Представления полумодулей сечениями пучков

В. В. ЧЕРМНЫХ
Вятский государственный
гуманитарный университет

УДК 512.55

Ключевые слова: полукольцо, полумодуль, пучковые конструкции, представления сечениями.

Аннотация

Задачей статьи является исследование условий на подполумодуль A_S полумодуля $\Gamma(P)$ всех глобальных сечений пучка P, при которых $A_S = \Gamma(P)$. Показаны применения построенной конструкции, а именно доказана изоморфность представлений Ламбека для полумодулей над строго гармоническими и редуцированными риккартовыми полукольцами, а также изоморфность пирсовских представлений для полумодуля над произвольным полукольцом.

Abstract

V. V. Chermnykh, Representations of semimodules by sections of sheaves, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 2, pp. 195—204.

The aim of the paper is to study the conditions on the subsemimodule A_S of the semimodule $\Gamma(P)$ of all global sections of a sheaf P implying $A_S = \Gamma(P)$. Some applications of the developed construction are shown: namely, the Lambek representations for semimodules over strongly harmonic and reduced Rickart semirings as well as Pierce representations for semimodules over arbitrary semirings were proved to be isomorphic.

Введение

В статье рассматриваются условия, при которых полумодуль S изоморфен полумодулю всех глобальных сечений некоторого пучка S-полумодулей. Точнее, в теореме 1 указаны достаточные условия, при которых подполумодуль полумодуля $\Gamma(P)$ пучка (P, X) изоморфен $\Gamma(P)$. Этот подход напоминает классическую теорему Стоуна—Вейерштрасса о банаховой алгебре $C^*(X)$ непрерывных функций.

Новыми являются конкретные пучковые представления полумодулей, полученные с помощью теоремы 1. Так, во втором разделе построены два изоморфных представления полумодуля над строго гармоническим полукольцом. Одна из этих конструкций обобщает ламбековское представление строго гармонического полукольца. В теореме 7 дано изоморфное представление полумодуля над редуцированным риккартовым полукольцом. В заключительном разделе для

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 2, с. 195—204.

произвольного полукольца S получены два пучка S-полумодулей и реализация S-полумодуля сечениями этих пучков. Обе конструкции связаны с пирсовским пучком колец (полуколец) и обобщают пирсовское представление. Основную роль при этом играет булево кольцо BS дополняемых идемпотентов из S.

Во всех рассмотренных конструкциях пучков базисные пространства являются первичным спектром $\operatorname{Spec} S$ некоторого полукольца S или его подпространством. Напомним, что $\operatorname{Spec} S$ — это множество всех первичных идеалов полукольца S, наделённое стоуновской топологией; открытыми при этом являются множества $D(J) = \{P \in \operatorname{Spec} S\colon J \nsubseteq P\}$, J — идеал из S. Для элемента $a \in S$ обозначим $D(a) = D(SaS)$. Наиболее важными подпространствами первичного спектра являются максимальный $\operatorname{Max} S$ и минимальный $\operatorname{Min} S$ спектры — пространства максимальных и минимальных первичных идеалов соответственно.

1. Общая теорема о представлении полумодуля

Под *полукольцом* S будем понимать универсальную алгебру $(S, +, \cdot, 0, 1)$, такую что $(S, +, 0)$ — коммутативный моноид, $(S, \cdot, 1)$ — моноид и тождественно выполняются соотношения $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)c = ac + bc$, $a0 = 0a = 0$.

Определение. *Полумодулем A над полукольцом S* назовём коммутативный моноид $(A, +, 0)$ с внешней операцией умножения (справа) на элементы полукольца S (результат умножения $a \in A$ на $s \in S$ запишем как as), если выполняются следующие условия:

$$a(s + t) = as + at, \quad (a + b)s = as + bs,$$
$$a(st) = (as)t,$$
$$a1 = a, \quad a0 = 0, \quad 0s = 0.$$

Стандартно определяются идеал полукольца, подполумодуль полумодуля. Предполагается, что гомоморфизм полумодулей сохраняет 0.

