $\mathrm{S}(a,b,c)=(a,b,c)+(b,c,a)+(c,a,b)$ — циклическая сумма ассоциаторов.

Из тождеств (15) и (16) ввиду правой альтернативности имеем

$$[x\circ y,z]-x\circ[y,z]-[x,z]\circ y = 2(x,y,z)+2(y,x,z), \tag{18}$$

$$-[x\circ z,y]-x\circ[y,z]+[x,y]\circ z = 2(x,y,z)+2(z,y,x), \tag{19}$$

$$3\big((x\circ y)\circ z-(x\circ z)\circ y\big) = 6(x,y,z)+3\big[x,[y,z]\big]. \tag{20}$$

По определению функций φ, ψ, ξ получаем

$$\rho := \varphi(x,y,z)+\psi(x,y,z)-\xi(x,y,z)+\xi(x,z,y) = \\ = 2([x\circ y,z]-[x\circ z,y]) - 6\big((x\circ y)\circ z-(x\circ z)\circ y\big) - 2x\circ[y,z]-\mathrm{J}(x,y,z) + \\ + 2\big(\big[[x,y],z\big]-\big[[x,z],y\big]\big)-\mathrm{J}(x,y,z)-[x\circ y,z]+[x,y]\circ z+\big[[x,y],z\big] + \\ + 3(x\circ y)\circ z+[x\circ z,y]-[x,z]\circ y-\big[[x,z],y\big]-3(x\circ z)\circ y.$$

После приведения подобных членов получаем

$$\rho = [x\circ y,z]-[x\circ z,y]-3\big((x\circ y)\circ z-(x\circ z)\circ y\big) - \\ - 2x\circ[y,z]-2\mathrm{J}(x,y,z)+3\big(\big[[x,y],z\big]-\big[[x,z],y\big]\big)+[x,y]\circ z-[x,z]\circ y.$$

Учитывая тождества (18)—(20), имеем

$$\rho = 4(x,y,z)+2(y,x,z)+2(z,y,x)-6(x,y,z) - \\ - 3\big[x,[y,z]\big]-2\mathrm{J}(x,y,z)+3\big(\big[[x,y],z\big]-\big[[x,z],y\big]\big) =$$

$$
\begin{aligned}
&= -2(x,y,z) + 2(y,x,z) + 2(z,y,x) - 2\mathrm{J}(x,y,z) + \\
&+ 3\big([[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y]\big) = \\
&= -2\mathrm{S}(x,y,z) - 2\mathrm{J}(x,y,z) + 3\mathrm{J}(x,y,z) = -2\mathrm{S}(x,y,z) + \mathrm{J}(x,y,z) = 0
\end{aligned}
$$

ввиду тождества (17). □

3.4. Тождество f

Введём функцию

$$f(x,y,z) := \varphi(x,y,z) + \psi(x,y,z) - 2\xi(x,y,z).$$

Лемма 8. *В алгебре $\mathcal{A}$ функция $\xi(x,y,z)$ кососимметрична по y, z и*

$$\xi(x,y,\mathcal{A}^2) = \psi(x,y,\mathcal{A}^2) = 0.$$

Доказательство. Используя тождество (11) и линеаризацию тождества T_3, имеем

$$
\begin{aligned}
\xi(x,y,y) &= [x\circ y, y] - [x,y]\circ y - \big[[x,y],y\big] - 3(x\circ y)\circ y = \\
&= [x\circ y, y] - 2[x,y]y - 3(x\circ y)\circ y = [x,y^2] - 2[x,y]y - 3(x\circ y)\circ y = \\
&= xy^2 - y^2x - 2xy^2 + 2(yx)y - 3(x\circ y)\circ y = \\
&= -x\circ y^2 + 2(yx)y - 3(x\circ y)\circ y = -3x\circ y^2 - 3(x\circ y)\circ y = \\
&= -3(x\circ y^2 + (x\circ y)\circ y) = 0.
\end{aligned}
$$

Итак, кососимметричность функции $\xi(x,y,z)$ по переменным y, z доказана. Далее, считая, что $w\in\mathcal{A}^2$, в силу метабелевости и утверждения а) леммы 6 имеем, что $\xi(x,y,w)=0$ и

$$
\begin{aligned}
\psi(x,y,w) &= -2\big[[x,w],y\big] - \mathrm{J}(x,y,w) = \\
&= -2\big[[x,w],y\big] - \big[[x,y],w\big] - \big[[y,w],x\big] - \big[[w,x],y\big] = \\
&= -\big[[x,w],y\big] - \big[[y,w],x\big] = 0.
\end{aligned}
$$

□

Из тождеств T_1—T_5 ввиду лемм 7 и 8 вытекает тождество $f(x,y,z)=0$.

3.5. Тождества g, h

Введём две вспомогательные функции:

$$
\begin{aligned}
g(x,y,z,t) &:= 4\eta(x,y,z,t) + \xi(x,y,z)(R_t^+ + R_t^-), \\
h(x,y,z,t) &:= 4\psi(x,y,z)R_t^+ + \xi(x,y,z)(3R_t^+ - R_t^-).
\end{aligned}
$$

Лемма 9. *Функции g и h являются тождествами алгебры $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Положим $v = x\circ y$, $w=[x,y]$. Имеем

$$
\begin{aligned}
g(x,y,z,t) &:= 4\eta(x,y,z,t) + \xi(x,y,z)(R_t^+ + R_t^-) = \\
&= 4[(x\circ y)\circ z, t] + 4([x,y]\circ z)\circ t + [x\circ y, z]\circ t -
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-([x,y]\circ z)\circ t-\big[[x,y],z\big]\circ t-3\big((x\circ y)\circ z\big)\circ t+\\
&+\big[[x\circ y,z],t\big]-\big[[x,y]\circ z,t\big]-\Big[\big[[x,y],z\big],t\Big]-3[(x\circ y)\circ z,t]=\\
&=4[v\circ z,t]+4(w\circ z)\circ t+[v,z]\circ t-(w\circ z)\circ t-[w,z]\circ t-3(v\circ z)\circ t+\\
&+\big[[v,z],t\big]-[w\circ z,t]-\big[[w,z],t\big]-3[v\circ z,t]=\\
&=[v\circ z,t]+3(w\circ z)\circ t+[v,z]\circ t-[w,z]\circ t-3(v\circ z)\circ t+\\
&+\big[[v,z],t\big]-[w\circ z,t]-\big[[w,z],t\big]=\\
&=[v\circ z,t]+[v,z]\circ t-3(v\circ z)\circ t+\big[[v,z],t\big]+3(w\circ z)\circ t-\\
&-[w,z]\circ t-[w\circ z,t]-\big[[w,z],t\big]=\\
&=[z\circ v,t]-[z,v]\circ t-\big[[z,v],t\big]-3(z\circ v)\circ t-\\
&-\Big([z\circ w,t]-[z,w]\circ t-\big[[z,w],t\big]-3(z\circ w)\circ t\Big)=\\
&=\xi(z,v,t)-\xi(z,w,t)=0
\end{aligned}
$$

