Кольца, над которыми все модули полурегулярны*

А. А. ТУГАНБАЕВ
Российский государственный
торгово-экономический университет

УДК 512.55

Ключевые слова: полурегулярный модуль, полуцепное кольцо.

Аннотация

Доказано, что над кольцом A все модули полурегулярны в точности тогда, когда A — артиново полуцепное кольцо и $J^2(A) = 0$.

Abstract

A. A. Tuganbaev, Rings over which all modules are semiregular, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 2, pp. 185—194.

For a ring A, it is proved that all A-modules are semiregular if and only if A is an Artinian serial ring and $J^2(A) = 0$.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Слова типа «артиново кольцо» означают, что соответствующие условия выполнены справа и слева. Подмодуль N модуля M называется *малым в* M, если $N + P \neq M$ для любого собственного подмодуля P модуля M. Пусть X — подмодуль модуля M. Говорят, что X *лежит над прямым слагаемым* модуля M, если существует такое прямое разложение $M = M_1 \oplus M_2$, что $M_1 \subseteq X$ и $M_2 \cap X$ — малый подмодуль в M_2. Модуль M называется *полурегулярным* модулем (*модулем со свойством подъёма*), если каждый циклический подмодуль (каждый подмодуль) модуля M лежит над прямым слагаемым модуля M. Каждый модуль со свойством подъёма полурегулярен. Прямое произведение бесконечного числа полей является примером полурегулярного модуля без свойства подъёма. Полурегулярные модули изучались в [8; 9, гл. B; 11, гл. 4; 12, 15] и других работах.

В [13] описаны кольца, над которыми все модули обладают свойством подъёма. Основным результатом данной работы является теорема 1.

Теорема 1. *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *все правые A-модули полурегулярны*;
2) *все левые A-модули полурегулярны*;
3) *A — артиново полуцепное кольцо и $J^2(A) = 0$.*

*Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований.

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 2, с. 185—194.

Кольцо вычетов $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ является примером неполупростого кольца, удовлетворяющего условиям теоремы 1.

Доказательство теоремы 1 разбито на ряд утверждений, некоторые из которых представляют самостоятельный интерес. Приведём необходимые обозначения и определения. Пересечение всех максимальных подмодулей модуля M обозначается через $J(M)$ и называется *радикалом Джекобсона* модуля M. Хорошо известно, что $J(M)$ совпадает с суммой всех малых подмодулей модуля M (см., например, [14, 21.5]). Модуль M называется *полупримитивным*, если $J(M) = 0$. Модуль M называется *цепным*, если любые два его подмодуля сравнимы по включению. Прямая сумма цепных модулей называется *полуцепным* модулем. Модуль M называется *полупростым*, если каждый его подмодуль является прямым слагаемым модуля M. Подмодуль N модуля M называется *существенным*, если для любого подмодуля X модуля M равенство $X \cap N = 0$ влечёт равенство $X = 0$. Модуль M называется *инъективным*, если для любого модуля X и каждого подмодуля Y модуля X все гомоморфизмы $Y \to M$ продолжаются до гомоморфизмов $X \to M$. Если M — инъективный модуль и N — существенный подмодуль модуля M, то модуль M называется *инъективной оболочкой* модуля N. Для каждого модуля инъективная оболочка существует и единственна с точностью до изоморфизма. Модуль M называется *квазинепрерывным*, если для любых двух его подмодулей X_1 и X_2, для которых $X_1 \cap X_2 = 0$, существует такое прямое разложение $M = M_1 \oplus M_2$, что $X_1 \subseteq M_1$ и $X_2 \subseteq M_2$.

Модуль M называется *I_0-модулем*, если каждый его циклический подмодуль либо мал в M, либо содержит ненулевое прямое слагаемое модуля M. Легко проверить, что каждый полурегулярный модуль является I_0-модулем. Модуль M называется *регулярным*, если каждый его циклический подмодуль является прямым слагаемым модуля M. В [11, 15.7 (9)] приведён пример коммутативного полупримитивного кольца A, которое не является регулярным кольцом и является I_0-модулем над A. Ясно, что полупримитивный нерегулярный I_0-модуль A_A не является полурегулярным. I_0-модули изучались в [1—3; 5—7; 11, гл. 3] и других работах.