Пусть ρ — такая конгруэнция на A, что $a \;\rho\; b$ влечёт $as \;\rho\; bs$ для любого $s \in S$. Тогда фактор-полугруппа A/ρ становится полумодулем над полукольцом S, который мы назовём фактор-полумодулем полумодуля A по конгруэнции ρ. В дальнейшем именно такие отношения будем понимать под конгруэнциями на полумодуле.

Определение. Тройка (P, π, X) называется *пучком S-полумодулей*, если выполняются следующие условия:

1) P и X — топологические пространства;
2) $\pi\colon P \to X$ — локальный гомеоморфизм;
3) для каждой точки $x \in X$ множество $P_x = \pi^{-1}(x)$ является S-полумодулем;
4) полумодульные операции непрерывны;
5) отображение, ставящее каждой точке x нуль 0_x полумодуля P_x, непрерывно.

Поясним, что *локальным гомеоморфизмом* называется отображение топологического пространства X в Y, при котором каждая точка из X обладает окрестностью, гомеоморфно отображающейся на некоторое открытое подмножество пространства Y. Через $\pi^{-1}(x) = \{u \in P\colon \pi(u) = x\}$ обозначим полный прообраз точки x при *проекции* π. Полумодуль P_x называется *слоем* пучка в точке x. Обычно говорят просто о пучке P над X, всегда подразумевая наличие проекции π. Пространства P и X называются *накрывающим* и *базисным* соответственно.

Пусть P — пучок над X и Y — подпространство в X. *Сечением* пучка P над Y называется такое непрерывное отображение $\sigma\colon Y \to P$, что $\pi \circ \sigma$ — тождественное отображение множества Y. Сечение, определённое над всем пространством X, называется *глобальным*. Множество $\Gamma(P)$ всех глобальных сечений пучка S-полумодулей с поточечно определёнными операциями является полумодулем над S.

С терминологией и основными методами теории пучков и пучковых представлений можно познакомится, например, по [1—3, 6].

При построении пучков используется следующий результат о пучках универсальных алгебр.

Лемма А ([7, лемма 2.1]). *Пусть* (α_x), $x \in X$, — *семейство конгруэнций универсальной алгебры* A, *индексированных точками топологического пространства* X. *Если для любых элементов* $a, b \in A$ *множество*

$$U(a,b) = \{x \in X\colon a\ \alpha_x\ b\}$$

открыто, то $\left(\bigcup A/\alpha_x, X\right)$ — *пучок фактор-алгебр над пространством* X.

Семейство конгруэнций (α_x), удовлетворяющее указанному свойству, называется *открытым*.

Отметим ещё одно известное свойство пучков (см., например, [1, с. 14]), используемое в данной работе.

Лемма Б. *Для любых двух сечений пучка* P *множество тех точек из* X, *в которых эти сечения определены и совпадают, открыто в* X.

Пусть (P, X) — пучок полумодулей. Напомним, что подполумодуль A полумодуля $\Gamma(P)$ всех глобальных сечений пучка называется *факторным*, если через каждую точку накрывающего пространства проходит глобальное сечение из A. Для сечения σ пучка P через $z(\sigma) = \{x \in X\colon \sigma(x) = 0(x)\}$ обозначим нуль-множество сечения σ; его дополнение $\operatorname{supp}\sigma = X \setminus z(\sigma)$ — носитель сечения σ.

Теорема 1. *Пусть* $P = \bigcup P_x$, $x \in X$, — *пучок* S*-полумодулей над компактным пространством* X, M_S — *факторный подполумодуль полумодуля* $\Gamma(P)$ *и* (J_x) — *семейство идеалов полукольца* S, *индексированных точками пространства* X, *такие что выполняются следующие условия*:

1) $J_x + J_y = S$ *для любых различных* $x, y \in X$;

2) *для любого* $r \in J_x$ *найдётся такая открытая окрестность* U_x *точки* x, *что для любого* $y \in U_x$ *выполняется* $P_y r = 0(y)$.

Тогда $M_S = \Gamma(P)$.