в силу леммы 8. Аналогично на основании равенств

$$[z\circ v,t]=[z,v]\circ t+\big[[z,v],t\big]+3(z\circ v)\circ t, \tag{21}$$

$$[z\circ w,t]=[z,w]\circ t+\big[[z,w],t\big]+3(z\circ w)\circ t, \tag{22}$$

вытекающих из соотношений $\xi(z,v,t)=\xi(z,w,t)=0$ (лемма 8), получаем

$$
\begin{aligned}
&h(x,y,z,t):=4\psi(x,y,z)R_t^{+}+\xi(x,y,z)(3R_t^{+}-R_t^{-})=\\
&=8\big[[x,y],z\big]\circ t-8\big[[x,z],y\big]\circ t-4\mathrm{J}(x,y,z)\circ t+\\
&+3[x\circ y,z]\circ t-3\big([x,y]\circ z\big)\circ t-3\big[[x,y],z\big]\circ t-9\big((x\circ y)\circ z\big)\circ t-\\
&-\big[[x\circ y,z],t\big]+\big[[x,y]\circ z,t\big]+\Big[\big[[x,y],z\big],t\Big]+3[(x\circ y)\circ z,t]=\\
&=4\big[[x,y],z\big]\circ t-4\big[[x,z],y\big]\circ t-4\big[[y,z],x\big]\circ t+\\
&+3[x\circ y,z]\circ t-3([x,y]\circ z)\circ t-3\big[[x,y],z\big]\circ t-9\big((x\circ y)\circ z\big)\circ t-\\
&-\big[[x\circ y,z],t\big]+\big[[x,y]\circ z,t\big]+\Big[\big[[x,y],z\big],t\Big]+3[(x\circ y)\circ z,t]=\\
&=4[w,z]\circ t-4\big[[x,z],y\big]\circ t-4\big[[y,z],x\big]\circ t+3[v,z]\circ t-3(w\circ z)\circ t-\\
&-3[w,z]\circ t-9(v\circ z)\circ t-\big[[v,z],t\big]+[w\circ z,t]+\big[[w,z],t\big]+3[v\circ z,t]=:\rho.
\end{aligned}
$$

На основании тождества (21) имеем

$$
\begin{aligned}
&3[v,z]\circ t-9(v\circ z)\circ t-\big[[v,z],t\big]+3[v\circ z,t]=\\
&=3[v,z]\circ t-9(v\circ z)\circ t-\big[[v,z],t\big]+3[z,v]\circ t+3\big[[z,v],t\big]+9(z\circ v)\circ t=\\
&=-\big[[v,z],t\big]+3\big[[z,v],t\big]=-4\big[[v,z],t\big].
\end{aligned}
$$

В силу (22)

$$
\begin{aligned}
&4[w,z]\circ t-3(w\circ z)\circ t-3[w,z]\circ t+[w\circ z,t]+\big[[w,z],t\big]=\\
&=[w,z]\circ t-3(w\circ z)\circ t+[w\circ z,t]+\big[[w,z],t\big]=\\
&=[w,z]\circ t-3(w\circ z)\circ t+[z,w]\circ t+\big[[z,w],t\big]+3(z\circ w)\circ t+\big[[w,z],t\big]=0,
\end{aligned}
$$

следовательно,

$$\rho = -4\big[[x,z],y\big]\circ t - 4\big[[y,z],x\big]\circ t - 4\big[[v,z],t\big].$$

Докажем теперь, что $\rho = 0$. Для этого достаточно проверить, что

$$\big[[x^2,z],t\big] + \big[[z,x],x\big]\circ t = 0. \tag{23}$$

Преобразуем левую часть, используя (15) и линеаризацию $[x^2,x]=0$:

$$\begin{aligned}&\big[[x^2,z],t\big] + \big[[z,x],x\big]\circ t = \big[[x,z]\circ x + 2(x,x,z),t\big] + \big[[z,x],x\big]\circ t = \\ &\quad= \big[[x,z]\circ x,t\big] + 2[(x,x,z),t] + \big[[z,x],x\big]\circ t = \\ &\quad= -\big[[x,z]\circ t,x\big] + 2[(x,x,z),t] + \big[[z,x],x\big]\circ t = \\ &\quad= -\big[[x,z],x\big]\circ t - 2([x,z],t,x) - 2(t,[x,z],x) + 2[(x,x,z),t] + \big[[z,x],x\big]\circ t = \\ &\quad= -2([x,z],t,x) - 2(t,[x,z],x) + 2[(x,x,z),t].\end{aligned}$$

Итак, осталось проверить справедливость тождества

$$([x,z],t,x) + (t,[x,z],x) = [(x,x,z),t]. \tag{24}$$

В силу тождества Клейнфелда (3) имеем

$$([x,z],t,x) + (x,z,[t,x]) - (z,x,[t,x]) = [x,(z,t,x)] + [(x,t,x),z].$$

Отсюда на основании кососимметричности операторных слов и квадратичной нильпотентности получаем

$$([x,z],t,x) - 2(z,x,[t,x]) = [x,(z,t,x)] + [(x,t,x),z] = [x,(z,t,x)] + [(x,x,z),t],$$

т. е. верно тождество

$$([x,z],t,x) - 2(z,x,[t,x]) = [x,(z,t,x)] + [(x,x,z),t]. \tag{25}$$

Докажем теперь тождество

$$(z,x,[t,x]) = [x,(z,x,t)]. \tag{26}$$

На основании правого тождества Муфанг (2), кососимметричности операторных слов и тождества метабелевости имеем

$$(z,x,[t,x]) + [x,(z,t,x)] = (z,x,tx) + x(z,t,x) = -z\big(x(tx)\big) - x\big(z(tx)\big) = 0,$$

откуда по правой альтернативности и вытекает тождество (25). Наконец, из тождеств (25) и (26) легко вытекает тождество (24), что и завершает доказательство. □

4. Базис тождеств алгебры $\tilde{\mathrm{G}}$

Всюду в этом разделе $\mathcal{A}$ обозначает свободную алгебру многообразия, заданного системой тождеств T_1—T_5. При изучении аддитивной структуры алгебры $\mathcal{A}$ ввиду леммы 5 можно ограничиться рассмотрением пространства $\mathcal{P}_n(\mathcal{A})$ полилинейных многочленов над множеством $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

4.1. Регулярные слова

Регулярные слова — это элементы следующего вида:

1) $(x_1 \circ x_i)R^{+^n}R^{-^m}$,
2) $[x_1, x_i]R^{+^n}R^{-^m}$ $(n + m = d - 2)$,
3) $(x_1 \circ [x_2, x_3])R^{+^n}R^{-^m}$,
4) $\big[x_1, [x_2, x_3]\big]R^{+^n}R^{-^m}$ $(n + m = d - 3)$.

Лемма 10. *Пространство $\mathcal{P}_d(\mathcal{A})$ $(d \geqslant 3)$ линейно порождается регулярными словами.*

Доказательство представим в виде последовательности пунктов.

1. Всякий одночлен длины 3 от переменных x_1, x_2, x_3 является линейной комбинацией элементов вида

$$\text{а) } (a \circ b)c, \quad \text{б) } [a \circ b, c], \quad \text{в) } [a, b] \circ c, \quad \text{г) } \big[[a, b], c\big].$$

В силу линеаризации тождеств $x^3 = 0$, $[x^2, x] = 0$ элементы вида а) и б) представимы в виде линейной комбинации регулярных слов типа 1). Элементы типа в) представимы в виде линейной комбинации регулярных слов типа 2) и 3). Наконец, элементы типа г) являются линейными комбинациями регулярных слов типа 2) и 4).

2. Рассмотрим теперь произвольный полилинейный одночлен w от x_1, x_2, x_3, x_4. Ввиду утверждения а) леммы 6 его можно записать в виде линейной комбинации элементов вида $w = vU_c$, где v — одночлен длины 3, содержащий переменную x_1, $U \in \{R^+, R^-\}$. По ранее доказанному можно считать, что w совпадает с одним из многочленов вида

$$\text{а) } (x_1 \circ a)U_bU_c, \quad \text{б) } [x_1, a]U_bU_c, \quad \text{в) } (x_1 \circ [a, b])U_c, \quad \text{г) } \big[x_1, [a, b]\big]U_c.$$

По утверждению а) леммы 6 многочлены вида а) и б) являются линейными комбинациями регулярных слов типа 1) и 2).

В силу утверждения б) леммы 6 справедливо тождество

$$(x_1 \circ [a, b])U_c + (x_1 \circ [a, c])U_b + (a \circ [x_1, b])U_c + (a \circ [x_1, c])U_b = 0.$$

По модулю линейных комбинаций регулярных слов типа 2) многочлен $(x_1 \circ [a, b])U_c$ является кососимметрической функцией по переменным a, b, c, значит, он пропорционален регулярному слову типа 3).