1. I_0-модули

Лемма 1.1. *Для модуля M равносильны следующие условия*:

1) *M — I_0-модуль*;
2) *каждый подмодуль модуля M либо лежит в $J(M)$, либо содержит ненулевое прямое слагаемое модуля M.*

Доказательство. Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) следует из того, что $J(M)$ содержит все малые подмодули модуля M.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть N — подмодуль модуля M, не лежащий в $J(M)$. Существует циклический подмодуль X модуля N, не лежащий в $J(M)$. Так как $J(M)$ — сумма всех малых подмодулей модуля M, то X не является малым подмодулем модуля M. По условию 1) некоторое ненулевое прямое слагаемое Y модуля M лежит в X. Тогда $Y \subseteq N$. □

Лемма 1.2. *Пусть M — такой модуль, что для любого ненулевого циклического малого подмодуля X модуля M каждый максимальный подмодуль Y модуля X является прямым слагаемым модуля X. Тогда $J(M)$ — полупростой модуль.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $J(M) \neq 0$. Достаточно доказать, что каждый ненулевой циклический подмодуль X модуля $J(M)$ является полупростым модулем. Пусть X_1 — собственный подмодуль модуля X. Существует такой подмодуль X_2 модуля X, что $X_1 \cap X_2 = 0$ и $X_1 \oplus X_2$ — существенный подмодуль модуля X. Если $X = X_1 \oplus X_2$, то X — полупростой модуль.

Допустим, что $X \neq X_1 \oplus X_2$. Так как X — циклический модуль, то существует такой максимальный подмодуль Y модуля X, что $X_1 \oplus X_2 \subseteq Y$. Так как Y содержит существенный подмодуль $X_1 \oplus X_2$ модуля X, то Y — существенный подмодуль модуля X. Так как $J(M)$ — сумма всех малых подмодулей модуля M, то X — сумма конечного числа малых подмодулей модуля M. Поэтому X — малый подмодуль модуля M. По условию Y — прямое слагаемое модуля X. Кроме того, Y — существенный подмодуль модуля X. Поэтому $Y = M$, получаем противоречие. □

Лемма 1.3. *Пусть M — модуль, X — малый модуль модуля M и существует такой эпиморфизм $f\colon X \to S$, что S — простой модуль и $M \oplus S$ — I_0-модуль. Тогда $\operatorname{Ker}(f)$ — прямое слагаемое модуля X.*

Доказательство. Рассмотрим подмодуль $X' = \{x + f(x) \mid x \in X\}$ модуля $M \oplus S$. Существует такой изоморфизм $\varphi\colon X \to X'$, что $\varphi(x) = x + f(x)$ для всех $x \in X$. Заметим, что

$$\operatorname{Ker}(f) = \varphi\bigl(\operatorname{Ker}(f)\bigr) = \varphi^{-1}\bigl(\operatorname{Ker}(f)\bigr) = X' \cap M.$$

Так как $M \oplus S = M + X'$ и $M \neq M \oplus S$, то X' не является малым подмодулем модуля $M \oplus S$. Поэтому $X' \nsubseteq J(M \oplus S)$. По условию $M \oplus S$ — I_0-модуль. Поэтому существует такое прямое разложение $M \oplus S = Y' \oplus M'$, что $Y' \neq 0$ и $Y' \subseteq X'$.

Пусть $\pi\colon M \oplus S \to M$ — проекция с ядром S. Тогда

$$M = \pi(Y' \oplus M') = \pi(Y') + \pi(M') \subseteq X + \pi(M').$$

Тогда $\pi(M') = M$, поскольку X — малый подмодуль модуля M. Так как $\pi(M') = M$, то $M \oplus S = M' + S$. Возможны два случая: 1) $M' \cap S \neq 0$; 2) $M' \cap S = 0$.

Рассмотрим случай 1). Допустим, что $M' \cap S \neq 0$. Тогда $S \subseteq M'$, поскольку S — простой модуль. Поэтому

$$0 \neq Y' = Y' \cap (M \oplus S) = Y' \cap (M' + S) = Y' \cap M' = 0.$$

Получено противоречие.