Доказательство. Пусть σ — произвольное глобальное сечение пучка (P, X). В силу факторности полумодуля M для каждой точки $x \in X$ найдётся глобальное сечение $a_x \in M$, совпадающее в точке x с σ. Следовательно, $a_x = \sigma$ на некоторой открытой окрестности U_x точки x. Поскольку X компактно, то из семейства $\{U_x \colon x \in X\}$ выберем конечное подпокрытие $U_1, \dots, U_k$ пространства X и соответствующие сечения $a_1, \dots, a_k \in M$, при этом получим, что $\sigma = a_j$ на U_j. Обозначим $T = \{U_1, \dots, U_k\}$.

Зафиксируем произвольную точку $x \in X$ и множество $U_i \in T$, содержащее x. Для любой точки $y \in X \setminus U_i$ выполняется $J_x + J_y = S$ и, следовательно, $u_y + v_y = 1$ для подходящих $u_y \in J_x$, $v_y \in J_y$. Элемент v_y обнуляет слой P_t, где t лежит в некоторой окрестности V_y точки y. Семейство $\{V_y \colon y \in X \setminus U_i\}$ покрывает $X \setminus U_i$. Воспользовавшись компактностью X, выберем подпокрытие $V_1, \dots, V_s$ и соответствующие элементы $v_1, \dots, v_s, u_1, \dots, u_s \in S$. Имеем

$$1 = (u_1 + v_1) \cdots (u_s + v_s) = b_x + c_x,$$

где $c_x = v_1 \cdots v_s$, а b_x — сумма остальных элементов после раскрытия скобок. Таким образом, для каждой точки $x \in X$ нашлись открытая окрестность U_i и $b_x, c_x \in S$, такие что

$$b_x + c_x = 1, \quad \sigma(x) b_x = 0(x), \quad \sigma(y) c_x = 0(y)$$

для каждой точки $y \in X \setminus U_i$. Первые два соотношения очевидны, покажем справедливость третьего. Пусть $y \in X \setminus U_i$. Тогда y попадает в некоторую окрестность V_j, и слой P_y обнуляется элементом v_j. Если $j \neq 1$, то получаем

$$\sigma(y) c_x = (\sigma(y) v_1 \cdots v_{j-1}) v_j \cdots v_s = 0 v_{j+1} \cdots v_s = 0,$$

поскольку $\sigma(y) v_1 \cdots v_{j-1} \in P_y$. При $j = 1$ соотношение очевидно.

Из покрытия $\{z(\sigma b_x) \colon x \in X\}$ компактного пространства X выберем конечное подпокрытие $z(\sigma b_1), \dots, z(\sigma b_n)$, и пусть $c_1, \dots, c_n$ — соответствующие элементы для $b_1, \dots, b_n$. Поскольку $z(\sigma c_x) \supseteq X \setminus U_i$ для некоторого i, то каждый носитель $\operatorname{supp} \sigma c_i$ лежит в некотором множестве из T. Сделаем при необходимости перенумерацию множеств из T таким образом, чтобы $\operatorname{supp} \sigma c_j \subseteq U_j$, допуская при этом, что $U_i = U_j$ для некоторых $i \neq j$. Аналогичную процедуру проделаем и с элементами множества $\{a_j\}$ и в результате получим, что $\sigma = a_j$ на U_j для любого $j = 1, \dots, n$.

Положим

$$\begin{aligned} w_1 &= c_1, \\ w_2 &= b_1 c_2, \\ &\cdots \\ w_n &= b_1 \cdots b_{n-1} c_n. \end{aligned}$$

Индукцией покажем, что для любого j

$$w_1 + \ldots + w_j + b_1 \cdots b_j = 1.$$

Во-первых,

$$w_1 + b_1 = c_1 + b_1 = 1.$$

Во-вторых, если

$$w_1 + \ldots + w_{j-i} + b_1 \cdots b_{j-1} = 1,$$

то

$$w_1 + \ldots + w_j + b_1 \cdots b_j = w_1 + \ldots + w_{j-1} + b_1 \cdots b_{j-1} c_j + b_1 \cdots b_j =$$
$$= w_1 + \ldots + w_{j-1} + b_1 \cdots b_{j-1}(c_j + b_j) = w_1 + \ldots + w_{j-1} + b_1 \cdots b_{j-1} = 1.$$

В частности, получаем, что

$$w_1 + \ldots + w_n + b_1 \cdots b_n = 1.$$

Заметим, что для любой точки $x \in X$ и любого $m \in M$ найдётся такой индекс j, что $m(x)b_j = 0(x)$, поэтому $mb_1 \cdots b_n = 0$ на всём пространстве X.