Многочлен вида г) рассматривается аналогично предыдущему.

3. Проведём теперь индукцию по степени d полилинейного многочлена. Основанием индукции являются предыдущие пункты. Допустим, что для полилинейных многочленов степени меньше d утверждение доказано, и рассмотрим полилинейный многочлен w степени $d \geqslant 5$. Ввиду кососимметричности операторных слов можно считать, что $w = vU_c$, где v — одночлен длины $d - 1$, содержащий переменную x_1. По предположению индукции одночлен v представи́м в виде линейной комбинации регулярных слов $v = \sum \alpha_i v_i$. Без ограничения общности можно считать, что многочлен v имеет вид 1), 2), 3) или 4). Если

v имеет вид 1) или 2), то на основании утверждения а) леммы 6 элемент vU_c с точностью до знака совпадает с регулярным словом типа 1) или 2). Если же v имеет вид 3) или 4), то на основании леммы 6 и пункта 2 можно считать, что многочлен vU_c по модулю пространства, порождённого регулярными словами типа 1) и 2), является кососимметрической функцией по всем переменным, кроме x_1. Но тогда он представи́м в виде линейной комбинации регулярных слов типа 1)—4). □

Поскольку регулярные слова линейно зависимы, введём следующее определение.

Определение. Многочлены из пространства $\mathcal{P}_d(\mathcal{A})$ $(d \geqslant 4)$ вида

а) $\mathrm{J}(x_1, x_2, x_3)R^{+^n}R^{-^m}$,
б) $\varphi(x_1, x_2, x_3)R^{+^n}R^{-^m}$,
в) $\psi(x_1, x_2, x_3)R^{+^n}R^{-^m}$,
г) $\xi(x_1, x_2, x_3)R^{+^n}R^{-^m}$ $(n + m = d - 3)$,
д) $\eta(x_1, x_2, x_3, x_4)R^{+^n}R^{-^m}$ $(n + m = d - 4)$

назовём *регулярными f-словами*, где f — одна из функций J, φ, ψ, ξ, η.

Лемма 11. *Линейное пространство $\mathcal{P}_d(\mathcal{A})$ $(d \geqslant 3)$ представимо в виде $\mathcal{P}_d(\mathcal{A}) = V_{12} + \Psi$, где V_{12} — подпространство, порождённое регулярными словами типа* 1) *и* 2), *Ψ — подпространство, порождённое регулярными f-словами, где f — одна из функций φ, ψ, ξ, η.*

Доказательство. Из определения якобиана следует, что регулярные слова типа 4) линейно выражаются через регулярные слова типа 2) и регулярные J-слова. Из определения функции

$$\psi(x_1, y, z) = 2\big([[x_1, y], z] - [[x_1, z], y]\big) - \mathrm{J}(x_1, y, z)$$

вытекает, что регулярное J-слово является линейной комбинацией регулярных слов типа 2) и регулярных ψ-слов, значит, регулярные слова типа 4) содержатся в пространстве $V_{12} + \Psi$. Точно так же из равенства

$$\varphi(x_1, y, z) = 2([x_1 \circ y, z] - [x_1 \circ z, y]) - 6\big((x_1 \circ y) \circ z - (x_1 \circ z) \circ y\big) - 2x_1 \circ [y, z] - \mathrm{J}(x_1, y, z)$$

следует, что регулярное слово типа 3) является линейной комбинацией регулярных слов типа 1), регулярных φ-слов и J-слов, значит, регулярные слова типа 3) содержатся в пространстве $V_{12} + \Psi$. □

Лемма 12. *Линейное пространство $\mathcal{P}_d(\mathcal{A})$ $(d \geqslant 3)$ линейно порождается элементами вида*

а) $(x_1 \circ x_i)R^{+^n}R^{-^m}$ $(n + m = d - 2)$,
б) $[x_1, x_i]R^{-(d-2)}$,
в) $\psi(x_1, x_2, x_3)R^{-(d-3)}$,
г) $\xi(x_1, x_2, x_3)R^{+^r}R^{-^t}$ $(r + t = d - 3)$.

Доказательство. Пусть $W = V_1 + \Psi$, где V_1 — пространство, порождённое регулярными словами типа 1), Ψ — пространство, определённое в лемме 11. Докажем сначала, что по модулю W всякое регулярное слово типа 2) является линейной комбинацией регулярных слов типа 2′): $[x_1, x_i]R^{-(d-2)}$.

Из определения функций $\eta(x, y, z, t)$ и $\xi(x, y, z)$ следует, что

$$([x_1, y] \circ z) \circ t = \eta(x_1, y, z, t) - [(x_1 \circ y) \circ z, t],$$
$$[x_1, y] \circ z = [x_1 \circ y, z] - \big[[x_1, y], z\big] - 3(x_1 \circ y) \circ z - \xi(x_1, y, z),$$

значит, по модулю пространства W имеем

$$([x_1, y] \circ z) \circ t \equiv 0, \quad [x_1, y] \circ z \equiv -\big[[x_1, y], z\big].$$

Отсюда получаем

$$[x_1, x_i]R^{+2}R^{+(n-2)}R^{-m} \equiv 0, \quad [x_1, x_i]R^{+}_z R^{-(d-3)} \equiv -[x_1, x_i]R^{-}_z R^{-(d-3)},$$

т. е. в силу леммы 11 пространство $\mathcal{P}_d(\mathcal{A})$ по модулю W линейно порождается регулярными словами типа 2′).

Поскольку f, g, h — тождества, то φ-слова и η-слова линейно выражаются через ψ-слова и ξ-слова, а всякое слово вида ψR^+ линейно выражается через ξ-слова. Следовательно, пространство $\mathcal{P}_d(\mathcal{A})$ линейно порождается элементами вида а)—г). □

4.2. Базисные слова

Определение. Многочлены из пространства $\mathcal{P}_d(\mathcal{A})$ ($d \geqslant 3$) вида

1) $(x_1 \circ x_i)R^{+n}R^{-m}$ ($i \geqslant 4$, $n + m = d - 2$),

   1а) $x_1\big(R^+(x_2) \circ R^+(x_3)\big)R^{+(n-1)}R^{-m}$,

   1б) $x_1[R^+(x_2), R^+(x_3)]R^{+(n-1)}R^{-m}$,

   1в) $x_1\big(R^+(x_2)R^-(x_3) + R^+(x_3)R^-(x_2)\big)R^{-(d-3)}$,

   1г) $x_1\big(R^+(x_2)R^-(x_3) - R^+(x_3)R^-(x_2)\big)R^{-(d-3)}$;

2) $[x_1, x_i]R^{-(d-2)}$ ($i \geqslant 4$),

   2а) $x_1\big(R^-(x_2) \circ R^-(x_3)\big)R^{-(d-3)}$,

   2б) $x_1[R^-(x_2), R^-(x_3)]R^{-(d-3)}$;

3) $\psi(x_1, x_2, x_3)R^{-(d-3)}$;

4) $\xi(x_1, x_2, x_3)R^{+n}R^{-m}$ ($n + m = d - 3$)

назовём *базисными словами* типа 1)—4).

Лемма 13. *Линейное пространство $\mathcal{P}_d(\mathcal{A})$ ($d \geqslant 3$) линейно порождается базисными словами.*

Доказательство. Учитывая лемму 12 и представляя произведение операторов $2U_aV_b$ в виде

$$2U_aV_b = (U_aV_b + U_bV_a) + (U_aV_b - U_bV_a),$$

где $U, V \in \{R^+, R^-\}$, легко понять, что для индексов $i, j = 2, 3$ справедливы следующие представления: многочлен $(x_1 \circ x_i)R^+(x_j){R^+}^{(n-1)}{R^-}^m$ линейно выражается через базисные слова типа 1а) и 1б); $(x_1 \circ x_i)R^-(x_j){R^-}^{(d-3)}$ линейно выражается через базисные слова типа 1в) и 1г); $[x_1, x_i]R^-(x_j){R^-}^{(d-3)}$ линейно выражается через базисные слова типа 2а) и 2б). □

4.3. Линейная независимость базисных слов

Лемма 14. *Базисные слова линейно независимы на алгебре* $\tilde{\mathrm{G}}$.