Рассмотрим случай 2). Допустим, что $M' \cap S = 0$. Тогда

$$M \oplus S = M' \oplus S = M' \oplus Y', \quad Y' \cong (M' \oplus S)/M' \cong S.$$

Поэтому Y' — простой модуль. Тогда либо $Y' \subseteq \mathrm{Ker}(f) \subseteq X$, либо $Y' \cap \mathrm{Ker}(f) = 0$. Первый случай невозможен, так как тогда малый подмодуль X модуля M должен содержать ненулевое прямое слагаемое Y' модуля M.

Следовательно, $Y' \cap \mathrm{Ker}(f) = 0$. Так как $\mathrm{Ker}(f) = \varphi\bigl(\mathrm{Ker}(f)\bigr) = \varphi^{-1}\bigl(\mathrm{Ker}(f)\bigr)$ — максимальный подмодуль модуля X и $\varphi\colon X \to X'$ — изоморфизм, то $\mathrm{Ker}(f) = \varphi\bigl(\mathrm{Ker}(f)\bigr)$ — максимальный подмодуль модуля X'. Поэтому $X' = Y' \oplus \mathrm{Ker}(f)$. Изоморфизм $\varphi^{-1}\colon X' \to X$ индуцирует равенство $X = \varphi^{-1}(Y') \oplus \mathrm{Ker}(f)$. $\square$

Предложение 1.4. *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *каждый правый A-модуль является I_0-модулем*;
2) *для каждого правого A-модуля M верно, что $J(M)$ — полупростой модуль и если $J(M) = 0$, то каждый ненулевой подмодуль модуля M содержит ненулевое прямое слагаемое модуля M*;
3) *каждый правый A-модуль либо имеет ненулевое инъективное прямое слагаемое, либо является полупростым модулем и лежит в радикале Джекобсона своей инъективной оболочки*;
4) *каждый циклический правый A-модуль либо имеет ненулевое инъективное прямое слагаемое, либо является полупростым модулем.*

Доказательство. Докажем импликацию $1) \Longrightarrow 2)$. Пусть M — ненулевой правый A-модуль. Если $J(M) = 0$, то по лемме 1.1 каждый ненулевой подмодуль модуля M содержит ненулевое прямое слагаемое модуля M.

Допустим, что $J(M) \neq 0$ и X — ненулевой циклический подмодуль модуля $J(M)$. Тогда X — циклический малый подмодуль модуля M. По лемме 1.3 каждый максимальный подмодуль модуля X является прямым слагаемым модуля X. По лемме 1.2 $J(M)$ — полупростой модуль.

Проверим импликацию $2) \Longrightarrow 3)$. Пусть N — ненулевой правый модуль с инъективной оболочкой M. Допустим, что $N \subseteq J(M)$. Тогда $J(M) \neq 0$ и по условию $J(M)$ — полупростой модуль. Подмодуль N полупростого модуля $J(M)$ является полупростым модулем.

Допустим, что $J(M) = 0$. По 2) ненулевой подмодуль N инъективного модуля M имеет ненулевое инъективное прямое слагаемое.

Импликация $3) \Longrightarrow 4)$ очевидна.

Докажем импликацию $4) \Longrightarrow 1)$. Пусть M — правый A-модуль и X — циклический подмодуль модуля M, не являющийся малым подмодулем в M. Если X имеет ненулевое инъективное прямое слагаемое Y, то Y — прямое слагаемое модуля M и всё доказано.

Допустим, что ненулевой модуль X не имеет ненулевых инъективных прямых слагаемых. По 4) X — полупростой модуль. Поэтому существует такое прямое разложение $X = \bigoplus_{i=1}^{n} X_i$, что все модули X_i просты. Так как подмодуль X не мал в M, то существует такое $i \in \{1, \ldots, n\}$, что X_i не является малым подмодулем в M. Поэтому существует такой собственный подмодуль Y модуля M, что $X_i + Y = M$. Тогда $X_i \cap Y \neq X_i$, поскольку модуль X_i прост. Поэтому $X_i \cap Y = 0$, $X_i \oplus Y = M$ и X содержит ненулевое прямое слагаемое модуля M. □

Следствие 1.5. *Пусть над кольцом A каждый правый A-модуль является I_0-модулем.*