Рассмотрим элемент $a = a_1 w_1 + \ldots + a_n w_n \in M$ и покажем, что $\sigma = a$. Пусть x — произвольный элемент из X и $\{U_j\}$, $j \in I$, — семейство всех открытых подмножеств из T, содержащих точку x. Соответствующие сечения a_j, $j \in I$, совпадают в точке x с сечением σ и, следовательно, между собой. Зафиксируем произвольно $i \in I$. Тогда $a_j(x)w_j = a_i(x)w_j$ для любых $j \in I$. Если $j \notin I$, то

$$a_j(x)w_j = a_j(x)b_1 \cdots b_{j-1}c_j = (a_j b_1 \cdots b_{j-1})(x)c_j =$$
$$= 0(x) = (a_i b_1 \cdots b_{j-1})(x)c_j = a_i(x)w_j.$$

Таким образом,

$$a(x) = a_1(x)w_1 + \ldots + a_n(x)w_n = a_i(x)w_1 + \ldots + a_i(x)w_n + a_i(x)b_1 \cdots b_n =$$
$$= a_i(x)(w_1 + \ldots + w_n + b_1 \cdots b_n) = a_i(x) = \sigma(x).$$

Теорема доказана. □

При рассмотрении полукольца как полумодуля над собой получаем результат, анонсированный в [4].

Теорема 1′. *Пусть (P, X) — пучок полуколец над компактным пространством X, S — факторное подполукольцо полукольца $\Gamma(P)$ и $0_x + 0_y = S$ для любых различных $x, y \in X$. Тогда $S = \Gamma(P)$.*

Через 0_x обозначен идеал $\{s \in S \colon s(x) = 0(x)\}$.

2. Полумодули над строго гармоническими полукольцами

Пусть A_S — полумодуль над полукольцом S. Для первичного идеала P полукольца S рассмотрим множество

$$z(P) = \{a \in A\colon (\exists\, c \in S \setminus P)(aSc = 0)\}$$

и отношение на полумодуле A

$$a\; \theta(P)\; b \iff \big(\exists\, u, v \in z(P)\big)(a + u = b + v).$$

Лемма 2. *Множество $z(P)$ является подполумодулем полумодуля A_S; отношение $\theta(P)$ — конгруэнция на полумодуле A_S, класс нуля которой совпадает с $z(P)$.*

Доказательство. Пусть $a, b \in z(P)$, тогда $aSc = bSt = 0$ для некоторых $c, t \in S \setminus P$. Для подходящего $s \in S$ получаем $r = cst \notin P$ в силу первичности P. Поскольку $aSr = bSr = 0$, то $(a + b)Sr = 0$. Для произвольного элемента $m \in S$ выполнено $amSc = 0$. Пусть $a\; \theta(P)\; b$ и $c\; \theta(P)\; d$, что означает, что $a + u_1 = b + v_1$ и $c + u_2 = d + v_2$ для некоторых $u_1, u_2, v_1, v_2 \in z(P)$. Сложив равенства, получим $a + c + u_1 + u_2 = b + d + v_1 + v_2$, откуда $a + c\; \theta(P)\; b + d$, поскольку $u_1 + u_2, v_1 + v_2 \in z(P)$. Для $m \in S$ имеем $am + u_1m = bm + v_1m$, $u_1m, v_1m \in z(P)$ и $am\; \theta(P)\; bm$. Таким образом, $\theta(P)$ является конгруэнцией на A_S.