Доказательство. Допустим, что нетривиальная линейная комбинация базисных слов равна нулю. Если в этой комбинации участвуют слова типа 1) или 2), то, полагая в этом тождестве $x_i = w$ для фиксированного числа $i \geqslant 4$ (здесь и далее в лемме $w \in \tilde{\mathrm{G}}^2$), получим нетривиальную линейную зависимость операторов вида ${R^+}^n{R^-}^m$, что невозможно по лемме 4.

Итак, пусть существует нетривиальная линейная комбинации базисных слов типа 1а)—1г), 2а), 2б), 3) и 4). Заметим, что каждое из этих базисных слов является либо симметрической, либо кососимметрической функцией относительно x_2, x_3, значит, достаточно рассмотреть два случая: в линейную комбинацию входят либо только симметрические, либо только кососимметрические функции по x_2, x_3.

Далее считаем, что $n \geqslant 1$, $n+m = d-2$, $0 \leqslant q \leqslant 1$, $p+q = d-3$, $r+t = d-3$.

1. Симметрический случай:

$$\sum_{n\geqslant 1} \alpha_n x_1\big(R^+(x_2) \circ R^+(x_3)\big){R^+}^{(n-1)}{R^-}^m + \\ + \beta x_1\big(R^+(x_2)R^-(x_3) + R^+(x_3)R^-(x_2)\big){R^-}^{(d-3)} + \\ + \gamma x_1\big(R^-(x_2) \circ R^-(x_3)\big){R^-}^{(d-3)} = 0.$$

Полагая в этом тождестве $x_3 = w$, получим нетривиальную линейную зависимость операторов вида ${R^+}^n{R^-}^m$

$$w\Bigg(\sum_{n\geqslant 1} \alpha_n R^+(x_1)R^+(x_2){R^+}^{(n-1)}{R^-}^m + \beta R^+(x_1)R^-(x_2){R^-}^{(d-3)} - \\ - \gamma R^-(x_1)R^-(x_2){R^-}^{(d-3)}\Bigg) = 0,$$

что невозможно по лемме 4.

2. Кососимметрический случай:

$$\begin{aligned}&\sum_{n\geqslant 1}\alpha_n x_1[R^+(x_2),R^+(x_3)]R^{+(n-1)}R^{-m}+\\&\quad+\beta x_1\big(R^+(x_2)R^-(x_3)-R^+(x_3)R^-(x_2)\big)R^{-(d-3)}+\\&\quad+\gamma x_1\big[R^-(x_2),R^-(x_3)\big]R^{-(d-3)}+\\&\quad+\delta\psi(x_1,x_2,x_3)R^{-(d-3)}+\sum\mu_r\xi(x_1,x_2,x_3)R^{+r}R^{-t}=0.\end{aligned}$$

Полагая вновь $x_3:=w$, получим в силу леммы 8, что

$$\begin{aligned}0&=\sum_{n\geqslant 1}\alpha_n x_1[R^+(x_2),R^+(w)]R^{+(n-1)}R^{-m}+\\&+\beta x_1\big(R^+(x_2)R^-(w)-R^+(w)R^-(x_2)\big)R^{-(d-3)}+\\&+\gamma x_1\big[R^-(x_2),R^-(w)\big]R^{-(d-3)}=\\&=w\Big(-\sum_{n\geqslant 1}\alpha_n R^+(x_1)R^+(x_2)R^{+(n-1)}R^{-m}-\beta R^+(x_1)R^-(x_2)R^{-(d-3)}+\\&+\gamma R^-(x_1)R^-(x_2)R^{-(d-3)}\Big)=\\&=w\Big(-\sum_{n\geqslant 1}\alpha_n R^{+(n+1)}R^{-m}-\beta R^+R^{-(d-2)}+\gamma R^{-(d-1)}\Big).\end{aligned}$$

Отсюда, как и прежде, получаем равенство нулю скаляров α_n, β, γ. Итак, если и возможна линейная зависимость, то только между базисными словами типа 3) и 4):

$$\delta\psi(x_1,x_2,x_3)R^{-(d-3)}+\sum\mu_r\xi(x_1,x_2,x_3)R^{+r}R^{-t}=0. \tag{27}$$

Из определения функций ψ и ξ на основании леммы 6 и соотношения (10) имеем

$$\begin{aligned}&\psi(w,a,b)=2w[R_a^-,R_b^-]-\mathrm{J}(w,a,b)=4wR_a^-R_b^--2wR_a^-R_b^-=2wR_a^-R_b^-,\\&\xi(w,a,b)=a(R_w^+R_b^-+R_w^-R_b^++R_w^-R_b^--3R_w^+R_b^+)=\\&\quad=wR_a^+R_b^--wR_a^-R_b^+-wR_a^-R_b^--3wR_a^+R_b^+=\\&\quad=w(R^+R^--R^-R^+-R^{-2}-3R^{+2})=w\big((R^+R^--3R^{+2})-R^-R^+-R^{-2}\big)=\\&\quad=w\big((-R^{-2}-R^-R^+)-R^-R^+-R^{-2}\big)=-2w(R^{-2}+R^-R^+)=\\&\quad=-2w(R_a^-R_b^-+R_a^-R_b^+).\end{aligned}$$

Полагая теперь $x_1:=w$ и учитывая предыдущие соотношения, получаем

$$\delta R^{-(d-1)}-\sum\mu_r(R^{-2}+R^-R^+)R^{+r}R^{-t}=0. \tag{28}$$

Учитывая соотношение (10), получаем

$$\delta R^{-(d-1)}-\sum\mu_r(-R^+R^-+3R^{+2})R^{+r}R^{-t}=0.$$

По лемме 4 в алгебре $\tilde{\mathrm{G}}^*$ операторное слово $\delta R^{-(d-1)}$ представимо в виде линейной комбинации слов вида $R^{+(r+1)}R^{-t}$. Но это возможно ввиду леммы 4 только при $\delta = 0$.

Тем самым равенство (28) принимает вид

$$\sum \mu_r (R^{-2} + R^- R^+) R^{+r} R^{-t} = 0. \tag{29}$$

В силу (10)

$$\sum \mu_r (-R^+ R^- + 3R^{+2}) R^{+r} R^{-t} = 0.$$

В левой части все операторы, кроме первого $-\mu_0 R^+ R^{-(d-2)}$, являются линейной комбинацией операторных слов вида $R^{+r}R^{-t}$ ($r \geqslant 2$), значит, $\mu_0 = 0$ и равенство (29) принимает вид

$$\sum_{r\geqslant 1} \mu_r (R^{-2} + R^- R^+) R^{+r} R^{-t} = 0.$$

Снова в левой части все операторы, кроме первого $\mu_1 R^+ R^{-(d-2)}$, являются линейной комбинацией операторных слов вида $R^{+r}R^{-t}$ ($r \geqslant 2$), значит, $\mu_1 = 0$, и на основании равенства (27) имеем

$$0 = \sum_{r\geqslant 2} \mu_r \xi(x_1, x_2, x_3) R^{+r} R^{-t} = \left(\sum_{r\geqslant 0} \mu_{r+2} \xi(x_1, x_2, x_3) R^{+r} R^{-t} \right) R^{+2}.$$

Учитывая, что ненулевой элемент алгебры Грассмана не может аннулироваться всеми операторами R^{+2}, получаем, что

$$\sum_{r\geqslant 0} \mu_{r+2} \xi(x_1, x_2, x_3) R^{+r} R^{-t} = 0.$$

Но тогда по доказанному $\mu_2 = \mu_3 = 0$. Аналогично проверяется равенство нулю остальных скаляров $\mu_r = 0$. □

Из лемм 13 и 14 немедленно вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Система тождеств T_1—T_5 является базисом тождеств правоальтернативной метабелевой алгебры Грассмана.*

5. Топологический ранг многообразия $\mathrm{var}(\tilde{\mathrm{G}})$

5.1. Достаточное условие конечности топологического ранга

Определение топологического ранга многообразия и необходимые обозначения можно найти в [6, 7].