1. *Каждый неразложимый правый A-модуль либо инъективен, либо является простым малым подмодулем своей инъективной оболочки.*
2. *Каждый неразложимый ненулевой правый A-модуль либо является простым малым подмодулем своей инъективной оболочки, либо является циклическим цепным инъективным модулем длины 2.*
3. *Каждый неразложимый правый A-модуль является циклическим цепным нётеровым и артиновым модулем длины не больше 2.*
4. *Каждый правый A-модуль является подпрямым произведением циклических цепных модулей конечной длины не больше 2. В частности, каждый ненулевой правый A-модуль обладает максимальным подмодулем и не совпадает со своим радикалом Джекобсона.*
5. *Для каждого правого A-модуля M радикал Джекобсона $J(M)$ является полупростым малым подмодулем модуля M.*

Доказательство.

Утверждение 1 следует из предложения 1.4 (см. условие 3)).

Докажем утверждение 2. Пусть M — неразложимый ненулевой правый A-модуль. Допустим, что M не является простым малым подмодулем своей инъективной оболочки. По пункту 1 M — инъективный непростой модуль. Достаточно доказать, что любой собственный ненулевой подмодуль N модуля M прост. Так как M — неразложимый модуль и $N \neq M$, то модуль N не инъективен. По утверждению 1 модуль N прост.

Утверждение 3 следует из утверждения 2.

Утверждение 4 следует из утверждения 3 и того, что каждый модуль является подпрямым произведением подпрямо неразложимых модулей.

Докажем утверждение 5. По предложению 1.4 $J(M)$ — полупростой модуль. Допустим, что $J(M)$ не является малым подмодулем модуля M. Тогда существует такой собственный подмодуль X модуля M, что $M = X + J(M)$. Тогда M/X — ненулевой модуль, совпадающий со своим радикалом Джекобсона. Это противоречит утверждению 4. □

Лемма 1.6 ([14, 55.16]). *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *каждый правый A-модуль является полуцепным модулем*;
2) *каждый правый A-модуль является прямой суммой циклических цепных модулей конечной длины*;
3) *A — артиново справа кольцо и каждый неразложимый конечно порождённый правый A-модуль является цепным модулем*;
4) *A — артиново полуцепное кольцо.*

Лемма 1.7. *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *A — нётерово справа кольцо*;
2) *каждый инъективный правый A-модуль является прямой суммой неразложимых модулей*;
3) *каждая прямая сумма инъективных правых A-модулей является инъективным модулем*;
4) *каждая прямая сумма счётного множества инъективных правых A-модулей является инъективным модулем*;
5) *для каждого правого A-модуля M существует такое прямое разложение $M = X \oplus Y$, что X — инъективный модуль и модуль Y не имеет ненулевых инъективных подмодулей.*

Доказательство. Эквивалентность условий 1), 2), 3) и 4) хорошо известна (см., например, [4, 20.1, 20.6. 20.9]).

Проверим импликацию 3) $\Longrightarrow$ 5). Пусть $\{X_i\}_{i \in I}$ — множество всех подмодулей модуля M, являющихся прямой суммой инъективных модулей. На этом множестве мы задаём такой частичный порядок $\leqslant$, что для произвольных $i, j \in I$ неравенство $X_i \leqslant X_j$ равносильно тому, что $X_i \oplus X_k = X_j$ для некоторого $k \in I$. Из условия 3) следует, что в этом множестве каждая возрастающая цепь имеет верхнюю грань. По лемме Цорна множество $\{X_i\}_{i \in I}$ имеет максимальный элемент X. Тогда существует прямое разложение $M = X \oplus Y$, являющееся искомым разложением.

Проверим импликацию 5) $\Longrightarrow$ 4). Пусть $M = \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} M_i$, где все M_i — инъективные правые A-модули. По условию существует такое прямое разложение $M = X \oplus Y$, что X — инъективный модуль и модуль Y не имеет ненулевых инъективных подмодулей. Если $Y = 0$, то $M = X$ — инъективный модуль.