Если $a\; \theta(P)\; 0$, то $a + u \in z(P)$ для некоторого $u \in z(P)$. Это равносильно условию, что существует такой элемент $s \in S \setminus P$, что $aSs = 0$, т. е. $a \in z(P)$. $\square$

Для произвольного полумодуля A_S множество

$$U(a, b) = \{P \in \operatorname{Spec} S\colon a\; \theta(P)\; b\}$$

открыто в $\operatorname{Spec} S$ для любых элементов $a, b \in A$. Действительно, если $Q \in U(a, b)$, то $a + u = b + v$ для некоторых $u, v \in z(P)$. Найдётся такой элемент $c \in S \setminus Q$, что $uSc = vSc = 0$. Но тогда для любого $P \in D(c)$ выполняется $u, v \in z(P)$ и, значит, $D(c) \subseteq U(a, b)$. Оказалось, что каждая точка из $U(a, b)$ имеет открытую окрестность, лежащую в $U(a, b)$. Семейство конгруэнций $\{\theta(P)\colon P \in \operatorname{Spec} S\}$ на полумодуле A_S является открытым (лемма A), поэтому индуцирует пучок полумодулей $(D, X) = \big(\bigcup A/\theta(P), \operatorname{Spec} S\big)$. Аналогичные рассуждения позволяют построить пучок над $\operatorname{Max} S$.

Пусть теперь X — подпространство $\operatorname{Spec} S$, содержащее $\operatorname{Max} S$. Рассмотрим *естественный* гомоморфизм φ полумодуля A_S в полумодуль $\Gamma(D)$ всех глобальных сечений пучка (D, X), при котором сечение $\varphi(a)$ принимает значение $[a]_x$ — класс элемента a в слое над точкой x. Если $\varphi(a) = \varphi(b)$ в каждой точке базисного пространства, то $a\; \theta(M)\; b$ для любого $M \in \operatorname{Max} S$. Найдутся такие $u_M, v_M \in z(M)$, что $a + u_M = b + v_M$. Для некоторого $c_M \in S \setminus M$ получаем $u_M S c_M = v_M S c_M = 0$, и тогда $a\; \theta(N)\; b$ для любого $N \in D(c_M)$. Из покрытия $\{D(c_M)\}$ пространства $\operatorname{Max} S$ выберем конечное подпокрытие $D(c_1), \ldots, D(c_k)$, причём можно считать, что $c_1 + \ldots + c_k = 1$. Поскольку $ac_i = bc_i$, то $a = a(c_1 + \ldots + c_k) = ac_1 + \ldots + ac_k = bc_1 + \ldots + bc_k = b$. Тем самым доказана лемма 3.

Лемма 3. *Естественный гомоморфизм $\varphi\colon A_S \to \Gamma(D)$ полумодуля A_S в полумодуль всех глобальных сечений пучка (D, X) для X, содержащего $\operatorname{Max} S$, инъективен.*

Определение. Полукольцо S называется *строго гармоническим*, если для любых различных максимальных идеалов M и N полукольца S найдутся элементы $a \in S \setminus M$, $b \in S \setminus N$, такие что $aSb = 0$.

Напомним, что

$$0_P = \{s \in S\colon (\exists\, t \in S \setminus P)(sSt = 0)\} \text{ —}$$

идеал для любого $P \in \operatorname{Spec} S$.

В дальнейшем нам потребуется следующая характеризация.

Лемма 4 ([3, предложение 2.1.1]). *Полукольцо S строго гармонично тогда и только тогда, когда $0_M + 0_N = S$ для любых различных максимальных идеалов M и N.*

Теорема 5. *Полумодуль A_S над строго гармоническим полукольцом S изоморфен полумодулю всех глобальных сечений пучка $(D, X) = \big(\bigcup A_S/\theta(M), \operatorname{Max} S\big)$.*

Доказательство. По лемме 3 можно считать, что A_S является подполумодулем $\Gamma(D)$. Предыдущая лемма гарантирует выполнимость условия 1) теоремы 1 для семейства идеалов $\{0_M\colon M \in \operatorname{Max} S\}$. Пусть $t \in 0_M$, тогда для подходящего $s \in S \setminus M$ выполняется $tSs = 0$. Для произвольной точки $N \in D(s)$ слой $A_S/\theta(N)$ обнуляется элементом t. Действительно, $(at)Ss = a(tSs) = a0 = 0$ и $at \in z(N)$, поскольку $s \notin N$. По лемме 2 $at(N) = 0(N)$, и выполнено условие 2) теоремы 1. Таким образом, $A_S \cong \Gamma(D)$. □