Лемма 15. *Пусть n_0 — достаточно большое натуральное число. Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_r$ — произвольная возрастающая последовательность натуральных* *чисел, такая что $n_{i+1} > 2n_i$. Допустим, что система $S = \{f_1, f_2, \ldots, f_r\}$ многочленов свободной алгебры $\mathcal{F}[\mathfrak{M}]$ многообразия $\mathfrak{M}$ удовлетворяет следующим условиям*:

а) f_i $(i = 2, \ldots, r)$ *не является следствием предыдущих многочленов*;

б) $\deg f_i \geqslant n_i$ $(i = 1, \ldots, r)$;

в) *начиная с некоторого числа $d = d(n_0)$ всякий многочлен f степени не меньше d является следствием системы S.*

Тогда $\mathrm{r}_t(\mathfrak{M})$ *не превосходит* $r + 1$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{r}_t(\mathfrak{M}) > r + 1$. Положим $E = \wp(\mathfrak{M})$, $E_i = E^{(i)}$. Значит, $E_{r+1} \neq \varnothing$. Тогда найдётся точка $\mathfrak{M}_1 \in E_{r+1} = (E_r)'$. Следовательно, всякая её проколотая окрестность $\mathring{U}_n(\mathfrak{M}_1)$ содержит точку $\mathfrak{M}_2$ из E_r. Выберем число $n_1 > 2n_0$. Тогда найдётся такая точка $\mathfrak{M}_2 \in \mathring{U}_{n_1}(\mathfrak{M}_1)$, что $\mathrm{T}(\mathfrak{M}_2) = \mathrm{T}(\mathfrak{M}_1) + \mathrm{T}(S_1)$, причём S_1 содержит тождество f_1 степени не ниже n_1, не являющееся следствием тождеств из $\mathrm{T}(\mathfrak{M}_1)$, т. е. $\deg f_1 \geqslant n_1$, $f_1 \notin \mathrm{T}(\mathfrak{M}_1)$. По индукции можно считать, что указаны натуральные числа $n_1 < n_2 < \ldots < n_r$ и многочлены $f_1, f_2, \ldots, f_r$, содержащиеся в $\mathrm{T}(\mathfrak{M}_{r+1})$, и выполнены условия а) и б), где $\mathfrak{M}_{r+1} \in E_1 = E'$.

Таким образом, для любого $d > n_r$ найдётся такая точка $\mathfrak{M}_{r+2} \in E$, что $\mathfrak{M}_{r+2} \in \mathring{U}_d(\mathfrak{M}_{r+1})$, $\mathrm{T}(\mathfrak{M}_{r+2}) = \mathrm{T}(\mathfrak{M}_{r+1}) + \mathrm{T}(S_{r+1})$, причём S_{r+1} содержит тождество f_{r+1} степени не ниже d, не являющееся следствием тождеств $f_1, f_2, \ldots, f_r$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. □

5.2. Структура тождеств, содержащих базисные слова типа 1) и 2)

Всюду в этом разделе $\mathfrak{M}$ — собственное подмногообразие в $\mathrm{var}(\tilde{\mathrm{G}})$, $\mathcal{A}$ — свободная алгебра многообразия $\mathfrak{M}$. Согласно сказанному выше, базисные слова типа 1)—4) линейно порождают пространство $\mathcal{P}_d(\mathcal{A})$. Для удобства перенумеруем базисные слова следующим образом:

1) $(x_1 \circ x_i)R^{+n}R^{-m}$ $(i \geqslant 4,\ n + m = d - 2)$,
2) $[x_1, x_i]R^{-(d-2)}$ $(i \geqslant 4)$,
3_1) $x_1\big(R^+(x_2) \circ R^+(x_3)\big)R^{+n}R^{-m}$,
3_2) $x_1\big(R^+(x_2)R^-(x_3) + R^+(x_3)R^-(x_2)\big)R^{-(d-3)}$,
3_3) $x_1\big(R^-(x_2) \circ R^-(x_3)\big)R^{-(d-3)}$,
4_1) $x_1[R^+(x_2), R^+(x_3)]R^{+n}R^{-m}$ $(n + m = d - 3)$,
4_2) $x_1\big(R^+(x_2)R^-(x_3) - R^+(x_3)R^-(x_2)\big)R^{-(d-3)}$,
4_3) $x_1[R^-(x_2), R^-(x_3)]R^{-(d-3)}$,
5) $\psi(x_1, x_2, x_3)R^{-(d-3)}$,
6) $\xi(x_1, x_2, x_3)R^{+n}R^{-m}$ $(n + m = d - 3)$.

Элементы вида 1)—6) назовём *правильными словами*. Будем писать $a \equiv b$, если многочлен $a-b$ линейно выражается через правильные слова вида 3)—6). Кроме того, будем говорить, что многочлен f содержит правильное слово v, если f представим в виде линейной комбинации правильных слов v_i с ненулевыми коэффициентами и среди слов v_i встречается слово v.

Лемма 16. *Пусть многочлен f содержит правильные слова типа* 2). *Тогда существует нетривиальное следствие многочлена f той же степени, которое является линейной комбинацией некоторых правильных слов типа* 1), *входящих в f, и не более двух правильных слов типа* 2).

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что многочлен f имеет вид

$$f \equiv \sum_{n+m=d-2} \sum_{i\geqslant 4} \alpha^i_{n,m}(x_1 \circ x_i) R^{+^n} R^{-^m} + \sum_{i\geqslant 4} \beta_i [x_1, x_i] R^{-^{(d-2)}}, \quad \text{где} \quad \beta_4 \neq 0.$$

Положим $x_4 = x_5 = a$. Тогда правильные слова типа 3)—6) при этой специализации обращаются в нуль. На основании леммы 6 получаем, что

$$(\beta_4+\beta_5)\bigl[[x_1,a],a\bigr] R^{-^{(d-3)}} - \sum_n (\alpha^4_{n,m}+\alpha^5_{n,m}) a^2 R^{+^n} R^{-^m} \in (f)^{\mathrm{T}}.$$

После линеаризации последнего соотношения имеем

$$(\beta_4+\beta_5)\bigl(\bigl[[x_1,x_4],x_5\bigr] + \bigl[[x_1,x_5],x_5\bigr]\bigr) R^{-^{(d-3)}} + \\ + \sum_n (\alpha^4_{n,m}+\alpha^5_{n,m})\bigl(\varepsilon + (4,5)\bigr)(x_1 \circ x_4) R^{+^n} R^{-^m} \in (f)^{\mathrm{T}}.$$

Если $\beta_4+\beta_5$ отлично от нуля, то лемма доказана. Тогда можно считать, что $\beta_4+\beta_5 = 0$, и аналогично получаем, что $\beta_4+\beta_6 = 0$, $\beta_5+\beta_6 = 0$. Сложив полученные равенства, имеем $\beta_4+\beta_5+\beta_6 = 0$, откуда $\beta_4 = 0$ — противоречие. □

Лемма 17. *Пусть многочлен f является линейной комбинацией правильных слов, содержащей хотя бы одно правильное слово типа* 1) *и не содержащей правильных слов типа* 2). *Тогда f имеет нетривиальное следствие*

$$\sum_n \alpha^4_{n,m}(x_1 \circ x_4) R^{+^n} R^{-^m}$$

той же степени и с теми же наборами показателей операторов $R^{+^n} R^{-^m}$, которые входили в правильные слова типа 1) *в исходном представлении многочлена f.*

Доказательство. По условию многочлен f имеет вид

$$f \equiv \sum_{i\geqslant 4} \sum_{n+m=d-2} \alpha^i_{n,m}(x_1 \circ x_i) R^{+^n} R^{-^m}. \tag{30}$$