Допустим, что $Y \neq 0$. Тогда X не является существенным подмодулем модуля M. Поэтому существует такое $i \in I$, что $X \cap M_i$ не является существенным подмодулем модуля M_i. Тогда инъективный модуль M_i имеет такое ненулевое прямое слагаемое N, что $X \cap N = 0$. Пусть $\pi \colon M \to Y$ — проекция с ядром X. Так как $X \cap N = 0$, то $\pi(N) \cong N$ и модуль Y имеет ненулевой инъективный подмодуль $\pi(N)$. Получено противоречие. □

Предложение 1.8. *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *A_A — прямая сумма неразложимых модулей и каждый правый A-модуль является I_0-модулем*;
2) *A — артиново полуцепное кольцо и $J^2(A) = 0$*;
3) *A — артиново справа кольцо и каждый правый A-модуль M обладает прямым разложением $M = X \oplus Y$, где X — инъективный модуль, являющийся прямой суммой циклических цепных инъективных модулей длины не больше 2, и Y — полупростой модуль без ненулевых инъективных подмодулей*;
4) *A_A — прямая сумма неразложимых модулей и каждый циклический правый A-модуль является прямой суммой инъективного модуля и полупростого модуля.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Так как A_A — конечная прямая сумма неразложимых модулей, то из условия 1) и пункта 3 следствия 1.5 вытекает, что A — артиново справа кольцо и каждый неразложимый правый A-модуль является цепным модулем. По лемме 1.6 A — артиново полуцепное кольцо.

Проверим импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). По лемме 1.6 каждый A-модуль является прямой суммой циклических цепных модулей конечной длины. Так как $J^2(A) = 0$, то длина каждого циклического цепного A-модуля не превосходит 2. Поэтому каждый цепной A-модуль длины 2 инъективен и каждый модуль без ненулевых инъективных подмодулей является полупростым. Теперь утверждение следует из леммы 1.7.

Импликация 3) $\Longrightarrow$ 4) очевидна.

Импликация 4) $\Longrightarrow$ 1) следует из предложения 1.4. □

2. Окончание доказательства теоремы 1

Лемма 2.1. *Пусть M — конечно порождённый квазинепрерывный модуль и X — такой подмодуль модуля M, что M/X — модуль с условием максимальности для прямых слагаемых. Тогда X не является прямой суммой бесконечного числа ненулевых модулей.*

Доказательство. Допустим, что модуль X является прямой суммой бесконечного числа ненулевых модулей. Тогда существует прямое разложение $X = \bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i$, где каждое слагаемое X_i является прямой суммой бесконечного числа ненулевых модулей. Так как каждое прямое слагаемое модуля M является квазинепрерывным модулем, то существует такое множество $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ подмодулей модуля M, что для любого натурального числа n

$$M = \bigoplus_{i=1}^{n+1} M_i, \quad \bigoplus_{i=n+1}^{\infty} X_i \subseteq M_{n+1}, \quad X_i \subseteq M_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Так как M/X — модуль с условием максимальности для прямых слагаемых и

$$M/X \cong \bigoplus_{i=1}^{n} M_i/X_i \oplus M_{n+1}\Big/\Big(\bigoplus_{i=n+1}^{\infty} X_i\Big)$$

для каждого n, то по условию хотя бы одно слагаемое M_i/X_i равно нулю. Зафиксируем этот индекс i. Тогда $M_i = X_i$ и существует прямое разложение

$$X_i = \bigoplus \sum_{k=1}^{\infty} X_{ik},$$

где ни один модуль X_{ik} не равен нулю. Так как M_i — гомоморфный образ конечно порождённого модуля M, то $X_i = M_i$ — конечно порождённый модуль. Поэтому модуль X_i лежит в прямой сумме конечного числа модулей X_{ik}. Поэтому все остальные ненулевые слагаемые X_{ik} должны быть равны нулю. Получено противоречие. $\square$

Лемма 2.2. *Пусть A — самоинъективное справа регулярное кольцо.*

1. *Если кольцо A имеет счётно порождённый правый идеал M, не являющийся конечно порождённым, то циклический модуль A/M не является инъективным.*
2. *Если каждый циклический правый A-модуль является прямой суммой инъективного модуля и модуля с условием максимальности для прямых слагаемых, то A — полупростое кольцо.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Так как A — регулярное кольцо, то для его счётно порождённого правого идеала M существует такое счётное множество $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ ортогональных идемпотентов, что $M = \bigoplus_{i=1}^{\infty} e_i A$ (см., например, [11, 6.5 (4)]). Тогда циклический модуль A/M не является инъективным [10, лемма 5].