Для $P \in \operatorname{Spec} S$ и $a, b \in A_S$ положим

$$a \;\theta_P\; b \iff (\exists\, c \in S \setminus P)(\forall\, s \in S)(asc = bsc).$$

Стандартно доказывается, что введённое отношение является конгруэнцией на полумодуле A_S, а семейство конгруэнций $\{\theta_P\colon P \in \operatorname{Spec} S\}$ открыто. Получаем пучок полумодулей $(D', X) = \big(\bigcup A_S/\theta_P, \operatorname{Spec} S\big)$, а также его ограничение на $\operatorname{Max} S$. Класс нуля слоя этого пучка в точке P имеет вид $z(P)$, поэтому если A — группа, то пучки (D, X) и (D', X) совпадают, в частности, это верно для модуля над кольцом. Однако в общем случае конгруэнции $\theta(P)$ и θ_P различны. (Например, возьмём более чем двухэлементную цепь, рассматриваемую как полумодуль над собой, и $P = \{0\}$. Тогда $\theta(P)$ — отношение равенства, а θ_P «склеивает» все ненулевые элементы.)

Понятно, что конгруэнция θ_P не превосходит конгруэнцию $\theta(P)$, поэтому справедлив аналог леммы 3. Рассмотрим полумодуль A_S над строго гармоническим полукольцом S как подполумодуль полумодуля $\Gamma(D')$. Очевидно, выполняются условия 1) и 2) теоремы 1 для идеалов 0_M, $M \in \operatorname{Max} S$, и справедлива следующая теорема.

Теорема 5′. *Полумодуль A_S над строго гармоническим полукольцом S изоморфен полумодулю всех глобальных сечений пучка $\big(\bigcup A_S/\theta_M, \operatorname{Max} S\big)$.*

3. Полумодуль над редуцированным риккартовым полукольцом

Полукольцо S называется *редуцированным*, если $a^2 + b^2 = ab + ba$ влечёт $a = b$. Редуцированные полукольца являются *симметрическими* (с квазитождеством $abc = abd \iff acb = adb$), *полупервичными* (пересечение всех первичных идеалов равно нулю) и не содержат ненулевых нильпотентов [3, предложения 2.2.3 и 2.2.7].

Определение. Полукольцо S назовём *риккартовым*, если для любого $a \in S$ идеал $\operatorname{Ann} aS = \{u \in S \colon aSu = 0\}$ порождается дополняемым идемпотентом. Идемпотент e $(= e^2)$ называется *дополняемым*, если он перестановочен с любым элементом полукольца и обладает *дополнением* e', таким что $e + e' = 1$ и $ee' = 0$.

Легко показать, что дополнение к дополняемому идемпотенту e определяется однозначно и также является дополняемым идемпотентом. Множество BS всех дополняемых идемпотентов полукольца S с умножением как в S и со сложением

$$e \oplus f = ef' + e'f$$

становится булевым кольцом.

Пусть теперь S — редуцированное риккартово полукольцо. Такие полукольца допускают хорошие пучковые представления [5]. В [5] также показано, что *минимальный спектр* $\operatorname{Min} S$ (множество всех минимальных первичных идеалов редуцированного риккартова полукольца S, рассматриваемое как подпространство $\operatorname{Spec} S$) является нульмерным компактом. Каждый первичный идеал из S содержит единственный минимальный первичный идеал P, который, в свою очередь, обладает свойством $P = 0_P$. Отсюда вытекает, что для различных минимальных первичных идеалов P и Q выполняется

$$0_P + 0_Q = S.$$

На полумодуле A_S над редуцированным полукольцом S для каждого $M \in \operatorname{Min} S$ введём отношение

$$a \ \rho_M \ b \iff a + u = b + v,$$

где u, v принадлежат множеству $A0_M$ всевозможных конечных сумм вида as, $a \in A_S$, $s \in 0_M$.