Пусть $UVW\rho_n = R^{+^n} R^{-^m}$. Тогда, полагая $x_4 = x_5 = a$, получаем

$$\sum_n (\alpha^4_{n,m}+\alpha^5_{n,m})(x_1 \circ a) U_{x_2} V_{x_3} W_a \rho_n \in (f)^{\mathrm{T}},$$

откуда

$$\sum_n (\alpha^4_{n,m} + \alpha^5_{n,m}) a^2 R^{+^n} R^{-^m} \in (f)^{\mathrm{T}}$$

и после линеаризации

$$\sum_n (\alpha^4_{n,m} + \alpha^5_{n,m})(x_1 \circ x_4) R^{+^n} R^{-^m} \in (f)^{\mathrm{T}}.$$

Допустим теперь, что все числа вида $\alpha^4_{n,m} + \alpha^5_{n,m}$, входящие в последнее соотношение, равны 0. Тогда соотношение (30) не может содержать более двух ненулевых скалярных наборов $\alpha^i_{n,m}$, значит, можно считать, что

$$f \equiv \sum_n \alpha^4_{n,m}(x_1 \circ x_4) R^{+^n} R^{-^m} + \sum_n \alpha^5_{n,m}(x_1 \circ x_5) R^{+^n} R^{-^m}.$$

Полагая теперь $x_4 = x_6 = a$ и рассуждая аналогично предыдущему, получаем

$$\sum_n \alpha^4_{n,m}(x_1 \circ x_4) R^{+^n} R^{-^m} \in (f)^{\mathrm{T}}. \qquad \square$$

5.3. Доказательство основной теоремы

Многообразие $\mathfrak{M}$ назовём (p,q)-*выделенным*, если в алгебре $\mathcal{A}$ выполнено тождество

$$(xy)\Big(R^{+^p} R^{-^q} - \sum_{(n,m)} \alpha_{n,m} R^{+^n} R^{-^m}\Big) = 0,$$

где суммирование ведётся по парам (n,m), в которых $n < p$.

Если выполнено это тождество, то будем говорить, что пара (p,q) линейно выражается через меньшие пары (n,m). В этом случае пространство $\mathcal{P}_d(\mathcal{A})$, где $d \geqslant p+q+2$, линейно порождается правильными словами вида $vR^{+^n} R^{-^m}$, где $v \in \mathcal{A}^2$ и показатели (n,m) удовлетворяют условию: либо $n < p$, либо $m < q$. Таких правильных слов не более чем $p+q$.

Из доказательства леммы 14 получаем, что всякое собственное подмногообразие $\mathrm{var}(\tilde{\mathrm{G}})$ является выделенным. Тогда основная теорема вытекает из следующего результата.

Теорема 3. *Топологический ранг* (m_1, m_2)*-выделенного многообразия не превосходит числа* $6(m_1+m_2)+13$.

Доказательство. Пусть $n_0 = m_1 + m_2$. В алгебре $\mathcal{A} = \mathcal{F}_{\mathfrak{M}}[X]$ рассмотрим произвольный набор F многочленов $f_1, f_2, \ldots, f_r$, $n_i = \deg f_i$, считая, что ни один из них не является следствием предыдущих и $n_{i+1} > 2n_i$, $i = 0, 1, \ldots$. Без ограничения общности можно считать, что каждый из многочленов f_i системы F полилинеен и зависит от переменных $x_1, \ldots, x_{n_i}$. В силу леммы 15 достаточно проверить, что $r \leqslant 6n_0 + 12$.

На основании леммы 16 можно считать, что каждый из многочленов f_i содержит не более двух правильных слов типа 2). Тогда с помощью элементарных преобразований слова этого типа можно исключить из всех тождеств системы F, за исключением быть может двух тождеств. Значит, без ограничения общности можем считать, что система F содержит не менее $6n_0+10$ многочленов. Учитывая лемму 17, можно предположить, что все тождества системы F удовлетворяют следующим условиям:

а) каждый многочлен f_i либо является линейной комбинацией правильных слов типа 1), либо линейной комбинацией слов типа 3)—6);

б) если многочлен f_i является линейной комбинацией слов типа 3)—6), то он либо симметрический, либо кососимметрический по x_2, x_3.

1. Допустим сначала, что система F содержит только тождества, являющиеся линейными комбинациями правильных слов типа 3)—6).

1a. Если они являются симметрическими функциями по переменным x_2, x_3, то каждый из этих многочленов имеет вид

$$f_i=\sum\alpha_{n,m}vR^{+^n}R^{-^m}+(\beta_1w_1+\beta_2w_2)R^{-^{(d-2)}}, \tag{31}$$

где

$$v=x_1\bigl(R^+(x_2)\circ R^+(x_3)\bigr),$$
$$w_1=x_1\bigl(R^+(x_2)R^-(x_3)+R^+(x_3)R^-(x_2)\bigr),\quad w_2=x_1\bigl(R^-(x_2)\circ R^-(x_3)\bigr).$$

Докажем, что тождеств вида (31) в системе F не более чем n_0+2.

Умножая тождества (31) на подходящие степени оператора R^- и выполняя элементарные преобразования, можно уничтожить слагаемые вида $(\beta_1w_1+\beta_2w_2)R^{-^{(d-2)}}$ во всех многочленах системы F, кроме, быть может, двух. Значит, можно считать, что число многочленов в системе F не менее чем n_0 и каждый из них имеет вид

$$f_i=\sum\alpha_{n,m}vR^{+^n}R^{-^m}. \tag{32}$$

Кроме того, рассматривая некоторый многочлен f_i из системы F, можно рассуждать по модулю T-идеала T_i алгебры $\mathcal{A}$, порождённого многочленами $f_1,\dots,f_i$.

Полагая в (32) $x_2=w\in\mathcal{A}^2$, получим, что

$$(x_1\circ w)R^+(x_3)\sum\alpha_{n,m}R^{+^n}R^{-^m}\in T_i.$$

Поскольку $v=x_1\bigl(R^+(x_2)\circ R^+(x_3)\bigr)\in\mathcal{A}\circ\mathcal{A}^2$, включение

$$\sum_n\alpha_{n,m}vR^{+^n}R^{-^m}\in T_i$$

влечёт включения

$$\sum_n\alpha_{n,m}vR^{+^{(n+1)}}R^{-^m}\in T_i,\quad \sum_n\alpha_{n,m}vR^{+^n}R^{-^{(m+1)}}\in T_i.$$

Обозначим через $\mathcal{P}_i(d)$ линейное подпространство в $\mathcal{A}/T_i$, порождённое правильными словами типа 3) степени d. Учитывая, что многообразие $\mathfrak{M}$ выделенное, получаем, что размерности пространств $\mathcal{P}_i(n_i)$ строго убывают. Поскольку размерность пространства $\mathcal{P}_1(n_1)$ не превосходит n_0, то $\mathcal{P}_r(n_r) = 0$ для $r > n_0$ — противоречие.

1б. Допустим, что система F содержит только многочлены, являющиеся линейными комбинациями правильных слов типа 3)—6), и каждый из них является кососимметрической функцией по x_2, x_3. Значит, каждый из них является линейной комбинацией правильных слов вида 4)—6).

Докажем, что таких тождеств в системе F не более чем $3n_0 + 3$. Исключая из тождеств слова типа 4_2) и 4_3), без ограничения общности можно считать, что в системе F не менее чем $3n_0 + 1$ элементов и каждый из многочленов f_i имеет вид

$$f_i = \sum_n \alpha_n u R^{+^n} R^{-^m} + \sum_n \beta_n v R^{+^n} R^{-^m}, \qquad (33)$$

где $u = x_1[R^+(x_2), R^+(x_3)]$, $v = \xi(x_1, x_2, x_3)$.