Докажем утверждение 2. Допустим, что регулярное кольцо A не является полупростым. Тогда кольцо A имеет счётно порождённый правый идеал X, являющийся прямой суммой бесконечного числа ненулевых главных правых идеалов X_i $(1 \leqslant i < \infty)$. По условию для циклического правого A-модуля A/X существует прямое разложение $A/X = B/X \oplus M/X$, где B/X — циклический инъективный модуль и M/X — циклический модуль с условием максимальности для прямых слагаемых. Тогда M — счётно порождённый правый идеал и A/M — инъективный модуль, поскольку

$$A/M \cong (A/X)/(M/X) \cong B/X.$$

По утверждению 1 M — конечно порождённый правый идеал. Так как A — регулярное кольцо, то M_A — прямое слагаемое инъективного модуля A_A. Тогда M_A — конечно порождённый квазинепрерывный модуль и M/X — модуль с условием максимальности для прямых слагаемых. По лемме 2.1 X не является прямой суммой бесконечного числа ненулевых модулей. Так как $X = \bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i$, то получено противоречие. $\square$

Предложение 2.3. *Для кольца A равносильны следующие условия:*

1) *каждый правый A-модуль является полурегулярным модулем;*
2) *каждый циклический правый A-модуль является прямой суммой инъективного модуля и полупростого модуля;*
3) *A — артиново полуцепное кольцо и $J^2(A) = 0$.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть X — циклический правый A-модуль, M — инъективная оболочка модуля X. Так как модуль M полурегулярен, то существует такое прямое разложение $M = M_1 \oplus M_2$, что $M_1 \subseteq X$ и $M_2 \cap X$ — малый подмодуль в M_2. Тогда $X = M_1 \oplus (M_2 \cap X)$, где

M_1 — инъективный модуль. По предложению 1.4 $J(M_2)$ — полупростой модуль. Так как $M_2 \cap X \subseteq J(M_2)$, то $M_2 \cap X$ — полупростой модуль.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Допустим сначала, что A — полупервичное кольцо. Каждый минимальный правый идеал любого полупервичного кольца порождается идемпотентом. Кроме того, каждый главный правый идеал кольца A является прямой суммой инъективного правого идеала и полупростого правого идеала. Поэтому каждый главный правый идеал кольца A является прямой суммой главных правых идеалов, порождённых идемпотентами. Так как радикал Джекобсона $J(A)$ не содержит ненулевых идемпотентов, то кольцо A полупримитивно. Пусть $A_A = X \oplus Y$, где X — циклический инъективный модуль, Y — циклический полупростой модуль. Без ограничения общности можно считать, что нётеров модуль Y не содержит ненулевых инъективных подмодулей. Пусть $y \in Y$. Существует такой гомоморфизм $f_y\colon X \to Y$, что $f_y(x) = yx$ для всех $x \in X$. Так как Y — полупростой модуль, то $f_y(X)$ — прямое слагаемое модуля Y. Так как Y — проективный модуль, то модуль $f_y(X)$ проективен. Поэтому существует прямое разложение $X = X' \oplus \mathrm{Ker}(f_y)$ и подмодуль $f_y(X)$ модуля Y изоморфен инъективному модулю X'. Так как модуль Y не содержит ненулевых инъективных подмодулей, то $f_y(X) = 0$. Поэтому $yX = 0$. Следовательно, $YX = 0$. Тогда $(XY)^2 = 0$. Так как кольцо A полупервично, то $XY = 0 = YX$. Кроме того, $A_A = X \oplus Y$. Поэтому кольцо A является прямым произведением самоинъективного справа полупримитивного кольца X и полупростого кольца Y. Следовательно, A — самоинъективное справа полупримитивное кольцо. Поэтому A — самоинъективное справа регулярное кольцо [4, 19.28]. По утверждению 2 леммы 2.2 A — полупростое кольцо.