Лемма 6. *Отношение ρ_M для любого $M \in \operatorname{Min} S$ является конгруэнцией, и семейство $\{\rho_M \colon M \in \operatorname{Min} S\}$ открыто.*

Доказательство. Первая часть утверждения очевидна. Если $a \ \rho_M \ b$, то $a + u = b + v$. Пусть $r_1, \ldots, r_k$ — элементы из 0_M, присутствующие в записях элементов u, v, и $s_1, \ldots, s_k \in S \setminus M$ такие, что $r_i S s_i = 0$. В силу первичности идеала M найдутся такие элементы $t_1, \ldots, t_{k-1} \in S$, что $s = s_1 t_1 \cdots t_{k-1} s_k$ не лежит в $M = 0_M$. Для любого $N \in D(s) \cap \operatorname{Min} S$ имеем $u, v \in 0_N$, и поэтому $a \ \rho_N \ b$. Таким образом, множество $U(a, b) = \{M \in \operatorname{Min} S \colon a \ \rho_M \ b\}$ открыто в $\operatorname{Min} S$. $\square$

Итак, мы получили пучок полумодулей, который обозначим через $(B, X) = \big(\bigcup A_S/\rho_M, \operatorname{Min} S\big)$.

Теорема 7. *Полумодуль A_S над редуцированным риккартовым полукольцом изоморфен полумодулю $\Gamma(B)$ глобальных сечений пучка $(B, \operatorname{Min} S)$.*

Доказательство. Покажем, что полумодуль A_S вкладывается в $\Gamma(B)$. Пусть $a\ \rho_M\ b$ для каждой точки $M \in \operatorname{Min} S$. Тогда $a + u = b + v$ для подходящих $u, v \in A0_M$. Для любого максимального идеала N, содержащего M, имеем $0_M = 0_N$ [5, предложение 4]. Как при доказательстве предыдущей леммы, выберем такой элемент $s_N \in S \backslash N$, что $ass_N = bss_N$ для всякого $s \in S$. Множества $D(s_N)$, $N \in \operatorname{Max} S$, покрывают $\operatorname{Max} S$, и в силу компактности максимального спектра существует конечное подпокрытие $D(s_1), \ldots, D(s_k)$, причём можно считать, что $s_1 + \ldots + s_k = 1$. Тогда $a = as_1 + \ldots + as_k = bs_1 + \ldots + bs_k = b$, и представление A_S в пучке $(B, \operatorname{Min} S)$ точное.

Рассмотрим семейство идеалов $\{0_M \colon M \in \operatorname{Min} S\}$. Для различных его представителей получаем $0_P + 0_Q = S$. Для элемента $a \in A_S/\rho_M$ и произвольного $t \in 0_M$ выполняется $at \in A0_M$, поэтому $at\ \rho_M\ 0$. Поскольку $tSc = 0$ для подходящего $c \in S \setminus M$, то $at\ \rho_N\ 0$ для любого $N \in D(c)$. Таким образом, выполнены оба условия теоремы 1, и $A_S \cong \Gamma(B)$. □

4. Полумодуль над произвольным полукольцом

Пусть A_S — полумодуль над произвольным полукольцом. Введём два типа конгруэнций на A_S, индексированных максимальными идеалами булева кольца BS дополняемых идемпотентов из S:

$$a \equiv_M b \iff (\exists\, e \in BS \setminus M)(ae = be),$$
$$a =_M b \iff (\exists\, u, v \in AMS)(a + u = b + v),$$

где AMS — полумодуль над S всевозможных конечных сумм элементов вида aes, $a \in A_S$, $e \in M$, $s \in S$.