Полагая вновь $x_2 = w \in \mathcal{A}^2$, получим в силу леммы 8 и тождества метабелевости

$$\sum \alpha_n w R^{+^{(n+2)}} R^{-^m} \equiv 0 \pmod{T_i}.$$

Рассуждая аналогично случаю 1а, можно считать, что в тождествах вида (33) участвуют только слова вида 6) и таких тождеств не менее чем $2n_0 + 1$. Итак, пусть все тождества системы F имеют вид

$$f_i = \sum_n \beta_n v R^{+^n} R^{-^m}. \qquad (34)$$

Пусть $\mathcal{P}_i(d)$ — линейное подпространство в $\mathcal{P}_d(\mathcal{A}/T_i)$, $d \geqslant n_0 + 2$, порождённое правильными словами типа 6). Напомним, что оно линейно порождается конечным набором элементов $vR^{+^n}R^{-^m}$, причём $n < m_1$ или $m < m_2$. Базисные слова, показатели которых удовлетворяют условию $m < m_2$, назовём *регулярными*; если выполнено условие $n < m_1$, то такие слова назовём *нерегулярными*.

На множестве регулярных слов одной длины введём отношение порядка, считая $vR^{+^n}R^{-^m} < vR^{+^p}R^{-^q}$, если $m < q$.

Ввиду (m_1, m_2)-выделенности многообразия $\mathfrak{M}$ каждый элемент вида $vR^{+^n}R^{-^m}$, где $n + m \geqslant n_0$, $m \geqslant m_2$, представи́м в виде линейной комбинации нерегулярных слов. Обозначим через W подпространство, порождённое всеми нерегулярными словами, и будем рассуждать по модулю W.

Допустим, что в (34) входит хотя бы одно регулярное слово с показателем (s, t). Тогда по модулю W оно может быть представлено в алгебре $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}/T_i$ в виде линейной комбинации меньших регулярных слов. Поскольку R^{+^2} является центральным элементом в алгебре операторов $\mathcal{A}^*$, то регулярное слово с показателем $(s + 2, t)$ представимо в алгебре $\mathcal{A}_i$ по модулю W в виде линейной комбинации меньших регулярных слов, значит, добавление очередного тождества f_{i+1} приводит к уменьшению регулярных базисных слов при условии, что f_i и f_{i+1} имеют степени одной чётности. Тогда система F содержит базис тождеств, состоящий не более чем из $2n_0$ элементов, что противоречит независимости этих тождеств.

2. Допустим теперь, что система F содержит многочлены f_i, являющиеся линейными комбинациями правильных слов типа 1).

Тогда согласно лемме 17 каждый из таких многочленов f_i приводит к наличию соотношения

$$\sum_{n+m=d-2} \alpha_{n,m}(x_1 \circ x_4)R^{+^n}R^{-^m} \in T_i,$$

которое позволяет в более высоких степенях уменьшить число правильных слов типа 1) по модулю идеала T_i. Поскольку число правильных слов указанного типа в выделенном многообразии не превосходит n_0, получаем, что таких многочленов f_i в системе F не может быть больше, чем n_0.

Объединяя теперь случаи 1 и 2, получаем, что система F содержит не более чем $6n_0 + 9$ многочленов. Однако это противоречит первоначальному предположению, что система F содержит не менее $6n_0 + 10$ многочленов. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 3. □

6. О тождествах многообразия, порождённого метабелевой алгеброй Грассмана ранга 2

В этом разделе будет доказано, что многообразие, порождённое алгеброй Грассмана ранга 2, содержит бесконечно базируемые подмногообразия.

6.1. Вспомогательная алгебра

Построим сначала вспомогательную супералгебру $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1$ над полем Φ характеристики, отличной от 2, имеющую следующие базисные элементы:

$$x,\ y;\quad u_i,\ p_i,\ q_i\ (i = 0, 1);\quad v_t\ (t \geqslant 2),\ w_{2t}\ (t \geqslant 2).$$

Элементы с чётными индексами назовём *чётными*, а элементы с нечётными индексами и элементы x, y назовём *нечётными*. Положим

$$U = \mathrm{Esp}\langle x, y\rangle, \qquad V = \mathrm{Esp}\langle u_i, p_i, q_i, v_t, w_{2t}\rangle,$$
$$\mathcal{A}_0 = \mathrm{Esp}\langle u_0, p_0, q_0, v_{2t}, w_{2t}\rangle, \qquad \mathcal{A}_1 = \mathrm{Esp}\langle x, y, u_1, p_1, q_1, v_{2t+1}\rangle,$$

где $\mathrm{Esp}\langle X\rangle$ — линейное пространство, порождённое множеством X.

Определим произведения базисных элементов следующей таблицей:

1) каждое из пространств U и V имеет нулевое умножение,

2)	$x \cdot u_0 = u_1$,	$u_0 \cdot x = -u_1$,	$x \cdot u_1 = u_0$,	$u_1 \cdot x = 0$,
3)	$x \cdot p_0 = p_1$,	$p_0 \cdot x = -p_1$,	$x \cdot p_1 = p_0$,	$p_1 \cdot x = 0$,
4)	$x \cdot q_0 = q_1$,	$q_0 \cdot x = -q_1$,	$x \cdot q_1 = v_2$,	$q_1 \cdot x = 0$,
5)	$x \cdot v_{2t} = v_{2t+1}$,	$v_{2t} \cdot x = -v_{2t+1}$,	$x \cdot v_{2t+1} = v_{2t+2}$,	$v_{2t+1} \cdot x = 0$,
6)	$y \cdot u_0 = p_1$,	$u_0 \cdot y = -p_1$,	$y \cdot u_1 = p_0$,	$u_1 \cdot y = 0$,

7) $y \cdot p_0 = q_1,$ $\quad p_0 \cdot y = -q_1,$ $\quad y \cdot p_1 = q \cdot 0,$ $\quad p_1 \cdot y = 0,$

8) $y \cdot q_0 = 0,$ $\quad q_0 \cdot y = 0,$ $\quad y \cdot q_1 = 0,$ $\quad q_1 \cdot y = 0,$

9) $y \cdot v_{2t} = 0,$ $\quad v_{2t} \cdot y = 0,$ $\quad y \cdot v_{2t+1} = w_{2t+2},$ $\quad v_{2t+1} \cdot y = 0,$

10) $w_{2t} \in \mathrm{Ann}(\mathcal{A}).$

Легко проверить, что алгебра $\mathcal{A}$ порождается нечётными элементами x и $u_1 + y$, а её квадрат $\mathcal{A}^2$ совпадает с пространством V, $V^2 = 0$, значит, алгебра $\mathcal{A}$ метабелева.

Проверим, что алгебра $\mathcal{A}$ правонильпотентна индекса 4. Для этого достаточно понять, что $\mathcal{A}^2 R_a R_b = 0$, где $a, b \in \{x, y\}$. Нечётные элементы аннулирует оператор R_a:

$$\begin{array}{llll} u_1 \cdot x = 0, & u_1 \cdot y = 0, & p_1 \cdot x = 0, & p_1 \cdot y = 0, \\ q_1 \cdot x = 0, & q_1 \cdot y = 0, & v_{2t+1} \cdot x = 0, & v_{2t+1} \cdot y = 0. \end{array}$$

Чётные элементы оператор R_a переводит в нечётные:

$$\begin{array}{llll} u_0 \cdot x = -u_1, & u_0 \cdot y = -p_1, & p_0 \cdot x = -p_1, & p_0 \cdot y = -q_1, \\ q_0 \cdot x = -q_1, & q_0 \cdot y = 0, & v_{2t} \cdot x = -v_{2t+1}, & v_{2t} \cdot y = 0. \end{array}$$

Легко проверить, что в алгебре $\mathcal{A}$ выполнено супертождество (4).