Допустим теперь, что кольцо A не обязательно полупервично и P — первичный радикал кольца A. Тогда кольцо A/P полупервично и из условия 2) следует, что каждый циклический правый A/P-модуль является прямой суммой инъективного модуля и полупростого модуля. По доказанному выше A/P — полупростое кольцо. В частности, кольцо A/P не содержит бесконечное множество ортогональных идемпотентов. Тогда кольцо A не содержит бесконечного множества ортогональных идемпотентов, поскольку ниль-идеал P кольца A не содержит ненулевых идемпотентов. Следовательно, A_A — прямая сумма неразложимых модулей. По предложению 1.8 A — артиново полуцепное кольцо и $J^2(A) = 0$.

Проверим справедливость импликации 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть M — правый A-модуль, X — циклический подмодуль модуля M. Так как X — нётеров модуль, то существует прямое слагаемое M_1 модуля M со следующими свойствами: $M_1 \subseteq X$ и не существует прямого слагаемого модуля M, которое лежит в X и строго содержит M_1. Пусть $M = M_1 \oplus M_2$ и $X = M_1 \oplus X_2$, где $X_2 \subseteq M_2$. Надо доказать, что X_2 — малый подмодуль модуля M_2. Для любого прямого слагаемого M_2' модуля M_2 модуль $M_2 \oplus M_2'$ является прямым слагаемым модуля M. Поэтому модуль X_2 не содержит ненулевых прямых слагаемых модуля M_2. Следовательно, модуль X_2 не содержит ненулевых инъективных подмодулей. По предложению 1.8 каждый правый A-модуль является прямой суммой инъективного модуля и полупростого модуля. Поэтому циклический модуль X_2 полупрост. Допустим, что модуль X_2 не является малым подмодулем модуля M_2. Тогда X_2 — конечная прямая сумма простых модулей $S_1, \ldots, S_n$ и существует такое i, что простой модуль S_i не является малым подмодулем модуля M_2. Поэтому существует такой собственный подмодуль Y модуля M_2, что $M_2 = S_i + Y$. Тогда $S_i \nsubseteq Y$. Поэтому $S_i \cap Y = 0$ и $M_2 = S_i \oplus Y$, где $S_i \subseteq X_2$. Получено противоречие, так как модуль X_2 не содержит ненулевых прямых слагаемых модуля M_2. □

Замечание 2.4. В теореме 1 условие 3) лево-право симметрично. Поэтому для доказательства теоремы 1 достаточно доказать эквивалентность условий 1) и 3) этой теоремы. Это вытекает из предложения 2.3.

Литература

[1] Абызов А. Н. Замкнутость слабо регулярные модулей относительно прямых сумм // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2003. — № 9. — С. 3—5.

[2] Абызов А. Н. Слабо регулярные модули над полусовершенными кольцами // Чебышёвский сб. — 2003. — Т. 4, № 1. — С. 4—9.

[3] Абызов А. Н. Слабо регулярные модули // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2004. — № 3. — С. 3—6.

[4] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 2. — М.: Мир, 1979.

[5] Хакми Х. И. Сильно регулярные и слабо регулярные кольца и модули // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1994. — № 5. — С. 60—65.

[6] Hamza H. I_0-rings and I_0-modules // Math. J. Okayama Univ. — 1998. — Vol. 40. — P. 91—97.

[7] Nicholson W. K. I-rings // Trans. Amer. Math. Soc. — 1975. — Vol. 207. — P. 361—373.

[8] Nicholson W. K. Semiregular modules and rings // Can. J. Math. — 1976. — Vol. 28, no. 5. — P. 1105—1120.

[9] Nicholson W. K., Yousif M. F. Quasi-Frobenius Rings. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003.

[10] Osofsky B. L. Rings all of whose finitely generated modules are injective // Pacific J. Math. — 1964. — Vol. 14. — P. 645—650.

[11] Tuganbaev A. Rings Close to Regular. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2002.

[12] Tuganbaev A. A. Semiregular, weakly regular, and π-regular rings // J. Math. Sci. — 2002. — Vol. 109, no. 3. — P. 1509—1588.

[13] Vanaja N., Purav V. M. Characterization of generalized uniserial rings in terms of factor rings // Comm. Algebra. — 1992. — Vol. 20. — P. 2253—2270.

[14] Wisbauer R. Foundations of Module and Ring Theory. — Philadelphia: Gordon and Breach (1991).

[15] Xue W. M. Semiregular modules and F-semiperfect modules // Comm. Algebra. — 1995. — Vol. 23, no. 3. — P. 1035—1046.