Стандартно проверяется, что (C, X) и (C', X) — пучки полумодулей над S, где

$$C = \bigcup A_S/{\equiv_M}, \quad C' = \bigcup A_S/{=_M}, \quad X = \operatorname{Max} BS.$$

Теорема 8. *Полумодуль A_S над произвольным полукольцом S изоморфен полумодулю глобальных сечений $\Gamma(C)$ и $\Gamma(C')$ пучков $(C, \operatorname{Max} BS)$ и $(C', \operatorname{Max} BS)$ соответственно.*

Доказательство. Пусть $\alpha \colon A_S \to \Gamma(C)$ и $\alpha' \colon A_S \to \Gamma(C')$ — гомоморфизмы, при которых элементу $a \in A_S$ ставятся в соответствие в каждой точке $M \in \operatorname{Max} BS$ классы элемента a в слоях $A_S/{\equiv_M}$ и $A_S/{=_M}$ соответственно. Если $a =_M b$ и $a, b \in A_S$, $M \in \operatorname{Max} BS$, то $a + u_M = b + v_M$ для подходящих $u_M = a_1 g_1 s_1 + \ldots + a_k d_k s_k$ и $v_M = b_1 f_1 t_1 + \ldots + b_n f_n t_n$, $g_i, f_j \in M$. Для элемента $e_M = g_1' \cdots g_k' f_1' \cdots f_n'$ получаем $ae_M = be_M$ и $e_M \in BS \setminus M$.

Получили, что конгруэнция $=_M$ более слабая, чем $\equiv_M$. Покажем, что представление α точное, и следовательно, α' будет точным.

Пусть $a \equiv_M b$ для каждого $M \in \operatorname{Max} BS$. Легко увидеть, что $T = \{e \in BS\colon ae = be\}$ является идеалом кольца BS. Предположим, что T лежит в некотором максимальном идеале $N \in \operatorname{Max} BS$. Поскольку $a \equiv_N b$, то $af' = bf'$ для некоторого $f \in N$. По определению T имеем $f' \in N$. Получаем, что $f \oplus f' = 1 \in N$, противоречие, значит, $1 \in T$ и $a = b$.

Предположим, что $a =_M 0$. Тогда $a + u \in AMS$ для некоторого $u \in AMS$. Для подходящего $e' \notin M$ получаем $ae' \in AMS$. С другой стороны, $ae \in AMS$, откуда $a = ae + ae' \in AMS$. Получили, что класс нуля по конгруэнции $=_M$ совпадает с подполумодулем AMS. Поэтому для произвольных $a \in A_S$, $e \in M \in \operatorname{Max} BS$, $s \in S$ имеем $aes \in AMS$ и $aes =_M 0$. Отсюда $aes \equiv_M 0$. Легко получается, что любой элемент обнуляет A и на некоторой окрестности точки M. Для различных $M, N \in \operatorname{Max} S$ выполняется $MS + NS \supseteq (M \oplus N)S = S$. Таким образом, для семейства идеалов $\{MS\colon M \in \operatorname{Max} BS\}$ справедливы все условия теоремы 1 для пучков $(C, \operatorname{Max} BS)$ и $(C', \operatorname{Max} BS)$. $\square$

Автор выражает благодарность А. Э. Гутерману и А. А. Михалёву за полезные замечания.

Литература

[1] Бредон Г. Теория пучков. — М.: Наука, 1988.

[2] Вечтомов Е. М. Функциональные представления колец. — М.: Моск. пед. гос. ун-т, 1993.

[3] Чермных В. В. Полукольца. — Киров: Вятский гос. пед. ун-т, 1997.

[4] Чермных В. В. Теорема Стоуна-Вейерштрасса для пучков полуколец // Kurosh Algebraic Conference'98. Abstract of Talks. — М., 1998. — С. 222—223.

[5] Чермных В. В. Редуцированные риккартовы полукольца и их функциональные представления // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 2. — С. 205—215.

[6] Artamonova I. I., Chermnykh V. V., Mikhalev A. V., Varankina V. I., Vechtomov E. M. Semirings: Sheaves, continuous functions, multiplicative structure // Proc. of Conf. «Semigroups with Applications Including Semigroup Rings». — St. Petersburg, 1999. — P. 23—58.

[7] Davey B. A. Sheaf spaces and sheaves of universal algebras // Math. Z. — 1973. — Vol. 134, no. 4. — P. 275—290.