6.2. Бесконечная независимая система тождеств

Докажем, что система тождеств

$$f_n(y_1, \ldots, y_6 \mid z_1, \ldots, z_{2n}) := (y_1 y_2)(L_{y_3} \circ L_{y_4})(L_{z_1} \ldots L_{z_{2n}})(L_{y_5} \circ L_{y_6})$$

независима на грассмановой оболочке $\mathrm{G}(\mathcal{A})$ построенной супералгебры $\mathcal{A}$. Заметим, что

$$p_1 = u_0 L_y, \quad p_0 = u_1 L_y, \quad q_0 = p_1 L_y, \quad q_1 = p_0 L_y,$$
$$v_t = q_1 L_x^{t-1}, \quad w_{2t+2} = v_{2t+1} L_y.$$

Вычислим теперь действие оператора $\alpha := [L_x, L_y]$ на пространстве V, используя таблицу умножения в супералгебре $\mathcal{A}$:

$$u_0 \alpha = 0, \quad u_1 \alpha = 0, \quad q_0 \alpha = 0, \quad q_1 \alpha = 0, \quad v_{2t+1} \alpha = 0,$$
$$p_0 \alpha = y \cdot (x \cdot p_0) - x \cdot (y \cdot p_0) = y \cdot p_1 - x \cdot q_1 = q_0 - v_2,$$
$$v_{2t} \alpha = y \cdot (x \cdot v_{2t}) - x \cdot (y \cdot v_{2t}) = y \cdot v_{2t+1} = w_{2t+2}.$$

Итак, $p_0 \alpha = q_0 - v_2$, $v_{2t} \alpha = w_{2t+2}$, а на остальные базисные элементы пространства V оператор α действует нулевым образом. Поскольку справедливы равенства

$$\begin{array}{ll} (q_0 - v_2) L_x = q_1 - v_3, & (q_1 - v_3) L_x = v_2 - v_4, \\ (v_{2t} - v_{2t+2}) L_x = v_{2t+1} - v_{2t+3}, & (v_{2t-1} - v_{2t+1}) L_x = v_{2t} - v_{2t+2}, \end{array}$$

то образы элементов $q_0 - v_2$, $q_1 - v_3$, w_{2t} при действии операторов содержатся в аннуляторе алгебры $\mathcal{A}$.

Рассмотрим оператор $\varphi = \alpha L^{2n}\alpha$, где $L^{2n} = L_1L_2\ldots L_{2n}$ — произведение операторов левого умножения. Оператор φ действует ненулевым образом только на базисный элемент p_0: $p_0\varphi = w_{2n} - w_{2n+2}$. Если оператор $L_a \circ L_b$ действует на квадрате алгебры $\mathrm{G}(\mathcal{A}) = \mathrm{G}_0 \otimes \mathcal{A}_0 + \mathrm{G}_1 \otimes \mathcal{A}_1$ ненулевым образом, то можно считать, что $a = x \otimes e_i$, $b = y \otimes e_j$. Тогда $v \otimes e_\sigma(L_a \circ L_b) = -v[L_x, L_y] \otimes e_\sigma e_i e_j$. Следовательно, значения многочлена f_n в алгебре $\mathrm{G}(\mathcal{A})$ содержатся в подпространстве, порождённом элементами вида $(w_{2n} - w_{2n+2}) \otimes e_\sigma$. Заметим, что каждая из функций f_n принимает ненулевые значения. Учитывая, что при разных значениях n указанные подпространства не имеют общих ненулевых элементов, получаем независимость указанной выше системы тождеств f_n. □

Замечание. Можно легко указать и другие бесконечные независимые системы тождеств. Например, указанным свойством обладает система

$$g_n(y_1, \ldots, y_8 \mid z_1, \ldots, z_{2n}) := (y_1y_2)[L_{y_3}L_{y_4}, L_{y_5}]L_{z_1}\ldots L_{z_{2n}}[L_{y_6}L_{y_7}, L_{y_8}].$$

6.3. О тождествах алгебры умножений $\mathrm{G}(\mathcal{A})^*$

Введём степень d базисных элементов по переменной y:

v	x	u_i	y	p_i	q_i	v_t	w_t
$\mathrm{d}(v)$	0	0	1	1	2	2	3

Если произведение базисных элементов u, v отлично от нуля, то $\mathrm{d}(uv) = \mathrm{d}(u) + \mathrm{d}(v)$.

Введём обозначения в алгебре $\mathrm{G}(\mathcal{A})$: $x_i = x \otimes e_i$, $y_i = y \otimes e_i$. Отметим, что любой одночлен от переменных x_i, y_i является кососимметрической функцией относительно каждого из наборов (x_i) и (y_i). Кроме того, обозначим через Y^* идеал алгебры умножений $\mathrm{G}(\mathcal{A})^*$, порождённый операторами $R(y_i)$ и $L(y_i)$. Поскольку в супералгебре $\mathcal{A}$ максимальная степень базисных элементов относительно переменной y равна 3 и базисные слова степени 3 по y содержатся в $\mathrm{Ann}(\mathcal{A})$, то $(Y^*)^3 \cdot \mathrm{G}(\mathcal{A})^* = 0$.

Алгебра L_x^*, порождённая операторами $L(x_i)$, является ассоциативной алгеброй Грассмана, значит, она удовлетворяет тождеству $\big[[a,b],c\big] = 0$. На самом деле данному тождеству удовлетворяет алгебра T_x^*, порождённая операторами $T(x_i)$, поскольку операторы $L(x_i)L(x_j)$, $R(x_i)R(x_j)$ и $[L(x_i), R(x_j)]$ перестановочны с произвольным оператором $T(x_k)$. Значит, верно включение

$$\big[[\mathrm{G}(\mathcal{A})^*, \mathrm{G}(\mathcal{A})^*], \mathrm{G}(\mathcal{A})^*\big] \subseteq Y^*,$$

откуда вытекает, что алгебра $\mathrm{G}(\mathcal{A})^*$ удовлетворяет тождеству $w_1w_2w_3d = 0$, где $w_i = \big[[a_i, b_i], c_i\big]$. Тем самым показано, что наличие достаточно сильных тождеств в алгебре умножений не гарантирует, вообще говоря, шпехтовости самой алгебры.

Литература

[1] Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. — М.: Наука, 1985.

[2] Белкин В. П. О многообразиях правоальтернативных алгебр // Алгебра и логика. — 1976. — Т. 15, № 5. — С. 491—508.

[3] Дренски В. С. О тождествах в алгебрах Ли // Алгебра и логика. — 1974. — Т. 13, № 3. — С. 265—290.

[4] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.

[5] Медведев Ю. А. Конечная базируемость многообразий с двучленным тождеством // Алгебра и логика. — 1978. — Т. 17, № 6. — С. 705—726.

[6] Пчелинцев С. В. Разрешимые индекса 2 многообразия алгебр // Мат. сб. — 1981. — Т. 115, № 2. — С. 179—203.

[7] Пчелинцев С. В. Многообразия разрешимых индекса 2 альтернативных алгебр над полем характеристики 3 // Мат. заметки. — 1999. — Т. 66, № 4. — С. 556—566.

[8] Пчелинцев С. В. Об одном почти шпехтовом многообразии центрально метабелевых альтернативных алгебр над полем характеристики 3 // Мат. сб. — 2000. — Т. 191, № 6. — С. 127—144.

[9] Пчелинцев С. В. Структура слабых тождеств на грассмановых оболочках централь-но-метабелевых альтернативных супералгебр суперранга 1 над полем характеристики 3 // Фундамент. и прикл. мат. — 2001. — Т. 7, вып. 3 . — С. 849—871.

[10] Пчелинцев С. В. Правоальтернативные метабелевы алгебры Грассмана // XIII Международная конференция «Математика. Экономика. Образование». III Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения». Тезисы докладов. — Ростов-на-Дону, 2005. — С. 87.

[11] Шестаков И. П. Супералгебры и контрпримеры // Сиб. мат. журн. — 1991. — Т. 32, № 6. — С. 187—196.

[12] Shestakov I. P. Free Malcev superalgebra on one odd generator // J. Algebra Appl. — 2003. — Vol. 2, no. 4. — P. 451—461.

[13] Vaughan-Lee M. R. Varieties of Lie algebras // Quart. J. Math. Oxford Ser. — 1970. — Vol. 21, no. 83. — P. 297—308.